AZ ESZKÖZÁRAZÁS MÁSODIK ALAPTÉTELE[1]

MEDVEGYEV PÉTER
Corvinus Egyetem

A dolgozatban röviden bemutatjuk az eszközárazás második alaptételét. A bizonyítás során felhasználjuk a Dalang–Morton–Wilinger tétel bizonyításában használt állításokat.

A dolgozat a korábban megjelent[2], a Dalang–Morton–Willinger tétellel foglalkozó dolgozat szerves folytatása, kiegészítése. A jelen dolgozat az eszközárazás második alaptételét és az úgynevezett árazási formulát tárgyalja. A dolgozatban szereplő állítások és igazolásaik szorosan összefüggnek a Dalang–Morton–Willinger tétellel, amelyet szokás az eszközárazás első alaptételének nevezni. A két alaptétel mögötti közös modellben $t = 0, 1, \ldots, T < \infty$ számú diszkrét időperiódus és minden időperiódusban m számú eszköz áll rendelkezésre. Egy tetszőleges t időszakban az eszközök árat az $S(t)$ m-dimenziós vektor tartalmazza. Az $S(t)$ minden t-re valószínűségi változó. A modellben szereplő bizonytalanságot leíró (- ,$\mathcal{A}, \mathbf{P}$) valószínűségi mezőre semmilyen megkötést nem teszünk. Befektetési stratégián egy

$$(\theta(t))_{t=1}^{T}$$

valószínűségi változókból álló m-dimenziós T hosszú vektorsorozatot értünk. A modell további külső adottsága egy $(\mathcal{F}_t)_{t=0}^{T}$ filtráció. Az S folyamatról feltesszük, hogy adaptált, vagyis minden t időpontban az $S(t)$ mérhető az $\mathcal{F}_t$ σ-algebrára nézve. A θ előrejelezhetőek, vagyis hogy minden t időpontban a $\theta(t)$ mérhető az $\mathcal{F}_{t-1}$ σ-algebrára nézve. A két folyamat időben eltérő időpontokban kerül „meghatározásra”, és éppen ez az időben való eltérés reprezentálja a modell közgazdasági tartalmát: A $t-1$ időpontban eldöntésre kerül a $[t-1, t)$ időszakra érvényes portfolió. A döntés időpontjában az eszközök ára csak a $t-1$ időpontig ismert. Az eszközök S árai a $(t-1, t)$ időperiódusban megváltozhatnak. A $t-1$ időpontban hozott döntésünk következménye, hogy a t időpontban a portfoliónk értékében[3]

$$\langle S(t) - S(t-1), \theta(t) \rangle$$

értékváltozás fog bekövetkezni. A teljes időperiódus alatt a θ befektetési

---

[1] Beérkezett: 2006. október 30. E-mail: `medvegyev@math.bke.hu`.

[2] V.ö.: [10]. A dolgozat a Corvinus Egyetemen tartott pénzügyi matematikai előadásaim anyagára támaszkodik. Lásd: www.medvegyev.uni-corvinus.hu/finance

[3] $\langle a, b \rangle$ jelöli az a és b vektorok skaláris szorzatát.

stratégia által eredményezett értékváltozás éppen[4]

$$\sum_{t=1}^{T} \langle S(t) - S(t-1), \theta(t) \rangle \ .$$

Az eszközárazás első és második alaptétele a lehetséges értékváltozások terének matematikai alaptulajdonságait tisztázza.

1 Az eszközárazás első alaptétele

Az első és második alaptétel bizonyításához három egymásra épülő lemmára van szükség[5]. Ezek mindegyike értelemszerűen bemutatásra került a Dalang–Morton–Willinger tétel igazolása során, de a teljesség kedvéért felidézzük őket. A diszkrét idejű, de tetszőleges véletlen állapottérrel rendelkező pénzügyi modellek matematikai tárgyalásának kulcsa a következő kompaktsági lemma:

1.1 Lemma (Kabanov–Stricker). *Legyen (η_n) tetszőleges, $\mathbb{R}^m$ értékű, mérhető függvények sorozata, és tegyük fel, hogy a sorozat minden kimenetelre korlátos. Ekkor megadható olyan (σ_k) egész értékű, szigorúan monoton növő, mérhető függvényekből álló sorozat, amelyre az (η_{σ_k}) sorozat minden kimenetelre konvergens. Másrészről, ha $\sup_n \|\eta_n\| = \infty$, akkor van olyan (σ_k) egész értékű, szigorúan monoton növő, mérhető függvényekből álló sorozat, amelyre $\lim_{k\to\infty} \|\eta_{\sigma_k}\| = \infty$ minden kimenetelre.*

A kompaktsági lemma a Bolzano–Weierstrass tétel kézenfekvő általánosítása. Mivel az $(\eta_n(\omega))$ sorozat minden ω kimenetelre a lemma feltétele miatt korlátos, ezért minden ω kimenetelre triviális módon található olyan, az ω kimeneteltől függő $(\sigma_k(\omega))$ részindex sorozat, amelyre az $\left(\eta_{\sigma_k(\omega)}(\omega)\right)_k$ sorozat konvergens. A lemma lényege, hogy a $\sigma_k(\omega)$ függvények választhatók mérhetőnek.

A következő lemma az előző következménye és az egy időszak alatt keletkező portfolióváltozások alterének zártságát állítja[6].

1.2 Lemma (Stricker). *Legyenek $f_1, f_2, \ldots, f_m$ tetszőleges, valamely $\mathcal{A}$ σ-algebra szerint mérhető függvények. Tegyük fel, hogy $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{A}$ és tekintsük*

---

[4] Érdemes hangsúlyozni, hogy pénzügyi szempontból az összeg tulajdonképpen értelmetlen, ugyanis nem azonos időszakhoz tartozó értékadatokat adunk össze. Mivel a diszkontálás kérdését nem vizsgáljuk az alábbi állítások mindegyikében az eszközök S ára és nem az $\overline{S}$ diszkontált árfolyamok szerepelnek. Ha diszkontált összegeket akarunk vizsgálni és szeretnénk használni az alábbi „sztochasztikus integrál” formulát, akkor be kell vezetni az önfinanszírozó portfólió fogalmát és meg kell mutatni, hogy minden önfinanszírozó portfólió értékfüggvénye felírható „sztochasztikus integrálként”.

[5] A dolgozat célja annak hangsúlyozása, hogy a kompaktsági lemma, illetve az L tér ebből következő zártsága nem csak az első, hanem a második alaptétel igazolásában is kulcsszereppel bír.

