A HARROD MODELL STRUKTURÁLIS STABILITÁSA[1]

MÓCZÁR JÓZSEF – KRISZTIN TIBOR
BCE – SZTE

Ebben a tanulmányban megmutatjuk, hogy az adaptív várakozások segítségével megfogalmazott nemlineáris dinamikai rendszerből nyert hiperbolikus nemtriviális fixpont megfelel a harrodi instabil egyensúlyi helyzetnek. Bebizonyítjuk, hogy ez a harrodi értelemben dinamizált nemlineáris modell, a megfelelő közgazdasági feltételek mellett, strukturálisan stabil. Strukturális stabilitás mellett a tőkekoefficiensek várható és tényleges időbeli alakulását leíró függvények kis változtatása (a vektormező C^1-es perturbációja) nem érinti az endogén változók kvalitatív tulajdonságait, vagyis a trajektóriáik ugyan kis mértékben megváltozhatnak, de szerkezetük megegyezik a perturbálatlanéval, s ezzel előrejelzésekre alkalmasak. Ebben az esetben érvényét veszíti az ún. Lucas vagy még pontosabban az Engel kritika. Az időparamétert átskálázza a perturbált modell, vagyis nem teljesül a topológiai konjugáció; a növekedési ütem bizonyos szintre történő emelkedése vagy csökkenése eltérő időt vehet igénybe az eredeti modellbelitől.

Kulcsszavak: Harrod modell, akcelerátor-elv, stacionárius egyensúlyi állapot, topológiai ekvivalencia, strukturális stabilitás, topológiai konjugáció.

1 Bevezetés

Keynes nem fejlesztette tovább a kereslet-determinált elméletét egy explicit egyensúlyi növekedési modellbe, annak kidolgozását a cambridgei keynesiánusokra hagyta. Elsőként Sir Roy Harrod rukkolt elő egy kiterjesztéssel, amely bevezette a későbbiekben róla elnevezett Harrod modellt. Harrod keynesi növekedéselmélete (lásd Harrod (1939, 1973)) nagyban befolyásolta az egymást követő gazdasági növekedési elméleteket és a növekedési közgazdaságtan olyan hozzájárulásait, mint Kaldor (1957), Robinson (1962) és Passinetti (1962) cambridgei ihletésű modelljeit, Solow (1956) neoklasszikus vagy Sidrauski (1967), Hadjimichalakis (1971) stb. monetáris modelljeit. De ide sorolható a többszektoros kiterjesztése is, a zárt dinamikus Leontief-modell (lásd Zalai (2000), Móczár (1991)).[2]

---

[1]Beérkezett: 2006. április 21. E-mail: `jozsef.moczar@uni-corvinus.hu, krisztin@math.u-szeged.hu`.

[2]A fejlődő országok Világbank-os és IMF-es pénzügyi támogatása ma is Harrod növekedéselmélete alapján történik, de ennek ellenére Easterly (1997) egyenesen napjaink *kriptaszökevény*ének tekinti a modellt. Domar, aki 1946-ban Harrodéhoz hasonló modellt vizsgált, s amely erősen emlékeztet a Feldmann (1928) modellre, 11 évvel később "örök bűntudattal" (with ever-guilty conscience) tagadta meg munkáját (lásd in Domar (1957, 7-8. o.)), amit itt most tiszteletben tartunk.

A *strukturális stabilitás* fogalmát a modern topológia eszközeivel Andronov és Pontrjagin definiálták (lásd in Andronov és Pontrjagin (1937)). A fogalom magának a dinamikus rendszernek egy bizonyos tulajdonsága, ami leglátványosabban úgy jelenik meg, hogy egy strukturálisan stabil modell fázisdiagramjának kvalitatív tulajdonságai nem változnak, ha a modell feltételrendszerét kissé perturbáljuk. Még ha egy modell dinamikusan instabil egyensúlyi állapottal is rendelkezik, a strukturális stabilitása még mindig tekinthető egy elégséges feltételnek a tudományos jelenségek megfigyelhetőségére és előrejelezhetőségére, vagyis a mi esetünkben most a Harrod által megfogalmazott keynesi stacionárius gazdasági növekedésre. Ugyanakkor, tekinthető úgy is, mint Harrodnak egy *gyengébb* "kés-él" instabilitásról kifejtett (lásd in Harrod (1973)) fogalmának az újraértelmezése, ami elvezet Leijonhufvud (1968) ún. folyosó stabilitás fogalmához, ami azért is különösen érdekes, mert az nem egy matematikailag formalizált értelmezése a keynesi alapokon nyugvó stacionárius növekedéselméletnek.

A Harrod modell egyenlete egy statikus egyensúlyi helyzetet definiál, amit most az adaptív várakozások segítségével megfogalmazott és a tökéletes előrelátás feltevésével egydimenziósra redukált dinamikus nemlineáris modell stacionárius egyensúlyi állapotaként származtatunk. Megmutatjuk, hogy a harrodi egyensúlyi állapot instabil, de a nemlineáris modellünk strukturálisan stabil. Ez utóbbi tulajdonság megengedi, hogy az empirikus vizsgálatokban a paraméterek kissé torzítottak legyenek és megengedjünk más természetű kisebb változásokat is a vektormezőben. Ez közgazdasági szempontból azért rendkívül jelentős, mert strukturális stabilitás mellett a tőkekoefficiensek várható és tényleges időbeli alakulását leíró függvények piciny változtatása (a vektormező C^1-es perturbációja) nem érinti az endogén változók kvalitatív tulajdonságait, vagyis a perturbált és a perturbálatlan vektormezők topologikusan ekvivalensek, azaz pályáik szerkezete azonos, s ezzel előrejelzésekre alkalmasak. Vagyis ebben az esetben érvényét veszíti az ún. Lucas (1976), vagy még pontosabban az Engel kritika (Engle et al., 1983). Az időparamétert átskálázza a perturbált modell, vagyis nem teljesül a topológiai konjugáció; a növekedési ütem bizonyos szintre történő emelkedése vagy csökkenése eltérő időt vehet igénybe, mint az eredeti modellben.

A tanulmány egyes pontjaiban a következő kérdésekkel foglalkozunk.

A 2. pontban bebizonyítjuk, hogy az adaptív várakozások segítségével megfogalmazott nemlineáris folytonos idejű dinamikus modell nemtriviális egyensúlyi pontja, tökéletes előrelátás mellett, megfelel a harrodi instabil egyensúlyi állapotnak. A 3. pontban az egy- és kétdimenziós speciális dinamikai rendszerek globális strukturális stabilitásának bizonyításához szükséges fogalmakat és tételeket (Poincaré-Perko, Peixoto, Kotus-Krych-Nitecki) tárgyaljuk. Itt az algoritmusok szempontjából érdekesek lehetnek az ún. konstruktív tételek bizonyításai. A 4. pontban pedig bebizonyítjuk azoknak a dinamikus nemlineáris modelleknek a strukturális stabilitását, amelyeknek egyensúlyi pontjai megegyeznek a harrodi egyensúlyi helyzettel. Ez utóbbi eredmény bizonyítja a Harrod modell robusztusságát, vagyis felhasználhatóságát a keynesi stacionárius gazdasági növekedés előrejelezhetőségére.

2 A Harrod modell és nemlineáris dinamikája

A *Harrod modell* megfogalmazásához tekintsük a tőkefelhalmozási folyamatban rögzített tőke-kibocsátás arányt (k/x), vagy ezzel ekvivalensen, egy stacionárius tőkekoefficienst, a b-t, és egy rögzített megtakarítás-kibocsátás arányt (S/x), vagy ezzel ismét ekvivalensen, egy stacionárius megtakarítási koefficienst, az s-t. Az előbbi kizárja a solowi sima tényezőhelyettesítést[3], az utóbbi pedig a stacionárius jövedelemeloszlást implikálja. A tőke egy egysége $1/b$ egységnyi kibocsátást fog eredményezni, ami viszont s/b egységnyi megtakarítást, azaz pótlólagos tőkeállományt úgy, hogy a tőkeállomány növekedési üteme egyenlő lesz s/b-vel. Mivel az output arányos a tőkével, az lesz a kibocsátás növekedési üteme is.

A fenti tőkefelhalmozási folyamat egy lehetséges megfogalmazásában most a b tőkekoefficienst úgy kezeljük, mint egy 'akcelerátor koefficienst'. Mivel az akcelerációs koefficiens tekinthető egy kívánatos tőke/kibocsátás aránynak is, ezért az azt a tőkenövekményt mutatja, ami szükséges ahhoz, hogy elérjük a kívánt tőke/kibocsátás arányt. Az i_{t-1} nettó beruházás a $t-1$ periódusban egyenlő lesz a várható pótlólagos kibocsátásnak a b-szeresével[4]. A várható pótlólagos kibocsátást a következő periódusbeli várható kibocsátáskereslet, x_t^e, és a tényleges kibocsátás, az x_{t-1} közötti különbség definiálja. Azaz,

$$i_{t-1} = b(x_t^e - x_{t-1}). \tag{1}$$

A multiplikátor hatáson keresztül a tényleges kibocsátáskereslet a $t-1$ évben egyenlő lesz a nettó beruházási szint, i_{t-1}, szorozva a multiplikátorral, azaz az s megtakarítási hányad reciprokával:

$$x_{t-1} = \frac{1}{s} i_{t-1}. \tag{2}$$

Más szavakkal, a pótlólagos hatékony keresletvárakozást a beruházási szint határozza meg a Harrod modellben, amely beruházást, a megtakarítási arányon keresztül, a tényleges kereslet egy bizonyos szintje generálja keynesi keretekben. Ekkor az (1) és (2) alapján, a várható keresletnek a ténylegeshez való aránya a t periódusban a következőképpen adható meg:

$$\frac{x_t^e}{x_t} = \frac{(s/b)x_{t-1} + x_{t-1}}{x_t}. \tag{3}$$

A várható növekedési ütem, amelyet ρ_t^e−vel jelölünk, a következő:

$$\rho_t^e = \frac{x_t^e - x_{t-1}}{x_{t-1}}. \tag{4}$$

A (3) és (4) alapján könnyen belátható, hogy a várható növekedési ütem úgy is definiálható, mint a megtakarítási koefficiens és a tőkekoefficiens hányadosa.

