DINAMIKUS COURNOT MODELLEK ÉS KITERJESZTÉSÜK[1]

FEUER GÁBOR – SZIDAROVSZKY FERENC
Feuer Ges.m.b.H. – Arizonai Egyetem

A dolgozatban oligopol modelleket tárgyalunk realisztikus feltételek mellett. A piaci árfüggvény változását, termékmennyiség növelési költségét, környezetszennyezés csökkentését, valamint a különböző termelők költség-kölcsönhatásait az eddigiekben tárgyalt modellekben nem, vagy csak ritkán vették figyelembe. Ezeknek a tényezőknek a figyelembevételével a modellek bonyolultabbá válnak és az aszimptotikus tulajdonságaik is lényegesen megváltoznak.

1 Bevezetés

A matematikai közgazdaságtani irodalomban az oligopol modellek központi szerepet játszanak. Cournot (1838) munkája nyomán intenzív kutatás indult meg ezen a területen. Először az egyensúlypont létezése és egyértelműsége volt a központi kérdés, majd az egyensúlypontok kiszámítási módszerei kerültek előtérbe. Ezzel egy időben a klasszikus Cournot modell különféle kiterjesztéseit és általánosításait vezették be. Így került sor a differenciált termékű, a többtermékes, alkalmazott-tulajdonú és piac-megosztási modellek bevezetésére és tanulmányozására. A korábbi modellek és eredmények jó összefoglalását adja meg Okuguchi (1976) könyve, majd ezek többtermékes modellek esetére való kiterjesztéseit és az oligopol modellek többféle alkalmazásait tárgyalja az Okuguchi és Szidarovszky (1999) monográfia. Az 1960-as évek elejétől kezdve számos kutató foglalkozott dinamikus oligopol modellekkel. Theocharis (1959) cikke volt az első eredmény, amelyet ezután többen kiterjesztettek és általánosítottak. Dinamikus modellek esetén a rendszer aszimptotikus viselkedése jelenti a központi problémát. Ha az egyensúlypont lokális stabilitásának a vizsgálata a kérdés, akkor az a szokásos módszerekkel (linearizálással és a Jacobi mátrix sajátértékeinek a megbecslésével) történik. Globális stabilitási kérdések részben a Lyapunov függvények segítségével, vagy a diszkrét esetben a kontrakciós fixpont tétel alapján dönthetők el. Nemlineáris modellekkel és azok aszimptotikus vizsgálatával a Bischi, Chiarella, Kopel és Szidarovszky (2005) monográfia foglalkozik részletesen.

A korábbi modellek csak nagyon ritkán és csak speciális esetekben vettek figyelembe olyan körülményeket, amelyekkel a modellek realitástartalma lényegesen megnövekedett volna. Nem vették ugyanis figyelembe a piaci árfüggvény időbeni változását, a kapacitásmennyiség növelésének egyéb költ-

[1] Beérkezett: 2006. október 30. E-mail: `ferenc.forgo@uni-corvinus.hu`.

ségeit, környezetvédelmi kérdéseket, valamint a különböző termelők költség-kölcsönhatásait, hogy csak a legfontosabbakat említsük. Jelen dolgozatunkban kísérletet teszünk arra, hogy ezeket a tényezőket a klasszikus Cournot modellbe bevezessük, és ezek hatásait a rendszerek aszimptotikus viselkedésére nézve megvizsgáljuk. A matematikai egyszerűség kedvéért vizsgálataink a klasszikus Cournot modellre vonatkoznak, a modellek, módszerek és eredmények a modell különféle kiterjesztései esetére hasonlóan vizsgálhatók és kezelhetők. Ezeknek részleteiről egy következő dolgozatban fogunk beszámolni.

2 A klasszikus Cournot modell

Tegyük fel, hogy N termelő azonos terméket állít elő, vagy azonos szolgáltatást ajánl ugyanazon a piacon. Jelölje x_k a k-adik termelő által előállított és árult mennyiséget, és tegyük fel, hogy, minthogy L_k kapacitáskorláttal rendelkezik, $x_k \in [0, L_k]$. Feltesszük azt is, hogy a piaci egységár az együttesen piacra ajánlott termékmennyiségtől függ: $p\left(\sum_{l=1}^{N} x_l\right)$, és az egyes termelők költségfüggvényei csak a saját termékmennyiségtől függenek: $c_k(x_k)$. Ezek alapján a k-adik termelő profitja:

$$\varphi_k(x_1, \ldots, x_N) = x_k p\left(\sum_{l=1}^{N} x_l\right) - c_k(x_k). \tag{1}$$

