

KÖNYVEKRŐL

MÓCZÁR JÓZSEF: *Fejezetek a modern közgazdaságtudományból.*
Sztochasztikus és dinamikus nemegyensúlyi elméletek, természet-
tudományos közelítések. Akadémiai Kiadó, Bp. 608. o.

Móczár József a Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetem híres tervmatematika szakán végzett és azóta is az Egyetemen dolgozik. Számos külföldi egyetemen volt vendégprofesszor, többek között az Oszakai, a Groninzeni, a Leuveni, a Sienai és a Velencei La Foscara Egyetemeken. Az USC-n mint Fulbright professzor folytatott kutatásokat. Móczár József, ma a Budapesti Corvinus Egyetem professzora, közel 15 éves kutatási eredményeit foglalta össze könyvében. Kutatási részeredményeit ezt megelőzően rangos hazai és nemzetközi szakfolyóiratokban publikálta. Több mint 60 jelentősebb tudományos cikk, könyv, könyvfejezet és meghívott előadás szerzője.

A könyv a természet- és a közgazdaság-tudomány alapvető kérdéseiből indul ki, s a végén eljut a legújabb elméletekig és technikákig, ezeket ágyazza be az új és újszerű kutatási eredményeivel¹, mégpedig egy teljesen új megközelítésben. A könyv áttekintést ad a közgazdasági elméletek kialakulásáról, felhasználva a modern matematika terén elért eredményeket, majd a rendkívül szerteágazó kutatási területek közül a sztochasztikus és dinamikus nemegyensúlyi elméletekre koncentrálnak, felismerve azt a tényt, hogy a társadalom része a természetnek, így a természettudományos megközelítések eredményei a közgazdaságtanban is hasznosíthatók. E rendező elv a különböző közgazdasági iskolákból a legnagyobb részt a mainstream neoklasszikus iskolából metsz ki, jóllehet, hogy a keynesi és újkeynesi iskolák befolyását is vizsgálja. A közgazdaságtan modern statisztikai, számviteli, pénzügytechnikai stb. ismereteinek többsége is e legújabb eredmények következményei, amelyek megfogalmazása szintén a természettudományok sokszor bonyolult matematikai nyelvezetén történik: lényegében ezek biztosítják a gazdaság modern elméleteken alapuló működését. Elfogadva ezek meghatározó szerepét, a szerző itt az egyes paradigmákon alapuló tudományos kutatások határterületeinek elméleti eredményeibe, illetve az általa felvázolt fejlődési irányokba, új elméletekbe és modellezési technikákba kíván betekintést adni a természettudományok (science) köntösében, ami a közgazdaságtant modern közgazdaságtudománnyá tette és még inkább teszi.

A mai modern közgazdaság-tudomány legújabb szemléleti és közelítési technikái a dinamika, a sztochasztika és a nemegyensúlyi elméletek és modellek. A szerző széleskörű kutatásai alapján a Ramsey-Neumann-Haavelmo hármast tekinti a két világháború közötti időszak legkiemelkedőbb matematikai közgazdászainak, akiknek eredményei meghatározták a közgazdaságtudomány technikai és módszertani irányát. A „nagy elméleteket” pedig

¹Az irodalomjegyzékben 7 darab, rangos nemzetközi szaklapban megjelent tanulmányát hivatkozza meg a szerző. A teljes publikációs listája 60-nál több tételből áll.

Keynes és követői, továbbá Hicks, Schumpeter, Arrow, Samuelson és a monetaristák (élükön Friedman) eredményei alakították, amelyek szintén megtalálhatók a legújabb dinamikus és sztochasztikus nemegyensúlyi modellek alapjaiban. Mindezt Roy E. Weintraub ún. történeti-rekonstrukciós módszerével, matematikai nyelvezeten fejt ki, mégpedig Willard J. Gibbs szellemében, aki elsőként vallotta, hogy a „matematika egy nyelv”.

A szerző általános kutatási célkitűzései és eredményei a sztochasztikus és dinamikus nemegyensúlyi elméletek területén az alábbiakban foglalható össze.

A vizsgálataihoz felhasznált cikkeket és tanulmányokat, és az azokban talált eredeti gondolatokat, sok esetben más szerzők szöveghű kiemelésében és interpretációjában, megfelelő hivatkozásokkal építette be könyvébe, ami világos és érthető medret nyújtott saját eredményeinek kifejtésére, és egyúttal egy széles irodalmi áttekintést is adott a modern, a mainstream neoklasszikus közgazdaság-tudomány kialakulásáról és főbb modelljeiről. Vagyis hűen követi a Lakatos Imre által megfogalmazott híres tézist: „A tudományfilozófia a tudománytörténet nélkül üres, a tudománytörténet a tudományfilozófia nélkül vak.” E tézis első részének magyarázata, röviden úgy foglalható össze, hogy minden olyan tudományfilozófia, vagyis a közgazdászok terminológiájában metodológia, amely nem veszi figyelembe az általa vizsgált tudomány történetét, elvéti a saját tárgyát, hiszen nem ismeri meg annak valódi működését, természetét. Vagyis itt most sokkal mélyebb értelmet kap a közgazdaságtan tudománytörténete az idehaza szokásos elmélettörténeti megközelítésekénél, amelyek többnyire csak a problémák korhű társadalmi-gazdasági szempontjaira térnek ki, az adott terület modern eredményeibe történő beágyazás nélkül. Ez pontosabban azt jelenti, hogy egy-egy fejezetben egy bizonyos téma kifejtése első, múlt századbeli érdemleges elméleteiből kiindulva eljut napjaink, sőt a közeljövő várható legújabb eredményéig. A tézis második része azonban ennél jóval problematikusabb: azt állítja, hogy minden olyan történeti kutatás, amelyik nem egy filozófiai koncepció mentén halad, meddő és értelmetlen. Ezért a közgazdaságtan történetéhez Móczár József azzal a filozófiai koncepcióval fordult, s ezzel követi Lakatos Imre racionális rekonstrukcióját, hogy választ kapjon arra a kérdésre, hogy tudomány-e, sőt önálló tudomány-e a közgazdaságtan? A választ nála is pontosan a történeti rekonstrukció szolgáltatja. Vizsgálatainak középpontjába a természettudományos megközelítéseket helyezte, a természettudományok, a fizika, kémia és biológia azon redukcióit, amelyek a modern elméleti (részben matematikai) közgazdaságtan kialakulását és az alkalmazott közgazdaságtan, az ökonometria megszületését eredményezték. A szerző mindvégig azt hangsúlyozza könyvében, hogy a közgazdasági folyamatokban a természettudományok (science) kísérleti eredményei, megfelelő analógia alapján, felhasználhatók. Ami viszont a matematikai redukcionizmust illeti, ott eléggé kritikusan fogalmaz. Az ún. science matematikákból csak a kísérletek eredményeit leíró matematikát tartja alkalmasnak a közgazdaságtan formalizált összefüggéseinek leírására a megfelelő analógia fennállása esetén, ami a priori következik a természettudományos megközelítésből. A bourbaki matematika, amely a matematikai összefüg-