[3]Stacionárius állapotban azonban ez nem számít, mivel a tőkeintenzitás állandó, hasonlóan a tőke-kibocsátás arányhoz.

[4]Ennek az *akcelerációs elv*nek a gyökerei Thomas Nixon Carver (1903), Albert Aftalion (1909), C. F. Bickerdike (1914) and John Maurice Clark (1917) munkáiban találhatók meg.

Az s/b növekedési ütemet, a várakozások realizálódása (*tökéletes előrelátás*), vagyis az $x_t^e = x_t$ teljesülése esetén, Harrod 'garantált' növekedési ütemnek nevezte és ρ_w-vel jelölte, azaz,

$$\rho_w = s/b^r \tag{5}$$

ahol b^r a kitüntetett egyensúlyi növekedéshez tartozó tőkekoefficienst, vagy másképpen, a kibocsátásegységre jutó *ex ante* beruházást jelöli. Az (5), Keynes szellemében egy egyszerű *tautológiát* fogalmaz meg: a megtakarítás szükségszerűen megegyezik az *ex post* beruházással. Viszont nem szükségszerű megegyeznie az *ex ante* beruházással, ami —mint az alábbiakban látjuk— tőkefelesleghez vagy tőkehiányhoz vezethet.

Harrod a statikában az egyensúlyt, míg a dinamikában a növekedési ütemet és változásait tekintette központi fogalmakként, és a statika egyensúlyfogalmának a dinamika területén a folyamatos, egyensúlyi növekedés fogalmát feleltette meg. Az (5) egyenlet statikus (állandó) egyensúlyi növekedést fejez ki, amit időben kiterjesztve, azaz tekintve az $\alpha\,(s/b^r - \rho_w) = \dot{\rho}_w$ differenciálegyenletet, ahol $\alpha > 0$, $\rho_w = s/b^r$ stacionárius (minden időpillanatban azonos) egyensúlyi növekedési ütemként is értelmezhető.

Definiálva a tényleges növekedési ütemet, a ρ_t-t, mint $(x_t - x_{t-1})/x_{t-1}$, hasonlóan ρ_t^e-hez, az alábbi következtetésekre juthatunk. Ha a beruházók a garantált ρ_w növekedési ütemnél nagyobbat anticipálnak, akkor a tényleges növekedési ütem, ρ_t meg fogja haladni még a magas várható növekedési ütemet is úgy, hogy azon érzés helyett, hogy túl sokat vártak, valószínűleg, inkább azt fogják érezni, hogy túl keveset vártak. A növekedési ütem és a beruházás ellentétes irányú mozgásaiból következik, hogy a tőkeállomány nem elégséges a stacionárius növekedés eléréséhez. Hasonlóan, ha a garantált növekedési ütemnél alacsonyabbat anticipálnak, akkor a tényleges növekedési ütem esni fog, még a várható növekedési ütemnél is jobban, és a beruházók úgy vélekedhetnek, hogy inkább túl sokat vártak, mint túl keveset. Ekkor tőkefelesleg van a gazdaságban[5].

Tekintsük most a Harrod-féle növekedési modell alapján végzett alábbi számításainkat, ami a fentieket számszerűen is bemutatja:

Évek t	Tőke-állomány $k_t = k_{t-1} + i_{t-1}$	Nemzeti jövedelem $x_t^e = \left(1+\rho_t^e\right) x_{t-1}$	Kívánt tőke-állomány $b^r x_t$	Beruházás $i_t = s x_t^e$
1	400.00	100.00	400.00	12.00
2	412.00	102.00	408.00	12.24
3	424.24	104.04	416.16	12.48
4	436.72	106.12	400.48	12.73

1. táblázat. $\rho_t^e = 2\%$, $\rho_w = 3\%$, $b^r = 4$, $s = 12\%$.

[5] A fentiek szerint a stacionárius növekedés instabilitása nyilvánvaló. Ez Harrod híres 'kés-él' problémája, egy legalább lokálisan instabil disequilibriumi dinamika, amelyet egy statikus multiplikátornak a várható eladásokon alapuló akcelerátorral való mechanizmuson keresztül generáltunk, amint itt megmutattuk.

Az *1. táblázat* számításaiból látható, hogy felesleges tőkeállomány képződik a garantáltnál alacsonyabb tényleges növekedési ütem mellett, amiből Harrod arra következtetett, hogy a növekedési ütemnek, ρ_t-nek még tovább kell csökkennie. Megmutatható, hogy ha, például, $\rho_t^e = 4\%$ ($> \rho_w$), akkor tőkehiány keletkezik, ami viszont —követve a Harrod modell logikáját— ρ_t további növekedését eredményezi!

A továbbiakban vizsgáljuk a várakozások fenti, meglehetősen ortodox közelítéseit, a Harrod modell lokális és globális stabilitásait, valamint a nemlineáris dinamikus modell strukturális stabilitását, felhasználva a nemlineáris közgazdasági dinamika modern matematikai eszközeit.

A tőkekoefficienst eddig úgy definiáltuk, hogy az új tőkét elosztottuk azzal a teljes kibocsátás-növekménnyel, ami szükséges volt az új tőke előállításához. Feltételeztük, hogy az s megtakarítási koefficiens egy olyan paraméter, amelynek mértéke a gazdaság pszichológiai és társadalmi karakterisztikumaitól függ. Könnyen belátható, hogy a beruházások semlegessége és konstans reálkamatláb feltételezése mellett a stacionárius egyensúlyhoz szükséges b tőkekoefficiens szintén egy paraméter.

Statisztikai adatok igazolják Harrodot, amikor a megtakarítási koefficienst rövid távon, sokkok nélküli disequilibrium állapotban állandónak vette[6]. A stacionárius egyensúlyi állapoton kívül a tőkekoefficiensek azonban változnak, mégpedig a tőkeállomány tényleges keresletétől függően, ami tükrözi a reálkamatláb rugalmasságát, valamint a tényleges vagy a várt kibocsátást a t időben, azaz,

$$b_t = k_t/x_t \quad \text{– a tényleges tőke/kibocsátás arány}$$

$$b_t^e = k_t/x_t^e \quad \text{– a várt tőke/kibocsátás arány,}$$

és legyenek

$$b^r = k_r/x_r \quad \text{– a kívánt (egyensúlyi) tőke/kibocsátás arány, amely konstans}$$

$$\rho_t = s/b_t \quad \text{– növekedési ütem, ahol az } s \text{ konstans.}$$

Felteszünk továbbá egyféle disequilibriumot a tőkekoefficiensekre, ami a következő igazodási egyenletet eredményezi:

$$\Delta\left(\log \rho_t\right) = \gamma\left(b^r - b_t^e\right), \tag{6}$$

ahol $\gamma > 0$. Az igazodási folyamat megfelel Harrod állításának, csak itt most a kibocsátás növekedését a növekedési ütem logaritmikus differenciájaként specifikáltuk[7], amelyet átalakítva:

$$\Delta\left(\log \rho_t\right) \approx \frac{\rho_{t+1} - \rho_t}{\rho_t}\,.$$

[6]Ennek indoklását lásd Szakolczai (1963, 183-84. o.). (Megjegyezzük, hogy Harrod egy kicsit átírta az 1939-es cikkét a magyar fordításhoz, amelyben s állandósága már sokkal nagyobb hangsúlyt kapott.)

[7]„Ha az *ex post* beruházás kisebb, mint az *ex ante* beruházás, ez azt jelenti, hogy a tőkeállomány egy nem kívánt csökkenése következett be, vagyis a termelő berendezésből elégtelen volt az ellátás, és ez ösztönözni fog a kibocsátás további bővítésére; fordítva, ha az *ex post* beruházás meghaladja az *ex ante* beruházást." (Harrod, 1939, 19. o.) Harrod állítását, a maga általánosságában, Okishio (1964) formalizálta elsőként.

Elfogadva Harrod megjegyzését, miszerint a jobb oldalon a nevezőben ρ_t helyett írhatunk ρ_{t+1}-t, kapjuk

$$\frac{\rho_{t+1}-\rho_t}{\rho_{t+1}}=\left(\frac{s}{b_{t+1}}-\frac{s}{b_t}\right)\frac{b_{t+1}}{s}=-\frac{\Delta b_t}{b_t}. \tag{7}$$

Behelyettesítve ezt (6)-ba, és egyenlőséget írva $\approx$ helyett, kapjuk

$$\Delta b_t=\gamma\left(b_t^e-b^r\right)b_t, \qquad \gamma>0. \tag{8}$$

Ezen felül feltesszük még, hogy a várt tőkekoefficiens, b_t^e, osztott késleltetésű, azaz, b_t^e függ a tényleges tőkekoefficienstől, és nemcsak az előző periódusbelitől, hanem a teljes múltbéli periódus-sorozatbelitől:

$$b_t^e=\beta_1 b_{t-1}+\beta_2 b_{t-2}+\beta_3 b_{t-3}+\dots \tag{9}$$

ahol $\beta_1+\beta_2+\beta_3+\ldots=1$ és $\beta_i\geq 0$.

Az egyszerűség kedvéért tekintsük most azt az esetet, amikor a késleltetés geometriai haladvány szerint osztott. A koefficiensek a (9)-ben a rögzített q hányados szerint csökkennek, ahol a q egy pozitív tört ($0<q<1$), és végtelen sorozatot alkotnak; a sorozat tagjai: $\beta,\beta q,\beta q^2,\beta q^3,\ldots$, ahol $\beta>0$ az első koefficiens. Minthogy azok összege egy, $\beta+\beta q+\beta q^2+\ldots=1$, ezért felhasználva a végtelen geometriai sorozat összegző képletét, kapjuk: $\beta/(1-q)=1$, vagy $q=1-\beta$. Mivel $0<q<1$, ezért $0<\beta<1$.

Így a várható tőkekoefficiens:

$$b_t^e=\beta\left(b_{t-1}+qb_{t-2}+q^2b_{t-3}+\ldots\right). \tag{10}$$

Az egyszerűség kedvéért legyen $S=\left\{(s_t)_{t=-\infty}^{\infty}\right\}$ a $-\infty$-től $+\infty$-ig indexezett valós sorozatok halmaza. $s\in S$ esetén $s=(\ldots,s_{-1},s_0,s_1,s_2,\ldots)$ $s\left(t\right)=s_t$. $E:S\to S$ a balra tolás operátora, azaz $(Es)\left(t\right)=s_{t+1}$. E inverze, $E^{-1}:S\to S$ a jobbra tolás operátora, azaz $\left(E^{-1}s\right)\left(t\right)=s_{t-1}$. Ezért (10) így is írható:

$$b^e=\beta E^{-1}\left(I+qE^{-1}+(qE^{-1})^2+\ldots\right)b\,,$$

ahol $I:S\to S$ az identikus operátor.