[6] Emlékeztetünk, hogy $L^0(\text{-}\ ,\mathcal{G})$ téren a $\mathcal{G}$-mérhető valószínűségi változók terét értjük, konvergencián pedig a sztochasztikus konvergenciát értjük.

az

$$L \overset{\circ}{=} \left\{ h : h = \sum_{i=1}^{m} f_i \varphi_i, \varphi_i \in L^0(\mathcal{G}, \mathbf{P}) \right\}$$

lineáris teret[7]*. Az L lineáris tér zárt az $L^0(\mathcal{A}, \mathbf{P})$ térben.*

A lemma kiterjeszthető tetszőleges véges időhorizontra. Ennek igazolásához felhasználtuk a nincs arbitrázs feltételt:

1.3 Definíció. *Legyen*

$$R \overset{\circ}{=} \left\{ H : H = \sum_{t=1}^{T} \langle S(t) - S(t-1), \theta(t) \rangle \right\},$$

ahol $(\theta(t))_{t=1}^{T}$ tetszőleges előrejelezhető stratégia. Legyen

$$A \overset{\circ}{=} R - L_+^0 (\text{-}\ , \mathcal{A}, \mathbf{P}) \ .$$

Azt mondjuk, hogy a modellben nincsen arbitrázs, ha

$$A \cap L_+^0 (\text{-}\ , \mathcal{A}, \mathbf{P}) = \{0\} .$$

A nincsen arbitrázs feltétel következménye a következő:

1.4 Lemma (Kabanov–Stricker). *Ha nincsen arbitrázs*[8]*, akkor a T-hosszú előrejelezhető befektetési stratégiák eredményeként előálló lehetséges portfolió értékváltozások*

$$\begin{aligned} R &\overset{\circ}{=} \left\{ H : H = \sum_{t=1}^{T} \langle S(t) - S(t-1), \theta(t) \rangle \right\} \overset{\circ}{=} \\ &\overset{\circ}{=} \left\{ H : H = \sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{m} \left(S_i(t) - S_i(t-1) \right) \theta_i(t) \right\} \end{aligned}$$

altere zárt az $L^0 (\text{-}\ , \mathcal{A}, \mathbf{P})$ térben.

Az előző dolgozat legfontosabb eredménye a következő tétel volt:

1.5 Tétel (Dalang–Morton–Willinger). *A következő állítások ekvivalensek:*

1. $A \cap L_+^0 = \{0\}$.
2. $A \cap L_+^0 = \{0\}$ *és* $A = \mathrm{cl}\,(A)$.
3. $\mathrm{cl}\,(A) \cap L_+^0 = \{0\}$.
4. *Megadható olyan $\mathbf{Q}$ valószínűség, amely ekvivalens az eredeti $\mathbf{P}$ valószínűségi mértékkel, amelyre a $\mathrm{d}\mathbf{Q}/\mathrm{d}\mathbf{P}$ Radon–Nikodym derivált korlátos, és amely mellett az S m-dimenziós martingál.*

---

[7] Nyilvánvalóan az L elemei $\mathcal{A}$-mérhetőek, de a φ_i súlyok $\mathcal{G}$-mérhetőek.

[8] Valójában az R zártságához nem szükséges a nincs arbitrázs feltétel. V.ö.: [2].

Érdemes hangsúlyozni, hogy a tételben szereplő első állítás azt jelenti, hogy nincsen olyan $(\theta(t))_{t=1}^{T}$ előrejelezhető stratégia, amelyre

$$\sum_{t=1}^{T} \langle S(t) - S(t-1), \theta(t) \rangle \geq 0 ,$$

és egy pozitív mértékű halmazon az egyenlőtlenség szigorú. Másképpen fogalmazva, az első pont szerint nincsen arbitrázs.

2 A piac teljessége, az eszközárazás második alaptétele

A származtatott termékek árazásával kapcsolatos igen fontos fogalom a teljesség fogalma. A teljesség fogalma azt jelenti, hogy a jövőbeli követelések kivétel nélkül fedezhetőek:

2.1 Definíció. *Azt mondjuk, hogy az S eszközár folyamat által definiált piac a $t = 0, 1, 2, \ldots, T$ időhorizonton teljes, ha tetszőleges H_T $\mathcal{F}_T$-mérhető valószínűségi változóhoz található olyan*

$$(\theta_i(t))_{i=1}^{m}, \quad t = 1, \ldots, T$$

előrejelezhető stratégia és λ valós szám, hogy

$$H_T = \lambda + \sum_{t=1}^{T} \langle S(t) - S(t-1), \theta(t) \rangle$$

ahol az egyenlőség valószínűségi változók között érvényes, vagyis majdnem minden kimenetelre teljesül.

Ezt követően térjünk rá az eszközárazás második alaptételére:

2.2 Tétel (Az eszközárazás második alaptétele). *Tegyük fel, hogy az*

$$(S_i(t))_{i=1}^{m}, \quad t = 0, \ldots, T$$

eszközár folyamat által definiált piacon nincsen arbitrázs. A modell pontosan akkor teljes, ha a martingálmérték[9] *az $(\text{-}\ , \mathcal{F}_T)$ téren egyértelmű.*

Bizonyítás. Az állítás bizonyítása két részből áll.

1. Tegyük fel, hogy a piac teljes és legyenek $\mathbf{Q}$ és $\mathbf{R}$ két különböző martingálmérték. Mivel a két mérték különböző, ezért van olyan $F \in \mathcal{F}_T$, hogy $\mathbf{Q}(F) \neq \mathbf{R}(F)$. A feltételezett teljesség miatt van olyan $(\varphi(t))_{t=1}^{T}$ m-dimenziós előrejelezhető stratégia, hogy

$$\chi_F = \lambda + \sum_{t=1}^{T} \langle S(t) - S(t-1), \varphi(t) \rangle . \tag{1}$$

[9] Emlékeztetünk, hogy martingálmérték alatt egy olyan az $(\text{-}\ , \mathcal{F}_t)$ téren értelmezett $\mathbf{Q}$ valószínűségi mértéket értünk, amelyre nézve az S eszközár folyamat martingál.