géseket alkalmazások nélküli struktúráként kezeli — amit részletesen is bemutat —, „pusztító hatása” következtében a közgazdaságtannak egy olyan ága fejlődött ki a közelmúltban, aminek semmilyen kapcsolata sincs a valós tényekkel, és csaknem elválaszthatatlanok a tiszta matematikától. Ez az, ami számos közgazdásznak, köztük Roy E. Weindraubnak is, félreértésre adtak okot, vagyis sokan a közgazdaság-tudomány matematikai tudományá válásáról beszélnek. Móczár József könyve mindvégig azt bizonyítja, hogy szó sincs erről, csak a science közelítéssel (redukcióval) az ott használt matematika nyelve egyre jobban áthatja, miközben formalizált összefüggéseinek leírására megteremt a saját matematikai nyelvezetét is.

Érdemes a matematikai módszerek és a számítástechnika fejlődésével kapcsolatban Krekó Béla egyetemi tanár 1966-ban írt véleményét idézni, amivel összhangban van Móczár József álláspontja: „Bármilyen messze is halad ezen az úton a fejlődés, a matematika valójában mindig csak eszköz marad a közgazdászok kezében. Éppen úgy, mint ahogy mind a mai napig csak eszköz maradt a fizikusok kezében. A matematika fejlettségének mai fokán — a legáltalánosabb relációk tudományának tekinthető, eltekintve e relációk konkrét tartalmától. Már ebből a megfogalmazásból is következik, hogy a matematika sohasem léphet a közgazdasági tudományok helyébe. Ezzel szemben igen komoly, sok esetben mással nem pótolható segítséget nyújthat a gazdasági döntések meghozatalánál.” A matematikai módszerek elsősorban a döntés-előkészítést segítik elő, többek között a prognózisok kidolgozásával, a „döntés azonban továbbra is közgazdasági [vezetési] funkció marad” állapítja meg ezzel kapcsolatban Krekó Béla.²

A szerző egyértelműen a science kísérleteit leíró matematikai redukcionizmust tekinti járható útnak a közgazdaságtudomány természettudományos megközelítésében, elsősorban azért, mert így kevesebb a veszélye annak, hogy a különböző mítoszok eltérítik a közgazdasági modellezést a valóságtól. Amíg a neoklasszikus iskola a klasszikus mechanika Newton által megfogalmazott törvényeinek matematikai összefüggéseit, a közönséges differenciálegyenleteket (ODE), illetve a parciális differenciálegyenleteket (PDE) tekinti az egyik legfőbb módszertani eszközének, addig a sztochasztikus differenciálegyenletek (SDE) és a sztochasztikus parciális differenciálegyenletek (PSDE) a kvantummechanika kísérleti eredményeit tükrözik és a sztochasztikus dinamikus közgazdasági modellek megfogalmazását tették lehetővé a sztochasztikus folyamatok elméletén keresztül. Emellett forradalmasította a pénzügyi matematikát és elvezetett a sztochasztikus dinamikus általános egyensúlyi (DSGE) modellekhez is.

A fizika, ezen belül kiemelten a newtoni mechanika több módszerét és fogalmát alkalmazta a XIX. század közepétől a közgazdaságtan: például egyensúly, statika, dinamikus és statikus egyensúly, periodicitás, harmonikus mozgás, ciklikusság stb. A konjunktúra-elemzés és prognosztizálás gyakran alkalmazott analógiája a harmonikus rezgőmozgás, mivel e törvény lényege a visszatérés, a megismétlődés, a periodicitás, tágabb értelemben a ritmikusság. Az áralakulást például úgy képzelték el, hogy a mozgó egyensúly tengely-

²Krekó Béla [1966]: *Lineáris programozás*. KJK. Budapest. 14. o.

vonala a trend, és a trend körül harmonikus, ciklikus módon ingadozik az ár. A ciklikus mozgást ugyanis az váltja ki, hogy a gazdasági tényezők alkalmazkodási képessége más és más, eltérő a reakciósebességük. Ha beindul egy folyamat, akkor ez a különböző tényezők egymásra hatásának eredőjeként egy, önmagát erősítő mechanizmussá válik. A fordulópontot, pedig az idézi elő, hogy minél távolabb kerül a gazdaság az egyensúlyi helyzethez képest, annál erősebb ellenerők is működni kezdenek, hatásuk egyre inkább érezhetővé válik, és arra kényszerítik a gazdaságot, hogy újra egyensúlyi helyzetbe kerüljön, illetve azon túllendüljön. E megközelítés tehát a Newton-féle „akció egyenlő reakció”, illetve „hatás egyenlő ellenhatás” elvből indul ki, vagyis azt feltételezi, hogy a gazdasági életben — éppen úgy, mint a fizika hullámjelenségeiben — az egyensúlyi helyzetből való kilengést az abba való visszatérés jelensége követi, majdnem mechanikus módon. A Newtoni fizika a mikro és makro világ számos jelenségét nem tudta megmagyarázni. E problémákra a választ a kvantummechanika és a relativitás elmélete adta meg. A kvantummechanika elméleti és szigorú, formális matematikai felépítése elsősorban Planck, Dirac és Neumann János nevéhez fűződik, az általános és speciális relativitás elméletét Einstein dolgozta ki. A fizika tudományának fejlődése a közgazdaságtanra is hatással volt.