Az $I+qE^{-1}+(qE^{-1})^2+(qE^{-1})^3+\ldots$ egy olyan S-ből S-be képező operátort definiál, amelynek az $I-qE^{-1}:S\to S$ az inverze. Ezért

$$b^e=\beta E^{-1}\left(I-qE^{-1}\right)^{-1}b$$

és

$$
\begin{aligned}
\Delta b_t^e &= b_{t+1}^e - b_t^e = (Eb^e)(t) - b^e(t) \\
&= \beta(EE^{-1}\left(I - qE^{-1}\right)^{-1} b)(t) - \beta(E^{-1}\left(I - qE^{-1}\right)^{-1} b)(t) \\
&= \beta((I - E^{-1})(I - qE^{-1})^{-1} b)(t) \\
&= \beta(\left(I - qE^{-1}\right)\left(I - qE^{-1}\right)^{-1} b)(t) - \beta((1-q)E^{-1}\left(I - qE^{-1}\right)^{-1} b)(t) \\
&= \beta b(t) - (1-q)\, b^e(t) \\
&= \beta\left(b(t) - b^e(t)\right) \\
&= \beta\left(b_t - b_t^e\right)
\end{aligned}
$$

Ezért a (9) geometriai osztott késleltetés végül is:

$$\Delta b_t^e = \beta\left(b_t - b_t^e\right), \qquad 1 > \beta > 0, \tag{11}$$

amely az adaptív várakozások hipotézisének[8] megfogalmazása diszkrét időben. Itt β egy pozitív és 1-nél kisebb koefficiens, és a késleltetett várható tőkekoefficiensnek a tényleges tőkekoefficiensre vonatkozó reakciósebességét mutatja. Másképpen, β a késleltetés időkonstansának a reciproka.

Folytonos időben legyen a $\beta e^{-\beta\tau}$ az exponenciálisan osztott késleltetés súlyfüggvénye. Ekkor

$$b^e(t) = \int_0^\infty \beta e^{-\beta\tau} b(t-\tau)\, d\tau\ .$$

Helyettesítve a $(t-\tau)$-t s-sel, kapjuk

$$b^e(t) = -\beta \int_t^{-\infty} e^{-\beta(t-s)} b(s)\, ds\ ,$$

ahonnan

$$\frac{1}{\beta} e^{\beta t} b^e(t) = \int_{-\infty}^t e^{\beta s} b(s)\, ds\ .$$

Mindkét oldal t szerinti differenciálása után kapjuk a (11) folytonos alakjának megfelelő differenciálegyenletet:

$$\dot{b}^e(t) = \beta(b(t) - b^e(t))\ . \tag{11'}$$

Hasonlóképpen a (8)-at is átírjuk folytonos alakba:

$$\dot{b}(t) = \gamma\left(b^e(t) - b^r\right) b(t)\ . \tag{8'}$$

Itt és a továbbiakban egy szimbólum feletti pont az idő szerinti deriváltat jelöli.

[8]Ezt kiterjedten használták a várható infláció (lásd például Cagan (1956)) és a permanens jövedelem (lásd Friedmann (1957)) modellezésére.

1. Tétel. *Tekintsük a (8′) és (11′) által definiált*

$$\begin{aligned} \dot{b} &= \gamma\,(b^e - b^r)\,b \\ \dot{b}^e &= \beta\,(b - b^e) \end{aligned} \tag{12}$$

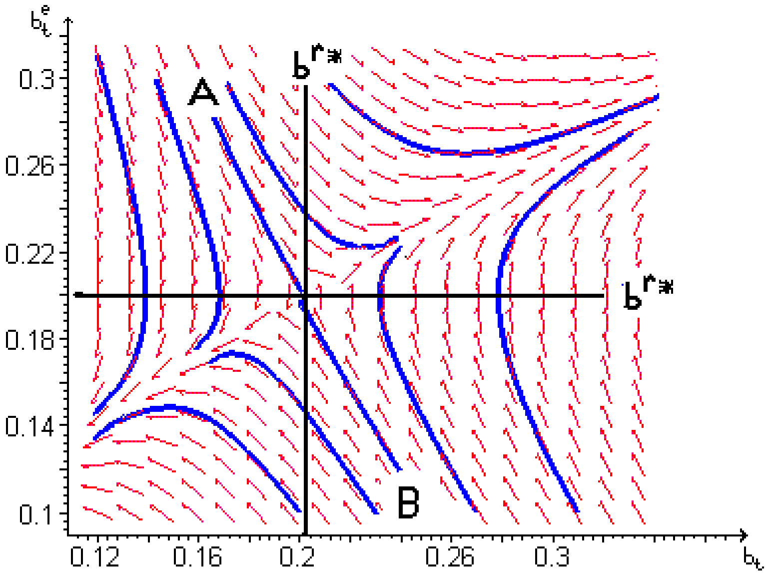
autonóm differenciálegyenlet-rendszert, ahol b^e és b ismeretlen függvények. Állítjuk, hogy:

(i) a rendszernek két egyensúlyi pontja van: az origó, amely stabil csomópont, és a (b^r, b^r) pont, amely instabil nyeregpont;

(ii) a (b^r, b^r) nyeregpont stabil sokasága két részre osztja a fázissíkot, a jobb oldali részből induló trajektóriák a plusz végtelenbe, a bal oldali részből indulók pedig az origóba tartanak;

(iii) a rendszer strukturálisan stabil.

(A bizonyításokat lásd később.) A várakozásokkal megfogalmazott nemlineáris modell dinamikájának fázisdiagramja az *1. ábrán* látható, 1:10 méretarányosan.



1. ábra. Adaptív várakozású Harrod modell fázisdiagramja

A (b^r, b^r) pontban $\rho = \rho^e = \rho_w$; ha $b^r > b^e$, akkor $\dot{\rho}/\rho = -\dot{b}/b > 0$, és az (AB) alsó részén, pozitív relatív sebességgel utazunk az egyensúlyi pontba, ha viszont $b^r < b^e$, akkor $\dot{\rho}/\rho < 0$, és így az (AB) felső részén, negatív relatív sebességgel közelítünk a (b^r, b^r) pontba. A (AB) stabil halmaz a "harrodi" késél, ettől balra az összes trajektória a $(0, 0)$-ba, a tőle jobbra levők pedig a ∞-be tartanak. A valós szektort ezért a multiplikátor-akcelerátor interakciók és az adaptív várakozások mechanizmusa által kreált késél helyzet jellemzi. Hangsúlyozandó azonban, hogy ezek az instabil növekedési dinamikák tükrözik a reálkamatláb rugalmasságát is a változó tőkeállományon keresztül.

Nézzük most a tökéletes előrelátás esetét. Tekintsük a $b = b^e$ egyenletet, ami a $(11')$ egyenlet elhagyását vonja maga után és csak a $(8')$ mutatja a megfelelő dinamikát a $b = b^e$ helyettesítéssel:

$$-\frac{\dot{b}}{b} = \gamma\,(b^r - b)\,, \qquad \gamma > 0\,. \tag{13}$$

Ebből a $b = s/\rho$ és $b^r = s/\rho_w$ helyettesítések után kapjuk:

$$(\dot{\log \rho}) = s\gamma\left(\frac{1}{\rho_w} - \frac{1}{\rho}\right). \tag{14}$$

Ez a folytonos idejű nemlineáris dinamikus rendszer egy kumulatív folyamatot tükröz; azaz, egy tetszőleges pillanatnyi diszkrepancia ρ_w és ρ között a növekedési ütem növekedését vagy csökkenését eredményezi, amit a *2. ábra* mutat.

2. Tétel. *A tökéletes előrelátás mellett*

(i) a harrodi egyensúlyi állapot mind lokálisan, mind globálisan instabil;

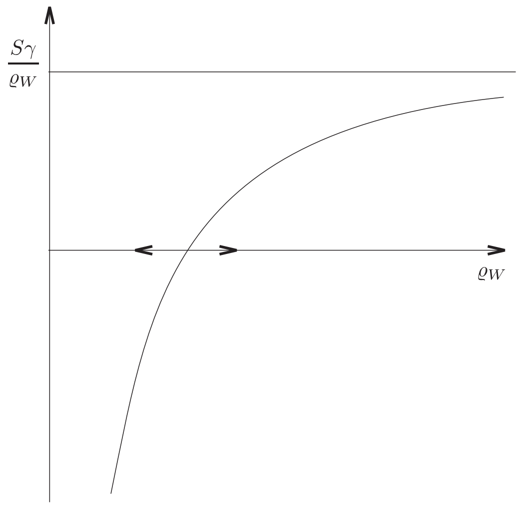
(ii) a (14)*-re redukált modell strukturálisan stabil.*

Bizonyítás. (*i*) Az egyensúlyi dinamika lokális instabilitása könnyen igazolható a (14)-hez tartozó Jacobi mátrix segítségével, minthogy a ρ_w egyensúlynál értékelve $J_{\rho=\rho_w} = \gamma s/\rho_w^2 > 0$. A globális instabilitás bizonyítása triviális.

(*ii*) Lásd később.

Q.E.D.

A 2. Tétel következményei kompatibilisek az előbbiekben mondott ”késélen” történő Harrodi mozgásokkal.



2. ábra. A növekedési ütem változása tökéletes előrelátású Harrod modellben

3 Strukturális stabilitás speciális dinamikai rendszerekre

Ebben a pontban az egy- és kétdimenziós speciális dinamikai rendszerek globális strukturális stabilitásának bizonyításához szükséges fogalmakat és tételeket tárgyaljuk, hogy bebizonyíthassuk az 1. Tételt és a 2. Tétel (*ii*) állítását.