A bizonyítás alapgondolata, hogy mind a két oldalon alkalmazzuk a **Q** és **R** mértékek szerinti várható érték operátorokat. A gondolatmenet kulcsa, hogy tetszőleges **P** martingálmérték esetén

$$\mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left(\sum_{t=1}^{T}\langle S(t)-S(t-1),\varphi(t)\rangle\right)=0\ , \tag{2}$$

amiből

$$\mathbf{Q}(F)=\lambda=\mathbf{R}(F)\ ,$$

ami lehetetlen. A (2) sor igazolásában gondot jelent, hogy mivel a φ stratégiák nem feltétlenül korlátosak, ezért sem a kiemelési szabályt, sem az integrál additivitását nem tudjuk közvetlenül használni. A fő probléma abból ered, hogy az (1) sorban szereplő összeg nem feltétlenül martingál, csak lokális martingál. Diszkrét és véges időhorizonton a lokális martingálok struktúrája azonban viszonylag egyszerű: Miként a következő pontban meg fogjuk mutatni[10], diszkrét és véges időhorizont esetén ha valamely lokális martingál utolsó értéke integrálható, akkor a folyamat martingál. Mivel a χ_F változó triviálisan integrálható, ezért a (2) sorban szereplő kifejezés martingál, így a sorban szereplő egyenlőség teljesül.

2. Tegyük fel, hogy a piac nem teljes. A feltétel szerint a piacon nincsen arbitrázs, így van olyan **Q** mérték, amely mellett az S folyamat minden koordinátája martingál. Definíció szerint legyen

$$L\triangleq\left\{\lambda+\sum_{t=1}^{T}\langle S(t)-S(t-1),\varphi(t)\rangle\right\}\ ,$$

ahol θ tetszőleges előrejelezhető portfólió és λ tetszőleges valós szám. Mivel a piac nem teljes, ezért $L\neq L^{0}\left(\text{-}\ ,\mathcal{F}_T,\mathbf{Q}\right)$. Legyen H_T egy olyan követelés, amely nem állítható elő. Mivel csak véges sok valószínűség változó szerepel a modellben a valószínűségi mérték mindig kicserélhető úgy, hogy a modellben szereplő összes változó integrálható legyen. Ehhez elegendő a **P** helyett a

$$\mathbf{P}'(A)\triangleq C\int_A\exp\left(-\left\|\eta\right\|\right)\,d\mathbf{P}$$

mértéket venni, ahol az η az S folyamatot alkotó változókból és a H_T változóból álló vektor[11]. Vegyük észre, hogy a **P** és a **P**$'$ ekvivalensek[12], így a tétel feltételei nem módosulnak, ha a **P** helyett a **P**$'$ valószínűségi mértéket vesszük. Emlékeztetünk, hogy az első alaptételben az arbitrázs hiánya miatt létező martingálmérték Radon–Nikodym deriváltja választható korlátosnak. Így feltehető, hogy nem csak az $(S(t))_{t=1}^{T}$ oszlopai, hanem a H_T is integrálható a **Q** martingálmérték alatt.

[10] V.ö.: 3.6 Állítás.

[11] A C konstanst úgy kell meghatározni, hogy a **P**$'$ szintén valószínűségi mérték legyen.

[12] Vagyis a két mérték szerint a nullmértékű halmazok megegyeznek.

Megmutatjuk, hogy az L zárt az $L^1(- ,\mathcal{F}_T,\mathbf{Q})$ térben. Emlékeztetünk, hogy az

$$R \triangleq \left\{ \sum_{t=1}^{T} \langle S(t) - S(t-1), \theta(t) \rangle \right\}$$

az L^0 egy zárt altere. A Markov-egyenlőtlenség miatt az L^1-ben való konvergenciából következik a sztochasztikus konvergencia, így az $R \cap L^1$ zárt altér az L^1-ben. Valószínűségi mértékekről lévén szó $1 \in L^1$, így ha az egyszerűség kedvéért továbbra is L jelöli az L és az L^1 metszetét, akkor az L felírható mint egy zárt R altér és egy egy-dimenziós altér összege. Ha $1 \in R$, akkor készen vagyunk, az L zárt. Ha $1 \notin R$, akkor minden $l \in L$ felírható $l = \lambda 1 + r$ alakban. Ha $l_n \to l_\infty$ az L altérben, akkor egyedül az okozza a problémát, hogy nem tudjuk, hogy az (l_n)-hez tartozó (λ_n) sorozat korlátos, vagy sem. Legyen d az R és az 1 távolsága. Mivel az R zárt és $1 \notin R$, ezért $d > 0$. Az (l_n) sorozat konvergens, így korlátos is. Legyen c az (l_n) sorozat korlátja. Mivel az R altér, ezért ha $r_n \in R$, akkor

$$\left(-\frac{r_n}{\lambda_n} \right) \in R \, ,$$

így

$$c \geq |\lambda_n 1 + r_n| = |\lambda_n| \left| 1 + \frac{r_n}{\lambda_n} \right| = |\lambda_n| \left| 1 - \left(-\frac{r_n}{\lambda_n} \right) \right| \geq |\lambda_n| \, d \, ,$$

amiből felhasználva, hogy $d > 0$,

$$\frac{c}{d} \geq |\lambda_n| \ ,$$

vagyis a (λ_n) sorozat korlátos. Ezért a (λ_n) számsorozatnak van konvergens részsorozata. Erre áttérve feltehető, hogy a $(\lambda_n 1)$ sorozat konvergens. Mivel az összeg konvergens, ezért az (r_n) sorozat is konvergens. Mivel az R zárt, ezért az (r_n) határértéke az R-ben van, és így a $(\lambda_n 1 + r_n)$ egy részsorozatának határértéke az L-ben van. Következésképpen a $(\lambda_n 1 + r_n)$ határértéke is L-ben van.

Mivel a $H_T \notin L$ is integrálható, ezért van olyan eleme az L^1 térnek, amely nincsen benne az L zárt altérben. A Hahn–Banach tétel miatt van olyan $z \in L^\infty(- ,\mathcal{F}_T,\mathbf{Q})$, amely elválasztja az L alteret és a H_T változót. Mivel az L altér, ezért az elválasztó síkot megadó $z \in L^\infty$ függvényre

$$\langle z, l \rangle \triangleq \int_{-} zl \, d\mathbf{Q} = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(zl) = 0, \quad l \in L \, . \tag{3}$$

Mivel a $\varphi(t) = 0$ és $\lambda = 1$ egy lehetséges előrejelezhető stratégia, ezért

$$\langle z, 1 \rangle \triangleq \int_{-} z1 \, d\mathbf{Q} = \int_{-} z \, d\mathbf{Q} = 0 \, .$$