Ily módon egy N-személyes nem-kooperatív játékot definiáltunk, ahol az N termelő adja a játékosokat, a $[0, L_k]$ intervallum a k-adik játékos stratégiahalmazát és φ_k a k-adik játékos kifizetőfüggvényét. A játék Nash-egyensúlypontja egy olyan termelési vektor $\underline{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_N^*)$ amelyre

$$\text{(i)} \qquad x_k^* \in [0, L_k] \qquad (k = 1, 2, \ldots, N)\ ;$$

és

$$\text{(ii)} \qquad \varphi_k(x_1^*, \ldots, x_{k-1}^*, x_k, x_{k+1}^*, \ldots, x_N^*) \le \varphi_k(x_1^*, \ldots, x_N^*) \tag{2}$$

tetszőleges $x_k \in [0, L_k]$ esetén. Az (i) feltétel az egyensúlyi stratégiák megengedhetőségét követeli meg, míg a (ii) feltétel azt biztosítja, hogy egyetlen játékos sem növelheti profitját, ha egyoldalúan eltér az egyensúlytól feltéve, hogy a többi játékos megmarad az egyensúlypontnál.

Az oligopol probléma irodalmában általában felteszik, hogy a p és c_k függvények $(k = 1, 2, \ldots, N)$ kétszer folytonosan differenciálhatók, valamint

(A) $\quad p' < 0, \quad c_k' > 0\ ;$

(B) $\quad p' + x_k p'' \le 0\ ; \quad$ és

(C) $\quad p' - c_k'' < 0$

minden megengedett $x_1, \ldots, x_N$ stratégiaválasztás mellett.

Az (A) feltétel azt jelenti, hogy p szigorúan csökken, ha a piacra bocsátott termékmennyiség nő, valamint a termelők költsége növekszik, ha többet termelnek. (A), (B) és (C) feltételek biztosan fennállnak, ha az árfüggvény konkáv és a költségfüggvények konvexek. Megjegyezzük, hogy a (B) és (C) feltételek megengednek gyengén konvex és gyengén konkáv költségfüggvényeket is.

Vegyük észre, hogy az (1) kifizetőfüggvény az x_k változón kívül csak a többi termelő együttes termékmennyiségétől függ, amit az $s_k = \sum_{l \neq k} x_l$ szimbólummal jelölünk majd.

Tehát az (1) kifizetőfüggvény átírható a következőképpen:

$$\varphi_k = x_k p(x_k + s_k) - c_k(x_k)] \,. \tag{3}$$

Adott s_k értékek mellett a legkedvezőbb x_k érték, $x_k = R_k(s_k)$, adja a k-adik játékos *válaszfüggvényét*, amely a fenti feltételek mellett mindig egyértelmű, és a következőképpen kapható meg:

$$R_k(s_k) = \begin{cases} 0, & \text{ha } p(s_k) - c_k'(0) \leq 0 \\ L_k, & \text{ha } L_k p'(L_k + s_k) + p(L_k + s_k) - c_k'(L_k) \geq 0 \\ z_k, & \text{egyébként,} \end{cases} \tag{4}$$

ahol z_k a

$$z_k p'(z_k + s_k) + p(z_k + s_k) - c_k'(z_k) = 0 \tag{5}$$

egyenlet egyértelmű megoldása a $(0, L_k)$ intervallumban. Minthogy az (5) egyenlet bal oldala szigorúan csökkenő a z_k változóban, R_k szakaszonként folytonosan differenciálható. A (4) első két esetében $R_k' = 0$, a derivált pedig a harmadik esetben implicit differenciálással kapható meg:

$$R_k' p' + z_k p''(R_k' + 1) + p'(R_k' + 1) - c_k'' R_k' = 0 \,,$$

amelyből

$$R_k' = -\frac{p' + z_k p''}{2p' + z_k p'' - c_k''} \,. \tag{6}$$

Könnyen látható, hogy a fenti feltételek mellett

$$-1 < R_k' \leq 0 \,. \tag{7}$$

Ez az egyenlőtlenség azt jelenti, hogy bármely termelő növeli termelését, ha a többi termelő együttes termékmennyisége csökken, de a növelés elég lassú.