Az M jelöljön vagy egy nyitott halmazt az R^n-ben, vagy pedig egy n-dimenziós kompakt differenciálható sokaságot, amely legalább C^2-sima, és az R^N-nek részhalmaza valamely $N \in [n, 2n+1]$ egészre. Speciálisan itt elegendő azt az esetet tekinteni, amikor M az R^1 vagy R^2 nyitott részhalmaza, vagy pedig $M = S^2 = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\right\}$ a 3-dimenziós egységgömb 2-dimenziós felülete, de az alábbiak általánosabban is igazak.

Legyen f egy C^1-vektormező M-en. Ha $M \subset R^n$ nyitott, akkor ez azt jelenti, hogy egy $f \in C^1(M, R^n)$ függvény adott. Ha pedig M egy n-dimenziós sokaság, akkor $f : M \to R^N$ úgy, hogy $f(p) \in T_p M$ minden $p \in M$-re, ahol $T_p M$ az M érintőtere p-ben. Ha $\{(U_j, h_j)\}_{j=1}^m$ az M egy atlasza, és $V_j = h_j(U_j)$, akkor vannak $f_j : V_j \to R^n$ függvények úgy, hogy

$$f\left(h_j^{-1}(x)\right) = Dh_j^{-1}(x)\, f_j(x)$$

minden $x \in V_j$ esetén, és az $f_j : V_j \to R^n$ függvények C^1-simasága esetén mondjuk, hogy f egy C^1-vektormező M-en.

Tekintsük az

$$x' = f(x) \tag{15}$$

differenciálegyenletet az M-en. Bármely $x^0 \in M$-hez van egyetlen $\varphi(\cdot, x_0) : I(x_0) \to M$ megoldásgörbe, amelynek az $I(x_0)$ a maximális létezési intervalluma, $I(x_0) \subset R$ nyitott intervallum, $0 \in I(x_0)$, az $I(x_0) \ni t \to \varphi(t, x_0) \in M$ görbe érintője a t pontban a vektormező $f(\varphi(t, x_0))$ eleme. Továbbá teljesül, hogy $\varphi(0, x) = x$, $\varphi(t+s, x) = \varphi(t, (\varphi(s, x)))$, és az - $= \{(t, x) \in R \times M : t \in I(x)\}$ definícióval $\varphi :$ - $\to M$ folytonosan differenciálható, azaz φ egy C^1-sima dinamikai rendszer M-en.

Legyen g egy másik C^1-vektormező M-en, és tekintsük az

$$x' = g(x) \tag{16}$$

differenciálegyenletet, amely a ψ-vel jelölt C^1-sima dinamikai rendszert definiálja. A φ és ψ dinamikai rendszereket (azaz a (15) és (16) egyenleteket) topologikusan ekvivalensnek nevezzük, ha létezik egy $h : M \to M$ homeomorfizmus (azaz folytonos ráképezés, amelynek van inverze, és az is folytonos), amely φ pályáit átviszi a ψ pályáiba, azaz a $\{\varphi(t, x) : t \in I(x)\}$ halmazokat a $\{\psi(t, x) : t \in I(h(x))\}$ halmazokba, miközben a t időparaméter által definiált irányítást változatlanul hagyja.

A φ dinamikai rendszert strukturálisan stabilnak nevezzük, ha topologikusan ekvivalens minden hozzá elegendően közeli dinamikai rendszerrel valamely topológiában. Az alábbiakban, amikor strukturális stabilitásról beszélünk, specifikálni fogjuk a topológiát, amelyben a közelséget definiáljuk.

Jól ismert, hogy ha M kompakt sokaság, akkor az M-en definiált f, azaz C^1-vektormező által generált φ dinamikai rendszerre $I(x) = (-\infty, \infty)$ minden $x \in M$ esetén.

Ha $M \subset R^n$ nyitott, akkor a φ-re $I(x) = (-\infty, \infty)$ nem feltétlenül teljesül. Van azonban egy standard technika az idő átskálázásában úgy, hogy $I(x) = (-\infty, \infty)$ legyen minden $x \in M$-re. Ha $M \subset R^n$ nyitott és $f \in C^1(M, R^n)$, akkor létezik egy $F \in C^1(M, R^n)$ függvény úgy, hogy az

$$x' = F(x)$$

egyenlet olyan $\Phi : R \times M \to M$ dinamikai rendszert definiál, amelyre $\Phi(t, x)$ minden $t \in (-\infty, \infty)$ esetén értelmezett, továbbá Φ és φ topologikusan ekvivalensek. Ha $M = R^n$, akkor pl.

$$F(x) = \frac{f(x)}{1 + |f(x)|}$$

jó választás, ahol $|f(x)| = \left(\sum (f_i(x))^2\right)^{1/2}$.

Így a fentiek alapján a továbbiakban mindig feltehetjük, hogy $I(x) = (-\infty, \infty)$ minden $x \in M$-re.

(A) A kétdimenziós eset

$(A1)$ Kompakt kétdimenziós sokaságok

Ha f egy C^1-vektormező a 2-dimenziós, kompakt, differenciálható M sokaságon, és $\{(U_j, h_j)\}_{j=1}^m$ egy atlasz M-en, akkor az f vektormező C^1-normáját az

$$\|f\|_1 = \max_{j \in \{1,\dots,m\}} \|f_j\|_1$$

formulával definiálhatjuk, ahol $V_j = h(U_j) \subset R^2$ és $f_j : V_j \to R^2$ C^1-beli függvények, $\|f_j\|_1 = \sup_{x \in V_j} (|f_j(x)| + |Df_j(x)|)$. Az f vektormező strukturálisan stabil, ha létezik $\varepsilon > 0$ úgy, hogy minden olyan M-en definiált és g-vel jelölt C^1-vektormezőre, amelyre

$$\|f - g\|_1 < \varepsilon$$

teljesül, a g topologikusan ekvivalens f-fel.

Legyen

$$\mathrm{Per}(\varphi) = \{x \mid \exists\, t > 0 \text{ úgy, hogy } \varphi(t, x) = x\}$$

a periodikus pontok halmaza;

$$\text{-}\ (\varphi) = \{x \mid \exists\, x_n \to x, \exists\, t_n \to \infty \text{ úgy, hogy } \varphi(t_n, x_n) \to x\}$$

a nem-vándorló pontok halmaza.

A $Per(\varphi)$-beli pályák két típusa különböztethető meg: egyensúlyi pontok és periodikus pályák. A p hiperbolikus egyensúlyi pont egy olyan pont, amelyre $\varphi(t, p) = p$ minden t-re, továbbá a $Df(p)$ sajátértékeinek valós része nem nulla. Ha mindkét sajátérték valós része negatív (pozitív), akkor minden p-hez közeli pont p felé mozog az idő előre haladtával (hátra haladtával), és p egy nyelő (forrás). Azon pontok összességét az M-ben, amelyek tartanak a nyelő (forrás) felé az idő előre haladtával (hátra haladtával), vonzási (taszítási) medencének nevezzük. Ha a hiperbolikus nyugalmi pont se nem nyelő, se nem forrás, akkor egy nyeregpont. Ebben az esetben két kitüntetett pálya-pár van, a p stabil (instabil) szeparatrixei, mindkettőnek megfelelő irányítása van. A p és q fix nyeregpontok közötti összeköttetés ($p = q$ is lehetséges) olyan pálya, amely egyidejűleg a q-nak stabil és a p-nek instabil szeparatrixe.

A $\mathrm{Per}\,(\varphi)$-beli periodikus pálya hiperbolikus, ha a pálya fölött a $\mathrm{div}\, f$ integráljaként definiált (Floquet vagy Ljapunov-féle) karakterisztikus kitevő nem zérus. Ha a kitevő negatív (pozitív), akkor a pálya periodikus nyelő (forrás), s a nyugalmi ponttal analóg definiáljuk a vonzási (taszítási) medencéket.

Peixoto tétele teljesen jellemzi a strukturálisan stabil C^1-vektormezőket a kompakt 2-dimenziós sokaságokon.

A.1 Tétel (Peixoto, 1962). *Az M kompakt, kétdimenziós, differenciálható sokaságon definiált φ dinamikai rendszer strukturálisan stabil pontosan akkor, ha a következő három feltétel teljesül:*

(*i*) - $(\varphi) = \mathrm{Per}(\varphi)$;

(*ii*) *minden* $\mathrm{Per}(\varphi)$*-beli pálya hiperbolikus;*

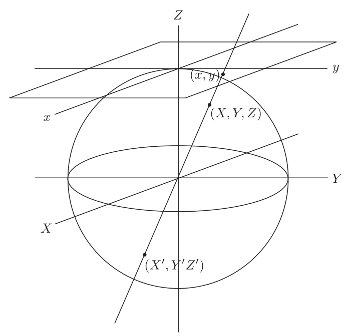
(*iii*) *nincsenek nyereg-összeköttetések.*

Bizonyos síkbeli vektormezőkre is alkalmazható a Peixoto tétel. Ebben az esetben vehetjük a végtelen sík (R^2) Poincaré-féle sztereografikus leképezését a gömb felszínére, ami a végtelen síkot (együtt a dinamikai rendszer fázisportréjával) kompakt sokaságba transzformálja.

Egy végtelen sík pontjainak az egységsugarú gömb

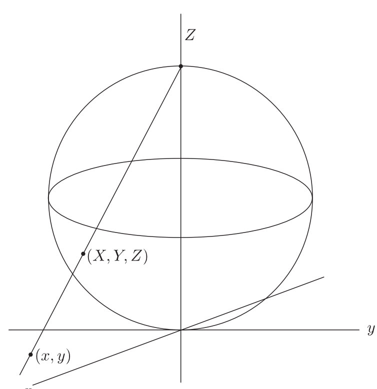
$$S^2 = \big\{(X, Y, Z) \in R^3 \mid X^2 + Y^2 + Z^2 = 1\big\}$$

felszínére történő leképezéséhez a középpontos vetítést használjuk. A végtelen xy-sík pontjainak a leképezése az S^2 felszínre úgy történik, hogy a sík origóját a gömb északi pólusára helyezzük és az érintő sík minden egyes pontját a gömb középpontján áthaladó egyenessel összekötjük. Az egyenes a gömb felszínén kétszer megy keresztül, mégpedig ellentétes pontokon. Az xy-sík origóját az északi és déli pólusokra, az összes végtelenbeli pontját pedig az S^2 egyenlítőjére képezzük le (lásd a *3. ábrát*). Ha az xy-sík pontjait ezzel a technikával vetítjük az S^2-re, az így előállított gömböt Poincaré gömbnek nevezzük.



