

A HARROD MODELL STRUKTURÁLIS STABILITÁSA<sup>1</sup>MÓCZÁR JÓZSEF – KRISZTIN TIBOR  
BCE – SZTE

Ebben a tanulmányban megmutatjuk, hogy az adaptív várakozások segítségével megfogalmazott nemlineáris dinamikai rendszerből nyert hiperbolikus nemtriviális fixpont megfelel a harrodi instabil egyensúlyi helyzetnek. Bebizonyítjuk, hogy ez a harrodi értelemben dinamizált nemlineáris modell, a megfelelő közgazdasági feltételek mellett, strukturálisan stabil. Strukturális stabilitás mellett a tőkekoefficiensek várható és tényleges időbeli alakulását leíró függvények kis változtatása (a vektormező  $C^1$ -es perturbációja) nem érinti az endogén változók kvalitatív tulajdonságait, vagyis a trajektóriáik ugyan kis mértékben megváltozhatnak, de szerkezetük megegyezik a perturbálatlanéval, s ezzel előrejelzésekre alkalmasak. Ebben az esetben érvényét veszíti az ún. Lucas vagy még pontosabban az Engel kritika. Az időparamétert átskálázza a perturbált modell, vagyis nem teljesül a topológiai konjugáció; a növekedési ütem bizonyos szintre történő emelkedése vagy csökkenése eltérő időt vehet igénybe az eredeti modellbelitől.

**Kulcsszavak:** Harrod modell, akcelerator-ely, stacionárius egyensúlyi állapot, topológiai ekvivalencia, strukturális stabilitás, topológiai konjugáció.

## 1 Bevezetés

Keynes nem fejlesztette tovább a kereslet-determinált elméletét egy explicit egyensúlyi növekedési modellbe, annak kidolgozását a cambridgei keynesiánusokra hagyta. Elsőként Sir Roy Harrod rukkolt elő egy kiterjesztéssel, amely bevezette a későbbiekben róla elnevezett Harrod modellt. Harrod keynesi növekedésmélete (lásd Harrod (1939, 1973)) nagyban befolyásolta az egymást követő gazdasági növekedési elméleteket és a növekedési közgazdaságtan olyan hozzájárulásait, mint Kaldor (1957), Robinson (1962) és Passinetti (1962) cambridgei ihletésű modelljeit, Solow (1956) neoklasszikus vagy Sidrauski (1967), Hadjimichalakis (1971) stb. monetáris modelljeit. De ide sorolható a többszektoros kiterjesztése is, a zárt dinamikus Leontief-modell (lásd Zalai (2000), Móczár (1991)).<sup>2</sup>

---

<sup>1</sup>Beérkezett: 2006. április 21. E-mail: [jozsef.moczar@uni-corvinus.hu](mailto:jozsef.moczar@uni-corvinus.hu), [krisztin@math.u-szeged.hu](mailto:krisztin@math.u-szeged.hu).

<sup>2</sup>A fejlődő országok Világbank-os és IMF-es pénzügyi támogatása ma is Harrod növekedésmélete alapján történik, de ennek ellenére Easterly (1997) egyenesen napjaink *kriptaszökevényének* tekinti a modellt. Domar, aki 1946-ban Harrodéhoz hasonló modellt vizsgált, s amely erősen emlékeztet a Feldmann (1928) modellre, 11 évvel később "örök bűntudattal" (with ever-guilty conscience) tagadta meg munkáját (lásd in Domar (1957, 7-8. o.)), amit itt most tiszteletben tartunk.

A *strukturális stabilitás* fogalmát a modern topológia eszközeivel Andronov és Pontrjagin definiálták (lásd in Andronov és Pontrjagin (1937)). A fogalom magának a dinamikus rendszernek egy bizonyos tulajdonsága, ami leglátványosabban úgy jelenik meg, hogy egy strukturálisan stabil modell fázisdiagramjának kvalitatív tulajdonságai nem változnak, ha a modell feltételrendszerét kissé perturbáljuk. Még ha egy modell dinamikusan instabil egyensúlyi állapottal is rendelkezik, a strukturális stabilitása még mindig tekinthető egy elégséges feltételnek a tudományos jelenségek megfigyelhetőségére és előrejelezhetőségére, vagyis a mi esetünkben most a Harrod által megfogalmazott keynesi stacionárius gazdasági növekedésre. Ugyanakkor, tekinthető úgy is, mint Harrodnak egy *gyengébb* "kés-él" instabilitásról kifejtett (lásd in Harrod (1973)) fogalmának az újraértelmezése, ami elvezet Leijonhufvud (1968) ún. folyosó stabilitás fogalmához, ami azért is különösen érdekes, mert az nem egy matematikailag formalizált értelmezése a keynesi alapokon nyugvó stacionárius növekedéseméletnek.

A Harrod modell egyenlete egy statikus egyensúlyi helyzetet definiál, amit most az adaptív várakozások segítségével megfogalmazott és a tökéletes előrelátás feltevésével egydimenziósra redukált dinamikus nemlineáris modell stacionárius egyensúlyi állapotaként származtatunk. Megmutatjuk, hogy a harrodi egyensúlyi állapot instabil, de a nemlineáris modellünk strukturálisan stabil. Ez utóbbi tulajdonság megengedi, hogy az empirikus vizsgálatokban a paraméterek kissé torzítottak legyenek és megengedjünk más természetű kisebb változásokat is a vektormezőben. Ez közgazdasági szempontból azért rendkívül jelentős, mert strukturális stabilitás mellett a tőkeefficiensek várható és tényleges időbeli alakulását leíró függvények piciny változtatása (a vektormező  $C^1$ -es perturbációja) nem érinti az endogén változók kvalitatív tulajdonságait, vagyis a perturbált és a perturbálatlan vektormezőik topologikusan ekvivalensek, azaz pályáik szerkezete azonos, s ezzel előrejelzésekre alkalmasak. Vagyis ebben az esetben érvényét veszíti az ún. Lucas (1976), vagy még pontosabban az Engel kritika (Engle et al., 1983). Az időparamétert átskálázza a perturbált modell, vagyis nem teljesül a topológiai konjugáció; a növekedési ütem bizonyos szintre történő emelkedése vagy csökkenése eltérő időt vehet igénybe, mint az eredeti modellben.

A tanulmány egyes pontjaiban a következő kérdésekkel foglalkozunk.

A 2. pontban bebizonyítjuk, hogy az adaptív várakozások segítségével megfogalmazott nemlineáris folytonos idejű dinamikus modell nemtriviális egyensúlyi pontja, tökéletes előrelátás mellett, megfelel a harrodi instabil egyensúlyi állapotnak. A 3. pontban az egy- és kétdimenziós speciális dinamikai rendszerek globális strukturális stabilitásának bizonyításához szükséges fogalmakat és tételeket (Poincaré-Perko, Peixoto, Kotus-Krych-Nitecki) tárgyaljuk. Itt az algoritmusok szempontjából érdekesek lehetnek az ún. konstruktív tételek bizonyításai. A 4. pontban pedig bebizonyítjuk azoknak a dinamikus nemlineáris modelleknek a strukturális stabilitását, amelyeknek egyensúlyi pontjai megegyeznek a harrodi egyensúlyi helyzettel. Ez utóbbi eredmény bizonyítja a Harrod modell robusztusságát, vagyis felhasználhatóságát a keynesi stacionárius gazdasági növekedés előrejelezhetőségére.

## 2 A Harrod modell és nemlineáris dinamikája

A *Harrod modell* megfogalmazásához tekintsük a tőkefelhalmozási folyamatban rögzített tőke-kibocsátás arányt ( $k/x$ ), vagy ezzel ekvivalensen, egy stacionárius tőkekoefficiens, a  $b$ -t, és egy rögzített megtakarítás-kibocsátás arányt ( $S/x$ ), vagy ezzel ismét ekvivalensen, egy stacionárius megtakarítási koefficiens, az  $s$ -t. Az előbbi kizárja a solowi sima tényezőhelyettesítést<sup>3</sup>, az utóbbi pedig a stacionárius jövedelemeloszlást implikálja. A tőke egy egysége  $1/b$  egységnyi kibocsátást fog eredményezni, ami viszont  $s/b$  egységnyi megtakarítást, azaz pótlólagos tőkeállományt úgy, hogy a tőkeállomány növekedési üteme egyenlő lesz  $s/b$ -vel. Mivel az output arányos a tőkével, az lesz a kibocsátás növekedési üteme is.

A fenti tőkefelhalmozási folyamat egy lehetséges megfogalmazásában most a  $b$  tőkekoefficiens úgy kezeljük, mint egy 'akcelerátor koefficiens'. Mivel az akcelerációs koefficiens tekinthető egy kívánatos tőke/kibocsátás aránynak is, ezért az azt a tőkenövekményt mutatja, ami szükséges ahhoz, hogy elérjük a kívánt tőke/kibocsátás arányt. Az  $i_{t-1}$  nettó beruházás a  $t-1$  periódusban egyenlő lesz a várható pótlólagos kibocsátásnak a  $b$ -szeresével<sup>4</sup>. A várható pótlólagos kibocsátást a következő periódusbeli várható kibocsátáskereslet,  $x_t^e$ , és a tényleges kibocsátás, az  $x_{t-1}$  közötti különbség definiálja. Azaz,

$$i_{t-1} = b(x_t^e - x_{t-1}). \quad (1)$$

A multiplikátor hatáson keresztül a tényleges kibocsátáskereslet a  $t-1$  évben egyenlő lesz a nettó beruházási szint,  $i_{t-1}$ , szorozva a multiplikátorral, azaz az  $s$  megtakarítási hányad reciprokával:

$$x_{t-1} = \frac{1}{s} i_{t-1}. \quad (2)$$

Más szavakkal, a pótlólagos hatékony keresletvárakozást a beruházási szint határozza meg a Harrod modellben, amely beruházást, a megtakarítási arányon keresztül, a tényleges kereslet egy bizonyos szintje generálja keynesi keretekben. Ekkor az (1) és (2) alapján, a várható keresletnek a ténylegeshez való aránya a  $t$  periódusban a következőképpen adható meg:

$$\frac{x_t^e}{x_t} = \frac{(s/b)x_{t-1} + x_{t-1}}{x_t}. \quad (3)$$

A várható növekedési ütem, amelyet  $\rho_t^e$ -vel jelölünk, a következő:

$$\rho_t^e = \frac{x_t^e - x_{t-1}}{x_{t-1}}. \quad (4)$$

A (3) és (4) alapján könnyen belátható, hogy a várható növekedési ütem úgy is definiálható, mint a megtakarítási koefficiens és a tőkekoefficiens hányadosa.

<sup>3</sup>Stacionárius állapotban azonban ez nem számít, mivel a tőkeintenzitás állandó, hasonlóan a tőke-kibocsátás arányhoz.

<sup>4</sup>Ennek az *akcelerációs elméletnek* a gyökerei Thomas Nixon Carver (1903), Albert Aftalion (1909), C. F. Bickerdike (1914) and John Maurice Clark (1917) munkáiban találhatók meg.

Az  $s/b$  növekedési ütemet, a várakozások realizálódása (*tökéletes előre-látás*), vagyis az  $x_t^e = x_t$  teljesülése esetén, Harrod 'garantált' növekedési ütemnek nevezte és  $\rho_w$ -vel jelölte, azaz,

$$\rho_w = s/b^r \quad (5)$$

ahol  $b^r$  a kitüntetett egyensúlyi növekedéshez tartozó tőkeoefficiens, vagy másképpen, a kibocsátásegységre jutó *ex ante* beruházást jelöli. Az (5), Keynes szellemében egy egyszerű *tautológiát* fogalmaz meg: a megtakarítás szükségszerűen megegyezik az *ex post* beruházással. Viszont nem szükségszerű megegyeznie az *ex ante* beruházással, ami —mint az alábbiakban látjuk— tőkefelesleghez vagy tőkehiányhoz vezethet.

Harrod a statikában az egyensúlyt, míg a dinamikában a növekedési ütemet és változásait tekintette központi fogalmakként, és a statika egyensúlyfogalmának a dinamika területén a folyamatos, egyensúlyi növekedés fogalmát feleltette meg. Az (5) egyenlet statikus (állandó) egyensúlyi növekedést fejez ki, amit időben kiterjesztve, azaz tekintve az  $\alpha(s/b^r - \rho_w) = \dot{\rho}_w$  differenciálegyenletet, ahol  $\alpha > 0$ ,  $\rho_w = s/b^r$  stacionárius (minden időpillanatban azonos) egyensúlyi növekedési ütemként is értelmezhető.

Definiálva a tényleges növekedési ütemet, a  $\rho_t$ -t, mint  $(x_t - x_{t-1})/x_{t-1}$ , hasonlóan  $\rho_t^e$ -hez, az alábbi következtetésekre juthatunk. Ha a beruházók a garantált  $\rho_w$  növekedési ütemnél nagyobbat anticipálnak, akkor a tényleges növekedési ütem,  $\rho_t$  meg fogja haladni még a magas várható növekedési ütemet is úgy, hogy azon érzés helyett, hogy túl sokat vártak, valószínűleg, inkább azt fogják érezni, hogy túl keveset vártak. A növekedési ütem és a beruházás ellentétes irányú mozgásaiból következik, hogy a tőkeállomány nem elégséges a stacionárius növekedés eléréséhez. Hasonlóan, ha a garantált növekedési ütemnél alacsonyabbat anticipálnak, akkor a tényleges növekedési ütem esni fog, még a várható növekedési ütemnél is jobban, és a beruházók úgy vélekedhetnek, hogy inkább túl sokat vártak, mint túl keveset. Ekkor tőkefelesleg van a gazdaságban<sup>5</sup>.