Legyen

$$g \triangleq 1 + \frac{z}{2 \|z\|_\infty} > 0 \, ,$$

és definiáljuk az

$$\mathbf{R}(A) \circeq \int_A g \, d\mathbf{Q}$$

mértéket. A $g = d\mathbf{R}/d\mathbf{Q}$ felülről korlátos és nagyobb vagy egyenlő, mint egy pozitív szám, így a két mérték alatt az integrálható változók megegyeznek. Világos, hogy $g > 0$, és

$$\mathbf{R}(- \ ) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(1) + \frac{\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(z)}{2\,\|z\|_{\infty}} = 1 ,$$

tehát az $\mathbf{R}$ egy ekvivalens valószínűségi mérték. Mivel tetszőleges θ előrejelezhető folyamatra a $\lambda = 0$ mellett

$$\sum_{t=1}^{T} \langle S(t) - S(t-1), \theta(t) \rangle \in L ,$$

ezért ha a θ korlátos, akkor a (3) sor felhasználásával

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}^{\mathbf{R}} \left(\sum_{t=1}^{T} \langle S(t) - S(t-1), \theta(t) \rangle \right) \circeq \\ \circeq \quad & \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \left(\sum_{t=1}^{T} \langle S(t) - S(t-1), \theta(t) \rangle \left(1 + \frac{z}{2\,\|z\|_{\infty}} \right) \right) = \\ = \quad & \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \left(\sum_{t=1}^{T} \langle S(t) - S(t-1), \theta(t) \rangle \right) . \end{aligned}$$

Mivel az S martingál a $\mathbf{Q}$ alatt, és a θ előrejelezhető, ezért a jobb oldali kifejezés, tetszőleges korlátos θ esetén nulla, ezért a bal oldal is nulla. Ha a θ azonosan nulla, kivéve a $t-1$ időpontban, ahol az értéke χ_F, ahol $F \in \mathcal{F}_{t-1}$, akkor

$$\mathbf{E}^{\mathbf{R}} \big((S(t) - S(t-1)) \chi_F \big) = 0 ,$$

ami nem más, mint

$$\int_F S(t) \, d\mathbf{R} = \int_F S(t-1) \, d\mathbf{R} ,$$

vagyis a feltételes várható érték definíciója alapján

$$\mathbf{E}^{\mathbf{R}}(S(t) \mid \mathcal{F}_{t-1}) = S(t-1) .$$

Tehát az S folyamat az $\mathbf{R} \neq \mathbf{Q}$ mérték esetén is martingál, következésképpen a martingálmérték nem egyértelmű. $\square$

3 Lokális martingálok diszkrét és véges idő-horizont esetén

Ebben a pontban teljesség kedvéért röviden felidézzük[13] a diszkrét idejű lokális martingálokra vonatkozó legfontosabb állításokat.

Ha ξ nem negatív valószínűségi változó és $\mathcal{F}$ egy feltételi σ-algebra, akkor mindig értelmes az $\mathbf{E}(\xi \mid \mathcal{F})$ feltételes várható érték[14]. Ilyenkor könnyen igazolható[15], hogy a feltételes várható érték operáció monoton, additív és teljesül rá a toronyszabály. Nem negatív változók körében ugyancsak nyilvánvaló, hogy teljesül a kiemelési szabály. Ha a ξ-nek nincs véges várható értéke, akkor előfordulhat, hogy a feltételes várható érték nem valószínűségi változó, ugyanis végtelen értéket is felvehet. Ez indokolja a következő definíciót:

3.1 Definíció. *Legyen ξ valószínűségi változó, $\mathcal{F}$ feltételi σ-algebra. Ha a ξ^+ és ξ^- változóknak létezik véges értékű feltételes várható értéke, akkor az*

$$\mathbf{E}\left(\xi^+ \mid \mathcal{F}\right) - \mathbf{E}\left(\xi^- \mid \mathcal{F}\right)$$

kifejezést általánosított feltételes várható értéknek mondjuk, és a megszokott

$$\mathbf{E}(\xi \mid \mathcal{F})$$

módon jelöljük.

Könnyen belátható, hogy a feltételes várható értékre vonatkozó szokásos számolási szabályok[16] átvihetők általánosított feltételes várható értékekre is.

3.2 Definíció. *A $(\xi_n, \mathcal{F}_n)$ diszkrét idejű sorozatot általánosított martingálnak mondjuk, ha*

1. *minden n-re az $\mathbf{E}(\xi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)$ általánosított feltételes várható érték létezik, és*

2. *minden n-re*

$$\mathbf{E}(\xi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) \circeq \mathbf{E}\left(\xi_{n+1}^+ \mid \mathcal{F}_n\right) - \mathbf{E}\left(\xi_{n+1}^- \mid \mathcal{F}_n\right) = \xi_n \ ,$$

[13] V.ö.: [6,8,12].

[14] A feltételes várható érték definíciója nem teljesen egységes az irodalomban. Bizonyos szerzők csak integrálható változók esetén definiálják a feltételes várható értéket, vagyis megkövetelik, hogy a pozitív és a negatív rész integrálja véges legyen. Ugyanakkor nem negatív változók esetén mindig létezik olyan, esetlegesen végtelen értéket is felvevő változó, amely mérhető a feltételi σ-algebra szerint és kielégíti a feltételes várható értéket definiáló integrálegyenletet. [8], 9.14. Állítás, 293. oldal. Ennek oka, hogy a Radon–Nikodym-tételben a deriválandó mérték tetszőleges lehet. [8], 3.46. Tétel, 137. oldal. Éppen ezért célszerű a feltételes várható értéket tetszőleges nem negatív változó esetén is definiálni. Előjeles változók feltételes várható értékének létezéséhez, vagyis olyan a feltételi σ-algebra szerint mérhető függvény létezéséhez, amely kielégíti az integrálegyenletet, elegendő megkövetelni, hogy vagy a változó pozitív része, vagy a negatív része integrálható legyen.

[15] A tulajdonságok karakterisztikus és lépcsős függvényekre teljesülnek és a nem negativitás miatt alkalmazni lehet a monoton konvergencia tételt.

[16] Pl. kiemelési és torony szabály, additivitás stb. V.ö.: [8,12].

ahol az egyenlőség osztályok között, tehát **P** *majdnem mindenhol teljesül*[17].

Hangsúlyozni kell, hogy nem tételezzük fel, hogy a ξ_n változók várható értéke véges, sőt azt sem követeljük meg, hogy legyen a változónak végtelen várható értéke, éppen ez különbözteti meg az általánosított martingált a martingáltól. Megelégszünk avval, hogy a „martingálegyenlőségben" szereplő általánosított feltételes várható érték létezik, és véges.