3. ábra.

Ettől megkülönböztetjük a Bendixson gömböt, amikor az xy-sík origóját a déli pólusra helyezzük és az északi pólusból kiinduló egyenesekkel kötjük össze a sík egyes pontjait, ami a sík pontjainak megfeleltet egy pontot az S^2-en, a végtelenben levő pontjai pedig mind az északi pólusra kerülnek (lásd a *4. ábrát*).



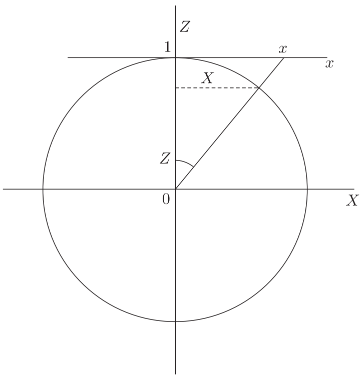
4. ábra.

Az xy-síknak az S^2 felső félgömbre történő középpontos vetítésének keresztmetszete (lásd az *5. ábrát*) alapján az alábbi összefüggést írhatjuk fel a sík és a gömb tetszőleges pontjainak koordinátái között:

$$x = \frac{X}{Z}, \quad y = \frac{Y}{Z} \tag{17}$$

amelyeket behelyettesítve a gömb egyenletébe, kapjuk:

$$(xZ)^2 + (yZ)^2 + Z^2 = 1$$
$$Z = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$$



5. ábra.

Így az egy-egy értelmű megfeleltetés a felső félgömb $(Z > 0)$ (X, Y, Z) pontjai és az xy-sík pontjai között a következő:

$$X = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}, \quad Y = \frac{y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}, \quad Z = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}.$$

Megjegyezzük, hogy a $(0, 0) \in R^2$ origó megfelel a $(0, 0, 1) \in S^2$ északi pólusnak, a végtelenbeli pontjai pedig az S^2 egyenlítőjének. Így bármely két ellentétes pont az S^2 egyenlítőjén az R^2-nek ugyanazon végtelenbeli pontját mutatja. Ez a megfeleltetés lehetővé teszi, hogy megjelenítsük egy síkbeli dinamikai rendszer által indukált áramlást a Poincaré gömbön. Az ellentétes pontok környezetében az áramlások topológiailag ekvivalensek lesznek, eltekintve attól, hogy az áramlások iránya megfordulhat.

A tétel megfogalmazásához szükségünk lesz bizonyos kikötésekre. Tekintsük most az

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P\,(x, y) \\ \dot{y} &= Q\,(x, y) \end{aligned} \tag{18}$$

egyenletrendszer által definiált dinamikai rendszert, és tegyük fel, hogy mind a $P\,(x, y)$, mind a $Q\,(x, y)$ az x, y változóknak maximum m-ed fokú polinomiális függvényei. Azaz,

$$\begin{aligned} P(x, y) &= P_1\,(x, y) + \ldots + P_m\,(x, y)\ , \\ Q(x, y) &= Q_1\,(x, y) + \ldots + Q_m\,(x, y)\ , \end{aligned}$$

ahol P_j és Q_j homogén j-ed fokú polinomok x-ben és y-ban. Az A.2 Tétel azt írja le, hogy hogyan határozhatók meg a fenti dinamikai rendszer egyensúlyi pontjai az S^2 egyenlítőjén. Az ötlet Poincarétól ered (lásd még Lefschetz (1962), Perko (1991) és Andronov et al. (1966)).

A.2 Tétel. *A végtelenbeli egyensúlyi pontok az m-ed fokú polinomiális rendszerre a Poincaré gömb egyenlítőjének $(X, Y, 0)$ pontjaiban jelennek meg, ahol $X^2 + Y^2 = 1$ és*

$$XQ_m\,(X, Y) - YP_m\,(X, Y) = 0\ ,$$

vagy ezzel ekvivalensen, a

$$G_{m+1}(\theta) \equiv \cos\theta\, Q_m(\cos\theta, \sin\theta) - \sin\theta\, P_m(\cos\theta, \sin\theta) = 0$$

egyenletet kielégítő θ_j és $\theta_j + \pi$ poláris szögekben. Ennek az egyenletnek legfeljebb $m+1$ számú θ_j és $\theta_j + \pi$ gyökpárja van, hacsak $G_{m+1}(\theta)$ nem azonosan zérus. Ha $G_{m+1}(\theta)$ nem azonosan zérus, akkor az áramlás a Poincaré gömb egyenlítőjén az óramutató járásával ellentétes irányú azon pontokban, amelyek megfelelnek az olyan θ poláris szögeknek, amelyekre $G_{m+1}(\theta) > 0$, és megegyező irányúak azokban, ahol $G_{m+1}(\theta) < 0$.

Bizonyítás. Az (17)-ből a következő egyenleteket kapjuk:

$$dx = \frac{ZdX - XdZ}{Z^2} \quad \text{és} \quad dy = \frac{ZdY - YdZ}{Z^2}\,.$$

A (18) átrendezésével kapjuk a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)} \quad \text{vagy} \quad Q(x,y)\,dx - P(x,y)\,dy = 0 \tag{19}$$

egyenleteket. Megjegyezzük, hogy ezáltal eltűnt az időfüggőség. Behelyettesítve a (17)-et a (18)-ba, kapjuk:

$$Q(ZdX - XdZ) - P(ZdY - YdZ) = 0\,, \tag{20}$$

ahol $P = P\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right)$ és $Q = Q\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right)$. Távolítsuk most el a törteket a (20)-ból Z^m-mel történő beszorzással:

$$(Q^* dX - P^* dY)\,Z + (YP^* - XQ^*)\,dZ = 0\,, \tag{21}$$

ahol $P^*(X,Y,Z) = Z^m P\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right)$ és $Q^*(X,Y,Z) = Z^m Q\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right)$ polinomiális függvények X, Y és Z-ben. Az egyenlet determináns-egyenlet alakjában is felírható:

$$\begin{vmatrix} dX & dY & dZ \\ X & Y & Z \\ P^* & ZQ^* & 0 \end{vmatrix} = 0\,.$$

A (21) az R^2-en lévő (18) síkbeli rendszer által definiált S^2-beli dinamikai rendszert képviseli. Így ahhoz, hogy a (18)-at a végtelenben tanulmányozzuk, elegendő a (21)-et vizsgálnunk az S^2 egyenlítőjének környezetében. Vegyük a $Z = 0$ esetet, ami (21)-ből az

$$(YP^* - XQ^*)\,dZ = 0$$

egyenletet adja. Az $YP^* - XQ^* \neq 0$-ra igaznak kell lennie, hogy a $dZ = 0$, ami azt implikálja, hogy az egyenlítőn levő trajektóriáknak az S^2 egyenlítőjén kell maradniuk. Így az egyensúlyi pontok az egyenlítőn az

$$YP^* - XQ^* = 0$$

egyenlettel adottak. Figyelembe véve, hogy $P(x,y) = P_1(x,y) + \ldots + P_m(x,y)$ és $Q(x,y) = Q_1(x,y) + \ldots + Q_m(x,y)$, kapjuk

$$\begin{aligned} 0 &= YP^* - XQ^* \\ &= Z^m Y P_1\left(\tfrac{X}{Z}, \tfrac{Y}{Z}\right) + \ldots + Z^m Y P_m\left(\tfrac{X}{Z}, \tfrac{Y}{Z}\right) \\ &\quad - Z^m X Q_1\left(\tfrac{X}{Z}, \tfrac{Y}{Z}\right) - \ldots - Z^m X Q_m\left(\tfrac{X}{Z}, \tfrac{Y}{Z}\right) \\ &= Z^{m-1} Y P_1\left(\tfrac{X}{Z}, \tfrac{Y}{Z}\right) + \ldots + Y P_m\left(\tfrac{X}{Z}, \tfrac{Y}{Z}\right) \\ &\quad - Z^{m-1} X Q_1\left(\tfrac{X}{Z}, \tfrac{Y}{Z}\right) - \ldots - X Q_m\left(\tfrac{X}{Z}, \tfrac{Y}{Z}\right) . \end{aligned}$$

Az S^2 egyenlítőjén $Z = 0$, ami az A.2 Tétel első állítását adja,

$$XQ_m(X,Y) - YP_m(X,Y) = 0 . \tag{22}$$

Vagyis az S^2 egyenlítőjén lévő egyensúlyi pontok meghatározása az $X^2+Y^2 = 1$ és a (22) egyenletrendszer megoldásával lehetséges. Polárkoordinátákban, $r = 1$ mellett, az alábbi egyenlet adja az A.2 Tétel második állítását:

$$\cos\theta\, Q_m(\cos\theta, \sin\theta) - \sin\theta\, P_m(\cos\theta, \sin\theta) = 0 .$$

Ez a

$$\dot\theta = \frac{XQ - YP}{r^2}$$

egyenletből származtatható, amely a síkbeli koordinátákat polárkoordinátákba transzformálja. $\dot\theta$-ben a legmagasabb fokú tagokat zérusnak választva, meghatározhatjuk az egyensúlyi pontokat a végtelenben. Végül, az áramlás irányát a végtelenben a $\dot\theta$ legmagasabb fokú tagjának előjele határozza meg, azaz, hogy θ növekvő vagy csökkenő-e.

Q.E.D.

Ahhoz, hogy az áramlás viselkedését elemezzük az S^2 egyenlítőjén lévő egyensúlyi pontok közelében, a legkönnyebben úgy járhatunk el, ha az áramlást kivetítjük a Poincaré gömbről a megfelelő érintő síkokra, ahol alkalmazható az R^2-beli dinamikai rendszerekre vonatkozó elmélet.