Az egyensúlypont definíciója a válaszfüggvények segítségével is megfogalmazható. Egy termelési vektor $\underline{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_N^*)$ Nash-egyensúlypontot szolgáltat, ha $k = 1, 2, \ldots, N$ esetén

$$\text{(i)} \qquad x_k^* \in [0, L_k]$$

és

$$\text{(ii)}' \qquad x_k^* = R_k\Bigg(\sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{N} x_l^*\Bigg) \,.$$

A (ii)′ feltétel azt követeli meg, hogy mindegyik játékos egyensúlyi stratégiája egyben legjobb választás is (amely egyébként a (2) egyenlőtlenséggel is kifejezhető).

Ismeretes, hogy az (A)–(C) feltételek mellett az N-személyes, nem-kooperatív játék pontosan egy egyensúlyponttal rendelkezik. Ha egy adott időpontban a játék állapota az egyensúlypont, akkor (2) következtében egyik játékos sem változtat stratégiáján, így a rendszer állapota az egyensúly marad minden további időpont esetén is. Ha az állapot nem egyensúlypont, akkor (2) nem teljesül legalább egy játékos esetére, így legalább egy játékos érdeke az, hogy változtasson stratégiáján. Ha az új állapot egyensúlypont, akkor az állapot nem változik ezután, ha nem az egyensúlypont, akkor valamelyik játékos újból változtat stratégiáján, és így tovább. Ily módon tehát egy dinamikus rendszer keletkezik.

Tegyük fel először, hogy az időskála diszkrét. Jelölje $t = 0, 1, 2, \ldots$ az időpontokat. A t-edik időpont után minden játékos tudja, hogy mennyi volt a többiek termékmennyisége $x_k(t)$ $(l \neq k)$, így könnyen ki tudja számítani, hogy mi a számára legkedvezőbb termelési program: $R_k\left(\sum_{l\neq k} x_l(t)\right)$. Azonban a t-edik és $(t+1)$-edik időpontok közötti rövid időszakban nem képes jelentősebb mennyiségnövelést elérni a szükséges beruházások, új munkaerő felvétele stb. következtében, így azt tételezzük fel, hogy a k-adik játékos $x_k(t)$ értékét $R_k\left(\sum_{l\neq k} x_l(t)\right)$ irányába mozdítja el, azaz termékmennyisége az

$$x_k(t+1) = x_k(t) + K_k\left(R_k\left(\sum_{l\neq k} x_l(t)\right) - x_k(t)\right) \tag{8}$$

dinamikát követi. A (8) egyenletrendszer $k = 1, 2, \ldots, N$ esetére egy N-dimenziós diszkrét rendszert definiál. A K_k együtthatókról feltesszük, hogy a $(0, 1]$ intervallumba esnek. Nagyobb K_k érték azt jelent, hogy a k-adik termelő agresszívabban követi a válaszfüggvényét.

A folytonos időskála feltételezése mellett hasonlóan gondolkodhatunk. Ilyenkor az egyes játékosok a legjobb stratégia felé mutató irányt követik, az pedig a következő differenciálegyenlettel írható le:

$$x_k'(t) = K_k\left(R_k\left(\sum_{l\neq k} x_l(t)\right) - x_k(t)\right), \tag{9}$$

ahol $K_k > 0$ egy játékostól függő állandó.

Ismert az irodalomból (lásd Bischi, Chiarella, Kopel és Szidarovszky, 2006), hogy a (8) rendszer aszimptotikusan stabilis, ha

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{K_k r_k}{-K_k(r_k+1)+2} > -1\,, \tag{10}$$

és amennyiben szigorúan ellentétes egyenlőtlenség áll fenn, akkor a rendszer instabil. A rendszer nemlineáris, így egyenlőség esetén semmilyen konkrét állítás nem adható. A folytonos (9) rendszer az (A)–(C) feltétek mellett mindig aszimptotikusan stabilis.

A (8) és (9) dinamikák nagy hiányossága az, hogy nem vesznek figyelembe olyan tényezőket, amelyek minden gazdaságban természetszerűen előfordulnak. A dolgozat további részeiben néhány ilyen tényezőt vonunk be az oligopol modellekbe, és megvizsgáljuk ezek hatását a rendszerek aszimptotikus viselkedésére. Diszkrét modellekkel foglalkozunk csak, a folytonos dinamikák hasonlóan tárgyalhatók.