Azt, hogy mit is értünk itt egészen pontosan az ún. science matematikán, például a „fizikai matematikán”, azt Ito integrál példáján, genezisének tudománytörténeti bemutatásával világítjuk meg. Közismert, hogy mind a sztochasztikus integrálás, mind a kockázatos vagyona-
 rak modellezése a Brown-mozgás formalizált megfogalmazásával kezdődtek. A legkorábbi kísérletek a Brown-mozgás matematikai modellezésére R. Jarrow és Ph. Protter³ szerint három forrásra vezethető vissza. Az első T. N. Thielé⁴ volt, aki az idősorok tanulmányozása során adott egy lehetséges modellt a Brown-mozgásra Koppenhágában; a második L. Bachelier⁵, aki a párizsi értéktőzsde vizsgálatában támaszkodott a Brown-mozgásra; és végül, a harmadik A. Einstein⁶, aki a folyadékban megfigyelt kis részecskék mozgásának modelljére tett javaslatot, lényegében azzal a céllal, hogy meggyőzzön más fizikusokat is az anyag molekuláris természetéről. Számunkra most igazából Paul Langevin francia fizikus, 1908-ban megjelent tanulmánya⁷ érdekes, amelyben a Brown-

³Robert Jarrow, Philip Protter [2004]: A short history of stochastic integration and mathematical finance: the early years, 1880–1970, Anirban DasGupta, ed., A Festschrift for Herman Rubin (Beachwood, Ohio, USA: Institute of Mathematical Statistics, 2004), 75–91. o.

⁴Thiele, T. N. [1880]: Sur la compensation de quelques erreurs quasisystématiques par la méthode des moindres carrés, Ritzel, Copenhagen.

⁵Bachelier, L. [1900]: Théorie de la Spéculation, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, 21-286. o.; Bachelier, L. [1900]: Théorie de la Spéculation, Gauthier-Villars, Paris.

⁶Einstein, A. [1905]: On the movement of small particles suspended in stationary liquid demanded by the molecular-kinetic theory of heat, Ann.d. Physik 17 (In Investigations of the theory of Brownian movement, ed. R. Fürth, Dover, New York, 1956); Lánzos Kornél [1978]: Einstein évtizede. 1905-1915. Gyorsuló idő. Magvető Kiadó. Budapest. Einstein és a Brown-féle mozgás. 110-118. o.

⁷Paul Langevin [1908]: Sur la théorie du mouvement brownien, C. R. Acad. Sci. (Paris)

mozgás leírása, saját szavaival élve, sokkal egyszerűbb volt, mint Einsteiné. Ugyanis, amíg Einstein, kiindulva a megfelelő hipotézisekből egy olyan parciális differenciálegyenletet (azaz, egy Fokker-Planck egyenletet) old meg, amely egy Brown-mozgást végző részecske valószínűségi sűrűségének időbeli evolúcióját szabályozza, addig Langevin egyszerűen csak Newton második törvényét alkalmazta a reprezentatív Brown mozgást végző részecskére. Ezzel Langevin „feltalálta” a sztochasztikus fizika $F = ma$ egyenletét, amit most Langevin egyenletnek neveznek. Ma már világos, hogy Langevin közelítésének nyilvánvaló egyszerűsége annak árán volt lehetséges, hogy az új matematikai objektumokba szokatlan tulajdonságokat erőltetett bele, amelyek mára már jól kidolgozottak és széles körben elfogadottak. Mind a Langevin egyenlet, mind a Fokker-Planck egyenlet folytonos fizikát, Markov (azaz, memória nélküli sztochasztikus) folyamatokat írnak le. Ugyanakkor Langevin elemzése valamivel általánosabb és pontosabb volt, mint Einsteiné. Ugyanis, Langevin bevezetett egy sztochasztikus erőt (az ő kifejezésével élve, egy komplementer erőt), amely tolja körbe a Brown-mozgást végző részecskét a sebességtérben, míg Einstein teljes egészében a konfigurációs térben dolgozott. Azaz, modern terminológiában fogalmazva, amíg Langevin a Brown-mozgást végző részecske sebességét egy Ornstein-Uhlenbeck folyamatként írta le, a helyzetét, pedig a sebességének időintegráljaként, addig Einstein a helyzetét egy sodródás (drift) nélküli Wiener folyamatként. Az előbbi magába foglalja az utóbbit, és egy speciális „coarse-graining limit”-be⁸ redukálja.

A Langevin-egyenlet a következőképpen írható fel:

$$dX_t/dt = -\alpha X_t + \sigma \xi_t$$

ahol X_t a Brown-mozgást végző részecske sebessége a t időpillanatban, továbbá $\alpha > 0$ és σ konstansok. Itt a $-\alpha X_t$ a környező közeg hatásának szisztematikus része, amelyet a dinamikus súrlódás hoz létre. Az α konstans a Stokes-féle törvényből $\alpha = 6\pi a\eta/m$ -nek adódik, ahol a jelöli a gömb alakú részecske sugarát, m a részecske tömegét, η pedig a környező folyadék viszkozitását. Ezzel szemben a $\sigma \xi_t$ második tag azt az erőhatást reprezentálja, amit a molekulák ütközése gyakorol a részecskére. Mivel normális körülmények között másodpercenként kb. 10^{21} molekulaütközést számolhatunk össze, ami a részecskét minden irányból egyenletesen éri, ezért a $\sigma \xi_t$ valóban egy gyorsan változó fluktuációt jelöl, amit „fehér zajként” idealizálhatunk. A „fehér zaj” nulla várható értékű, az egész valós tengelyen konstans spektrum sűrűségű, stacionárius Gauss-folyamattal azonosítjuk. A fehér zaj most is hasznos matematikai idealizálásnak bizonyul azoknak a véletlen hatásoknak leírására, amelyek gyorsan változnak és a különböző időpontokhoz tartozó értékei gyakorlatilag korrelálatlanok. Ha a ξ_t folyamatot úgy normáljuk, hogy kovarianciája delta-függvény legyen, akkor $\sigma^2 = 2\alpha kT/m$ összefüggést kapjuk (itt a k a Boltzmann-állandó, T pedig a környező folyadék abszolút hőmérséklete).