Tekintsük most a Harrod-féle növekedési modell alapján végzett alábbi számításainkat, ami a fentieket számszerűen is bemutatja:

Évek	Tőke- állomány	Nemzeti jövedelem	Kívánt tőke- állomány	Beruházás
$t$	$k_t = k_{t-1} + i_{t-1}$	$x_t^e = (1 + \rho_t^e) x_{t-1}$	$b^r x_t$	$i_t = s x_t^e$
1	400.00	100.00	400.00	12.00
2	412.00	102.00	408.00	12.24
3	424.24	104.04	416.16	12.48
4	436.72	106.12	400.48	12.73

1. táblázat.  $\rho_t^e = 2\%$ ,  $\rho_w = 3\%$ ,  $b^r = 4$ ,  $s = 12\%$ .

<sup>5</sup>A fentiek szerint a stacionárius növekedés instabilitása nyilvánvaló. Ez Harrod híres 'kés-él' problémája, egy legalább lokálisan instabil disequilibriumi dinamika, amelyet egy statikus multiplikátornak a várható eladásokon alapuló akceleratorral való mechanizmuson keresztül generáltunk, amint itt megmutattuk.

Az 1. táblázat számításaiból látható, hogy felesleges tőkeállomány képződik a garantálnál alacsonyabb tényleges növekedési ütem mellett, amiből Harrod arra következtetett, hogy a növekedési ütemnek,  $\rho_t$ -nek még tovább kell csökkennie. Megmutatható, hogy ha, például,  $\rho_t^e = 4\%$  ( $> \rho_w$ ), akkor tőkehiány keletkezik, ami viszont —követve a Harrod modell logikáját—  $\rho_t$  további növekedését eredményezi!

A továbbiakban vizsgáljuk a várakozások fenti, meglehetősen ortodox közelítéseit, a Harrod modell lokális és globális stabilitásait, valamint a nemlineáris dinamikus modell strukturális stabilitását, felhasználva a nemlineáris közgazdasági dinamika modern matematikai eszközeit.

A tőkekoefficiens eddig úgy definiáltuk, hogy az új tőkét elosztottuk azzal a teljes kibocsátás-növekménnyel, ami szükséges volt az új tőke előállításához. Feltételeztük, hogy az  $s$  megtakarítási koefficiens egy olyan paraméter, amelynek mértéke a gazdaság pszichológiai és társadalmi karakterisztikumaitól függ. Könnyen belátható, hogy a beruházások semlegessége és konstans reálkamatláb feltételezése mellett a stacionárius egyensúlyhoz szükséges  $b$  tőkekoefficiens szintén egy paraméter.

Statisztikai adatok igazolják Harrodot, amikor a megtakarítási koefficiens rövid távon, sokkok nélküli disequilibrium állapotban állandónak vette<sup>6</sup>. A stacionárius egyensúlyi állapoton kívül a tőkekoefficiensek azonban változnak, mégpedig a tőkeállomány tényleges keresletétől függően, ami tükrözi a reálkamatláb rugalmasságát, valamint a tényleges vagy a várt kibocsátást a  $t$  időben, azaz,

$$b_t = k_t/x_t \quad - \quad \text{a tényleges tőke/kibocsátás arány}$$

$$b_t^e = k_t/x_t^e \quad - \quad \text{a várt tőke/kibocsátás arány,}$$

és legyenek

$$b^r = k_r/x_r \quad - \quad \text{a kívánt (egyensúlyi) tőke/kibocsátás arány, amely konstans}$$

$$\rho_t = s/b_t \quad - \quad \text{növekedési ütem, ahol az } s \text{ konstans.}$$

Felteszünk továbbá egyféle disequilibriumot a tőkekoefficiensekre, ami a következő igazodási egyenletet eredményezi:

$$\Delta(\log \rho_t) = \gamma(b^r - b_t^e), \quad (6)$$

ahol  $\gamma > 0$ . Az igazodási folyamat megfelel Harrod állításának, csak itt most a kibocsátás növekedését a növekedési ütem logaritmikusan differenciáljaként specifikáltuk<sup>7</sup>, amelyet átalakítva:

$$\Delta(\log \rho_t) \approx \frac{\rho_{t+1} - \rho_t}{\rho_t}.$$

<sup>6</sup>Ennek indoklását lásd Szakolczai (1963, 183-84. o.). (Megjegyezzük, hogy Harrod egy kicsit átírta az 1939-es cikkét a magyar fordításhoz, amelyben  $s$  állandósága már sokkal nagyobb hangsúlyt kapott.)

<sup>7</sup>„Ha az *ex post* beruházás kisebb, mint az *ex ante* beruházás, ez azt jelenti, hogy a tőkeállomány egy nem kívánt csökkenése következett be, vagyis a termelő berendezésből elégtelen volt az ellátás, és ez ösztönözi fog a kibocsátás további bővítésére; fordítva, ha az *ex post* beruházás meghaladja az *ex ante* beruházást.” (Harrod, 1939, 19. o.) Harrod állítását, a maga általánosságában, Okishio (1964) formalizálta elsőként.

Elfogadva Harrod megjegyzését, miszerint a jobb oldalon a nevezőben  $\rho_t$  helyett írhatunk  $\rho_{t+1}$ -t, kapjuk

$$\frac{\rho_{t+1} - \rho_t}{\rho_{t+1}} = \left( \frac{s}{b_{t+1}} - \frac{s}{b_t} \right) \frac{b_{t+1}}{s} = -\frac{\Delta b_t}{b_t}. \quad (7)$$

Behelyettesítve ezt (6)-ba, és egyenlőséget írva  $\approx$  helyett, kapjuk

$$\Delta b_t = \gamma \left( \frac{b_t^e}{b_t} - b^r \right) b_t, \quad \gamma > 0. \quad (8)$$

Ezen felül feltesszük még, hogy a várt tőkekoefficiens,  $b_t^e$ , osztott késleltetésű, azaz,  $b_t^e$  függ a tényleges tőkekoefficiensről, és nemcsak az előző periódusbelitől, hanem a teljes múltbéli periódus-sorozatbelitől:

$$b_t^e = \beta_1 b_{t-1} + \beta_2 b_{t-2} + \beta_3 b_{t-3} + \dots \quad (9)$$

ahol  $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \dots = 1$  és  $\beta_i \geq 0$ .

Az egyszerűség kedvéért tekintsük most azt az esetet, amikor a késleltetés geometriai haladvány szerint osztott. A koefficiensek a (9)-ben a rögzített  $q$  hányados szerint csökkennek, ahol a  $q$  egy pozitív tört ( $0 < q < 1$ ), és végtelen sorozatot alkotnak; a sorozat tagjai:  $\beta, \beta q, \beta q^2, \beta q^3, \dots$ , ahol  $\beta > 0$  az első koefficiens. Minthogy azok összege egy,  $\beta + \beta q + \beta q^2 + \dots = 1$ , ezért felhasználva a végtelen geometriai sorozat összegző képletét, kapjuk:  $\beta/(1 - q) = 1$ , vagy  $q = 1 - \beta$ . Mivel  $0 < q < 1$ , ezért  $0 < \beta < 1$ .

Így a várható tőkekoefficiens:

$$b_t^e = \beta (b_{t-1} + q b_{t-2} + q^2 b_{t-3} + \dots). \quad (10)$$

Az egyszerűség kedvéért legyen  $S = \{(s_t)_{t=-\infty}^{\infty}\}$  a  $-\infty$ -től  $+\infty$ -ig indexezett valós sorozatok halmaza.  $s \in S$  esetén  $s = (\dots, s_{-1}, s_0, s_1, s_2, \dots)$   $s(t) = s_t$ .  $E : S \rightarrow S$  a balra tolás operátora, azaz  $(Es)(t) = s_{t+1}$ .  $E$  inverze,  $E^{-1} : S \rightarrow S$  a jobbra tolás operátora, azaz  $(E^{-1}s)(t) = s_{t-1}$ . Ezért (10) így is írható:

$$b^e = \beta E^{-1} (I + qE^{-1} + (qE^{-1})^2 + \dots) b,$$

ahol  $I : S \rightarrow S$  az identikus operátor.

Az  $I + qE^{-1} + (qE^{-1})^2 + (qE^{-1})^3 + \dots$  egy olyan  $S$ -ből  $S$ -be képező operátort definiál, amelynek az  $I - qE^{-1} : S \rightarrow S$  az inverze. Ezért

$$b^e = \beta E^{-1} (I - qE^{-1})^{-1} b$$

és

$$\begin{aligned}
 \Delta b_t^e &= b_{t+1}^e - b_t^e = (Eb^e)(t) - b^e(t) \\
 &= \beta(EE^{-1}(I - qE^{-1})^{-1}b)(t) - \beta(E^{-1}(I - qE^{-1})^{-1}b)(t) \\
 &= \beta((I - E^{-1})(I - qE^{-1})^{-1}b)(t) \\
 &= \beta((I - qE^{-1})(I - qE^{-1})^{-1}b)(t) - \beta((1 - q)E^{-1}(I - qE^{-1})^{-1}b)(t) \\
 &= \beta b(t) - (1 - q)b^e(t) \\
 &= \beta(b(t) - b^e(t)) \\
 &= \beta(b_t - b_t^e)
 \end{aligned}$$

Ezért a (9) geometriai osztott késletetés végül is:

$$\Delta b_t^e = \beta(b_t - b_t^e), \quad 1 > \beta > 0, \quad (11)$$

amely az adaptív várakozások hipotézisének<sup>8</sup> megfogalmazása diszkrét időben. Itt  $\beta$  egy pozitív és 1-nél kisebb koefficiens, és a késletetett várható tőkekoeficiensnek a tényleges tőkekoeficiensre vonatkozó reakciósebességét mutatja. Másképpen,  $\beta$  a késletetés időkonstansának a reciproka.

Folytonos időben legyen a  $\beta e^{-\beta\tau}$  az exponenciálisan osztott késletetés súlyfüggvénye. Ekkor

$$b^e(t) = \int_0^\infty \beta e^{-\beta\tau} b(t - \tau) d\tau.$$

Helyettesítve a  $(t - \tau)$ -t  $s$ -sel, kapjuk

$$b^e(t) = -\beta \int_t^{-\infty} e^{-\beta(t-s)} b(s) ds,$$

ahonnan

$$\frac{1}{\beta} e^{\beta t} b^e(t) = \int_{-\infty}^t e^{\beta s} b(s) ds.$$

Mindkét oldal  $t$  szerinti differenciálása után kapjuk a (11) folytonos alakjának megfelelő differenciálegyenletet:

$$\dot{b}^e(t) = \beta(b(t) - b^e(t)). \quad (11')$$

Hasonlóképpen a (8)-at is átírjuk folytonos alakba:

$$\dot{b}(t) = \gamma(b^e(t) - b^r) b(t). \quad (8')$$

Itt és a továbbiakban egy szimbólum feletti pont az idő szerinti deriváltat jelöli.

---

<sup>8</sup>Ezt kiterjedten használták a várható infláció (lásd például Cagan (1956)) és a permanens jövedelem (lásd Friedmann (1957)) modellezésére.

**1. Tétel.** Tekintsük a (8') és (11') által definiált

$$\begin{aligned} \dot{b} &= \gamma(b^e - b^r)b \\ \dot{b}^e &= \beta(b - b^e) \end{aligned} \quad (12)$$

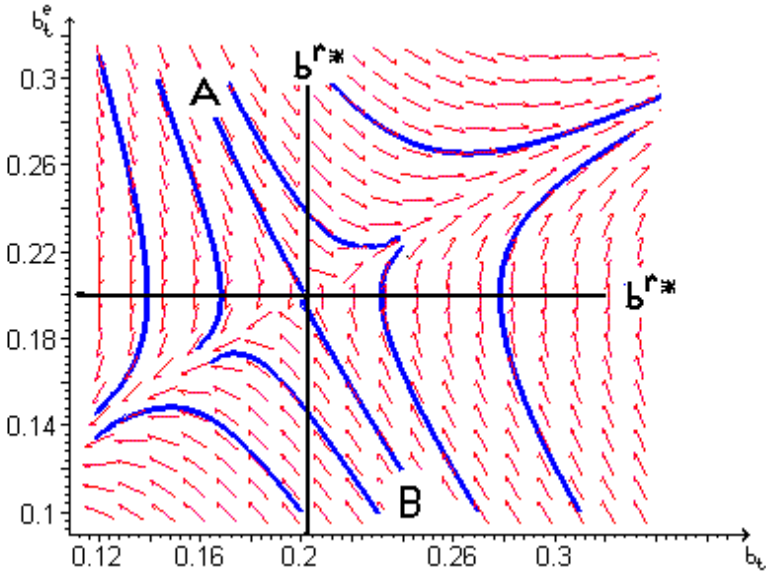
autonóm differenciálegyenlet-rendszert, ahol  $b^e$  és  $b$  ismeretlen függvények. Állítjuk, hogy:

(i) a rendszernek két egyensúlyi pontja van: az origó, amely stabil csomópont, és a  $(b^r, b^r)$  pont, amely instabil nyeregpont;

(ii) a  $(b^r, b^r)$  nyeregpont stabil sokasága két részre osztja a fázissíkot, a jobb oldali részből induló trajektóriák a plusz végtelenbe, a bal oldali részből indulók pedig az origóba tartanak;

(iii) a rendszer strukturálisan stabil.