3 Árfüggvények időbeli kölcsönhatása

Számos termék élettartama hosszabb, mint egy időperiódus, úgyhogy a korábban értékesített termékek a piacot telíthetik, így a korábbi igények és értékesítések befolyásolhatják és gyakran befolyásolják is az árfüggvényt. Hasonló a helyzet, amikor korábbi fogyasztások eredményeképpen a vásárlók ízlése változik, bizonyos termékek fogyasztása szokássá válik stb. Matematikailag feltesszük, hogy a korábbi értékesítések összhatása egy időtől függő Q változóval írható le, amely a diszkrét esetben egy

$$Q(t+1) = H\left(\sum_{k=1}^{N} x_k(t), Q(t)\right) \tag{11}$$

dinamikával változik. Például, a piac telítődése egy

$$Q(t+1) = \sum_{k=1}^{N} x_k(t) + \alpha Q(t) \tag{12}$$

lineáris dinamikával jellemezhető, ahol α az egy periódus után is működőképes, használható termékarányt jelenti.

A H függvény értelmezési tartománya $\left[0, \sum_{k=1}^{N} L_k\right] \times R$.

Feltesszük továbbá, hogy az árfüggvény nemcsak az értékesített összterméktől függ, hanem Q aktuális értékétől is, úgyhogy a k-adik termelő kifizetőfüggvénye:

$$\varphi_k(x_1, \ldots, x_N, Q) = x_k p(x_k + s_k, Q) - c_k(x_k)\ . \tag{13}$$

Feltesszük most, hogy

(A) $\quad p' < 0\,, \quad c_k' > 0\,;$

(B) $\quad p' + x_k p''_{xx} \le 0\,;$

(C) $\quad p'_x - c''_k < 0\,;$

(D) $\quad p'_Q + x_k p''_{xQ} \le 0\,;$

minden megengedett $x_1, \ldots, x_N$ és Q mellett. Megjegyezzük, hogy a (B) és (C) feltétel lényegében azonos a klasszikus Cournot modellnél bevezetett hasonló feltételekkel. Hasonlóan a (4) relációhoz, a k-adik játékos válaszfüggvénye a következő:

$$R_k(s_k, Q) = \begin{cases} 0, & \text{ha } p(s_k, Q) - c_k'(0) \le 0 \\ L_k, & \text{ha } L_k p'(L_k + s_k, Q) + p(L_k + s_k, Q) - C_k'(L_k) \ge 0 \\ z_k, & \text{egyébként,} \end{cases} \tag{14}$$

ahol z_k a

$$p(z_k + s_k, Q) + z_k p'(z_k + s_k, Q) - c_k'(z_k) = 0 \tag{15}$$

egyenlet egyetlen megoldása a $(0, L_k)$ intervallumban.

Implicit deriválással (6)-hoz hasonlóan látható, hogy

$$r_k = \frac{\partial R_k}{\partial s_k} = -\frac{p_x' + x_k p_{xx}''}{2p_x' + x_k p_{xx}'' - c_k''} \in (-1, 0] \tag{16}$$

és

$$\check{r}_k = \frac{\partial R_k}{\partial Q} = -\frac{p_Q' + x_k p_{xQ}''}{2p_x' + x_k p_{xx}'' - c_k''} \in (-\infty, 0]. \tag{17}$$

Hasonlóan a (8) dinamikához, a diszkrét esetben most az

$$\begin{aligned} x_k(t+1) &= x_k(t) + K_k \left(R_k \left(\sum_{l \ne k} x_l(t), Q(t) \right) - x_k(t) \right) \quad (k = 1, 2, \ldots, N) \\ Q(t+1) &= H \left(\sum_{k=1}^{N} x_k(t), Q(t) \right) \end{aligned} \tag{18}$$

$(N+1)$-dimenziós diszkrét rendszer adódik. A következőkben az egyensúly stabilitását vizsgáljuk meg és a stabilitási feltételeket összehasonlítjuk a Cournot modellel. A lokális aszimptotikus stabilitást a Jacobi-mátrix alapján végezhetjük el, ebben az esetben

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 - K_1 & K_1 r_1 & \cdots & K_1 r_1 & K_1 \check{r}_1 \\ K_2 r_2 & 1 - K_2 & \cdots & K_2 r_2 & K_2 \check{r}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ K_N r_N & K_N r_N & \cdots & 1 - K_N & K_N \check{r}_N \\ h & h & \cdots & h & \hat{h} \end{bmatrix}, \tag{19}$$

ahol

$$h = \frac{\partial H}{\partial s} \qquad \text{és} \qquad \hat{h} = \frac{\partial H}{\partial Q}$$