3.3 Definíció. *Valamely $(\xi_n, \mathcal{F}_n)$ véges, vagy végtelen sorozatot lokális martingálnak mondunk, ha megadható (τ_k) megállási idők olyan $\tau_k \nearrow \infty$ „lokalizációs" sorozata, amelyre a*

$$\xi_n^{\tau_k} \stackrel{\circ}{=} \chi(\tau_k > 0)\, \xi_{n \wedge \tau_k}$$

megállított folyamatok mindegyike martingál az eredeti $(\mathcal{F}_n)$ filtrációra nézve.

3.4 Definíció. *A $(\xi_n, \mathcal{F}_n)$ sorozatot martingáltranszformáltnak*[18] *mondjuk, ha létezik olyan*

$$(M_n, \mathcal{F}_n)$$

martingál, és olyan (θ_n) sorozat, hogy minden n-re a θ_n $\mathcal{F}_{n-1}$ mérhető[19]*, és*

$$\xi_n = \xi_0 + \sum_{k=1}^{n} \theta_k (M_k - M_{k-1}) \ . \tag{4}$$

A diszkrét idejű lokális martingálok struktúrája igen egyszerű[20]:

3.5 Állítás. *Az alábbi állítások ekvivalensek:*

1. *a (ξ_n) lokális martingál,*
2. *a (ξ_n) általánosított martingál,*
3. *a (ξ_n) felírható (4) martingáltranszformáltként.*

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy teljesül az 1. ⇒ 2. ⇒ 3. ⇒ 1. implikáció sorozat.

1. Legyen (ξ_n) lokális martingál, és legyen (τ_k) egy lokalizációs sorozat. A martingál definíciója alapján a $\xi_{n+1}^{\tau_k}$ várható értéke véges, és így a feltételes

[17] Ez úgy is fogalmazható, hogy a ξ_{n+1} változó pozitív, illetve negatív részének $\mathcal{F}_n$ szerinti feltételes várható értéke megegyezik a ξ_n pozitív, illetve negatív részével.

[18] A martingáltranszformáltak tekinthetők diszkrét idejű sztochasztikus integráloknak.

[19] Természetszerűleg $\mathcal{F}_{-1} \stackrel{\circ}{=} \mathcal{F}_0$.

[20] Az állítás lényegében azt állítja, hogy diszkrét időtartomány esetén a lokális martingálok „rosszul" integrálható martingálok. Folytonos időtartomány esetén ez hangsúlyozottan nincsen így.

várható érték is véges, ezért

$$\begin{aligned}\infty &> \mathbf{E}\left(\left|\xi_{n+1}^{\tau_k}\right| \mid \mathcal{F}_n\right) \overset{\circ}{=} \mathbf{E}\left(\left|\xi_{(n+1)\wedge\tau_k}\right| \chi\left(\tau_k > 0\right) \mid \mathcal{F}_n\right) \geq \\ &\geq \mathbf{E}\left(\left|\xi_{(n+1)\wedge\tau_k}\right| \chi\left(\tau_k > n\right) \mid \mathcal{F}_n\right) = \\ &= \mathbf{E}\left(\left|\xi_{n+1}\right| \chi\left(\tau_k > n\right) \mid \mathcal{F}_n\right) = \\ &= \chi\left(\tau_k > n\right) \mathbf{E}\left(\left|\xi_{n+1}\right| \mid \mathcal{F}_n\right)\end{aligned}$$

ugyanis mivel a τ_k megállási idő, ezért a $\chi(\tau_k > n)$ $\mathcal{F}_n$-mérhető minden n-re, és ezért alkalmazható a nem negatív változókra vonatkozó kiemelési szabály. A lokalizációs sorozat definíciója miatt majdnem minden ω kimenetelre, mivel $\tau_k \nearrow \infty$, ha k elég nagy

$$\mathbf{E}\left(\left|\xi_{n+1}\right| \mid \mathcal{F}_n\right)(\omega) = \chi\left(\tau_k(\omega) > n\right) \mathbf{E}\left(\left|\xi_{n+1}\right| \mid \mathcal{F}_n\right)(\omega) < \infty\ ,$$

következésképpen majdnem mindenhol $\mathbf{E}\left(\left|\xi_{n+1}\right| \mid \mathcal{F}_n\right) < \infty$. Nyilvánvalóan $\xi_{n+1}^{\pm} \leq \left|\xi_{n+1}\right|$ és így léteznek és végesek a $\mathbf{E}\left(\xi_{n+1}^{\pm} \mid \mathcal{F}_n\right)$ feltételes várható értékek, így definíció szerint létezik az $\mathbf{E}\left(\xi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right)$ általánosított feltételes várható érték. Természetesen az általánosított feltételes várható értékre nem értelmezhető a feltételes várható értéket definiáló integrálegyenlet. Jelölje $\mathcal{G}_n$ az olyan $F \in \mathcal{F}_n$ halmazokat, amelyekre

$$\int_F \left|\xi_{n+1}\right| d\mathbf{P} = \int_F \mathbf{E}\left(\left|\xi_{n+1}\right| \mid \mathcal{F}_n\right) d\mathbf{P} < \infty\ .$$

A $\xi_n^{\tau_k}$ martingál, ezért a $\left|\xi_n^{\tau_k}\right|$ szubmartingál, tehát

$$\begin{aligned}\int_{F\cap\{\tau_k>n\}} \left|\xi_n\right| d\mathbf{P} &= \int_{F\cap\{\tau_k>n\}} \left|\xi_n^{\tau_k}\right| d\mathbf{P} \leq \\ &\leq \int_{F\cap\{\tau_k>n\}} \left|\xi_{n+1}^{\tau_k}\right| d\mathbf{P} = \\ &= \int_{F\cap\{\tau_k>n\}} \left|\xi_{n+1}\right| d\mathbf{P}\ ,\end{aligned}$$

így, ha $k \to \infty$, akkor a monoton konvergencia tétel miatt

$$\int_F \left|\xi_n\right| d\mathbf{P} \leq \int_F \left|\xi_{n+1}\right| d\mathbf{P} < \infty\ , \tag{5}$$

következésképpen az

$$\begin{aligned}\int_{F\cap\{\tau_k>n\}} \xi_n\, d\mathbf{P} &= \int_{F\cap\{\tau_k>n\}} \xi_n^{\tau_k}\, d\mathbf{P} = \int_{F\cap\{\tau_k>n\}} \xi_{n+1}^{\tau_k}\, d\mathbf{P} = \\ &= \int_{F\cap\{\tau_k>n\}} \xi_{n+1}\, d\mathbf{P}\end{aligned}$$

egyenlőség mindkét oldalán használhatjuk a majorált konvergencia tételt, amiből

$$\int_F \xi_n\, d\mathbf{P} = \int_F \xi_{n+1}\, d\mathbf{P}, \quad F \in \mathcal{G}_n\ .$$