146, 530-533.o.

⁸Daniel T. Gillespie [1996]: Exact numerical simulation of the Ornstein-Uhlenbeck process and its integral, Phys.Rev. E.54, 2084-2091. o.

Megjegyzendő, hogy a Brown-mozgás Langevin egyenletében szereplő X_t valószínűségi változó eloszlásfüggvénye meghatározható, azonban valamennyi ilyen tulajdonságú X_t folyamat (Ornstein-Uhlenbeck folyamat) 1 valószínűséggel nem differenciálható realizációkkal rendelkezik, ezért nem értelmezhető közönséges differenciálegyenletként. Megmutatható, hogy a „fehér zaj” csak általánosított sztochasztikus folyamat, vagyis a

$$W_t = \int_0^t \xi_s ds$$

integrált Wiener-folyamatnak⁹ feleltethetjük meg, amiből parciális integrálással kapjuk, hogy

$$dW_t = \xi_t dt .$$

Ha most a formálisan közönséges differenciálegyenletekben ún. „fehér zaj” típusú véletlen ξ_t függvények lépnek fel, vagyis:

$$\dot{X}_t = f(t, X_t) + G(t, X_t)\xi_t, \quad X_{t_0} = c ,$$

ahol c véletlen kezdeti érték, akkor a fenti Wiener-folyamat figyelembevételével, kapjuk:

$$dX_t = f(t, X_t)dt + G(t, X_t)dW_t, \quad X_{t_0} = c .$$

Ez az egyenlet X_t folyamat szerinti (Ito-féle) sztochasztikus differenciálegyenlet, amelyet integrálegyenletként is felírhatunk:

$$X_t = c + \int_{t_0}^t f(s, X_s) ds + \int_{t_0}^t G(s, X_s) dW_s .$$

Az itt szereplő W_t folyamat realizációi 1 valószínűséggel folytonosak ugyan, de egyetlen intervallumban sem korlátos variációjúak, ezért a fenti integrálegyenletben a második integrál általában még sima G függvény esetén sem értelmezhető a W_t realizációi szerinti Riemann-Stieltjes integrálként, mivel ebben az esetben a közelítő összeg határértéke függ a közbülső pontok megválasztásától. Ito

$$Y_t = \int_{t_0}^t G(s) dW_s .$$

alakú integrálokat definiált a W_s Wiener-folyamat ún. jövőtől nem függő G funkcionáljainak egy széles osztályára, és ezzel megalapozta a sztochasztikus differenciál-egyenletek elméletét, ami kezdetben a pénzügyi matematikában játszott fontos szerepet, de ma már a reálfolyamatok sztochasztikus vizsgálatában is jelentős szerepet játszik, amint Móczár József is rámutat könyvében.

Külön is meg kell említenünk, hogy a könyv egyes fejezeteiben vizsgált legújabb elméletekben a szerző rangos, nemzetközi hírű tudósok, köztük

⁹A Wiener-folyamat egy olyan folytonos (de sehol sem differenciálható) realizációkkal bíró Gauss-folyamat, aminek várható értéke: $EW_t = 0$, és kovarianciája: $EW_t W_s = \min(t, s)$.

több Nobel-díjas hozzájárulása mellett elhelyezi az érintett legkiválóbb hazai közgazdász tudósokét is, mégpedig Bélyácz Ivánét, Bródy Andrásét, Erdős Tiborét, Kornai Jánosét, Mátyás Antalét, Szentés Tamásét, Theiss Edéét, Török Ádámét és Zalai Ernőét.

Móczár József tudományos eredményei közül néhány, külföldi, illetve hazai kutatókkal végzett közös kutatások eredménye. Így mindenképpen megemlítendő Jinkichi Tsukui professzor neve, akivel együtt az egyensúlyi és a nemegyensúlyi növekedési pályákat vizsgálta dekompozábilis gazdaságokban; Krisztin Tibor professzoré, akivel együtt a Harrod modell strukturális stabilitására adott bizonyítást; és Matolcsy Tamásé és Ván Péteré, akikkel konzultálva, kimutatta, hogy nem igazolható Neumann János azon sejtése, hogy a növekedési modellje termodinamikailag izomorf módon értelmezhető. Megemlítendő még Kiyoshi Kuga, Richard H. Day, Lionello Punzo és Roy E. Weintraub neve, akikkel folytatott eszmecserek visszatükröződnek a könyv Neumann modellekkel, nemlineáris dinamikával és a tudománytörténettel foglalkozó fejezeteiben.

A szerző új kutatási eredményei részletesebben:

(A) Neumann-Leontief modellekben

A Neumann modellek strukturális tulajdonságainak pontosítása. A strukturális tulajdonságok karakterisztikumaként *per se* a technológiát reprezentáló A input és B output, nemnegatív mátrixok pozitív elemeinek elrendeződésétől függ. Vagyis, hogy létezik-e olyan független termékhalmoz, amelybe tartozó termékek anélkül termelhetők, hogy a többiből felhasználják. Az ikertermelés miatt viszont lehetséges előállítani olyan termékeket is, amelyeket nem tekintünk függetleneknek. Amennyiben létezik független termékhalmoz, akkor a megfelelő KMT-technológiát reducibilisnek nevezzük. A fentiekből világos, de amit maga David Gale¹⁰ sem vett észre, hogy a független termékhalmoz kijelölése nem egyértelmű. Ez a felfedezés ad lehetőséget a Neumann modellek strukturális tulajdonságainak pontosítására, mind a Gale-féle technológiai, mind a Robinson-féle¹¹ gazdasági értelemben.