A.3 Tétel. *Az S^2 Poincaré gömb egyenlítőjén a* (21) *tetszőleges, kivéve a* $(0, \pm 1, 0)$ *pontokat, egyensúlyi pontjának környezetében a* (21) *által definiált dinamikai rendszer topológiailag ekvivalens a*

$$\begin{aligned} \pm\dot y &= y z^m P\left(\frac{1}{z}, \frac{y}{z}\right) - z^m Q\left(\frac{1}{z}, \frac{y}{z}\right) \\ \pm\, \dot z &= z^{m+1} P\left(\frac{1}{z}, \frac{y}{z}\right) , \end{aligned}$$

rendszer által definiált dinamikai rendszerrel, ahol az előjeleket az S^2 egyenlítőjén lévő dinamikai rendszer iránya határozza meg, amit az A.2 Tétel határoz meg. Hasonlóan, a (21) *által definiált dinamikai rendszer a* (21) *tetszőleges kritikus pontjának környezetében az S^2 egyenlítőjén, a $(\pm 1, 0, 0)$ pontok kivételével, topológiailag ekvivalens a*

$$\pm\dot{x} = xz^m Q\left(\frac{x}{z}, \frac{1}{z}\right) - z^m P\left(\frac{x}{z}, \frac{1}{z}\right)$$
$$\pm\,\dot{z} = z^{m+1} Q\left(\frac{x}{z}, \frac{1}{z}\right)$$

rendszer által meghatározott dinamikai rendszerrel, ahol az előjeleket az S^2 egyenlítőjén lévő dinamikai rendszer iránya pontosítja, amit ugyancsak az A.2 Tétel határoz meg.

Bizonyítás. Az egyenlítőn lévő egyensúlyi pont közelében tekintsük a (21) által definiált S^2-n lévő egyenletet:

$$(Q^* dX - P^* dY)\, Z + (Y P^* - X Q^*)\, dZ = 0\ .$$

Ahhoz, hogy meghatározzuk a pályák viselkedését az S^2 egyenlítőjén lévő egyensúlyi pontjainak környezetében az $X > 0$ félgömbön, kivéve a $(0, \pm 1, 0)$ pontokban, elegendő lesz az $X = 1$ síkra történő vetítés. A középpontos vetítés keresztmetszetén a hasonló háromszögek felhasználásával kapjuk az $y = \frac{Y}{X}$ és $z = \frac{Z}{X}$ összefüggéseket. Az $X = 1$ mellett $Y = y$ és $Z = z$. Felhasználva ezt a vetítést $dX = 0$-val (21)-ből az alábbiakat kapjuk:

$$-zP^*\left(\frac{1}{z}, \frac{y}{z}\right) dy + \left(yP^*\left(\frac{1}{z}, \frac{y}{z}\right) - Q^*\left(\frac{1}{z}, \frac{y}{z}\right)\right) dz = 0\ ,$$

vagyis

$$\left(yz^m P\left(\frac{1}{z}, \frac{y}{z}\right) - z^m Q\left(\frac{1}{z}, \frac{y}{z}\right)\right) dz - zz^m P\left(\frac{1}{z}, \frac{y}{z}\right) dy = 0\ .$$

Megjegyezzük, hogy ez a leképezés vetíti le az $X > 0$ félgömbön az S^2 egyenlítőjétől távol lévő egyensúlyi állapotokat az y tengelyre az yz-síkon. Azt is megjegyezzük, hogy ez a kifejezés a (19)-hez hasonló alakban van, és hogy ez az alak nem függ az időtől. Az eredmény az, hogy az áramlás iránya ismeretlen. Visszarendezve az utolsó egyenletet az időtől függő differenciál-egyenlet-rendszerbe, az A.3 Tétel állítását kapjuk:

$$\pm\dot{y} = yz^m P\left(\frac{1}{z}, \frac{y}{z}\right) - z^m Q\left(\frac{1}{z}, \frac{y}{z}\right)$$
$$\pm\,\dot{z} = z^{m+1} P\left(\frac{1}{z}, \frac{y}{z}\right)\ .$$

Itt a $\pm$ jelet használjuk annak jelölésére, hogy az áramlás iránya pontosan nem ismert, a helyes előjelet az A.2 Tétel alkalmazásával határozhatjuk meg.

Hasonlóan, az $Y = 1$ síkra történő vetítés eredményezi az A.3 Tétel második állítását.

Q.E.D.

A (18) egyenletből kiindulva kapunk egy φ dinamikai rendszert az S^2 gömb-felületen, amelynek az egyenlítőre eső, ill. annak közelében levő dinamikáját az A.2 és A.3 Tételek alapján vizsgálhatjuk. Ha φ-nek az S^2-en nincs nyereg-összeköttetése, akkor az S^2-re vonatkozó Poincaré-Bendixson tétel (lásd pl. Perko, 1991) alapján - $(\varphi) = \mathrm{Per}\,(\varphi)$ következik. Így a Peixoto tétel következménye az alábbi:

A.4 Tétel. *Ha (18)-ban a P és Q polinomok, akkor a $(P, Q)^T$ vektormező strukturálisan stabil, ha a fenti módon az S^2 gömbfelületen kapott φ dinamikai rendszerre teljesül az alábbi két feltétel:*

(*i*) $\mathrm{Per}\,(\varphi)$ *csak véges sok pályát tartalmaz, és azok mindegyike hiperbolikus;*

(*ii*) *nincsenek nyereg-összeköttetések.*

Az A.4 Tételben a vektormezők közelségét az erős (vagy Whitney) C^1-topológia értelmében definiáljuk. Azaz az $f \in C^1\left(R^2, R^2\right)$ síkbeli vektormezőt (vagy az általa definiált φ dinamikai rendszert) strukturálisan stabilnak nevezzük, ha létezik $\varepsilon : R^2 \to R$ folytonos és pozitív függvény úgy, hogy minden olyan $g \in C^1\left(R^2, R^2\right)$ vektormezőre, amelyre

$$|f(x) - g(x)| + |Df(x) - Dg(x)| < \varepsilon(x) \qquad \left(\forall x \in R^2\right)$$

teljesül, a φ (és a g általt definiált) ψ dinamikai rendszerek topológiailag ekvivalensek, továbbá az ekvivalenciát biztosító $h : R^2 \to R^2$ homeomorfizmus közel van az identikus leképezéshez (a minden kompakt halmazon egyenletes konvergencia topológiájában).

Megjegyezzük, hogy az A.4 Tétel csak elegendő feltételt ad a strukturális stabilitásra. Előfordulhat, hogy φ nem strukturálisan stabil, de $(P, Q)^T$ igen. Az ok: az S^2 gömbfelületre vetítés létrehozhat nem hiperbolikus egyensúlyi helyzeteket az egyenlítőn.

(*A*2) Nem kompakt sokaságokon értelmezett dinamikai rendszerek

Bizonyos esetekben, mint most a miénkben is, a végtelen sík gömbfelszínre történő vetítése biztosítja a kompakt sokaságot, de ez létrehozhat az egyenlítőn nem hiperbolikus egyensúlyi helyzeteket is. Az ilyen degenerált esetekre dolgozták ki a Kotus-Krych-Nitecki tételt, amely 2-dimenziós nem kompakt sokaságokon értelmezett dinamikai rendszerek strukturális stabilitására ad elégséges feltételeket. Mi itt az általánosabb tételnek csak az egész síkra értelmezett vektormezőkre vonatkozó speciális esetét tárgyaljuk, amikor is a feltételek szükségesek és elegendőek. A strukturális stabilitást az (*A*1) szakasz végén bevezetett módon értelmezzük, azaz az erős (Whitney) C^1 topológiát használjuk.

A továbbiakban a φ dinamikai rendszerre vonatkozóan bevezetünk néhány fogalmat.

Az $x \in R^2$-n átmenő pálya, pozitív pálya, negatív pálya az alábbi:

$$O(x) = \{\varphi(t, x) : t \in R\} \ ,$$

$$O^+(x) = \{\varphi(t,x) : t > 0\} ,$$
$$O^-(x) = \{\varphi(t,x) : t < 0\} .$$

Az $M \subset R^2$ halmaz pozitív (negatív) invariáns, ha $x \in M$-ből $O^+(x) \subset M$ ($O^-(x) \subset M$) következik. M invariáns, ha pozitív és negatív invariáns.

Az $M \subset R^2$ halmaz minimális, ha M kompakt és invariáns, továbbá nincs olyan valódi részhalmaza, amely kompakt és invariáns. Triviális minimális halmazok az egyensúlyi pontok és a nemtriviális periodikus pályák.

Az $\alpha(x)$ és $\omega(x)$ limeszhalmazok definíciói:

$$\alpha(x) = \{y : \exists\,(t_n)\,\text{sorozat úgy, hogy}\ t_n \to -\infty \ \text{ és }\ \varphi(t_n,x) \to y\}$$
$$\omega(x) = \{y : \exists\,(t_n)\,\text{sorozat úgy, hogy}\ t_n \to +\infty \ \text{ és }\ \varphi(t_n,x) \to y\}$$

Azt mondjuk, hogy az $O(x)$ pálya oszcilláló, ha $\alpha(x) \cup \omega(x)$ nem kompakt.
A

$$J^+(x) = \{y : \exists(t_n \to +\infty), \exists(x^n \to x)\ \text{sorozatok úgy, hogy}\ \varphi(t_n, x^n) \to y\}$$

halmaz az x első pozitív prolongációs limeszhalmaza.

Tegyük fel, hogy x_0 egyensúlyi helyzet és nyeregpont. Jól ismert, hogy ekkor létezik stabil és instabil halmaza. A stabil (instabil) halmazt két-két pálya alkotja. Az x_0 nyeregpont stabil (instabil) szeparatrixeinek nevezzük a stabil (instabil) halmazt alkotó 2 pályát.

Azt mondjuk, hogy $x, y \in R^2$ esetén az $O^+(x)$ és $O^-(y)$ félpályák nyerget alkotnak a ∞-ben, ha $\omega(x) = \emptyset$, $\alpha(y) = \emptyset$ és $y \in J^+(x)$. A nyeregnek az $O^+(x)$ stabil, az $O^-(y)$ instabil szeparatrixe.

Jelölje W^+ (W^-) a végesben lévő nyeregpontok stabil (instabil) szeparatrixeinek és a ∞-ben lévő stabil (instabil) szeparatrixeinek egyesítését. Ekkor érvényes az alábbi tétel:

A.5 Tétel (Kotus, Krych and Nitecki, 1982). *A φ dinamikai rendszer pontosan akkor strukturálisan stabil, ha*

- (*i*) *minden minimális halmaza triviális;*
- (*ii*) *nincs oszcilláló pályája;*
- (*iii*) $\mathrm{Per}(\varphi)$*-ben minden pálya hiperbolikus;*
- (*iv*) $\overline{W^+} \cap \overline{W^-} \subset \mathrm{Per}(\varphi)$.