és valamennyi deriváltat az egyensúlypontban számolunk. Az egyszerűség kedvéért tekintsük a szimmetrikus esetet, amikor

$$r_1 = \ldots = r_N = r, \quad \check{r}_1 = \ldots = \check{r}_N = \check{r} \quad \text{és} \quad K_1 = \ldots = K_N = K\ .$$

Ekkor a (19) sajátérték-egyenlete nagymértékben leegyszerűsödik:

$$(1-K)u_k + Kr\sum_{l\neq k} u_l + K\check{r}v = \lambda u_k \qquad (k=1,2,\ldots,N) \tag{20}$$

$$h\sum_{k=1}^{N} u_k + \hat{h}v = \lambda v\ . \tag{21}$$

Vezessük be az $U = \sum_{k=1}^{N} u_k$ változót. Ekkor (20) átírható a

$$KrU + K\check{r}v + (1-K-Kr-\lambda)u_k = 0 \tag{22}$$

alakba is. Tegyük fel először, hogy $\lambda = 1-K(1+r)$. Ez a sajátérték az egységkörben van, ha

$$K < \frac{2}{1+r}\ . \tag{23}$$

Különben $u_1 = \ldots = u_N = u$ és így

$$\begin{aligned} (1-K+(N-1)Kr-\lambda)u + K\check{r}v &= 0 \\ Nhu + (\check{h}-\lambda)v &= 0\ . \end{aligned} \tag{24}$$

Nemtriviális megoldás akkor és csak akkor létezik, ha

$$\det\begin{pmatrix} 1-K(1+(1-N)r)-\lambda & K\check{r} \\ Nh & \hat{h}-\lambda \end{pmatrix} = 0\ ,$$

azaz ha λ megoldása következő másodfokú egyenletnek:

$$\lambda^2 + \lambda(-1-\hat{h}+Kz) + (\hat{h}-K\hat{h}z-NhK\check{r}) = 0 \tag{25}$$

ahol $z = 1+(1-N)r > 0$. Ismeretes a következő eredmény (ld. például Bischi, Chiarella, Kopel és Szidarovszky, 2006):

1. Lemma. *A $\lambda^2+\lambda p+q=0$ másodfokú egyenlet (p, q valós együtthatók) gyökei az egységkörben akkor és csak akkor vannak, ha*

$$q<1\ ,\quad q-p+1>0 \quad \text{és} \quad q+p+1>0\ .$$

Ez alapján a (25) egyenlet gyökei akkor vannak az egységkörben, ha

$$\hat{h}-K\hat{h}z-NhK\check{r} < 1 \tag{26}$$

$$\hat{h}-K\hat{h}z-NhK\check{r}+1+\hat{h}-Kz+1 > 0 \tag{27}$$

$$\hat{h}-K\hat{h}z-NhK\check{r}-1-\hat{h}+Kz+1 > 0\ . \tag{28}$$

Természetes feltevés, hogy $h>0$ és $-1<\hat{h}<1$ azaz H növekszik s-ben és nem nagyon változik, ha Q értéke nő vagy csökken. Ekkor a következő eseteket kell tekintenünk:

(a) Ha $\hat{h}z + N h\check{r} < 0$, akkor (26) feltétele az, hogy

$$K < \frac{\hat{h} - 1}{\hat{h}z + N h\check{r}}.$$

A (28) reláció biztosan teljesül, a (27) feltétele pedig az, hogy

$$K < \frac{2(1 + \hat{h})}{z(1 + \hat{h}) + N h\check{r}} . \tag{29}$$

Ebben az esetben a rendszer akkor lokálisan aszimptotikusan stabilis, ha K értéke elég alacsony. Ez pedig azt jelenti, hogy a termelők nem nagyon agresszívak abban, ahogy válaszfüggvényüket követik lépésről lépésre.

(b) Ha $\hat{h}z + N h\check{r} \geq 0$, akkor (26) nyilvánvalóan teljesül, valamint (28) is. A (27) fennállásának pedig az a feltétele, hogy (29) teljesüljön. Ebben az esetben is akkor lokálisan aszimptotikusan stabilis a rendszer, ha K értéke elég kicsi. Tehát a következő eredményt kaptuk.