(A bizonyításokat lásd később.) A várakozásokkal megfogalmazott nemlineáris modell dinamikájának fázisdiagramja az 1. ábrán látható, 1:10 méretarányosan.



1. ábra. Adaptív várakozású Harrod modell fázisdiagramja

A  $(b^r, b^r)$  pontban  $\rho = \rho^e = \rho_w$ ; ha  $b^r > b^e$ , akkor  $\dot{\rho}/\rho = -\dot{b}/b > 0$ , és az  $(AB)$  alsó részén, pozitív relatív sebességgel utazunk az egyensúlyi pontba, ha viszont  $b^r < b^e$ , akkor  $\dot{\rho}/\rho < 0$ , és így az  $(AB)$  felső részén, negatív relatív sebességgel közelítünk a  $(b^r, b^r)$  pontba. A  $(AB)$  stabil halmaz a "harrodi" késél, ettől balra az összes trajektória a  $(0,0)$ -ba, a tőle jobbra levők pedig a  $\infty$ -be tartanak. A valós szektort ezért a multiplikátor-akcelerator interakciók és az adaptív várakozások mechanizmusa által kreált késél helyzet jellemzi. Hangsúlyozandó azonban, hogy ezek az instabil növekedési dinamikák tükrözik a reálkamatláb rugalmasságát is a változó tőkeállományon keresztül.



Nézzük most a tökéletes előrelátás esetét. Tekintsük a  $b = b^e$  egyenletet, ami a (11') egyenlet elhagyását vonja maga után és csak a (8') mutatja a megfelelő dinamikát a  $b = b^e$  helyettesítéssel:

$$-\frac{\dot{b}}{b} = \gamma(b^r - b), \quad \gamma > 0. \tag{13}$$

Ebből a  $b = s/\rho$  és  $b^r = s/\rho_w$  helyettesítések után kapjuk:

$$(\log \rho) = s\gamma \left( \frac{1}{\rho_w} - \frac{1}{\rho} \right). \tag{14}$$

Ez a folytonos idejű nemlineáris dinamikus rendszer egy kumulatív folyamatot tükröz; azaz, egy tetszőleges pillanatnyi diszkrepancia  $\rho_w$  és  $\rho$  között a növekedési ütem növekedését vagy csökkenését eredményezi, amit a 2. ábra mutat.

**2. Tétel.** *A tökéletes előrelátás mellett*

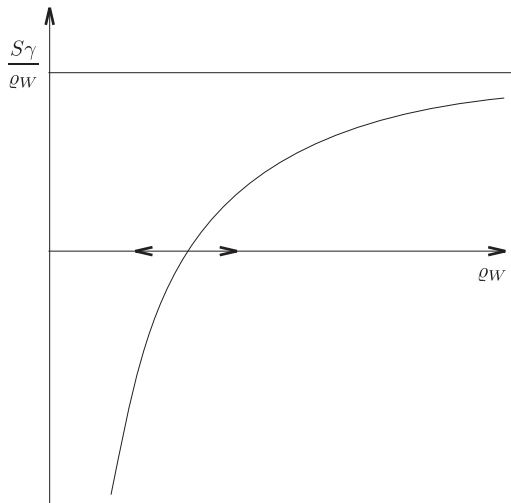
- (i) *a harrodi egyensúlyi állapot mind lokálisan, mind globálisan instabil;*
- (ii) *a (14)-re redukált modell strukturálisan stabil.*

**Bizonyítás.** (i) Az egyensúlyi dinamika lokális instabilitása könnyen igazolható a (14)-hez tartozó Jacobi mátrix segítségével, minthogy a  $\rho_w$  egyensúlynál értékelve  $J_{\rho=\rho_w} = \gamma s/\rho_w^2 > 0$ . A globális instabilitás bizonyítása triviális.

(ii) Lásd később.

Q.E.D.

A 2. Tétel következményei kompatibilisek az előbbieken mondott "kés-élen" történő Harrodi mozgásokkal.



2. ábra. A növekedési ütem változása tökéletes előrelátású Harrod modellben

### 3 Strukturális stabilitás speciális dinamikai rendszerekre

Ebben a pontban az egy- és kétdimenziós speciális dinamikai rendszerek globális strukturális stabilitásának bizonyításához szükséges fogalmakat és tételeket tárgyaljuk, hogy bebizonyíthassuk az 1. Tételt és a 2. Tétel (ii) állítását.

Az  $M$  jelöljön vagy egy nyitott halmazt az  $R^n$ -ben, vagy pedig egy  $n$ -dimenziós kompakt differenciálható sokaságot, amely legalább  $C^2$ -sima, és az  $R^N$ -nek részhalmaza valamely  $N \in [n, 2n + 1]$  egészre. Speciálisan itt elegendő azt az esetet tekinteni, amikor  $M$  az  $R^1$  vagy  $R^2$  nyitott részhalmaza, vagy pedig  $M = S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$  a 3-dimenziós egységgömb 2-dimenziós felülete, de az alábbiak általánosabban is igazak.

Legyen  $f$  egy  $C^1$ -vektormező  $M$ -en. Ha  $M \subset R^n$  nyitott, akkor ez azt jelenti, hogy egy  $f \in C^1(M, R^n)$  függvény adott. Ha pedig  $M$  egy  $n$ -dimenziós sokaság, akkor  $f : M \rightarrow R^N$  úgy, hogy  $f(p) \in T_p M$  minden  $p \in M$ -re, ahol  $T_p M$  az  $M$  érintőtere  $p$ -ben. Ha  $\{(U_j, h_j)\}_{j=1}^m$  az  $M$  egy atlasza, és  $V_j = h_j(U_j)$ , akkor vannak  $f_j : V_j \rightarrow R^n$  függvények úgy, hogy

$$f(h_j^{-1}(x)) = Dh_j^{-1}(x) f_j(x)$$

minden  $x \in V_j$  esetén, és az  $f_j : V_j \rightarrow R^n$  függvények  $C^1$ -simasága esetén mondjuk, hogy  $f$  egy  $C^1$ -vektormező  $M$ -en.

Tekintsük az

$$x' = f(x) \tag{15}$$

differenciálegyenletet az  $M$ -en. Bármely  $x^0 \in M$ -hez van egyetlen  $\varphi(\cdot, x_0) : I(x_0) \rightarrow M$  megoldásgörbe, amelynek az  $I(x_0)$  a maximális létezési intervalluma,  $I(x_0) \subset R$  nyitott intervallum,  $0 \in I(x_0)$ , az  $I(x_0) \ni t \rightarrow \varphi(t, x_0) \in M$  görbe érintője a  $t$  pontban a vektormező  $f(\varphi(t, x_0))$  eleme. Továbbá teljesül, hogy  $\varphi(0, x) = x$ ,  $\varphi(t + s, x) = \varphi(t, (\varphi(s, x)))$ , és az  $- = \{(t, x) \in R \times M : t \in I(x)\}$  definícióval  $\varphi : - \rightarrow M$  folytonosan differenciálható, azaz  $\varphi$  egy  $C^1$ -sima dinamikai rendszer  $M$ -en.

Legyen  $g$  egy másik  $C^1$ -vektormező  $M$ -en, és tekintsük az

$$x' = g(x) \tag{16}$$

differenciálegyenletet, amely a  $\psi$ -vel jelölt  $C^1$ -sima dinamikai rendszert definiálja. A  $\varphi$  és  $\psi$  dinamikai rendszereket (azaz a (15) és (16) egyenleteket) topologikusan ekvivalensnek nevezzük, ha létezik egy  $h : M \rightarrow M$  homeomorfizmus (azaz folytonos ráképezés, amelynek van inverze, és az is folytonos), amely  $\varphi$  pályáit átviszi a  $\psi$  pályáiba, azaz a  $\{\varphi(t, x) : t \in I(x)\}$  halmazokat a  $\{\psi(t, x) : t \in I(h(x))\}$  halmazokba, miközben a  $t$  időparaméter által definiált irányítást változtatlanul hagyja.

A  $\varphi$  dinamikai rendszert strukturálisan stabilnak nevezzük, ha topologikusan ekvivalens minden hozzá elegendően közeli dinamikai rendszerrel valamely topológiában. Az alábbiakban, amikor strukturális stabilitásról beszélünk, specifikálni fogjuk a topológiát, amelyben a közelséget definiáljuk.

Jól ismert, hogy ha  $M$  kompakt sokaság, akkor az  $M$ -en definiált  $f$ , azaz  $C^1$ -vektormező által generált  $\varphi$  dinamikai rendszerre  $I(x) = (-\infty, \infty)$  minden  $x \in M$  esetén.

Ha  $M \subset R^n$  nyitott, akkor a  $\varphi$ -re  $I(x) = (-\infty, \infty)$  nem feltétlenül teljesül. Van azonban egy standard technika az idő átskálázásában úgy, hogy  $I(x) = (-\infty, \infty)$  legyen minden  $x \in M$ -re. Ha  $M \subset R^n$  nyitott és  $f \in C^1(M, R^n)$ , akkor létezik egy  $F \in C^1(M, R^n)$  függvény úgy, hogy az

$$x' = F(x)$$

egyenlet olyan  $\Phi : R \times M \rightarrow M$  dinamikai rendszert definiál, amelyre  $\Phi(t, x)$  minden  $t \in (-\infty, \infty)$  esetén értelmezett, továbbá  $\Phi$  és  $\varphi$  topologikusan ekvivalensek. Ha  $M = R^n$ , akkor pl.

$$F(x) = \frac{f(x)}{1 + |f(x)|}$$

jó választás, ahol  $|f(x)| = \left(\sum (f_i(x))^2\right)^{1/2}$ .

Így a fentiek alapján a továbbiakban mindig feltehetjük, hogy  $I(x) = (-\infty, \infty)$  minden  $x \in M$ -re.

## (A) A kétdimenziós eset

### (A1) Kompakt kétdimenziós sokaságok

Ha  $f$  egy  $C^1$ -vektormező a 2-dimenziós, kompakt, differenciálható  $M$  sokaságon, és  $\{(U_j, h_j)\}_{j=1}^m$  egy atlasz  $M$ -en, akkor az  $f$  vektormező  $C^1$ -normáját az

$$\|f\|_1 = \max_{j \in \{1, \dots, m\}} \|f_j\|_1$$

formulával definiálhatjuk, ahol  $V_j = h(U_j) \subset R^2$  és  $f_j : V_j \rightarrow R^2$   $C^1$ -beli függvények,  $\|f_j\|_1 = \sup_{x \in V_j} (|f_j(x)| + |Df_j(x)|)$ . Az  $f$  vektormező strukturálisan stabil, ha létezik  $\varepsilon > 0$  úgy, hogy minden olyan  $M$ -en definiált és  $g$ -vel jelölt  $C^1$ -vektormezőre, amelyre

$$\|f - g\|_1 < \varepsilon$$

teljesül, a  $g$  topologikusan ekvivalens  $f$ -fel.

Legyen

$$\text{Per}(\varphi) = \{x \mid \exists t > 0 \text{ úgy, hogy } \varphi(t, x) = x\}$$

a periodikus pontok halmaza;

$$-(\varphi) = \{x \mid \exists x_n \rightarrow x, \exists t_n \rightarrow \infty \text{ úgy, hogy } \varphi(t_n, x_n) \rightarrow x\}$$

a nem-vándorló pontok halmaza.

A  $\text{Per}(\varphi)$ -beli pályák két típusa különböztethető meg: egyensúlyi pontok és periodikus pályák. A  $p$  hiperbolikus egyensúlyi pont egy olyan pont, amelyre  $\varphi(t, p) = p$  minden  $t$ -re, továbbá a  $Df(p)$  sajátértékeinek valós

része nem nulla. Ha mindkét sajátérték valós része negatív (pozitív), akkor minden  $p$ -hez közeli pont  $p$  felé mozog az idő előre haladtával (hátra haladtával), és  $p$  egy nyelő (forrás). Azon pontok összességét az  $M$ -ben, amelyek tartanak a nyelő (forrás) felé az idő előre haladtával (hátra haladtával), vonzási (taszítási) medencének nevezzük. Ha a hiperbolikus nyugalmi pont se nem nyelő, se nem forrás, akkor egy nyeregpont. Ebben az esetben két kitüntetett pálya-pár van, a  $p$  stabil (instabil) szeparatrixei, mindkettőnek megfelelő irányítása van. A  $p$  és  $q$  fix nyeregpontok közötti összeköttetés ( $p = q$  is lehetséges) olyan pálya, amely egyidejűleg a  $q$ -nak stabil és a  $p$ -nek instabil szeparatrixe.