Mivel $\mathcal{G}_n$ elemein ξ_n és ξ_{n+1} integrálható, ezért a kiterjesztett feltételes várható érték definíciója alapján minden $F \in \mathcal{G}_n$ halmazra

$$\begin{aligned}
\int_F \xi_{n+1}\, d\mathbf{P} &= \int_F \xi_{n+1}^+ - \xi_{n+1}^-\, d\mathbf{P} = \int_F \xi_{n+1}^+\, d\mathbf{P} - \int_F \xi_{n+1}^-\, d\mathbf{P} = \\
&= \int_F \mathbf{E}\left(\xi_{n+1}^+ \mid \mathcal{F}_n\right) d\mathbf{P} - \int_F \mathbf{E}\left(\xi_{n+1}^- \mid \mathcal{F}_n\right) d\mathbf{P} = \\
&= \int_F \mathbf{E}\left(\xi_{n+1}^+ \mid \mathcal{F}_n\right) d\mathbf{P} - \mathbf{E}\left(\xi_{n+1}^- \mid \mathcal{F}_n\right) d\mathbf{P} \overset{\circ}{=} \\
&\overset{\circ}{=} \int_F \mathbf{E}\left(\xi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right) d\mathbf{P},
\end{aligned}$$

ahol az utolsó két sorban kihasználtuk, hogy az $\mathbf{E}\left(\xi_{n+1}^{\pm} \mid \mathcal{F}_n\right)$ kifejezések integrálja az F-re tett megkötés miatt véges, tehát az integrálokat össze lehet vonni. Ebből

$$\int_H \xi_n\, d\mathbf{P} = \int_H \mathbf{E}\left(\xi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right) d\mathbf{P}, \quad \forall H \in \mathcal{F}_n, H \subseteq F \in \mathcal{G}_n\ ,$$

következésképpen az $F \in \mathcal{G}_n$ halmazokon

$$\xi_n \overset{m.m.}{=} \mathbf{E}\left(\xi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right)\ .$$

Az $\mathbf{E}\left(\left|\xi_{n+1}\right| \mid \mathcal{F}_n\right) < \infty$ miatt az - felbontható megszámlálható $\mathcal{G}_n$-beli halmazra, következésképpen

$$\xi_n \overset{m.m.}{=} \mathbf{E}\left(\xi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right)\ ,$$

vagyis a (ξ_n) általánosított martingál.

2. Második lépésként tegyük fel, hogy a (ξ_n) sorozat egy általánosított martingál. Legyen

$$A(n,k) \overset{\circ}{=} \left\{k \leq \mathbf{E}\left(\left|\xi_n - \xi_{n-1}\right| \mid \mathcal{F}_n\right) < k+1\right\}\ .$$

Mivel a (ξ_n) általánosított martingál, ezért minden fix n esetén az $A(n,k)$ az - egy partíciója, vagyis az $A(n,k)$ halmazok k szerinti egyesítése az - , és két különböző k-ra a halmazok metszete diszjunkt[21]. Vezessük be az

$$u_n \overset{\circ}{=} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(k+1)^3} \left(\xi_n - \xi_{n-1}\right) \chi_{A(n-1,k)}$$

függvényt. Mivel az $\left(A\left(n-1,k\right)\right)_k$ halmazok partíciót alkotnak, az u_n definíciója értelmes. Nyilvánvaló módon u_n véges és $\mathcal{F}_n$-mérhető.

$$\left|u_n\right| \leq \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(k+1)^3} \left|\xi_n - \xi_{n-1}\right| \chi_{A(n-1,k)}\ .$$

[21] Az egyszerűség kedvéért egy mindenhol véges verziót veszünk.

A két oldalon $\mathcal{F}_{n-1}$ szerint feltételes várható értéket véve és használva a feltételes várható értékre vonatkozó monoton konvergencia tételt és a nem negatív változókra vonatkozó kiemelési szabályt valamint a nem negatív változók körében az additivitást:

$$\mathbf{E}\left(|u_n| \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) \leq \sum_{k\geq 0} \frac{\chi_{A(n-1,k)}}{(k+1)^3}\mathbf{E}\left(|\xi_n - \xi_{n-1}| \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) \leq \sum_{k\geq 0} \frac{1}{(k+1)^2} < \infty \, .$$

Ebből következően

$$\mathbf{E}\left(|u_n|\right) = \mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left(|u_n| \mid \mathcal{F}_{n-1}\right)\right) \leq \sum_{k\geq 0} \frac{1}{(k+1)^2} < \infty \, , \tag{6}$$

vagyis az u_n integrálható. Tetszőleges k-ra az

$$|\xi_n - \xi_{n-1}| \, \chi_{A(n-1,k)}$$

szintén integrálható, és így, kihasználva, hogy integrálható változókra a feltételes várható érték és az általánosított feltételes várható érték egybeesik[22]

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}\left(\left(\xi_n - \xi_{n-1}\right)\chi_{A(n-1,k)} \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) = \\ &= \chi_{A(n-1,k)}\mathbf{E}\left(\xi_n - \xi_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) = \\ &= \chi_{A(n-1,k)}\left(\mathbf{E}\left(\xi_n \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) - \mathbf{E}\left(\xi_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}\right)\right) = \\ &= \chi_{A(n-1,k)}\left(\mathbf{E}\left(\xi_n \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) - \xi_{n-1}\right) = 0 \, . \end{aligned}$$

A feltételes várható értékre vonatkozó majorált konvergencia tétel miatt, kihasználva a (6) sort

$$\mathbf{E}\left(u_n \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) = \mathbf{E}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^3}\left(\xi_n - \xi_{n-1}\right)\chi_{A(n-1,k)} \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) = 0 \, .$$

Ebből következően az (u_n) egy martingáldifferencia sorozat és az

$$M_n \triangleq \sum_{k=1}^{n} u_k$$

egy martingál. Ha

$$\theta_n \triangleq \sum_{k\geq 0} (k+1)^3 \, \chi_{A(n-1,k)} \, ,$$

[22]Vegyük észre, hogy alább a kiemelési szabály használata nem teljesen evidens. A $\xi_n - \xi_{n-1}$ változónak van kiterjesztett feltételes várható értéke. A pozitív és a negatív rész feltételes várható értékéből a nem negatív $\chi_{A(n-1,k)}$ kivihető a feltételes várható értékből majd a kiemelhető a különbségben. Az alábbi gondolatmenetben kihasználjuk a kiterjesztett feltételes várható érték linearitását is.

akkor a θ_n értelmes és előrejelezhető, ugyanis az $A(n-1,k)$ halmazok $\mathcal{F}_{n-1}$-mérhetőek és diszjunktak.

$$
\begin{aligned}
&(M_n - M_{n-1})\,\theta_n = u_n\theta_n = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^3}\,(\xi_n - \xi_{n-1})\,\chi_{A(n-1,k)} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^3\,\chi_{A(n-1,k)} = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^3}\,(\xi_n - \xi_{n-1})\,\chi_{A(n-1,k)}\,(l+1)^3\,\chi_{A(n-1,l)} = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)^3}{(k+1)^3}\chi_{A(n-1,k)}\,(\xi_n - \xi_{n-1}) = \xi_n - \xi_{n-1}\,.
\end{aligned}
$$

Így a (ξ_n) éppen a (θ_n) előrejelezhető folyamat és az (M_n) martingál által definiált martingáltranszformáció.