A Gale-féle reducibilitási definíció alapján az erős és a gyenge reducibilitási fogalmak bevezetése. A Gale-féle reducibilitási definíció az ikertermelés miatt megengedi azt, hogy a független termékhalmozba olyan termékek is beletartozzanak, amelyeket nem használunk fel előállításukhoz. Gale a legtágabb halmazát vette a független termékeknek és amellet vezetett be a reducibilitási definícióját. Viszont vehetjük a legszűkebb halmazát is a független termékeknek, és akkor lehetőség nyílik a gyenge reducibilitási fogalmak bevezetésére, szemben a Gale-féle erős reducibilitási fogalommal. A kettő közötti átjárás teszi lehetővé a csak erősen reducibilis, illetve a csak gyengén reducibilis fogalmak bevezetését. A Gale-féle technológiai reducibilitás eme új taxonómiája bevezethető a Robinson-féle gazdasági reducibilitásra is.

¹⁰Gale, D. [1960]: The Theory of Linear Economic Models, McGraw-Hill, New-York.

¹¹Robinson, S. [1973]: Irreducibility in the Von Neumann model, *Econometrica*, Vol. 41. 569-573. o.

A reducibilitás új taxonómiájának egybevetése Neumann, Weil, Morishima dekompozabilitási definícióival. Miért is lehet érdekes ez az új taxonómia, nem csak barokkosítása a meglévő fogalmaknak? A válasz roppant egyszerű: matematikailag talán barokkosítás, de ezzel közgazdasági értelemben pontosítható Gale¹² azon állítása, miszerint a Neumann modell irreducibilis struktúrája, akár technológiai, akár gazdasági értelemben, biztosítja a kamattényező és a növekedési tényező egyenlőségét és egyértelműségét, megfelelő kibocsátás- és árvektorok mellett, vagyis az ún. unicitást. A helyes állítás most úgy hangzik, hogy az unicitás fennáll a KMT struktúrájú Neumann modellekben, ha azok irreducibilisek, vagy csak gyengén reducibilisek, akár technológiai, akár gazdasági értelemben¹³. Ez az állításunk pontosan megegyezik a Neumann által adott eredeti feltevéssel, ami biztosította nála az unicitást. Vagyis, az $A + B > 0$ akkor és csak akkor áll fenn, ha a modell irreducibilis vagy csak gyengén reducibilis, mind technológiailag, mind gazdaságilag. Weil¹⁴ dekompozabilitás definíciója az erős, a gyenge és a csak erős reducibilitási fogalmainkkal egyezik meg. Hasonlóképpen, Morishima¹⁵ által adott dekompozabilitás fogalom a technológiailag csak erősen reducibilis struktúra fogalmával egyezik meg. A gazdaságilag csak erősen reducibilis struktúrát Iritani¹⁶ Morishima dekompozabilitás fogalmának kiterjesztése foglalja magába.¹⁷

A Neumann gazdaságok egyensúlyi állapotainak meghatározása;

- a Neumann modellek nem egyensúlyi állapotainak meghatározása a dualitáson keresztül¹⁸;
- egyensúlyi és nemegyensúlyi növekedési pályák, turnpike-elméletek;
- ciklikus és turnpike növekedés reducibilis Neumann modellekben: empirikus elemzések a japán gazdaság input-output táblázatai alapján,

A kutatás célja az (in)dekompozabilis arányos és ciklikus egyensúlyi iparági növekedési pályák tanulmányozása volt, mégpedig a zárt, dinamikus, és spe-

¹²Gale, D. [1960]: *The Theory of Linear Economic Models*, McGraw-Hill, New-York.

¹³Érdemes megjegyezni, hogy D. Gale több kisebb-nagyobb hibát is elkövetett vizsgálataiban. Az egyik legsúlyosabbra maga Gale adott javítást 1972-ben az *Econometrica* (40) számában „Comment” c. megjegyzésében. E cikk sajnálatos módon nem szerepel a hivatkozott irodalmak között, bár a szerző citálja.

¹⁴Weil, T. L. Jr. [1968]: *The decomposition of economic production systems*, *Econometrica*, Vol. 36. 260-278. o.

¹⁵Morishima, M. [1964]: *Equilibrium, Stability and Growth*, Oxford University Press, Oxford.

¹⁶Iritani, J. [1981]: *On Uniqueness of General Equilibrium*, *Review of Economic Studies*, 48. 167-171. o.

¹⁷Az eredmények publikációi: Móczár József [1980]: *A dekompozabilitás kiterjesztése a gazdaság lineáris modelljeiben*, 1980, *Sigma*, 23-45. o.; Móczár József [1991]: *Structural Properties of von Neumann Models*, *Pure Mathematics and Applications*, Ser. C. Vol. 2, 301-311. o.; Móczár József [1995]: *Reducible von Neumann Models and Uniqueness*, *Metroeconomica*, 46, 1-15. o.

¹⁸Az eredmények publikációi: Móczár József [1980]: *A Neumann-gazdaság egyensúlyi állapotainak meghatározása*, *Egyetemi Szemle*, 41-56. o.; Móczár József [1997]: *Non-Uniqueness through duality in the von Neumann growth models*, 1997, *Metroeconomica*, 48, 280-299. o.

ciális reducibilis technológiával rendelkező input-output rendszerekben. Itt Móczár József megmutatta, hogy bizonyos részgazdaságok (és iparágaik) arányos egyensúlyi növekedési pályákkal rendelkeznek, míg a többiek általában ciklikus fluktuációkkal. Azaz, az egyes részgazdaságok (és iparágaik) optimális növekedési pályái nem szükségszerűen közelítik meg a megfelelő arányos növekedési pályát a tervezési horizont legtöbb periódusában. Más szavakkal, a szokásos turnpike tulajdonság többé nem áll fenn. A Kornai János által erőteljesen kritizált egyöntetű iparági növekedési ütemmel szemben itt, a sokkal reálisabb, különböző ütemek generálására ad lehetséges módszereket. A kutatások érdekes eredményeket adnak a nyitott gazdaságokra is, amikor a külkereskedelmet is figyelembe vesszük.¹⁹