(B) Egydimenziós eset

Tekintsük az alábbi halmazokat:

$$C^0((0,\infty)) = \{f : (0,\infty) \to R : f \text{ folytonos}\}$$
$$C^1((0,\infty)) = \{f : (0,\infty) \to R : f \text{ folytonosan differenciálható}\}$$

Az $f \in C^0((0,\infty))$ esetén legyen $\|f\|_0 = \sup_{(0,\infty)} |f|$, az $f \in C^1((0,\infty))$ esetén pedig $\|f\|_1 = \|f\|_0 + \|f'\|_0$.

Most legyenek adottak az $f, g \in C^1((0,\infty))$ függvények. Az $\dot{x} = f(x)$ és az $\dot{y} = g(y)$ differenciálegyenletek, illetve az f és g függvények topologikusan ekvivalensek, ha létezik olyan $h : (0, \infty) \to (0, \infty)$ homeomorfizmus, amely a pályákat egymásba képezi az irányítás megtartásával.

Az $\dot{x} = f(x)$ differenciálegyenlet, illetve az f függvény strukturálisan stabil, ha létezik olyan $\varepsilon > 0$, hogy

$$\|f - g\|_1 < \varepsilon$$

esetén az $\dot{x} = f(x)$ és az $\dot{y} = g(y)$ differenciálegyenletek topologikusan ekvivalensek.

B1. Tétel. *Legyen $f \in C^1((0, \infty))$ olyan, amelyre $|f|$ minimuma egy kompakt intervallumon kívül pozitív. Ekkor az $\dot{x} = f(x)$ differenciálegyenlet pontosan akkor strukturálisan stabil, ha az f függvénynek legfeljebb véges sok egyensúlyi pontja van és mindegyik hiperbolikus.*

Most bebizonyítjuk a B.1 Tételt, ami egyúttal a Harrod modell egydimenziós változatának strukturális stabilitását adja, és teljessé teszi a 2. Tétel bizonyítását.

Csak azt igazoljuk, hogy ha egy hiperbolikus egyensúlyi pont van, amelyet p-vel jelölünk, akkor az egyenlet strukturálisan stabil. (Véges sok hiperbolikus egyensúlyi pont esetén hasonló gondolatmenet alkalmazható.)

Legyen $\delta \in (0, p)$, amelyre $x \in (p - \delta, p + \delta)$ esetén $|f'(x)| > |f'(p)|/2$. Legyen

$$m = \min\{|f(x)| : x \in (0, p - \delta] \cup [p + \delta, \infty)\} .$$

A feltevés miatt $m > 0$. Legyen

$$\varepsilon < \frac{m}{2}, \quad \varepsilon < \frac{|f'(p)|}{2} .$$

Legyen $g \in C^1((0, \infty))$ olyan, amelyre $\|f - g\|_1 < \varepsilon$. Ekkor minden $x > 0$ mellett $|f(x) - g(x)|_1 < \varepsilon$, így $x \notin (p - \delta, p + \delta)$ esetén $|g(x)| > |f(x)| - \varepsilon > |f(x)| - m/2 > 0$. Azaz, g-nek nem lehet zérushelye a $(p - \delta, p + \delta)$ intervallumon kívül, sőt előjele ott megegyezik f előjelével. Most megmutatjuk, hogy a $(p - \delta, p + \delta)$ intervallumban g-nek is pontosan egy zérushelye van. Ugyanis, ha két gyöke lenne, akkor közötte a deriváltjának is lenne egy x^* gyöke. Ekkor $|f'(x^*) - g'(x^*)| = |f'(x^*)| \geq |f'(p)|/2 > \varepsilon$ lenne, ami ellentmond annak, hogy $\|f - g\|_1 < \varepsilon$. Mivel g-nek is pontosan egy zérushelye van, jelölje ezt q, azért a topologikus ekvivalenciát biztosító homeomorfizmus legyen $h(x) = \frac{q}{p}x$, amely a két rendszer egyensúlyi pontjait, és így a többi pályáit is egymásba képezi.

Igazoljuk most a fordított irányú állítást. Azaz, tegyük fel, hogy f strukturálisan stabil, és válasszuk meg ε-t a definíció szerint. A *Sard Lemma* szerint egy folytonosan differenciálható leképezés kritikus értékeinek halmaza nullmértékű. (y reguláris érték, ha $y = f(x)$ esetén igaz, hogy $f'(x) \neq 0$; y kritikus érték, ha nem reguláris érték.) Így van olyan $\alpha \in (0, \varepsilon)$, hogy a $g(x) = f(x) + \alpha$ jobb oldalnak csak hiperbolikus egyensúlyi pontjai vannak. Mivel a feltétel szerint ezek mind egy kompakt intervallumban vannak, és nem torlódhatnak (mert a torlódási pontjuk egy nem hiperbolikus egyensúlyi pont lenne), azért g-nek véges sok egyensúlyi pontja van. Így g és f topologikus ekvivalenciája miatt f-nek is véges sok egyensúlyi pontja van. Ha f-nek lenne egy nem hiperbolikus p egyensúlyi pontja (ahol $f'(p) = 0$ lenne), akkor lenne olyan g függvény, amely p egy környezetében azonosan 0 lenne, és fennállna $\|f-g\|_1 < \varepsilon$. Ez a g függvény nem lenne topologikusan ekvivalens az f függvénnyel, ami ellentmond f strukturális stabilitásának.

4 A Harrod modell strukturális stabilitásának bizonyítása

Az egydimenziós Harrod modell esetét a tökéletes előrelátással már tisztáztuk. Most tekintsük a kétdimenziós esetet, a Harrod modellt adaptív várakozásokkal.

Az egyszerűség kedvéért írjuk át a ($8'$) és ($11'$) egyenleteket a következő alakba:

$$\dot{x} = ax\,(y-b)$$
$$\dot{y} = c\,(x-y)\ ,$$

ahol $x = b$, $y = b^e$, $a = \alpha$, $c = \beta$, és $b = b^r$.

Először megmutatjuk, hogy a fenti rendszer vektormezejének Poincaré-féle sztereografikus leképezéssel a gömbfelületre történő transzformációja nem biztosítja a Peixoto tétel kritériumait, vagyis ezzel nem bizonyítható a dinamikai rendszer strukturális stabilitása.

Legyen

$$\frac{dx}{dt} = P(x,y) = ax(y-b)$$
$$\frac{dy}{dt} = Q(x,y) = c(x-y)\ .$$

Alkalmazzuk az A.2 Tételt:

$$-Z^2Q^*dX + ZP^*dY + (ZXQ^* - YP^*)dZ = 0$$
$$P^*(X,Y,Z) = Z^2P\left(\frac{X}{Z},\frac{Y}{Z}\right) = aX(Y-bZ)$$
$$Q^*(X,Y,Z) = ZQ(\frac{X}{Z},\frac{Y}{Z}) = c(X-Y)\ .$$

A behelyettesítések után kapjuk:

$$-cZ^2(X-Y)dX + aZX(Y-bZ)dY + [cZX(X-Y) - aXY(Y-bZ)]\,dZ = 0\ .$$

A kritikus pontokat az alábbi egyenletrendszer megoldása adja:

$$-Z^2Q^* = 0\,, \qquad ZP^* = 0\,, \qquad ZXQ^* - YP^* = 0$$

1. eset: $Z \neq 0,\ Q^* = 0,\ P^* = 0$

$$X = 0,\ Y = 0,\ Z = 1\ \rightarrow\ (0,0,1)$$

$$X = Y = bZ \neq 0 \;\to\; \left(\frac{b}{\sqrt{1+2b^2}}, \frac{b}{\sqrt{1+2b^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+2b^2}}\right)$$

(Az xy síkon a $(0,0)$ és a (b,b) pontoknak felelnek meg.)

2. eset: $Z = 0$, $aXY^2 = 0 \;\to\; (1,0,0)$ és $(0,1,0)$. A gömbfelületen az alábbi egyensúlyi helyzeteket kapjuk:

$$(0,0,1) \qquad\qquad (0,0,1)$$

$$\left(\frac{b}{\sqrt{1+2b^2}}, \frac{b}{\sqrt{1+2b^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+2b^2}}\right) \quad \left(\frac{b}{\sqrt{1+2b^2}}, \frac{b}{\sqrt{1+2b^2}}, \frac{-1}{\sqrt{1+2b^2}}\right)$$

$$(1,0,0) \qquad\qquad (-1,0,0)$$

$$(0,1,0) \qquad\qquad (0,-1,0)$$

Most az A.3 Tételt alkalmazzuk az egyenlítőn lévő egyensúlyi pontokra. Az $(1,0,0)$ pont vizsgálata:

$$X = 1\,, \quad dX = 0\,, \quad y = \frac{Y}{X} = Y\,, \quad z = \frac{Z}{X} = Z$$

$$az\,(y - bz)\,dy + (cz\,(1-y) - ay\,(y-bz))\,dz = 0\;.$$

$$\frac{dy}{dt} = ay(y-bz) - cz(1-y) = -cz + ay^2 + (c-ab)yz$$

$$\frac{dz}{dt} = az(y-bz) = ayz - abz^2$$

Linearizálás $(0,0)$-ban:

$$\begin{pmatrix} \dot y \\ \dot z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}\;.$$

Mivel a 0 kétszeres sajátérték, ezért az $(1,0,0)$ nem hiperbolikus egyensúlyi helyzet.

A $(0,1,0)$ pont vizsgálata:

$$Y = 1\,, \quad dY = 0\,, \quad x = \frac{X}{Y} = X\,, \quad z = \frac{Z}{Y} = Z$$

$$-cz^2\,(x-1)\,dx + (czx\,(x-1) - ax\,(1-bz))\,dz = 0\;.$$

$$\frac{dx}{dt} = ax\,(1-bz) - cxz\,(x-1) = ax + (c-ab)\,xz - cx^2z$$

$$\frac{dz}{dt} = cz^2\,(1-x) = cz^2 - cxz^2$$

Linerizálás a $(0,0)$-ban:

$$\begin{pmatrix} \dot x \\ \dot z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}\;.$$

Mivel a sajátértékek a és 0, ezért a $(0,1,0)$ sem hiperbolikus egyensúlyi helyzet. Mindkét egyensúlyi pont degenerált (lásd in Perko, 1991, 148–149. o.). Látható, hogy mind az yz-síkon, mind az xz-síkon a vektormezők kvadratikus illetve harmadfokú tagokkal kezdődnek, és ebben az esetben még a nem hiperbolikus kritikus pontok részletes vizsgálata sem elégséges a végtelenbeli viselkedés meghatározásához (v.ö. Perko, 1991, 258. o.).