3. Végezetül tegyük fel, hogy a (ξ_n) egy martingáltranszformált és tegyük fel, hogy teljesül a (4). Legyen

$$\tau_k \stackrel{\circ}{=} \inf\left\{n \geq 0 : |\theta_{n+1}| > k\right\}\ .$$

A konstrukció szerint

$$
\begin{aligned}
\{\tau_k = 0\} &= \{|\theta_1| > k\} \\
\{\tau_k = 1\} &= \{|\theta_1| \leq k\} \cap \{|\theta_2| > k\} \\
\{\tau_k = 2\} &= \{|\theta_1| \leq k\} \cap \{|\theta_2| \leq k\} \cap \{|\theta_3| > k\} \\
&\ \ \vdots
\end{aligned}
$$

Ebből következően a τ_k minden k-ra egy megállási idő. Mivel a (θ_n) előrejelezhető és τ_k megállási idő, ezért a $(\theta_n^{\tau_k})_n$ megállított sorozat előrejelezhető marad. Valóban, minden n-re és α számra

$$
\begin{aligned}
\{\theta_n^{\tau_k} < \alpha\} = \big(\{\theta_n < \alpha\} \cap \{\tau_k \geq n\}\big) \cup \big(\{\theta_1 < \alpha\} \cap \{\tau_k = 1\}\big) \cup \ldots \cup \\
\cup \big(\{\theta_{n-1} < \alpha\} \cap \{\tau_k = n-1\}\big)\ .
\end{aligned}
$$

Mivel

$$\{\tau_k \geq n\} = \{\tau_k < n\}^c = \{\tau_k \leq n-1\}^c \in \mathcal{F}_{n-1}\ ,$$

ezért

$$\{\theta_n^{\tau_k} < \alpha\} \in \mathcal{F}_{n-1}\ ,$$

így a $(\theta_n^{\tau_k})_n$, miként állítottuk, előrejelezhető. Felhasználva, hogy a megállított martingálok martingálok maradnak, illetve hogy a $\theta_n^{\tau_k}$ változó $\mathcal{F}_{n-1}$-mérhető és korlátos

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(\xi_{n+1}^{\tau_k} - \xi_n^{\tau_k} \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) &= \mathbf{E}\left((\xi_{n+1} - \xi_n)^{\tau_k} \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) = \\
&= \mathbf{E}\left((\theta_n\,(M_{n+1} - M_n))^{\tau_k} \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) = \\
&= \mathbf{E}\left(\theta_n^{\tau_k}\,(M_{n+1} - M_n)^{\tau_k} \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) = \\
&= \theta_n^{\tau_k}\mathbf{E}\left(M_{n+1}^{\tau_k} - M_n^{\tau_k} \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) = 0\ ,
\end{aligned}
$$

tehát a $(\xi_n^{\tau_k})$ martingál, vagyis a (ξ_n) lokális martingál. □

Az állítás segítségével beláthatjuk a második alaptétel bizonyításában használt állítást:

3.6 Állítás. *Ha $(\xi_n)_{n=0}^T$ egy martingáltranszformáció és a ξ_T integrálható, akkor a $(\xi_n)_{n=0}^T$ sorozat martingál.*

Bizonyítás. A 3.5 állításban szereplő 3. ⇒ 2. implikáció szerint

$$\xi_{T-1} = \mathbf{E}\left(\xi_T \mid \mathcal{F}_{T-1}\right) ,$$

ahol az $\mathbf{E}$ természetesen az általánosított feltételes várható értéket jelöli. A ξ_T a feltétel szerint integrálható, ezért a toronyszabály nem negatív változókra való triviális alkalmazásával

$$\mathbf{E}\left(|\xi_{T-1}|\right) = \mathbf{E}\left(\left|\mathbf{E}\left(\xi_T \mid \mathcal{F}_{T-1}\right)\right|\right) \leq \mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left(|\xi_T| \mid \mathcal{F}_{T-1}\right)\right) = \mathbf{E}\left(|\xi_T|\right) < \infty ,$$

tehát a ξ_{T-1} is integrálható. Innen az állítás már nyilvánvaló. □

4 Európai eszközök árazása, nincs diszkontálás

Az eszközárazás első és második alaptétele segítségével az európai típusú származtatott termékek árazása diszkrét és véges időhorizont esetén viszonylag egyszerűen elintézhető: Legyen H_T egy a T időszakban esedékes valamilyen pénzügyi tranzakció. Mivel a H_T a T időszakban esedékes, ezért a H_T $\mathcal{F}_T$-mérhető. A kérdés az, hogy ha a H_T értékét a $t = 0$ időpontban kell kifizetni, akkor mennyi a H_T ára, vagyis a $t = 0$ időpontban kifizetendő milyen $\pi(H_T)$ összeg tekinthető a H_T árának? Tegyük fel, hogy a piacon nincsen arbitrázs, és tegyük fel, hogy a piac teljes. Ekkor az első és második alaptétel szerint létezik egyetlen martingálmérték. Jelölje $\mathbf{Q}$ ezt a martingálmértéket. A teljesség miatt[23]

$$H_T = \lambda + \sum_{t=1}^{T} \langle S(t) - S(t-1), \theta(t) \rangle \ . \tag{7}$$

A közgazdasági megfontolásokból a H_T ára alatt azt a $\pi(H_T)$ összeget értjük, amely mellett a H_T bevezetése nem fogja tönkretenni a piac arbitrázs mentességét. Másképpen fogalmazva a H_T bevezetése azt jelenti, hogy a már meglevő m darab

$$S_i(0), S_i(1), \ldots, S_i(T), \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

idősor mellé bevezetünk egy $(m+1)$-edik eszközt, amely árfolyamát a

$$\pi(H_T), \ldots, H_T$$

[23]Ha a diszkontálást és az önfinanszírozó portfóliókat is tárgyaltuk volna, akkor az egyenlőségben a diszkontált árfolyamok és a diszkontált kifizetés szerepelt volna.