A fenti összes kutatási téma eredményeit foglalja össze Móczár József (1995) tanulmánya, ami egyúttal a szerző PhD tanulmánya is volt, amelyet „hakase ronbunként” az Oszakai Egyetemre nyújtott be 1993-ban, és amire megkapta a PhD tudományos fokozatot.²⁰

(B) Perron-Frobenius tételek a lineáris és a nemlineáris Neumann rendszerekben

E kutatás alapvető célkitűzése a sajátérték-tételek lineáris és nemlineáris Neumann rendszerekre történő kiterjesztése. A vizsgálódások keretében olyan többszektoros gazdasági modell szolgál, amelyben az egyes tevékenységek input-output kapcsolatait megfelelő tulajdonságú nemlineáris függvényekkel, a ráfordítási és a kibocsátási struktúráját pedig Jacobi-mátrixokkal írjuk le. Az idő kezelése szempontjából a modell diszkrét, illetve a stacionárius modellek családjába tartozik. A modell speciális eseteként értelmezhető mind az irodalomból jól ismert (nem)lineáris input-output modell, mind pedig az itt megfogalmazott nemlineáris Neumann modell.

A sajátértékek megfogalmazása előtt a szerző értelmezi a sajátérték, a sajátvektor, a spektrum és a spektrálrádiusz fogalmát, bevezeti az (ir)reducibilitás különféle válfajait a (nem)lineáris Neumann-rendszerekbe. A szigorú egyensúlyt biztosító lineáris Neumann modell a $Cx = \lambda Bx$, illetve $pC = \lambda pB$ általánosított sajátérték-feladattal definiálható, ahol C a fogyasztási és B a kibocsátási mátrixokat, az x a tevékenységek alkalmazási szintvektorát, a p a termékek egységárvektorát, valamint a λ az expanziós (növekedési illetve kamat-) tényező reciprokát jelöli. A fenti probléma Perron-Frobenius tulajdonságait —tudomásunk szerint— ez idáig csak O. L. Mangasarian²¹ vizs-

¹⁹Az eredmények publikációi: Móczár József [1991]: Irreducible Balanced and Unbalanced Growth Paths (Business Cycles and Structural Changes), *Structural Change and Economic Dynamics*, 2, 159-176. o.; Móczár József [1991]: Balanced and unbalanced growth paths in a decomposable economy: contributions to the theory of multiple turnpikes, *Economic Systems Research*, 3, 211-222. o. (co-author: Jinkichi Tsukui); Móczár József [1997]: Growth paths developed by international trade in Leontief-type dynamic models, *Japan and the World Economy*, 17-36. o.

²⁰Móczár József [1995]: Cyclical and Turnpike Growth: Capital Accumulation Choices in Some Reducible von Neumann Models, *Society and Economy*, 4. szám, 32-191. o.

²¹Mangasarian, O. L. [1971]: Perron-Frobenius Properties of $Ax - \lambda Bx$, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 36, 86-102. o.

gálta. Tételeit tisztán matematikai szempontból, tetszőleges előjelű, azonos típusú és megfelelő feltételeket kielégítő C és B mátrixok mellett fogalmazta meg. A technológiailag és/vagy gazdaságilag (ir)reducibilis lineáris Neumann-rendszerre megfogalmazott Frobenius-tétel bizonyításához Mangasarian tételeit használja fel. Megmutatja, hogy ezek a bizonyítások kiterjeszthetők a nemlineáris általánosított sajátérték-egyenletekre is.²²

(C) Közgazdasági dinamika

Nemlineáris dinamika, káosz. A makroökonómiai növekedést az eredendően is bonyolult mikromegalapozásával együtt vizsgálni meglehetősen nehéz feladat. Azokban a reprezentatív ügynökmodellekben, amelyek megkísérik ezt, elsősorban a mikrooptimalitás jelenik meg. Itt most nem optimalizálunk; csak a lehetséges, tetszőleges indulófeltételeket kielégítő egyensúlyi és nem-egyensúlyi pályák viselkedése érdekel bennünket. Így az endogén változók kezdeti értékeinek megadásával képet kaphatunk azok időbeli alakulásáról. Egy ún. konstruktív mikromegalapozást fejlesztett ki a szerző, ami azt jelenti, hogy az aggregált magánkiadások elemeit megfelelően, különböző piaci értékelésekkel szabályozzuk. E szabályozások eszközei: a fogyasztási adó, a részvénytőke értékelés (Tobin- q) és az árfolyam. Ezek mindegyike valamilyen módon a mikroökonómiában gyökerezik, és értékeik a megfelelő piaci folyamatokat és döntéseket tükrözik. Vizsgálatait a Harrod és Leontief klasszikus növekedésméletei alapján kalibrált modellekben végezte el, amelyek a nemlineáris dinamikát exogén sokkok nélkül generálták.²³

(D) Strukturális stabilitásvizsgálatok a keynesi típusú növekedési modellekben

Harrod-modell. A Harrod-modell egyenlete statikus egyensúlyi helyzetet definiál, amit most az adaptív várakozások segítségével megfogalmazott és a tökéletes előrelátás feltevésével egydimenziósra redukált dinamikus nemlineáris modell stacionárius állapotaként származtattunk. Megmutatható, hogy diszequilibriumi környezetéből vizsgálva a harrodi egyensúlyi helyzet lokálisan instabil, de a dinamikus nemlineáris Harrod-modell strukturálisan stabil.

A harrodi instabilitás vizsgálata nemlineáris közelítéssel legkorábban Nevile (1962) cikkében²⁴ szerepelt. Nevile világosan megmutatja, hogy az instabilitás két alapvető (multiplikátor és akcelerátor) premisszából, plusz a várakozásokra tett egyértelmű feltevésekből következik.

²²Az eredmények publikációja: Móczár József [2003]: Sajátérték-tételek a lineáris és a nemlineáris Neumann rendszerekben, 2003, Szigma, XXXIV. évf., 3-4. szám, 95-118. o.