1. Tétel. *A (18) rendszerdinamikával a szimmetrikus eset egyensúlypontja lokálisan aszimptotikusan stabilis, ha K értéke elég kicsi, azaz eleget tesz a (29) feltételnek.*

Könnyen összehasonlíthatjuk a fenti stabilitási feltételeket a klasszikus Cournot modellel, amikor $p'_Q = p''_{xQ} = h = \hat{h} = \check{r} = 0$. Ekkor a sajátértékek: $\lambda_1 = 0$ és $\lambda_2 = 1 + \hat{h} - Kz = 1 - K(1 + (1 - N)r)$.

Az első sajátérték nyilvánvalóan az egységkörben van, a második akkor van az egységkörben, ha

$$K < \frac{2}{1 + (1 - N)r} = \frac{2}{z}. \tag{30}$$

Egyszerű számítással belátható, hogy

$$\frac{2}{z} \leq \frac{2(1 + \hat{h})}{z(1 + \hat{h}) + N h\check{r}} ,$$

ami azt mutatja, hogy az árfüggvény időbeli kölcsönhatása a fenti feltételek mellett stabilizáló hatással van a rendszerre, hiszen a megengedett K tartományt növeli.

4 Termékmennyiség növelési költségek figyelembe vétele

Tegyük most fel, hogy a termékmennyiség növelésének költségét is figyelembe veszik a termelők az optimális termékmennyiség meghatározásakor. A $(t+1)$-edik időperiódusban eszerint a k-adik játékos kifizetőfüggvénye

$$\varphi_k(x_1, \ldots, x_N \mid x_k(t)) = x_k p(x_k + s_k) - c_k(x_k) - A_k(x_k - x_k(t)) , \tag{31}$$

ahol A_k a termékmennyiség növelési költségfüggvénye. Tegyük most fel, hogy

(A) $p' < 0, \quad c_k' \geq 0, \quad A_k' \geq 0,$

(B) $p' + x_k p'' \leq 0$

(C) $p' - c_k'' < 0$ és $A_k'' > 0$

minden megengedett $x_1, \ldots, x_N$ és $x_k(t)$ értékek mellett. Vegyük észre, hogy φ_k szigorúan konkáv x_k-ban, és így a válaszfüggvény a (14)-hez hasonló módon adódik, valamint implicit differenciálással

$$r_k = \frac{\partial R_k}{\partial s_k} = -\frac{p' + x_k p''}{2p' + x_k p'' - c_k'' - A_k''}$$

és

$$\check{r}_k = \frac{\partial R_k}{\partial x_k(t)} = -\frac{A_k''}{2p' + x_k p'' - c_k'' - A_k''} \,.$$

Az (A)–(C) feltételek mellett

$$-1 < r_k \leq 0 \leq \check{r}_k < 1 \quad \text{és} \quad -1 < r_k - \check{r}_k \,. \tag{32}$$

A (8) dinamikus modell ebben az esetben a következőképpen módosul:

$$x_k(t+1) = x_k(t) + K_k \left(R_k \left(\sum_{l \neq k} x_l(t), x_k(t) \right) - x_k(t) \right) \quad (k = 1, 2, \ldots N) \,. \tag{33}$$

A rendszer stabilitását vizsgáljuk meg ismét, és az eredményeket összehasonlítjuk a klasszikus Cournot modellel.

A rendszer Jacobi-mátrixa:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 - K_1(1 - \check{r}_1) & K_1 r_1 & \cdots & K_1 r_1 \\ K_2 r_2 & 1 - K_2(1 - \check{r}_2) & \cdots & K_2 r_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_N r_N & K_N r_N & \cdots & 1 - K_N(1 - \check{r}_N) \end{bmatrix} . \tag{34}$$

Tegyük fel ismét az egyszerűség kedvéért, hogy a játék szimmetrikus, azaz $K_1 = \ldots = K_N = K$, $r_1 = \ldots = r_N = r$ és $\check{r}_1 = \ldots = \check{r}_N = \check{r}$. A $\mathbf{J}$ mátrix sajátérték-egyenlete nagymértékben leegyszerűsödik:

$$(1 - K(1 - \check{r}))u_k + Kr \sum_{l \neq k} u_l = \lambda u_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, N) \,. \tag{35}$$