A  $\text{Per}(\varphi)$ -beli periodikus pálya hiperbolikus, ha a pálya fölött a  $\text{div } f$  integráljaként definiált (Floquet vagy Ljapunov-féle) karakterisztikus kitevő nem zérus. Ha a kitevő negatív (pozitív), akkor a pálya periodikus nyelő (forrás), s a nyugalmi ponttal analóg definiáljuk a vonzási (taszítási) medencéket.

Peixoto tétele teljesen jellemzi a strukturálisan stabil  $C^1$ -vektormezőket a kompakt 2-dimenziós sokaságokon.

**A.1 Tétel** (Peixoto, 1962). *Az  $M$  kompakt, kétdimenziós, differenciálható sokaságon definiált  $\varphi$  dinamikai rendszer strukturálisan stabil pontosan akkor, ha a következő három feltétel teljesül:*

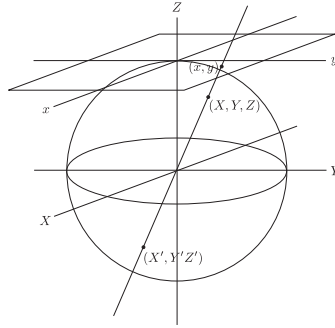
- (i)  $-\text{Per}(\varphi) = \text{Per}(\varphi)$ ;
- (ii) minden  $\text{Per}(\varphi)$ -beli pálya hiperbolikus;
- (iii) nincsenek nyereg-összeköttetések.

Bizonyos síkbeli vektormezőkre is alkalmazható a Peixoto tétel. Ebben az esetben vehetjük a végtelen sík ( $R^2$ ) Poincaré-féle sztereografikus leképezését a gömb felszínére, ami a végtelen síkot (együtt a dinamikai rendszer fázisportréjával) kompakt sokaságba transzformálja.

Egy végtelen sík pontjainak az egységsugarú gömb

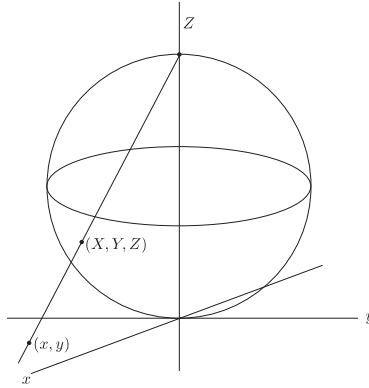
$$S^2 = \{(X, Y, Z) \in R^3 \mid X^2 + Y^2 + Z^2 = 1\}$$

felszínére történő leképezéséhez a középpontos vetítést használjuk. A végtelen  $xy$ -sík pontjainak a leképezése az  $S^2$  felszínre úgy történik, hogy a sík origóját a gömb északi pólusára helyezzük és az érintő sík minden egyes pontját a gömb középpontján áthaladó egyenessel összekötjük. Az egyenes a gömb felszínén kétszer megy keresztül, mégpedig ellentétes pontokon. Az  $xy$ -sík origóját az északi és déli pólusokra, az összes végtelenbeli pontját pedig az  $S^2$  egyenlítőjére képezzük le (lásd a 3. ábrát). Ha az  $xy$ -sík pontjait ezzel a technikával vetítjük az  $S^2$ -re, az így előállított gömböt Poincaré gömbnek nevezzük.



3. ábra.

Ettől megkülönböztetjük a Bendixson gömböt, amikor az  $xy$ -síknak az origóját a déli pólusra helyezzük és az északi pólusból kiinduló egyenesekkel kötjük össze a sík egyes pontjait, ami a sík pontjainak megfelelően egy pontot az  $S^2$ -en, a végtelenben levő pontjai pedig mind az északi pólusra kerülnek (lásd a 4. ábrát).



4. ábra.

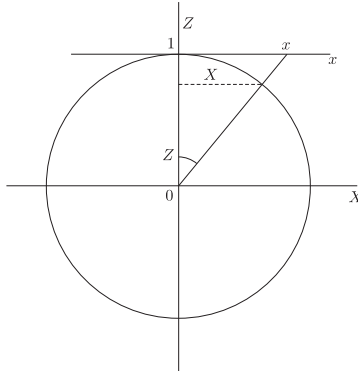
Az  $xy$ -síknak az  $S^2$  felső félgömbre történő középpontos vetítésének keresztmetszete (lásd az 5. ábrát) alapján az alábbi összefüggést írhatjuk fel a sík és a gömb tetszőleges pontjainak koordinátái között:

$$x = \frac{X}{Z}, \quad y = \frac{Y}{Z} \tag{17}$$

amelyeket behelyettesítve a gömb egyenletébe, kapjuk:

$$(xZ)^2 + (yZ)^2 + Z^2 = 1$$

$$Z = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$$



5. ábra.

Így az egy-egy értelmű megfeleltetés a felső félgömb ( $Z > 0$ )  $(X, Y, Z)$  pontjai és az  $xy$ -sík pontjai között a következő:

$$X = \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, \quad Y = \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, \quad Z = \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}.$$

Megjegyezzük, hogy a  $(0, 0) \in R^2$  origó megfelel a  $(0, 0, 1) \in S^2$  északi pólusnak, a végtelenbeli pontjai pedig az  $S^2$  egyenlítőjének. Így bármely két ellentétes pont az  $S^2$  egyenlítőjén az  $R^2$ -nek ugyanazon végtelenbeli pontját mutatja. Ez a megfeleltetés lehetővé teszi, hogy megjelenítsük egy síkbeli dinamikai rendszer által indukált áramlást a Poincaré gömbön. Az ellentétes pontok környezetében az áramlások topológiailag ekvivalensek lesznek, eltekintve attól, hogy az áramlások iránya megfordulhat.

A tétel megfogalmazásához szükségünk lesz bizonyos kikötésekre. Tekintjük most az

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P(x, y) \\ \dot{y} &= Q(x, y) \end{aligned} \tag{18}$$

egyenletrendszer által definiált dinamikai rendszert, és tegyük fel, hogy mind a  $P(x, y)$ , mind a  $Q(x, y)$  az  $x, y$  változóknak maximum  $m$ -ed fokú polinomiális függvényei. Azaz,

$$\begin{aligned} P(x, y) &= P_1(x, y) + \dots + P_m(x, y), \\ Q(x, y) &= Q_1(x, y) + \dots + Q_m(x, y), \end{aligned}$$

ahol  $P_j$  és  $Q_j$  homogén  $j$ -ed fokú polinomok  $x$ -ben és  $y$ -ban. Az A.2 Tétel azt írja le, hogy hogyan határozhatók meg a fenti dinamikai rendszer egyensúlyi pontjai az  $S^2$  egyenlítőjén. Az ötlet Poincarétól ered (lásd még Lefschetz (1962), Perko (1991) és Andronov et al. (1966)).

**A.2 Tétel.** *A végtelenbeli egyensúlyi pontok az  $m$ -ed fokú polinomiális rendszerre a Poincaré gömb egyenlítőjének  $(X, Y, 0)$  pontjaiban jelennek meg, ahol  $X^2 + Y^2 = 1$  és*

$$XQ_m(X, Y) - YP_m(X, Y) = 0,$$

vagy ezzel ekvivalensen, a

$$G_{m+1}(\theta) \equiv \cos \theta Q_m(\cos \theta, \sin \theta) - \sin \theta P_m(\cos \theta, \sin \theta) = 0$$

egyenletet kielégítő  $\theta_j$  és  $\theta_j + \pi$  poláris szögekben. Ennek az egyenletnek legfeljebb  $m+1$  számú  $\theta_j$  és  $\theta_j + \pi$  gyökpárja van, hacsak  $G_{m+1}(\theta)$  nem azonosan zérus. Ha  $G_{m+1}(\theta)$  nem azonosan zérus, akkor az áramlás a Poincaré gömb egyenlítőjén az óramutató járásával ellentétes irányú azon pontokban, amelyek megfelelnek az olyan  $\theta$  poláris szögeknek, amelyekre  $G_{m+1}(\theta) > 0$ , és megegyező irányúak azokban, ahol  $G_{m+1}(\theta) < 0$ .

**Bizonyítás.** Az (17)-ből a következő egyenleteket kapjuk:

$$dx = \frac{ZdX - XdZ}{Z^2} \quad \text{és} \quad dy = \frac{ZdY - YdZ}{Z^2}.$$

A (18) átrendezésével kapjuk a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} \quad \text{vagy} \quad Q(x, y) dx - P(x, y) dy = 0 \quad (19)$$

egyenleteket. Megjegyezzük, hogy ezáltal eltűnt az időfüggőség. Behelyettesítve a (17)-et a (18)-ba, kapjuk:

$$Q(ZdX - XdZ) - P(ZdY - YdZ) = 0, \quad (20)$$

ahol  $P = P\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right)$  és  $Q = Q\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right)$ . Távolítsuk most el a törtet a (20)-ból  $Z^m$ -mel törtető beszorzással:

$$(Q^*dX - P^*dY)Z + (YP^* - XQ^*)dZ = 0, \quad (21)$$

ahol  $P^*(X, Y, Z) = Z^m P\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right)$  és  $Q^*(X, Y, Z) = Z^m Q\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right)$  polinomiális függvények  $X, Y$  és  $Z$ -ben. Az egyenlet determináns-egyenlet alakjában is felírható:

$$\begin{vmatrix} dX & dY & dZ \\ X & Y & Z \\ P^* & ZQ^* & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

A (21) az  $R^2$ -en lévő (18) síkbeli rendszer által definiált  $S^2$ -beli dinamikai rendszert képviseli. Így ahhoz, hogy a (18)-at a végtelenben tanulmányozzuk, elegendő a (21)-et vizsgálunk az  $S^2$  egyenlítőjének környezetében. Vegyük a  $Z = 0$  esetet, ami (21)-ből az

$$(YP^* - XQ^*)dZ = 0$$

egyenletet adja. Az  $YP^* - XQ^* \neq 0$ -ra igaznak kell lennie, hogy a  $dZ = 0$ , ami azt implikálja, hogy az egyenlítőn levő trajektóriáknak az  $S^2$  egyenlítőjén kell maradniuk. Így az egyensúlyi pontok az egyenlítőn az

$$YP^* - XQ^* = 0$$

egyenlettel adottak. Figyelembe véve, hogy  $P(x, y) = P_1(x, y) + \dots + P_m(x, y)$  és  $Q(x, y) = Q_1(x, y) + \dots + Q_m(x, y)$ , kapjuk

$$\begin{aligned} 0 &= YP^* - XQ^* \\ &= Z^m Y P_1\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) + \dots + Z^m Y P_m\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) \\ &\quad - Z^m X Q_1\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) - \dots - Z^m X Q_m\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) \\ &= Z^{m-1} Y P_1\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) + \dots + Y P_m\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) \\ &\quad - Z^{m-1} X Q_1\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) - \dots - X Q_m\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right). \end{aligned}$$

Az  $S^2$  egyenlítőjén  $Z = 0$ , ami az A.2 Tétel első állítását adja,

$$XQ_m(X, Y) - YP_m(X, Y) = 0. \quad (22)$$

Vagyis az  $S^2$  egyenlítőjén lévő egyensúlyi pontok meghatározása az  $X^2 + Y^2 = 1$  és a (22) egyenletrendszer megoldásával lehetséges. Polárkoordinátákban,  $r = 1$  mellett, az alábbi egyenlet adja az A.2 Tétel második állítását:

$$\cos \theta Q_m(\cos \theta, \sin \theta) - \sin \theta P_m(\cos \theta, \sin \theta) = 0.$$

Ez a

$$\dot{\theta} = \frac{XQ - YP}{r^2}$$

egyenletből származtatható, amely a síkbeli koordinátákat polárkoordinátákba transzformálja.  $\theta$ -ben a legmagasabb fokú tagokat zérusnak választva, meghatározhatjuk az egyensúlyi pontokat a végtelenben. Végül, az áramlás irányát a végtelenben a  $\theta$  legmagasabb fokú tagjának előjele határozza meg, azaz, hogy  $\theta$  növekvő vagy csökkenő-e.

Q.E.D.

Ahhoz, hogy az áramlás viselkedését elemezzük az  $S^2$  egyenlítőjén lévő egyensúlyi pontok közelében, a legkönnyebben úgy járhatunk el, ha az áramlást kivetítjük a Poincaré gömbről a megfelelő érintő síkokra, ahol alkalmazható az  $R^2$ -beli dinamikai rendszerekre vonatkozó elmélet.

**A.3 Tétel.** *Az  $S^2$  Poincaré gömb egyenlítőjén a (21) tetszőleges, kivéve a  $(0, \pm 1, 0)$  pontokat, egyensúlyi pontjának környezetében a (21) által definiált dinamikai rendszer topológiailag ekvivalens a*

$$\begin{aligned} \pm \dot{y} &= yz^m P\left(\frac{1}{z}, \frac{y}{z}\right) - z^m Q\left(\frac{1}{z}, \frac{y}{z}\right) \\ \pm \dot{z} &= z^{m+1} P\left(\frac{1}{z}, \frac{y}{z}\right), \end{aligned}$$

*rendszer által definiált dinamikai rendszerrel, ahol az előjeleket az  $S^2$  egyenlítőjén lévő dinamikai rendszer iránya határozza meg, amit az A.2 Tétel határoz meg. Hasonlóan, a (21) által definiált dinamikai rendszer a (21)*



tetszőleges kritikus pontjának környezetében az  $S^2$  egyenlítőjén, a  $(\pm 1, 0, 0)$  pontok kivételével, topológiailag ekvivalens a

$$\begin{aligned}\pm \dot{x} &= xz^m Q\left(\frac{x}{z}, \frac{1}{z}\right) - z^m P\left(\frac{x}{z}, \frac{1}{z}\right) \\ \pm \dot{z} &= z^{m+1} Q\left(\frac{x}{z}, \frac{1}{z}\right)\end{aligned}$$

rendszer által meghatározott dinamikai rendszerrel, ahol az előjeleket az  $S^2$  egyenlítőjén lévő dinamikai rendszer iránya pontosítja, amit ugyancsak az A.2 Tétel határoz meg.