²³Az eredmények publikációi: Móczár József [2004]: Új áramlatok a közgazdasági dinamikában, Ünnepi dolgozatok dr. Szigeti Endre 70. születésnapjára, Jász Nyomda és Kiadó Kft., Budapest, 164-200. o.; Móczár József [2008]: Nemlineáris dinamika klasszikus növekedési modellekben, Szigma, XXXIX. évf., 1-2. szám, 1-26. o.

²⁴Nevile, J. W. [1962]: The Mathematical Formulation of Harrod's Growth Model: Comment, The Economic Journal, Vol.72. No. 286, 367-370. o.

Az előbbi feltevés az akcelerátorra vonatkozik, amely lehet „rigid” vagy „flexible”, és az utóbbi verzió többletet vagy hiányt eredményez a létező tőkeállományban.

Nevile azonban csak olyan pályák elemzését bizonyította, amelyekben a növekedési ütemek monoton vagy növekvően, vagy csökkenően távolodnak a harrodi egyensúlytól. (Mint a szerző eredményeiből később kiderült, csak az instabil nyeregpályát (sokaságot) határozta meg.) Vagyis, elemzése nem volt teljes, a mai terminus technicus szerint adós maradt a modell teljes fázisdiagramjának elkészítésével és az összes lehetséges mozgási pálya vizsgálatával. Erre egyébként a 60-as évek közepén több szerző is reagált, többek között Ken-ichi Inada (1965)²⁵ és J. Encarnacion (1966)²⁶. Számunkra most Inada cikke az érdekesebb, mert a kérdéses másodrendű differenciaegyenlet kvalitatív megoldását nyújtó részleges fázisdiagramot is felvázolta, jóllehet, ő sem jutott el a teljes körű vizsgálatához. Nevile (1965)²⁷ ezt a hibát el is ismerte, de sem ők, sem mások, egészen a mai napig nem adtak megoldást a Harrod-modell teljes fázisdiagramjára, s ezzel a nemegyensúlyi helyzetekből kiinduló trajektóriák vizsgálatára. A szerző előállította a modell teljes fázisdiagramját, ami már teljes körű leírást ad a Harrod-modell dinamikájára, benne az instabil állapotra is. A Harrod-modell strukturális stabilitási tulajdonságaival, irodalmi ismereteink szerint, nemzetközi viszonylatban is, érdemben először a Móczár-Krisztin tanulmány foglalkozott. Mint ismeretes, a strukturális stabilitási tulajdonság megengedi, hogy az empirikus vizsgálatokban a paraméterek kissé torzítottak legyenek, és megengedjünk más természetű kisebb változtatásokat is a vektormezőben. Ez közgazdasági szempontból azért rendkívül jelentős, mert strukturális stabilitás mellett a tőkeefficiensek várható és tényleges időbeli alakulását leíró függvények piciny változtatása (a vektormező perturbációja) nem érinti az endogén változók kvalitatív tulajdonságait, vagyis trajektóriáik megőrzik topológiai ekvivalenciájukat, s ezzel előrejelzésekre alkalmasak. Vagyis ebben az esetben érvényét veszti a Lucas-, vagy még pontosabban az Engle-kritika kvalitatív vonatkozása. Az időparamétert átskálázza a perturbált modell, vagyis nem teljesül a topológiai konjugáció; a növekedési ütem bizonyos szintre történő emelkedése vagy csökkenése attól eltérő időt vehet igénybe, mint amennyi az eredeti modellben volt.

A strukturális stabilitás fogalmát a modern topológia eszközeivel Andronov és Pontrjagin (1937) definiálták²⁸. A fogalom magának a dinamikus rendszernek egy bizonyos tulajdonsága, ami a leglátványosabban úgy jelenik meg, hogy a strukturálisan stabil modell fázisdiagramjának kvalitatív tulajdonságai nem változnak, ha a modell feltételeit kissé perturbáljuk. Még ha a modell dinamikusan instabil egyensúlyi állapottal is rendelkezik, a struk-

²⁵Inada, K. (1965): The Mathematical Formulation of Harrod's Growth Model, *The Economic Journal*, Vol.75. No. 299, 620-624. o.

²⁶Encarnacion, J. (1966): On Instability in the Sense of Harrod: A Comment, *Economica*, New Series, Vol. 33. No. 131, 346. o.

²⁷Nevile, J. W. (1965): The Mathematical Formulation of Harrod's Growth Model: A Reply to Dr. Inada, *The Economic Journal*, Vol.75. No. 299, 624-625. o.

²⁸Andronov, A.– Pontryagin, S. (1937): Structurally Stable Systems, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, Vol. 14, 247-250. o.

turális stabilitása még mindig tekinthető elégséges feltételnek a tudományos jelenségek megfigyelhetőségére és előrejelezhetőségére, vagyis a mi esetünkben most a Harrod által adott keynesi stacionárius gazdasági növekedésre.²⁹

(E) Arrow-Debreu-modell és a Kornai-kritika

Itt az általános egyensúlyelmélet Arrow-Debreu modelljét vizsgálja a szerző, és Kornai *Antiequilibrium* (1971, KJK, Budapest) c. könyvében megjelent kritikákat veti össze Hahn (1973)³⁰ meglehetősen vitriolos ellenvetéseivel, mégpedig Kornai (2005)³¹ legújabb önéletrajzi kötetében megjelent visszatekintéssel aktualizálva. A vita értékelésében, az általános egyensúlyelmélet és az antiequilibrium különbözőségeit vizsgálta, ami lényegében nem kérdőjelezte meg egyik megközelítés relevanciáját sem, de a legújabb elméletek nem is mindenben igazolták Hahn ellenvetéseit. Mivel az Arrow-Debreu modell nem tekinthető az antiequilibrium modell nemegyensúlyi kiterjesztésének, és fordítva, az antiequilibrium modellnek nem egyensúlyi állapota az Arrow-Debreu modell, ezért a mai ismereteink alapján a kétféle megközelítés szintézise nem lehetséges.³²

(F) Növekedés termodinamikai értelmezése

Móczár József megmutatja könyvében, hogy az ún. Gibbs-féle formula csak akkor használható fel egy (öko)gazdasági modellben, ha a megfelelő közgazdasági fogalmak a termodinamikában definiált potenciálokkal és azokhoz kapcsolódó irreverzibilis folyamatok rátáival megfelelő módon értelmezett. Az ilyenféle megfeleltetés kérdését elsőként Neumann János vetette fel, miszerint a gazdasági modelljében a termodinamikában definiált potenciálokkal és azokhoz kapcsolódó irreverzibilis folyamatok rátáival izomorf módon értelmezhető lenne a növekedés. Móczár József szigorúan termodinamikai összefüggésekből kiindulva levezeti, és Samuelson³³ kontra Bródy³⁴ tanulmányok felhasználásával bizonyítja, hogy sejtése nem igazolható, viszont nem zárta ki annak lehetőségét, hogy általánosabb keretek között mégis bizonyítható.