Legyen ismét $U = \sum_{k=1}^{N} u_k$, ekkor

$$KrU + (1 - K(1 - \check{r}) - Kr - \lambda)u_k = 0 \,. \tag{36}$$

Ha $\lambda = 1 - K(1 - \check{r}) - Kr$, akkor ez a sajátérték akkor van az egységkörben, ha

$$K < \frac{2}{r - \check{r} + 1} \,, \tag{37}$$

különben $u_1 = \ldots = u_N = u$, így (35) a következőképpen egyszerűsödik:

$$(1 - K(1 - \check{r}) + Kr(N-1) - \lambda)u = 0 \ ,$$

és nemtriviális megoldásának a feltétele az, hogy

$$\lambda = 1 - K(1 - \check{r}) + Kr(N-1) = 1 - K(1 - \check{r} + r - rN) \ .$$

Vegyük észre, hogy K szorzója

$$1 + (r - \check{r}) - rN$$

mindig pozitív, így a rendszer lokálisan aszimptotikusan stabilis, ha

$$K < \frac{2}{1 + (r - \check{r}) - rN} \ , \tag{38}$$

azaz ha K értéke elég kicsi. Minthogy $r \leq 0$, (38) szigorúbb egyenlőtlenség, mint (37), azért (38) a stabilitási feltétel. Tehát a következőt igazoltuk.

2. Tétel. *A* (33) *rendszerdinamikával a szimmetrikus eset egyensúlypontja lokálisan aszimptotikusan stabilis, ha K eleget tesz a* (38) *feltételnek, azaz elég kicsi értékű.*

A klasszikus Cournot modell esetében $\check{r} = 0$, így a stabilitási feltétel (30) teljesülése. Minthogy a (38) egyenlőtlenségben $\check{r} \geq 0$, (38) jobb oldala nagyobb, mint (30) jobb oldala. Tehát a termékmennyiség növelési költségeinek figyelembe vétele is stabilizáló tényező.

5 Ipari szennyeződés csökkentésének figyelembe vétele

Tegyük most fel, hogy a termelők közös telepen tisztítják az általuk produkált ipari szennyeződést, és a költséget a termékmennyiségek arányában osztják fel egymás között. Ekkor a k-adik játékos kifizetőfüggvénye

$$\varphi_k(x_1, \ldots, x_N) = x_k p(x_k + s_k) - c_k(x_k) - x_k \frac{T(x_k + s_k)}{x_k + s_k} \ , \tag{39}$$

ahol T a szennyeződés tisztítási költségfüggvénye. Ha bevezetjük a

$$P(x_k + s_k) = p(x_k + s_k) - \frac{T(x_k + s_k)}{x_k + s_k}$$

függvényt, akkor (39) formálisan is a klasszikus Cournot modell profitfüggvényének alakjaként írható át:

$$\varphi_k(x_1, \ldots, x_N) = x_k P(x_k + s_k) - c_k(x_k) \ . \tag{40}$$

Az egyszerűség kedvéért legyen

$$g(x_k + s_k) = \frac{T(x_k + s_k)}{x_k + s_k} \ ,$$

és tegyük fel, hogy g is kétszer folytonosan differenciálható a $\left[0, \sum_{k=1}^{N} L_k\right]$ zárt intervallumon. Ekkor a k-adik játékos válaszfüggvényének a deriváltja (6) alapján

$$r_k = \frac{\partial R_k}{\partial s_k} = -\frac{P' + x_k P''}{2P' + x_k P'' - c_k''} \ , \tag{41}$$

és a lokális aszimptotikus stabilitás feltétele a (10) egyenlőtlenség. Minthogy (10) bal oldala r_k-nak növekvő függvénye, a szennyeződés tisztításának figyelembevétele stabilizáló hatású, ha

$$-\frac{p' + x_k p''}{2p' + x_k p'' - c_k''} < -\frac{p' - g' + x_k(p'' - g'')}{2p' - 2g' + x_k p'' + x_k g'' - c_k''} \ . \tag{42}$$

Ezt az összefüggést a következőképpen írhatjuk:

$$x_k(p'g'' - g'p'') < c_k''(g' + x_k g'') \ , \tag{43}$$

ha feltesszük, hogy a p és c_k függvények kielégítik a klasszikus Cournot modellnél tett feltételeket. Ezekből azonban nem következik a (43) reláció teljesülése, így a stabilizáló hatás nem garantált általában.