**Bizonyítás.** Az egyenlítőn lévő egyensúlyi pont közelében tekintsük a (21) által definiált  $S^2$ -n lévő egyenletet:

$$(Q^* dX - P^* dY) Z + (Y P^* - X Q^*) dZ = 0 .$$

Ahhoz, hogy meghatározzuk a pályák viselkedését az  $S^2$  egyenlítőjén lévő egyensúlyi pontjainak környezetében az  $X > 0$  félgömbön, kivéve a  $(0, \pm 1, 0)$  pontokban, elegendő lesz az  $X = 1$  síkra történő vetítés. A középpontos vetítés keresztmetszetén a hasonló háromszögek felhasználásával kapjuk az  $y = \frac{Y}{X}$  és  $z = \frac{Z}{X}$  összefüggéseket. Az  $X = 1$  mellett  $Y = y$  és  $Z = z$ . Felhasználva ezt a vetítést  $dX = 0$ -val (21)-ből az alábbiakat kapjuk:

$$-zP^*\left(\frac{1}{z}, \frac{y}{z}\right) dy + \left(yP^*\left(\frac{1}{z}, \frac{y}{z}\right) - Q^*\left(\frac{1}{z}, \frac{y}{z}\right)\right) dz = 0 ,$$

vagyis

$$\left(yz^m P\left(\frac{1}{z}, \frac{y}{z}\right) - z^m Q\left(\frac{1}{z}, \frac{y}{z}\right)\right) dz - z z^m P\left(\frac{1}{z}, \frac{y}{z}\right) dy = 0 .$$

Megjegyezzük, hogy ez a leképezés vetíti le az  $X > 0$  félgömbön az  $S^2$  egyenlítőjétől távol lévő egyensúlyi állapotokat az  $yz$ -síkon. Azt is megjegyezzük, hogy ez a kifejezés a (19)-hez hasonló alakban van, és hogy ez az alak nem függ az időtől. Az eredmény az, hogy az áramlás iránya ismeretlen. Visszarendevezve az utolsó egyenletet az időtől függő differenciálegyenlet-rendszerbe, az A.3 Tétel állítását kapjuk:

$$\begin{aligned}\pm \dot{y} &= yz^m P\left(\frac{1}{z}, \frac{y}{z}\right) - z^m Q\left(\frac{1}{z}, \frac{y}{z}\right) \\ \pm \dot{z} &= z^{m+1} P\left(\frac{1}{z}, \frac{y}{z}\right) .\end{aligned}$$

Itt a  $\pm$  jelet használjuk annak jelölésére, hogy az áramlás iránya pontosan nem ismert, a helyes előjelet az A.2 Tétel alkalmazásával határozhatjuk meg.

Hasonlóan, az  $Y = 1$  síkra történő vetítés eredményezi az A.3 Tétel második állítását.

Q.E.D.

A (18) egyenletből kiindulva kapunk egy  $\varphi$  dinamikai rendszert az  $S^2$  gömb-felületen, amelynek az egyenlítőre eső, ill. annak közelében levő dinamikáját az A.2 és A.3 Tételek alapján vizsgálhatjuk. Ha  $\varphi$ -nek az  $S^2$ -en nincs nyereg-összeköttetése, akkor az  $S^2$ -re vonatkozó Poincaré-Bendixson tétel (lásd pl. Perko, 1991) alapján  $-(\varphi) = \text{Per}(\varphi)$  következik. Így a Peixoto tétel következménye az alábbi:

**A.4 Tétel.** *Ha (18)-ban a  $P$  és  $Q$  polinomok, akkor a  $(P, Q)^T$  vektormező strukturálisan stabil, ha a fenti módon az  $S^2$  gömbfelületen kapott  $\varphi$  dinamikai rendszerre teljesül az alábbi két feltétel:*

- (i)  $\text{Per}(\varphi)$  csak véges sok pályát tartalmaz, és azok mindegyike hiperbolikus;
- (ii) nincsenek nyereg-összeköttetések.

Az A.4 Tételben a vektormezők közelségét az erős (vagy Whitney)  $C^1$ -topológia értelmében definiáljuk. Azaz az  $f \in C^1(R^2, R^2)$  síkbeli vektormezőt (vagy az általa definiált  $\varphi$  dinamikai rendszert) strukturálisan stabilnak nevezzük, ha létezik  $\varepsilon : R^2 \rightarrow R$  folytonos és pozitív függvény úgy, hogy minden olyan  $g \in C^1(R^2, R^2)$  vektormezőre,

$$|f(x) - g(x)| + |Df(x) - Dg(x)| < \varepsilon(x) \quad (\forall x \in R^2)$$

teljesül, a  $\varphi$  (és a  $g$  általt definiált)  $\psi$  dinamikai rendszerek topológiailag ekvivalensek, továbbá az ekvivalenciát biztosító  $h : R^2 \rightarrow R^2$  homeomorfizmus közel van az identikus leképezéshez (a minden kompakt halmazon egyenletes konvergencia topológiájában).

Megjegyezzük, hogy az A.4 Tétel csak elegendő feltételt ad a strukturális stabilitásra. Előfordulhat, hogy  $\varphi$  nem strukturálisan stabil, de  $(P, Q)^T$  igen. Az ok: az  $S^2$  gömbfelületre vetítés létrehozhat nem hiperbolikus egyensúlyi helyzeteket az egyenlítőn.

## (A2) Nem kompakt sokaságokon értelmezett dinamikai rendszerek

Bizonyos esetekben, mint most a miénkben is, a végtelen sík gömbfelszínre történő vetítése biztosítja a kompakt sokaságot, de ez létrehozhat az egyenlítőn nem hiperbolikus egyensúlyi helyzeteket is. Az ilyen degenerált esetekre dolgozták ki a Kotus-Krych-Nitecki tételt, amely 2-dimenziós nem kompakt sokaságokon értelmezett dinamikai rendszerek strukturális stabilitására ad elégséges feltételeket. Mi itt az általánosabb tételnek csak az egész síkra értelmezett vektormezőkre vonatkozó speciális esetét tárgyaljuk, amikor is a feltételek szükségesek és elegendők. A strukturális stabilitást az (A1) szakasz végén bevezetett módon értelmezzük, azaz az erős (Whitney)  $C^1$  topológiát használjuk.

A továbbiakban a  $\varphi$  dinamikai rendszerre vonatkozóan bevezetünk néhány fogalmat.

Az  $x \in R^2$ -n átmenő pálya, pozitív pálya, negatív pálya az alábbi:

$$O(x) = \{\varphi(t, x) : t \in R\},$$

$$O^+(x) = \{\varphi(t, x) : t > 0\},$$

$$O^-(x) = \{\varphi(t, x) : t < 0\}.$$

Az  $M \subset R^2$  halmaz pozitív (negatív) invariáns, ha  $x \in M$ -ből  $O^+(x) \subset M$  ( $O^-(x) \subset M$ ) következik.  $M$  invariáns, ha pozitív és negatív invariáns.

Az  $M \subset R^2$  halmaz minimális, ha  $M$  kompakt és invariáns, továbbá nincs olyan valódi részhalmaza, amely kompakt és invariáns. Triviális minimális halmazok az egyensúlyi pontok és a nemtriviális periodikus pályák.

Az  $\alpha(x)$  és  $\omega(x)$  limeszhalmazok definíciói:

$$\alpha(x) = \{y : \exists (t_n) \text{ sorozat úgy, hogy } t_n \rightarrow -\infty \text{ és } \varphi(t_n, x) \rightarrow y\}$$

$$\omega(x) = \{y : \exists (t_n) \text{ sorozat úgy, hogy } t_n \rightarrow +\infty \text{ és } \varphi(t_n, x) \rightarrow y\}$$

Azt mondjuk, hogy az  $O(x)$  pálya oszcilláló, ha  $\alpha(x) \cup \omega(x)$  nem kompakt. A

$$J^+(x) = \{y : \exists (t_n \rightarrow +\infty), \exists (x^n \rightarrow x) \text{ sorozatok úgy, hogy } \varphi(t_n, x^n) \rightarrow y\}$$

halmaz az  $x$  első pozitív prolongációs limeszhalmaza.

Tegyük fel, hogy  $x_0$  egyensúlyi helyzet és nyeregpont. Jól ismert, hogy ekkor létezik stabil és instabil halmaza. A stabil (instabil) halmazt két-két pálya alkotja. Az  $x_0$  nyeregpont stabil (instabil) szeparatrixeinek nevezzük a stabil (instabil) halmazt alkotó 2 pályát.

Azt mondjuk, hogy  $x, y \in R^2$  esetén az  $O^+(x)$  és  $O^-(y)$  félpályák nyeret alkotnak a  $\infty$ -ben, ha  $\omega(x) = \emptyset$ ,  $\alpha(y) = \emptyset$  és  $y \in J^+(x)$ . A nyeregnek az  $O^+(x)$  stabil, az  $O^-(y)$  instabil szeparatrixe.

Jelölje  $W^+$  ( $W^-$ ) a végesben lévő nyeregpontok stabil (instabil) szeparatrixeinek és a  $\infty$ -ben lévő stabil (instabil) szeparatrixeinek egyesítését. Ekkor érvényes az alábbi tétel:

**A.5 Tétel** (Kotus, Krych and Nitecki, 1982). *A  $\varphi$  dinamikai rendszer pontosan akkor strukturálisan stabil, ha*

- (i) minden minimális halmaza triviális;
- (ii) nincs oszcilláló pályája;
- (iii)  $\text{Per}(\varphi)$ -ben minden pálya hiperbolikus;
- (iv)  $\overline{W^+} \cap \overline{W^-} \subset \text{Per}(\varphi)$ .

## (B) Egydimenziós eset

Tekintsük az alábbi halmazokat:

$$C^0((0, \infty)) = \{f : (0, \infty) \rightarrow R : f \text{ folytonos}\}$$

$$C^1((0, \infty)) = \{f : (0, \infty) \rightarrow R : f \text{ folytonosan differenciálható}\}$$

Az  $f \in C^0((0, \infty))$  esetén legyen  $\|f\|_0 = \sup_{(0, \infty)} |f|$ , az  $f \in C^1((0, \infty))$  esetén pedig  $\|f\|_1 = \|f\|_0 + \|f'\|_0$ .

Most legyenek adottak az  $f, g \in C^1((0, \infty))$  függvények. Az  $\dot{x} = f(x)$  és az  $\dot{y} = g(y)$  differenciálegyenletek, illetve az  $f$  és  $g$  függvények topologikusan

ekvivalensek, ha létezik olyan  $h : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  homeomorfizmus, amely a pályákat egymásba képezi az irányítás megtartásával.

Az  $\dot{x} = f(x)$  differenciálegyenlet, illetve az  $f$  függvény strukturálisan stabil, ha létezik olyan  $\varepsilon > 0$ , hogy

$$\|f - g\|_1 < \varepsilon$$

esetén az  $\dot{x} = f(x)$  és az  $\dot{y} = g(y)$  differenciálegyenletek topologikusan ekvivalensek.

**B1. Tétel.** *Legyen  $f \in C^1((0, \infty))$  olyan, amelyre  $|f|$  minimuma egy kompakt intervallumon kívül pozitív. Ekkor az  $\dot{x} = f(x)$  differenciálegyenlet pontosan akkor strukturálisan stabil, ha az  $f$  függvénynek legfeljebb véges sok egyensúlyi pontja van és mindegyik hiperbolikus.*

Most bebizonyítjuk a B.1 Tételt, ami egyúttal a Harrod modell egydimenziós változatának strukturális stabilitását adja, és teljessé teszi a 2. Tétel bizonyítását.

Csak azt igazoljuk, hogy ha egy hiperbolikus egyensúlyi pont van, amelyet  $p$ -vel jelölünk, akkor az egyenlet strukturálisan stabil. (Véges sok hiperbolikus egyensúlyi pont esetén hasonló gondolatmenet alkalmazható.)