A könyv igen alapos és széles körű irodalomfeldolgozást tartalmaz, de hiányoltam Heller Farkas: *A közgazdasági elmélet története*. Gergely R., Bp., 1943. c. alapvető munkájának feldolgozását, amit az Aula 2001-ben reprint kiadott.

²⁹Az eredmények publikálása: Móczár József [2006]: A Harrod modell strukturális stabilitása, *Sigma*, XXXVII. évf., 1-2. szám, 1-31. (társszerző: Krisztin Tibor)

³⁰Hahn, H. F. (1973): *The Winter of our Discontent*, *Economica* August, 322-330. o.

³¹Kornai János (2005): *A gondolat erejével — Rendhagyó önéletrajz*, Osiris Kiadó, Budapest.

³²Az eredmények publikációja: Móczár József [2006]: Arrow-Debreu modell és a Kornai kritika 30 év után, *Közgazdasági Szemle*, 2. szám, 171-199.

³³Samuelson, P. A. [1992]: *Economics and Thermodynamics: von Neumann's Problematic Conjecture*, in *Rational Interaction*, ed. By R. Selten, Springer-Verlag, Berlin.

³⁴Bródy András [1989]: *Economics and Thermodynamics*, in *John von Neumann and Modern Economics*, ed. By M. Dore, S. Chakravarty and R. M. Goodwin, Clarendon Press, Oxford.

A könyv ajánlható mindazoknak, akik érdeklődnek a közgazdaságtudomány átfogó kérdései, ezen belül a sztochasztikus és dinamikus nemegyensúlyi elméletek iránt. A könyv nyilvánvalóan tankönyv, ahogy ezt a szerző az utószóban is hangsúlyozza, de ugyanakkor monográfia is, így felhasználási területe ennél szélesebb körű. A közgazdaságtan számos szakterülete, így a marketing, a statisztika, az ökonometria, a prognosztika, a számvitel és pénzügy ismereteinek többsége a könyvben vizsgált legújabb elméleti eredményekre építkezik.

Sipos Béla (PTE KTK)

CONTENTS

MÓCZÁR, JÓZSEF: Nonlinear Dynamics in Classical Economic Growth Models . . .	1
ÁGOSTON, KOLOS CSABA: Choice Amongst Hungarian Pension Funds' Annuities	27
BARANCSUK, JÁNOS: A Contribution to the Clarification of „Price Taker” and „Price Maker” Terms (II)	49
PINTÉR, JÓZSEF – REKETTYE, GÁBOR: Quantitative Methods and Models in Measuring Customer Satisfaction with the Electricity Supply	73
KOSZTYÁN, ZSOLT TIBOR – FEJES, JÁNOS – KISS, JUDIT: Handling Stochastic Network Structures in Project Scheduling	87
BOOK REVIEWS	
MÓCZÁR, JÓZSEF: Fejezetek a modern közgazdaságtudományból (Sipos, Béla) . . .	107

TARTALOM

MÓCZÁR JÓZSEF: Nemlineáris dinamika klasszikus növekedési modellekben	1
ÁGOSTON KOLOS CSABA: Magánnyugdíj-járadékok közötti választás	27
BARANCSUK JÁNOS: Adalékok az „árelfogadó” és „ármeghatározó” fogalmak értelmezéséhez (II)	49
PINTÉR JÓZSEF – REKETTYE GÁBOR: A villamosenergia-szolgáltatással való elégedettség mérésekor alkalmazható kvantitatív módszerek és modellek	73
KOSZTYÁN ZSOLT TIBOR – FEJES JÁNOS – KISS JUDIT: Sztochasztikus hálóstruktúrák kezelése projektütemezési feladatokban	87

KÖNYVEKRŐL

MÓCZÁR JÓZSEF: Fejezetek a modern közgazdaságtudományból (Sipos Béla)	107
---	-----

SZIGMA

Matematikai-közgazdasági folyóirat

A Gazdaságmodellezési Társaság lapja

Főszerkesztő:

VÖRÖS JÓZSEF

PTE Közgazdaságtudományi Kar, H-7622 Pécs, Rákóczi út 80.

Tel.: 72/501-599, Fax: 72/501-553

e-mail: voros@ktk.pte.hu

Társzerkesztők:

FÜLÖP JÁNOS

MTA SZTAKI

e-mail: fulop@oplab.sztaki.hu

HUNYADI LÁSZLÓ

e-mail: laszlo.hunyadi@office.ksh.hu

TEMESI JÓZSEF

Budapesti Corvinus Egyetem,

e-mail: jozsef.temesi@uni-corvinus.hu

VÍZVÁRI BÉLA

Eötvös Loránd Tudományegyetem,

e-mail: vizvari@cs.elte.hu

Szerkesztőbizottság:

AUGUSZTINOVICS MÁRIA, DELI ZSUZSA, FORGÓ FERENC,
GETHER ISTVÁNNÉ, KOMLÓSI SÁNDOR, KOVÁCS ERZSÉBET,
LIGETI CSÁK, MESZÉNA GYÖRGY

Terjeszti a Gazdaságmodellezési Társaság. A kiadvány megjelenését az MTA
Könyv- és Folyóiratkiadó Bizottsága támogatta.

ISSN 0039-8128

www.sigma.ktk.pte.hu