idősor írja le[24]. Mikor marad az $m+1$ eszközből álló, kibővített piac arbitrázs mentes? Miként azonnal megmutatjuk, az arbitrázs mentesség csak akkor őrizhető meg, ha $\pi(H_T) = \lambda$. Valóban, ha például $\pi(H_T) > \lambda$, akkor a

$$(\theta(1), -1)\,, (\theta(2), -1)\,, \ldots, (\theta(T), -1)$$

$(m+1)$ dimenziós stratégia egy arbitrázs stratégia[25], ugyanis mivel a konstans függvények minden σ-algebra szerint mérhetőek, ezért egyrészt a kibővített stratégia triviálisan előrejelezhető, másrészt az új stratégia nettó eredménye a (7) felhasználásával

$$+\pi(H_T) + \sum_{t=1}^{T} (S(t) - S(t-1))\,\theta(t) - H_T = \pi(H_T) - \lambda > 0\,,$$

ami pedig arbitrázs[26].

További kérdés persze, hogy hogyan lehetne a λ számot a $\mathbf{Q}$ mérték segítségével kifejezni? Ehhez fel kell tenni, hogy a H_T integrálható a $\mathbf{Q}$ martingálmérték szerint. A szokásos opciós derivatívák esetén ez triviálisan teljesül, ugyanis ha például $H_T = \max(c, S_1(T))$, akkor az $S_1(T)$ integrálható a $\mathbf{Q}$ szerint, és így a H_T is integrálható a $\mathbf{Q}$ szerint. Mivel a $\mathbf{Q}$ martingálmérték és a H_T a $\mathbf{Q}$ szerint integrálható, ezért a $\sum_{t=1}^{T}(S(t) - S(t-1))\theta(t)$ martingáltranszformáció martingál[27], így tartja a várható értéket, vagyis

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\sum_{t=1}^{T} (S(t) - S(t-1))\,\theta(t)\right) = 0\,.$$

Ebből következően a (7) sorban a $\mathbf{Q}$ mérték szerint várható értéket véve

$$\pi(H_T) = \lambda + 0 = \lambda + \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\sum_{t=1}^{T} (S(t) - S(t-1))\,\theta(t)\right) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(H_T)\,. \tag{8}$$

Érdemes megjegyezni, hogy a (8) képlet szempontjából csak az arbitrázs mentességre volt szükség, a teljesség feltételére csak annyiban támaszkodtunk, hogy feltettük, hogy a (7) előállítás lehetséges. Ha a piac nem teljes, akkor a (7) előállítás nem minden H_T esetében lehetséges. Ha valamely H_T-ra azonban az előállítás létezik, akkor az árára a (8) teljesül, függetlenül attól, hogy a $\mathbf{Q}$ melyik a lehetséges martingál mértékek közül. Az olvasó az egyértelműség kapcsán felvetheti, hogy a λ értéke, és így a $\pi(H_T)$ ár egyértelmű-e? Tegyük fel, hogy valamely H_T rendelkezik két olyan előállítással, amelyben $\lambda_1 < \lambda_2$. Tekintsük a

$$\left(\theta^{(1)}(1) - \theta^{(2)}(1)\right), \ldots, \left(\theta^{(1)}(T) - \theta^{(2)}(T)\right)$$

[24] Hogy miként alakul a H_T tranzakció ára a köztes időpontokban számunkra érdektelen. A lényeges dolog az, hogy a T időpontban az árat a H_T adja meg.

[25] Mivel a termék drága a tényleges árához képest, ezért el kell adni!

[26] Vegyük észre, hogy a derivatív termékre vonatkozó többi ármozgás, teleszkopikus összegként, kiesik.

[27] V.ö.: 3.6 Állítás.

előrejelezhető stratégiát. Ennek eredménye

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^{T}(S(t)-S(t-1))\left(\theta^{(1)}(t)-\theta^{(2)}(t)\right) &= (H_T-\lambda_1)-(H_T-\lambda_2)= \\ &= \lambda_2-\lambda_1>0\ ,\end{aligned}$$

ami a nincsen arbitrázs feltétel miatt lehetetlen. Ebből következően, ha nincsen arbitrázs, akkor teljesül az úgynevezett egy ár törvény, vagyis minden H_T pénzügyi tranzakció esetén, amelyre a (7) előállítás létezik, a λ konstans értéke, következésképpen a $\pi(H_T)$ ár is, azonos.

Irodalom

1. Dalang, R. C, Morton, A., Willinger, W., Equivalent martingale measure and no-arbitrage in stochastic securities market model. *Stochastics and Stochastic Reports*, 29, 1990, 185–201.
2. Delbaen, F., Schachermayer, W., *The Mathematics of Arbitrage.* Springer, 2006.
3. Duffie, D., *Security Markets, Stochastic Models.* Academic Press, San Diego, 1988.
4. Elliott, R. J., Kopp, P. E., *Pénzpiacok matematikája.* Typotex kiadó, Budapest, 2000.
5. Elliott, R. J., Kopp, P. E., *Mathematics of Financial Markets.* Springer, New York, 2004.
6. Jacod, J., Shiryaev, A. N., Local martingales and the fundamental asset pricing theorems in the discrete-time case, *Finance and Stochastics*, 2, 1998, 259–273.
7. Kabanov, Yu., Stricker, C., *A teachers' note on no-arbitrage criteria.* Lecture Notes in Mathematics, 1775, 2001, 149–152.
8. Medvegyev Péter, *Valószínűségszámítás.* Aula, Budapest, 2002.
9. Medvegyev Péter, A pénzügyi eszközök árazásának alaptétele diszkrét idejű modellekben, *Közgazdasági Szemle*, XLIX, 2002, 574–597.
10. Medvegyev Péter, A Dalang-Morton-Willinger-tétel, *Szigma*, 37, 2006, 1-2, 73–85.
11. Schachermayer, W., A Hilbert space proof of the fundamental theorem of asset pricing in finite discrete time, *Insurance: Math Econ*, 11, 1992, 1–9.
12. Shiryaev, A. N., *Probability.* Springer, 1996.

THE SECOND FUNDAMENTAL THEOREM OF ASSET PRICING

In the article we summarize the results about the second fundamental theorem of asset pricing.