Legyen  $\delta \in (0, p)$ , amelyre  $x \in (p - \delta, p + \delta)$  esetén  $|f'(x)| > |f'(p)|/2$ . Legyen

$$m = \min \{|f(x)| : x \in (0, p - \delta] \cup [p + \delta, \infty)\} .$$

A feltevés miatt  $m > 0$ . Legyen

$$\varepsilon < \frac{m}{2}, \quad \varepsilon < \frac{|f'(p)|}{2} .$$

Legyen  $g \in C^1((0, \infty))$  olyan, amelyre  $\|f - g\|_1 < \varepsilon$ . Ekkor minden  $x > 0$  mellett  $|f(x) - g(x)|_1 < \varepsilon$ , így  $x \notin (p - \delta, p + \delta)$  esetén  $|g(x)| > |f(x)| - \varepsilon > |f(x)| - m/2 > 0$ . Azaz,  $g$ -nek nem lehet zérushelye a  $(p - \delta, p + \delta)$  intervallumon kívül, sőt előjele ott megegyezik  $f$  előjelével. Most megmutatjuk, hogy a  $(p - \delta, p + \delta)$  intervallumban  $g$ -nek is pontosan egy zérushelye van. Ugyanis, ha két gyöke lenne, akkor közöttük a deriváltjának is lenne egy  $x^*$  gyöke. Ekkor  $|f'(x^*) - g'(x^*)| = |f'(x^*)| \geq |f'(p)|/2 > \varepsilon$  lenne, ami ellentmond annak, hogy  $\|f - g\|_1 < \varepsilon$ . Mivel  $g$ -nek is pontosan egy zérushelye van, jelölje ezt  $q$ , azért a topologikus ekvivalenciát biztosító homeomorfizmus legyen  $h(x) = \frac{q}{p}x$ , amely a két rendszer egyensúlyi pontjait, és így a többi pályáit is egymásba képezi.

Igazoljuk most a fordított irányú állítást. Azaz, tegyük fel, hogy  $f$  strukturálisan stabil, és válasszuk meg  $\varepsilon$ -t a definíció szerint. A *Sard Lemma* szerint egy folytonosan differenciálható leképezés kritikus értékeinek halmaza nullmértékű. ( $y$  reguláris érték, ha  $y = f(x)$  esetén igaz, hogy  $f'(x) \neq 0$ ;  $y$  kritikus érték, ha nem reguláris érték.) Így van olyan  $\alpha \in (0, \varepsilon)$ , hogy a  $g(x) = f(x) + \alpha$  jobb oldalnak csak hiperbolikus egyensúlyi pontjai vannak. Mivel a feltétel szerint ezek mind egy kompakt intervallumban vannak, és nem torlódhatnak (mert a torlódási pontjuk egy nem hiperbolikus egyensúlyi pont

lenne), azért  $g$ -nek véges sok egyensúlyi pontja van. Így  $g$  és  $f$  topologikus ekvivalenciája miatt  $f$ -nek is véges sok egyensúlyi pontja van. Ha  $f$ -nek lenne egy nem hiperbolikus  $p$  egyensúlyi pontja (ahol  $f'(p) = 0$  lenne), akkor lenne olyan  $g$  függvény, amely  $p$  egy környezetében azonosan 0 lenne, és fennállna  $\|f - g\|_1 < \varepsilon$ . Ez a  $g$  függvény nem lenne topologikusan ekvivalens az  $f$  függvénnyel, ami ellentmond  $f$  strukturális stabilitásának.

## 4 A Harrod modell strukturális stabilitásának bizonyítása

Az egydimenziós Harrod modell esetét a tökéletes előrelátással már tisztáztuk. Most tekintsük a kétdimenziós esetet, a Harrod modellt adaptív várakozásokkal.

Az egyszerűség kedvéért írjuk át a (8') és (11') egyenleteket a következő alakba:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax(y - b) \\ \dot{y} &= c(x - y),\end{aligned}$$

ahol  $x = b$ ,  $y = b^e$ ,  $a = \alpha$ ,  $c = \beta$ , és  $b = b^r$ .

Először megmutatjuk, hogy a fenti rendszer vektormezejének Poincaré-féle sztereografikus leképezéssel a gömbfelületre történő transzformációja nem biztosítja a Peixoto tétel kritériumait, vagyis ezzel nem bizonyítható a dinamikai rendszer strukturális stabilitása.

Legyen

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= P(x, y) = ax(y - b) \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y) = c(x - y).\end{aligned}$$

Alkalmazzuk az A.2 Tételt:

$$-Z^2 Q^* dX + Z P^* dY + (Z X Q^* - Y P^*) dZ = 0$$

$$P^*(X, Y, Z) = Z^2 P\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) = aX(Y - bZ)$$

$$Q^*(X, Y, Z) = ZQ\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) = c(X - Y).$$

A behelyettesítések után kapjuk:

$$-cZ^2(X - Y)dX + aZX(Y - bZ)dY + [cZX(X - Y) - aXY(Y - bZ)]dZ = 0.$$

A kritikus pontokat az alábbi egyenletrendszer megoldása adja:

$$-Z^2 Q^* = 0, \quad Z P^* = 0, \quad Z X Q^* - Y P^* = 0$$

1. eset:  $Z \neq 0$ ,  $Q^* = 0$ ,  $P^* = 0$

$$X = 0, Y = 0, Z = 1 \rightarrow (0, 0, 1)$$

$$X = Y = bZ \neq 0 \rightarrow \left( \frac{b}{\sqrt{1+2b^2}}, \frac{b}{\sqrt{1+2b^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+2b^2}} \right)$$

(Az  $xy$  síkon a  $(0, 0)$  és a  $(b, b)$  pontoknak felelnek meg.)

2. eset:  $Z = 0, aXY^2 = 0 \rightarrow (1, 0, 0)$  és  $(0, 1, 0)$ . A gömbfelületen az alábbi egyensúlyi helyzeteket kapjuk:

$$\begin{array}{cc} (0, 0, 1) & (0, 0, 1) \\ \left( \frac{b}{\sqrt{1+2b^2}}, \frac{b}{\sqrt{1+2b^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+2b^2}} \right) & \left( \frac{b}{\sqrt{1+2b^2}}, \frac{b}{\sqrt{1+2b^2}}, \frac{-1}{\sqrt{1+2b^2}} \right) \\ (1, 0, 0) & (-1, 0, 0) \\ (0, 1, 0) & (0, -1, 0) \end{array}$$

Most az A.3 Tételt alkalmazzuk az egyenlítőn lévő egyensúlyi pontokra. Az  $(1, 0, 0)$  pont vizsgálata:

$$X = 1, \quad dX = 0, \quad y = \frac{Y}{X} = Y, \quad z = \frac{Z}{X} = Z$$

$$az(y - bz) dy + (cz(1 - y) - ay(y - bz)) dz = 0.$$

$$\frac{dy}{dt} = ay(y - bz) - cz(1 - y) = -cz + ay^2 + (c - ab)yz$$

$$\frac{dz}{dt} = az(y - bz) = ayz - abz^2$$

Linearizálás  $(0, 0)$ -ban:

$$\begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}.$$

Mivel a 0 kétszeres sajátérték, ezért az  $(1, 0, 0)$  nem hiperbolikus egyensúlyi helyzet.

A  $(0, 1, 0)$  pont vizsgálata:

$$Y = 1, \quad dY = 0, \quad x = \frac{X}{Y} = X, \quad z = \frac{Z}{Y} = Z$$

$$-cz^2(x - 1) dx + (czx(x - 1) - ax(1 - bz)) dz = 0.$$

$$\frac{dx}{dt} = ax(1 - bz) - cxz(x - 1) = ax + (c - ab)xz - cx^2z$$

$$\frac{dz}{dt} = cz^2(1 - x) = cz^2 - cxz^2$$

Linerizálás a  $(0, 0)$ -ban:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}.$$

Mivel a sajátértékek  $a$  és  $0$ , ezért a  $(0, 1, 0)$  sem hiperbolikus egyensúlyi helyzet. Mindkét egyensúlyi pont degenerált (lásd in Perko, 1991, 148–149. o.). Látható, hogy mind az  $yz$ -síkon, mind az  $xz$ -síkon a vektormezők kvadratikus illetve harmadfokú tagokkal kezdődnek, és ebben az esetben még a nem hiperbolikus kritikus pontok részletes vizsgálata sem elégséges a végtelenbeli viselkedés meghatározásához (v.ö. Perko, 1991, 258. o.).

Tehát Peixoto tétele nem alkalmazható, ezért a gyengébb feltételeket magába foglaló Kotus-Krych-Nitecki tételt alkalmazzuk.

Tegyük fel, hogy az  $a, b, c$  adott pozitív állandók, és  $f$  a következő:

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} ax_1(x_2 - b) \\ c(x_1 - x_2) \end{pmatrix},$$

ahol most  $x_1 = x$  és  $x_2 = y$ , a paraméterek pedig változatlanok. Ekkor  $\varphi$  egyensúlyi helyzetei:

$$A = (0, 0) \quad \text{és} \quad B = (b, b).$$

A

$$Df(0, 0) = \begin{pmatrix} -ab & 0 \\ c & -c \end{pmatrix}$$

sajátértékei  $-ab < 0$  és  $-c < 0$ ,  $ab = c$  esetén a  $-c$  kétszeres multiplicitású.

A

$$Df(b, b) = \begin{pmatrix} 0 & ab \\ c & -c \end{pmatrix}$$

sajátértékei

$$\lambda_{\pm} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 + 4abc}}{2},$$

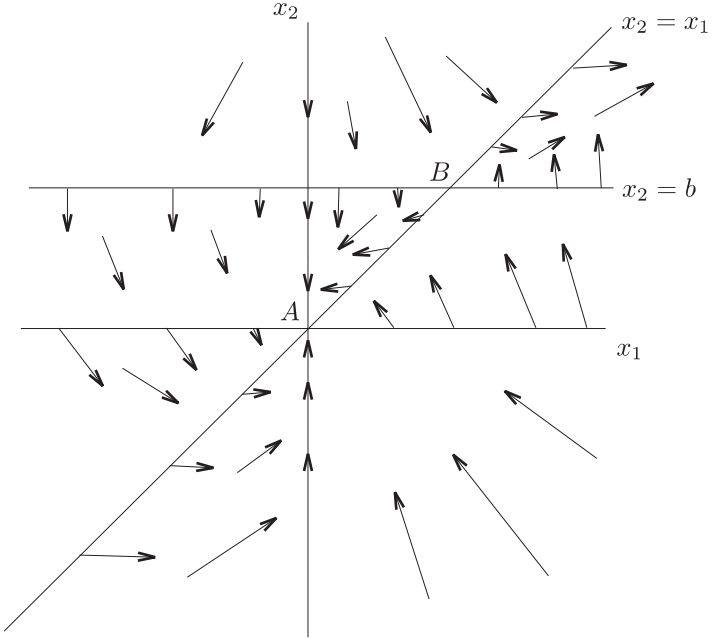
sajátvektorai

$$v_{\pm} = \left( 1, \frac{\lambda_{\pm}}{ab} \right).$$

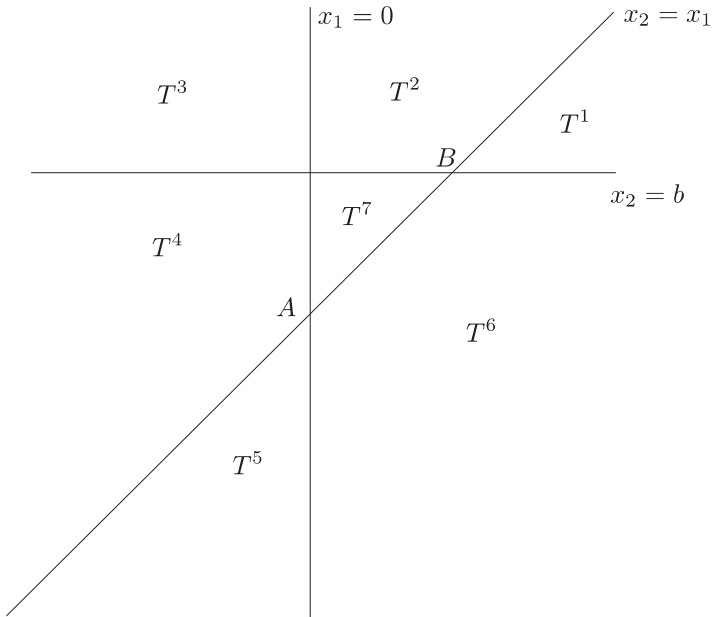
Vegyük észre, hogy  $\lambda_- < 0 < \lambda_+$  és  $\frac{\lambda_{\pm}}{ab} < 1$ . Tehát mindkét egyensúlyi helyzet hiperbolikus, az  $A$  stabil egyensúlyi helyzet (nyelő),  $B$  nyeregpont.

Az  $f: R^2 \rightarrow R^2$  vektormező a 6. ábrán látható. (Az átskálázott  $f$  vektormező elemei ugyanolyan irányúak, mint az  $f$  vektormezőé, csak a hosszuk különböző.)

Az  $x_2 = x_1$ ,  $x_2 = b$ ,  $x_1 = 0$  egyenesek a síkot a  $T^1, T^2, \dots, T^7$  nyitott és összefüggő tartományokra bontják.



6. ábra.



7. ábra.