6 Költségkölcsönhatások figyelembevétele

Az egyes termelők közös munkaerőpiacról és közös termelési tényező piacról szerzik be a termelésükhöz szükséges munkaerőt, anyagokat, energiát stb., így termelési költségüket a többi termelő termelési mennyisége is befolyásolja a beszerzési árakon keresztül. Hasonló a helyzet, ha a termelők kutatást is folytatnak, hogy termelésüket még gazdaságosabbá tegyék. Kutatási eredményeiket a többi termelő is hasznosíthatja, és minthogy a kutatásra fordított összegek magasabbak nagyobb termelési volumenek esetén, a többi termelő költsége implicit módon függ a kutatást végző termelő termékmennyiségétől. Amennyiben az összes termelő folytat kutatást, az összes költségfüggvény függhet az összes termelő termékmennyiségétől. Ezt a körülményt a legegyszerűbben úgy modellezhetjük, hogy feltesszük, hogy a k-adik termelő költségfüggvénye x_k-n kívül s_k-tól is függ, azaz profitfüggvénye

$$\varphi_k(x_1, \ldots, x_N) = x_k p(x_k + s_k) - c_k(x_k, s_k) \tag{44}$$

alakú. Könnyen látható, hogy

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_k} = p + x_k p' - c_{kx}'$$

és

$$\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x_k^2} = 2p' + x_k p'' - c''_{kxx} \ ,$$

így, ha feltesszük, hogy

(A) $p' < 0; \quad c'_{kx} > 0$;

(B) $p' + x_k p'' \leq 0$;

(C) $p' - c''_{kxx} < 0$

minden megengedett $x_1, \ldots, x_N$ mellett, akkor φ_k szigorúan konkáv x_k-ban, így a válaszfüggvény egyértelmű, valamint implicit differenciálással könnyen kimutatható, hogy

$$r_k = \frac{\partial R_k}{\partial s_k} = -\frac{p' + x_k p'' - c''_{kxs}}{2p' + x_k p'' - c''_{kxx}} \ , \tag{45}$$

ahol a nevező mindig negatív. Összehasonlítva ezt az egyenlőséget (10)-zel, azonnal láthatjuk, hogy amennyiben

$$c''_{kxs} < 0 \tag{46}$$

és (45) számlálója negatív, költségkölcsönhatások figyelembevétele stabilizálja a rendszert. Ha $c''_{kxs} > 0$, akkor pedig destabilizáló hatású.

A (46) feltétel azt jelenti, hogy a c'_{kx} derivált csökken s_k-ban. Ez pedig azt jelenti, hogy a c'_k marginális költség csökken, ha a többi termelő együttes termékmennyisége növekszik. Ez a feltétel reálisnak tűnik, ha a többi termelő kutatási eredménye csökkenő hatással van a k-adik termelő marginális költségére.

7 Következtetések

Ebben a dolgozatban dinamikus oligopol modelleket vizsgáltunk a klasszikus Cournot modellnél reálisabb feltételek mellett. Nemcsak a modelleket fogalmaztuk meg, hanem azok stabilitási feltételeit is összehasonlítottuk a klasszikus Cournot modell esetével. Feltételeket vezettünk le, amelyek garantálják, hogy a modellek kibővítése stabilizáló hatással is bír a nagyobb realitástartalom mellett.

Négy konkrét esetet vizsgáltunk meg egymástól függetlenül diszkrét időskála feltételezése mellett. A folytonos eset, valamint a különböző tényezők együttes figyelembevétele egy következő dolgozat tárgya lesz.

Irodalom

1. Cournot, A. (1838): *Recherches sur les Principes Mathématiques de la Théorie de Richesses.* Hachette, Paris (Angol fordítás (1960): *Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth.* Kelley, New York.)

2. Okuguchi, K. (1976): *Expectations and Stability in Oligopoly Models.* Springer-Verlag, Berlin, New York.
3. Okuguchi, K. és F. Szidarovszky (1999): *The Theory of Oligopoly with Multi-Product Firms.* Springer-Verlag, Berlin, New York.
4. Bischi, G-I., C. Chiarella, M. Kopel és F. Szidarovszky (2006): *Nonlinear Oligopolies: Stability and Bifurcations.* Elsevier (megj. alatt).
5. Theocharis, R. D. (1959): On the Stability of the Cournot Solution on the Oligopoly Problem. *Review of Econ. Studies*, **27**, 133–134.

DYNAMIC COURNOT MODELS

In this paper we . . .