Az  $x_1 = 0$  egyenest három pálya alkotja:  $\{(0, 0)\}$ ,  $\{(0, e^{-ct} : t \in R)\}$ ,  $\{(0, e^{ct} : t \in R)\}$ . Ezért az  $x_1 = 0$  egyenes invariáns. Így a 6. ábra alapján

$$\begin{aligned} T^1, T^5, T^7 & \text{ pozitív invariánsak,} \\ T^2, T^3, T^6 & \text{ negatív invariánsak.} \end{aligned}$$

Jól ismert, hogy a  $B = (b, b)$  nyeregpontnak van 1-dimenziós lokális stabil és instabil sokasága:  $S_{lok}$  és  $U_{lok}$ . Az  $S_{lok}$  ( $U_{lok}$ ) pozitív (negatív) invariáns és érintője a  $B$  pontban a  $B$ -n átmenő  $v_-$  ( $v_+$ ) irányú egyenes. Mivel

$$v_- = \left(1, \frac{\lambda_-}{ab}\right) \quad \text{és} \quad \frac{\lambda_-}{ab} < 0,$$

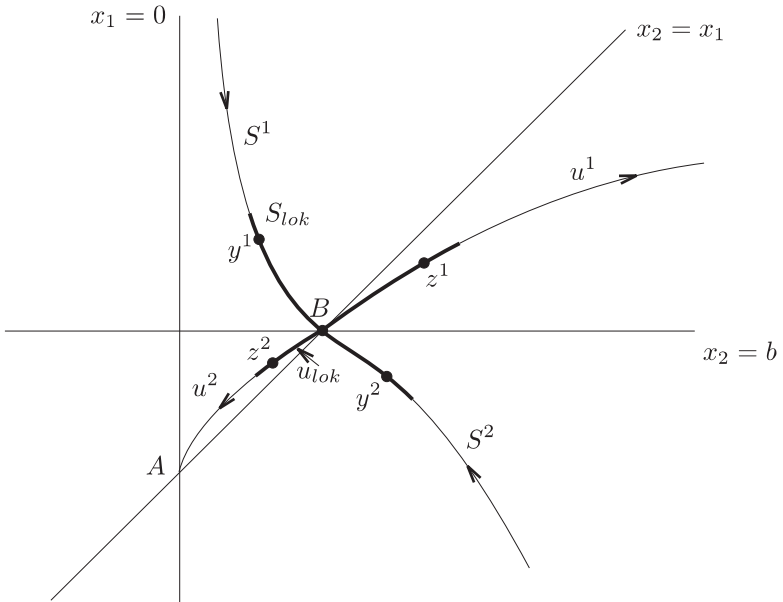
választhatunk  $y^1 \in T^2 \cap S_{lok}$  és  $y^2 \in T^6 \cap S_{lok}$  pontokat. Ekkor

$$\varphi(t, y^1) \in T^2 \cap S_{lok} \quad \text{és} \quad \varphi(t, y^2) \in T^6 \cap S_{lok} \quad (\text{minden } t \geq 0)$$

és

$$\varphi(t, y^1) \rightarrow B, \quad \varphi(t, y^2) \rightarrow B \quad (t \rightarrow \infty).$$

Az  $S^1 = \{\varphi(t, y^1) : t \in R\}$  és  $S^2 = \{\varphi(t, y^2) : t \in R\}$  halmazok a  $B$  nyeregpont stabil szeparatrixei. Az  $S = S^1 \cup S^2 \cup \{B\}$  halmaz a  $B$  nyeregpont stabil halmaza (8. ábra).



8. ábra.

Mivel  $y^1 \in T^2$ , továbbá a vektormező minden  $T^2$ -beli  $v = (v_1, v_2)$  elemére  $v_1 > 0$ ,  $v_2 < 0$ , és  $T^2$  negatív invariáns, ezért a

$$(-\infty, 0] \ni t \rightarrow \varphi(t, y^1) \in T^2$$

görbe első komponense monoton növekvő, a második monoton csökkenő.  $T^2$  határán a  $B$  az egyetlen egyensúlyi helyzet, amelyhez  $\varphi(t, y^1)$  nem tarthat  $t \rightarrow -\infty$  esetén, így

$$|\varphi(t, y^1)| \rightarrow \infty \quad (t \rightarrow -\infty).$$

Hasonlóan kapjuk, hogy  $\varphi(t, y^2) \in T^6$ ,  $t \in R$ , és

$$|\varphi(t, y^2)| \rightarrow \infty \quad (t \rightarrow -\infty).$$

Az is könnyen belátható, hogy a  $\varphi(t, y^2)$  komponenseire  $\varphi_1(t, y^2) \rightarrow \infty$ ,  $\varphi_2(t, y^2) \rightarrow -\infty$  ( $t \rightarrow -\infty$ ) teljesül.

Analóg módon,  $v_+ = \left(1, \frac{\lambda_+}{ab}\right)$  és  $0 < \frac{\lambda_+}{ab} < 1$  miatt van olyan  $z^1 \in T^1 \cap U_{lok}$  és  $z^2 \in T^7 \cap U_{lok}$ , hogy

$$\varphi(t, z^1) \in T^1 \cap U_{lok}, \quad \varphi(t, z^2) \in T^7 \cap U_{lok} \quad (\forall t \leq 0)$$

és

$$\varphi(t, z^1) \rightarrow B, \quad \varphi(t, z^2) \rightarrow B \quad (t \rightarrow -\infty).$$

Az

$$U^1 = \{\varphi(t, z^1), t \in R\}, \quad U^2 = \{\varphi(t, z^2), t \in R\}$$

halmazok a  $B$  instabil szeparatrixei (8. ábra). Az  $U = U^1 \cup U^2 = \{B\}$  halmaz a  $B$  instabil halmaza. Mivel  $T^1$  és  $T^7$  pozitív invariánsok, ezért

$$\varphi(t, z^1) \in T^1, \quad \varphi(t, z^2) \in T^7 \quad (\forall t \geq 0).$$

Innen az következik, hogy  $\varphi(t, z^1)$  ( $\varphi(t, z^2)$ ) mindkét komponense szigorúan monoton növekvő (csökkenő)  $t \in [0, \infty)$ -re, és

$$|\varphi(t, z^1)| \rightarrow \infty, \quad \varphi(t, z^2) \rightarrow A = (0, 0) \quad (t \rightarrow \infty).$$

A fentiek alapján léteznek olyan

$$\sigma : R \rightarrow (0, \infty), \quad u : (0, \infty) \rightarrow R$$

folytonos függvények, hogy  $\sigma(b) = b$ ,  $u(b) = b$ ,  $\sigma$  szigorúan monoton csökkenő,  $u$  szigorúan monoton növekvő,  $u(x_1) < x_1$  minden  $x_1 > b$ -re,  $u(x_1) > x_1$  minden  $x_1 \in (0, b)$ -re, és

$$S = \{(\sigma(x_2), x_2) : x_2 \in R\}, \quad U = \{(x_1, u(x_1)) : x_1 > 0\}.$$

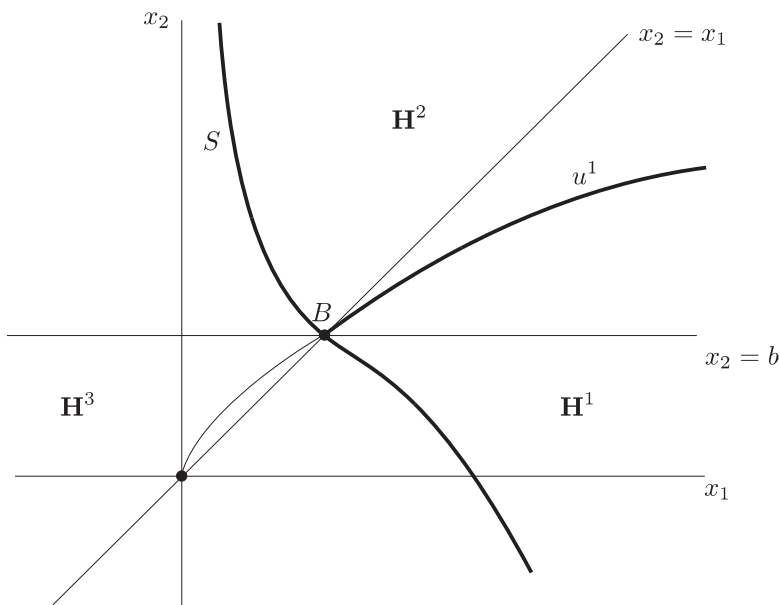
Most megmutatjuk, hogy a  $\varphi$ -nek nincs nemtriviális periodikus pályája. Ha valamely  $\rho \in R^2$  esetén  $\varphi(t, \rho)$  periodikus a  $T > 0$  minimális periódussal, akkor a

$$\Pi : [0, T] \ni t \rightarrow \varphi(t, \rho) \in R^2$$

egyszerű zárt görbe belsejében van egyensúlyi helyzet, azaz az  $A$  vagy a  $B$  pont. Mivel  $A, B \in \overline{U \cup S}$ , ezért  $\Pi$  belseje  $U \cup S$ -beli pontokat is tartalmaz. De  $U \cup S$  nem korlátos, így van olyan pontja is, amely a  $\Pi$ -n kívül

van. A folytonosság és az  $U \cup S$  összefüggősége miatt  $U \cup S$  tartalmaz olyan pontot is, amely eleme  $\Pi$ -nek. Ez ellentmondás, mert az  $U \cup S$  pontjai nem periodikusak.

Az  $R^2 \setminus (S \cup U^1)$  halmaznak 3 összefüggő nyitott komponense van:  $H^1$ ,  $H^2$ ,  $H^3$  (9. ábra). A  $H^1$ ,  $H^2$  és  $H^3$  invariánsak.



9. ábra.

Ha  $x \in H^1$ , akkor  $\varphi(t, x)$  komponenseire az alábbi érvényes: van egyetlen olyan  $t_0 \in R$ , amelyre  $\varphi_2(t_0, x) = b$ , és

$(-\infty, t_0) \ni t \rightarrow \varphi_1(t, x) \in R$  szigorúan monoton csökkenő;

$(t_0, \infty) \ni t \rightarrow \varphi_1(t, x) \in R$  szigorúan monoton növekvő;

$(-\infty, \infty) \ni t \rightarrow \varphi_2(t, x) \in R$  szigorúan monoton növekvő.

Ha  $\varphi(t, x)$  véges határértékhez tart, amint  $t \rightarrow \infty$  vagy  $t \rightarrow -\infty$ , akkor a határérték egyensúlyi helyzet.  $\overline{H^1}$ -ban  $B$  az egyetlen egyensúlyi helyzet, és  $\varphi(t, x)$  nem tart  $B$ -hez. Így  $\varphi_1(t, x)$  és  $\varphi_2(t, x)$  monotonitási tulajdonsága alapján

$$|\varphi(t, x)| \rightarrow \infty \quad (t \rightarrow \pm\infty) .$$

Tehát  $\alpha(x) = \omega(x) = \emptyset$ . Analóg módon kapjuk, hogy  $\alpha(x) = \omega(x) = \emptyset$  minden  $x \in H^2$  esetén.

Minden  $n \geq 1$  egész számra definiáljuk a

$$\Gamma_n = \Gamma_n^1 \cup \dots \cup \Gamma_n^6$$

görbét (10. ábra), ahol  $\gamma_n = \frac{a}{c}n(b+n)$  és

$$\Gamma_n^1 = \{(x_1, b+n) : 0 \leq x_1 < \sigma(b+n)\},$$

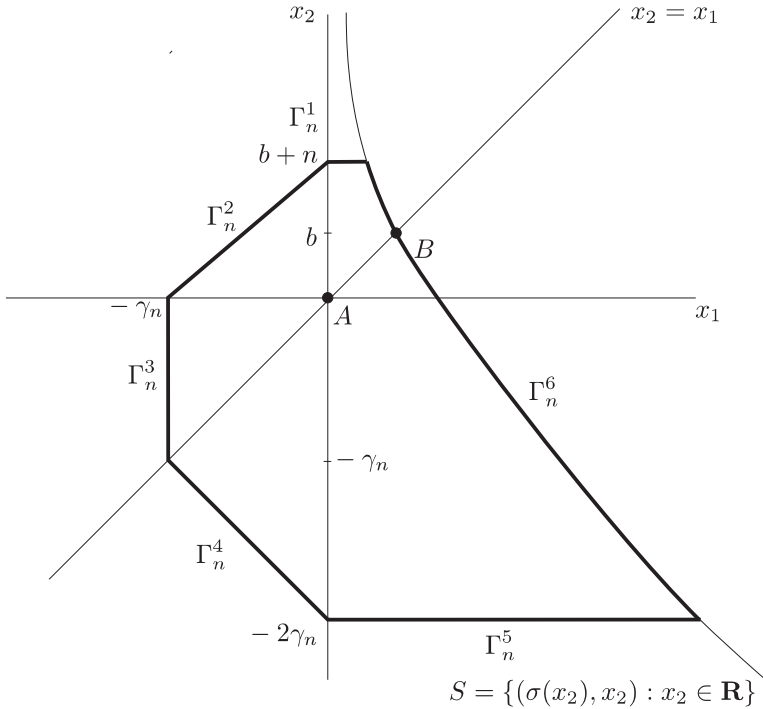
$$\Gamma_n^2 = \left\{ \left( x_1, \frac{c}{an}x_1 + b+n \right) : -\gamma_n \leq x_1 < 0 \right\},$$

$$\Gamma_n^3 = \{(-\gamma_n, x_2) : -\gamma_n \leq x_2 < 0\},$$

$$\Gamma_n^4 = \{(x_1, -x_1 - 2\gamma_n) : -\gamma_n \leq x_1 < 0\},$$

$$\Gamma_n^5 = \{(x_1, -2\gamma_n) : 0 \leq x_1 < \sigma(-2\gamma_n)\},$$

$$\Gamma_n^6 = \{(\sigma(x_2), x_2) : -2\gamma_n \leq x_1 \leq b+n\}.$$



10. ábra.

Állítjuk, hogy a  $\Gamma_n$  egyszerű zárt görbe  $V_n$  belseje pozitív invariáns.  $\Gamma_n^6$  az  $S$  invariáns halmaz része. Így  $V_n$  pozitív invarianciája következik, ha a  $\Gamma_n^1, \dots, \Gamma_n^5$  görbék pontjaiból az  $f$  vektormező elemei  $V_n$ -be mutatnak. Ez a 6. ábra alapján nyilvánvaló az

$$\left\{ \left( x_1, \frac{c}{an}x_1 + b+n \right) : -\frac{a}{c}n^2 < x_1 < 0 \right\} \subset \Gamma_n^2$$

halmaz pontjainak kivételével. Az utóbbi pontokra elegendő megmutatni,

hogy

$$\left| \frac{x_2'}{x_1'} \right| = \left| \frac{\alpha(x) c(x_1 - x_2)}{\alpha(x) a x_1 (x_2 - b)} \right| = \left| \frac{c(x_1 - x_2)}{a x_1 (x_2 - b)} \right| > \frac{c}{an}.$$

Ha  $-\frac{a}{c}n^2 < x_1 < 0$  és  $x_2 = \frac{c}{an}x_1 + b + n$ , akkor  $0 < x_2 - b < n$ . Így

$$\left| \frac{c(x_1 - x_2)}{a x_1 (x_2 - b)} \right| = \frac{c(x_2 - x_1)}{a(-x_1)(x_2 - b)} > \frac{c(-x_1)}{a(-x_1)(x_2 - b)} = \frac{c}{a} \cdot \frac{1}{x_2 - b} > \frac{c}{an}.$$

Tehát  $\Gamma_n$  belseje pozitív invariáns.

Legyen  $x \in H^3$ . Ekkor létezik olyan  $n \geq 1$  egész szám, hogy  $x \in V_n$ . A Poincaré-Bendixson tétel alkalmazásával, figyelembe véve a  $V_n$  pozitív invarianciáját és nemtriviális periodikus pályák nemlétezését, azt kapjuk, hogy

$$\omega(x) \subset \{A, B\} \cup U^2.$$

Ha  $A \in \omega(x)$ , akkor az  $A$  stabilitása miatt  $\omega(x) = \{A\}$ . Ha  $A \notin \omega(x)$ , akkor csak  $\omega(x) = \{B\}$  fordulhat elő, ami lehetetlen, mert csak  $x \in S$  esetén lehet  $\omega(x) = \{B\}$ . Tehát  $\omega(x) = \{A\}$ .

Állítjuk, hogy minden  $x \in H^3 \setminus (S^2 \cup \{A\})$  esetén  $|\varphi(t, x)| \rightarrow \infty$ , ha  $t \rightarrow -\infty$ , azaz  $\alpha(x) = \emptyset$ . Ha  $\{\varphi(t, x) : t \leq 0\}$  korlátos, akkor a Poincaré-Bendixson tétel alkalmazásával és  $A$  stabilitásának, nemtriviális periodikus pályák nemlétezésének figyelembe vételével adódik, hogy csak  $\alpha(x) = \{B\}$  lehet. De ekkor szükségképpen  $x \in U$ , ami ellentmondás. Tehát

$$\{\varphi(t, x) : t \leq 0\}$$

nem korlátos. Így van olyan  $(t_k)$  sorozat, amelyre  $t_k \rightarrow -\infty$  és  $|\varphi(t, x)| \rightarrow \infty$  teljesül. Vegyük észre, hogy a  $H^3 \setminus V_n$  halmazok negatív invariánsak. Mivel  $V_n$  korlátos, minden  $n \geq 1$  egész számhoz van olyan  $k = k(n) \geq 1$  egész szám, hogy  $\varphi(t_k, x) \in H^3 \setminus V_n$ . Ekkor  $H^3 \setminus V_n$  negatív invarianciája miatt

$$\varphi(t, x) \in H^3 \setminus V_n \quad (\forall t \leq t_k).$$

Ebből következik, hogy  $|\varphi(t, x)| \rightarrow \infty$  ( $t \rightarrow -\infty$ ).

A fentiek alapján a  $\varphi$  kompakt, invariáns részhalmazai éppen az  $\{A\}$ ,  $\{B\}$ ,  $\{A, B\} \cup U^2$  halmazok. Ezek közül az  $\{A\}$  és  $\{B\}$  a minimális halmazok.  $\varphi$ -nek nincs oszcilláló pályája, mert minden  $x \in R^2$ -re  $\alpha(x)$  és  $\omega(x)$  vagy üresek, vagy egyetlen pontot tartalmaznak, azaz kompaktak. Mivel nincs nemtriviális pálya, ezért

$$\text{Per}(\varphi) = \{A, B\}.$$

Az  $A$  és  $B$  egyensúlyi helyzetek hiperbolikusak.

Legyen  $x \in R^2$  olyan, hogy  $\omega(x) = \emptyset$ . Ekkor szükségképpen  $x \in H^1 \cup H^2 \cup U^1$ . Azt állítjuk, hogy  $J^+(x) = \emptyset$ . Már láttuk olyan  $\tau_0 = \tau_0(x)$  létezését, hogy  $\varphi(\tau_0, x) \in T^1$ . A  $T^1$  pozitív invarianciája miatt  $\varphi(t, x) \in T^1$  minden  $t \geq \tau_0$ -ra. A vektormező  $T^1$ -beli iránya miatt

$$[\tau_0, \infty) \ni t \rightarrow |\varphi(t, x)| \in R$$

szigorúan monoton nő. Azt is tudjuk, hogy  $|\varphi(t, x)| \rightarrow \infty$ , ha  $t \rightarrow \infty$ . Legyen most  $y \in R^2$  adott. A fentiek alapján van olyan  $\tau_1 > 0$ , amelyre  $|\varphi(\tau_1, x)| > |y| + 1$ . A megoldásoknak a kezdeti adatoktól való folytonos függése miatt van az  $x$ -nek olyan  $K_x$  környezete, hogy minden  $z \in K_x$ -re

$$|\varphi(\tau_1, z)| > |y| + 1/2, \quad \varphi(\tau_1, z) \in T^1.$$

A fentiekhez hasonlóan innen minden  $z \in K_x$ -re és minden  $t \geq \tau_1$ -re

$$|\varphi(t, z)| \geq |\varphi(\tau_1, z)| \geq |y| + 1/2$$

következik. Legyen  $(x^n)$  egy olyan sorozat  $R^2$ -ben, és  $(t_n)$  pedig  $R$ -ben, hogy  $x^n \rightarrow x$ ,  $t_n \rightarrow \infty$ . Minden elég nagy  $n$ -re  $x^n \in K_x$  és  $\tau_n \geq \tau_1$ . Így az elég nagy  $n$ -ekre  $|\varphi(t_n, x^n)| \geq |y| + 1/2$ , azaz

$$\varphi(t_n, x^n) \not\rightarrow y \quad (n \rightarrow \infty).$$

Mivel  $y \in R^2$  tetszőleges volt,  $J^+(x) = \emptyset$  adódik. Ebből az is következik, hogy  $\varphi$ -nek nincs nyerge a  $\infty$ -ben. Tehát

$$W^+ = S^1 \cup S^2 \quad W^- = U^1 \cup U^2.$$

Így

$$\overline{W^+} \cap \overline{W^-} = \{B\} \subset \text{Per}(\varphi).$$

Ezzel beláttuk, hogy a Kotus-Krych-Nitecki tétel feltételei teljesülnek, azaz  $\varphi$  strukturálisan stabil. Ez egyúttal bizonyítja a Harrod modell strukturális stabilitását is a síkon.

## Irodalom

1. Aftalion, A. (1909): 'La Réalité des surproductions générales: Essai d'une théorie des crises générales et périodiques', *Revue d'économie politique*.
2. Andronov, A. A. and L. Pontrjagin (1937): 'Structurally Stable Systems', *Doklady Akademii Nauk SSSR* 14, 247–251. o.
3. Andronov, A., A. A. Vitt and S. E. Khaikin (1966): *Theory of Oscillators*, Pergamon Press, New York.
4. Bickerdike, C. F. (1914): 'A Non-Monetary Cause of Fluctuations in Employment', *Economic Journal*, No. 3. 357–370. o.
5. Cagan, P. (1956): 'The monetary dynamics of hyperinflation.' In *Studies in the Quantity Theory of Money*, ed. by M. Friedman. University of Chicago Press, Chicago.
6. Carver, T. M. (1903): 'The Relation of Abstinence to Interest', *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 18. No. 1. 142–145. o.
7. Clark, J. M. (1917): 'Business Acceleration and the Law of Demand: A Technical Factor in Economic Cycles', *Journal of Political Economy*, Vol. 25. No. 1. 217–235. o.
8. Domar, E. (1946): 'Capital Expansion, Rate of Growth, and Employment', *Econometrica*, Vol. 14. 137–147. o.

9. Domar, E. (1957): *Essays in the Theory of Economic Growth*, Oxford University Press, Oxford.
10. Easterly, W. (1997): 'The Ghost of Financing Gap, (How the Harrod-Domar Model Still Haunts Development Economics)', *Policy Research Working Papers, World Bank*, Washington.
11. Engle, R. F. – Hendry, D. F. – Richard, J. F. (1983): 'Exogeneity', *Econometrica*, 51, 277–304. o.
12. Feldman, G. A. (1928): 'K teorii tempov narodnogo dohoda', *Planovoe Hozjajstvo*, No. 11. 148–170. o. és No. 12. 151–178. o.
13. Friedman, M. (1957): *A Theory of Consumption Function*, Princeton University Press, Princeton.
14. Hadjimichalakis, M. G.(1971): 'Equilibrium and Disequilibrium Growth with Money – Tobin Models', *Review of Economic Studies*, 457–479. o.
15. Hahn, F.(1985): *Money, growth and stability*, MIT Press, Cambridge, Massachusetts.
16. Harrod, R. F. (1939): 'An essay in dynamic theory', *Economic Journal*, vol. 49, 13–33. o. Magyarul: Egy esszé a dinamikus elméletről, in: Szakolczai(szerk.) (1963), 169–192. o.
17. Harrod, R. F. (1973): *Economic Dynamics*, London and Basingstoke.
18. Kaldor, N. (1957): 'A Model of Economic Growth', *Economic Journal*, Vol. 67. No. 268., 591–624. o.
19. Kotus, J., M. Krych, and Z. Nitecki (1982): 'Global structural stability of flows on open surfaces', *Memoirs A.M.S.*, 37, 1–108. o.
20. Lefschetz, S. (1962): *Differential Equations: Geometric Theory*, Interscience, New York.
21. Leijonhufvud, A. (1968): *On Keynesian Economics and the Economics of Keynes*, Oxford University Press, Oxford.
22. Lucas, R. E. (1976): 'Econometric policy evaluation: a critique.' In Lucas, R. E. (1995): *Studies in Business Cycle Theory*, MIT Press, Cambridge, Mass.
23. Móczár József (1991): 'Irreducible balanced and unbalanced growth paths (Business cycles and structural changes)', *Structural Change and Economic Dynamics*, 2 , 159–176. o.
24. Okishio, N. (1964): 'Instability of Harrod-Domar's steady growth', *Kobe University Review*, 10, 19–27. o.
25. Pasinetti, L. L. (1962): 'Rate of profit and income distribution in relation to the rate of economic growth', *Review of Economic Studies*, 29, 267–27. o.
26. Perko, L. (1991): *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag, New York
27. Robinson, J. (1962): *Essays in the Theory of Economic Growth*, London: Macmillan.
28. Sidrauski, M.(1967): 'Inflation of Economic Growth', *Journal of Political Economy*, 796–810. o.
29. Solow, R. (1956): 'A Contribution to the Theory of Economic Growth', *Quarterly Journal of Economics*, 70, 65–94. o.
30. Szakolczai György (szerk.): (1963): *A gazdasági fejlődés feltételei*, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest
31. Zalai Ernő (2000): *Matematikai közgazdaságtan*, KJK-Kerszöv, Budapest

## STRUCTURAL STABILITY OF THE HARROD MODEL

In this study it is shown that the nontrivial hyperbolic fixed point of a nonlinear dynamical system, which is formulated by means of the adaptive expectations, corresponds to the unstable equilibrium of Harrod. We prove that this nonlinear dynamical (in the sense of Harrod) model is structurally stable under suitable economic conditions. In the case of structural stability, small changes of the functions ( $C^1$ -perturbations of the vector field) describing the expected and the true time variation of the capital coefficients do not influence the qualitative properties of the endogenous variables, that is, although the trajectories may slightly change, their structure is the same as that of the unperturbed one, and therefore these models are suitable for long-time predictions. In this situation the critique of Lucas or Engel is not valid. There is no topological conjugacy between the perturbed and unperturbed models; the change of the growth rate between two levels may require different times for the perturbed and unperturbed models.