Tehát Peixoto tétele nem alkalmazható, ezért a gyengébb feltételeket magába foglaló Kotus-Krych-Nitecki tételt alkalmazzuk.

Tegyük fel, hogy az a, b, c adott pozitív állandók, és f a következő:

$$f(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} ax_1(x_2-b) \\ c(x_1-x_2) \end{pmatrix} ,$$

ahol most $x_1 = x$ és $x_2 = y$, a paraméterek pedig változatlanok. Ekkor φ egyensúlyi helyzetei:

$$A = (0,0) \quad \text{és} \quad B = (b,b) \, .$$

A

$$Df(0,0) = \begin{pmatrix} -ab & 0 \\ c & -c \end{pmatrix}$$

sajátértékei $-ab < 0$ és $-c < 0$, $ab = c$ esetén a $-c$ kétszeres multiplicitású.

A

$$Df(b,b) = \begin{pmatrix} 0 & ab \\ c & -c \end{pmatrix}$$

sajátértékei

$$\lambda_\pm = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 + 4abc}}{2} ,$$

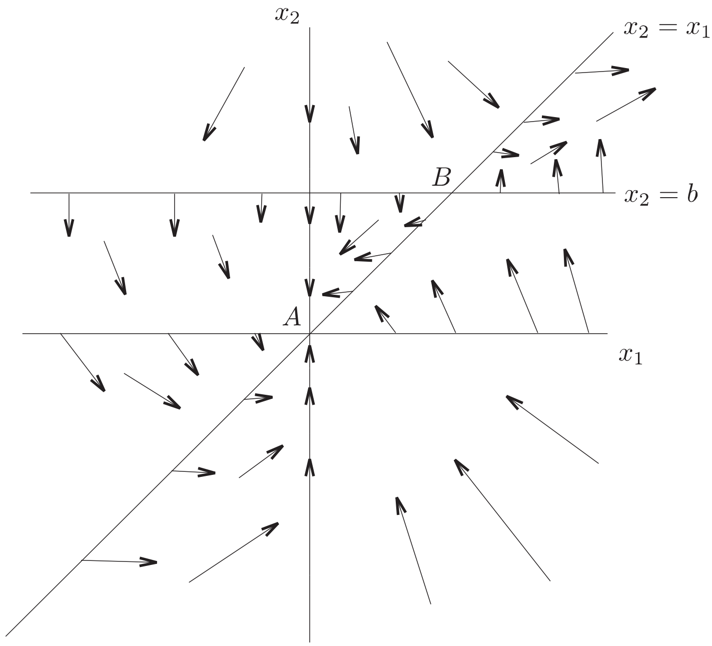
sajátvektorai

$$v_\pm = \left(1, \frac{\lambda_\pm}{ab}\right) .$$

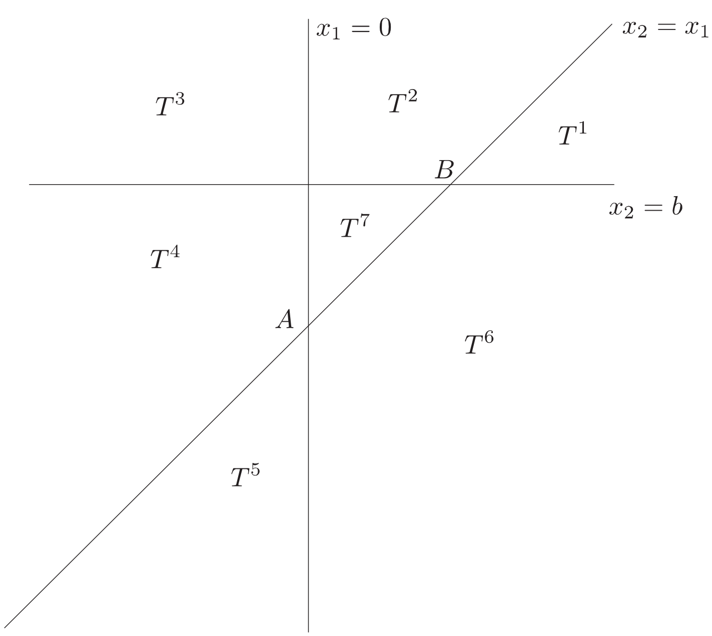
Vegyük észre, hogy $\lambda_- < 0 < \lambda_+$ és $\frac{\lambda_+}{ab} < 1$. Tehát mindkét egyensúlyi helyzet hiperbolikus, az A stabil egyensúlyi helyzet (nyelő), B nyeregpont.

Az $f : R^2 \to R^2$ vektormező a *6. ábrán* látható. (Az átskálázott f vektormező elemei ugyanolyan irányúak, mint az f vektormezőé, csak a hosszuk különböző.)

Az $x_2 = x_1$, $x_2 = b$, $x_1 = 0$ egyenesek a síkot a $T^1, T^2, \ldots, T^7$ nyitott és összefüggő tartományokra bontják.



6. ábra.



7. ábra.

Az $x_1 = 0$ egyenest három pálya alkotja: $\{(0,0)\}$, $\{(0, e^{-ct} : t \in R)\}$, $\{(0, e^{ct}) : t \in R\}$. Ezért az $x_1 = 0$ egyenes invariáns. Így a 6. ábra alapján

$$\begin{array}{ll} T^1,\ T^5,\ T^7 & \text{pozitív invariánsak}\,, \\ T^2,\ T^3,\ T^6 & \text{negatív invariánsak}\,. \end{array}$$

Jól ismert, hogy a $B = (b, b)$ nyeregpontnak van 1-dimenziós lokális stabil és instabil sokasága: S_{lok} és U_{lok}. Az S_{lok} (U_{lok}) pozitív (negatív) invariáns és érintője a B pontban a B-n átmenő v_- (v_+) irányú egyenes. Mivel

$$v_- = \left(1, \frac{\lambda_-}{ab}\right) \quad \text{és} \quad \frac{\lambda_-}{ab} < 0\,,$$

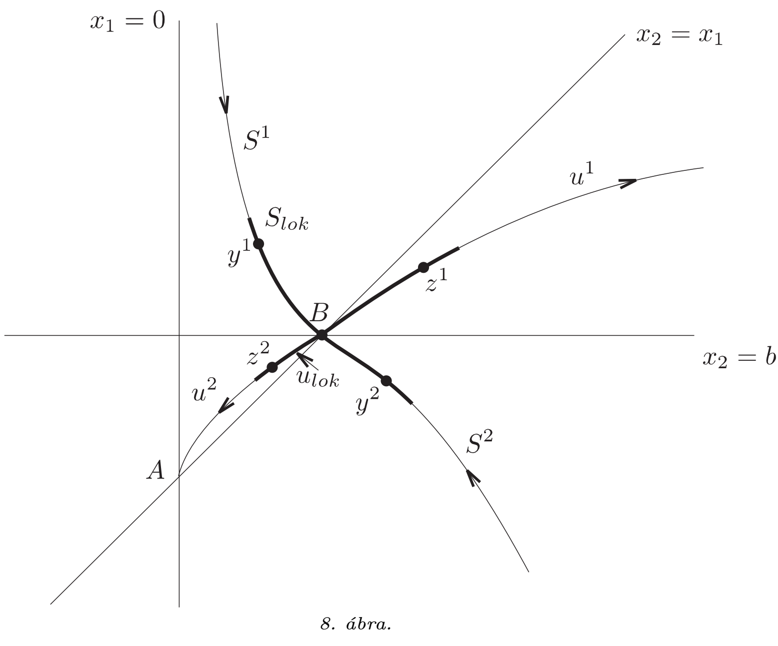
választhatunk $y^1 \in T^2 \cap S_{lok}$ és $y^2 \in T^6 \cap S_{lok}$ pontokat. Ekkor

$$\varphi(t, y^1) \in T^2 \cap S_{lok} \quad \text{és} \quad \varphi(t, y^2) \in T^6 \cap S_{lok} \quad (\text{minden } t \geq 0)$$

és

$$\varphi(t, y^1) \to B\,, \quad \varphi(t, y^2) \to B \quad (t \to \infty)\,.$$

Az $S^1 = \{\varphi(t, y^1) : t \in R\}$ és $S^2 = \{\varphi(t, y^2) : t \in R\}$ halmazok a B nyeregpont stabil szeparatrixei. Az $S = S^1 \cup S^2 \cup \{B\}$ halmaz a B nyeregpont stabil halmaza (*8. ábra*).



8. ábra.

Mivel $y^1 \in T^2$, továbbá a vektormező minden T^2-beli $v = (v_1, v_2)$ elemére $v_1 > 0$, $v_2 < 0$, és T^2 negatív invariáns, ezért a

$$(-\infty, 0] \ni t \to \varphi(t, y^1) \in T^2$$

görbe első komponense monoton növekvő, a második monoton csökkenő. T^2 határán a B az egyetlen egyensúlyi helyzet, amelyhez $\varphi(t, y^1)$ nem tarthat $t \to -\infty$ esetén, így

$$\left|\varphi\left(t, y^1\right)\right| \to \infty \quad (t \to -\infty) .$$

Hasonlóan kapjuk, hogy $\varphi(t, y^2) \in T^6$, $t \in R$, és

$$\left|\varphi\left(t, y^2\right)\right| \to \infty \quad (t \to -\infty) .$$

Az is könnyen belátható, hogy a $\varphi\left(t, y^2\right)$ komponenseire $\varphi_1(t, y^2) \to \infty$, $\varphi_2(t, y^2) \to -\infty \quad (t \to -\infty)$ teljesül.

Analóg módon, $v_+ = \left(1, \frac{\lambda_+}{ab}\right)$ és $0 < \frac{\lambda_+}{ab} < 1$ miatt van olyan $z^1 \in T^1 \cap U_{lok}$ és $z^2 \in T^7 \cap U_{lok}$, hogy

$$\varphi(t, z^1) \in T^1 \cap U_{lok}\,, \quad \varphi(t, z^2) \in T^7 \cap U_{lok} \qquad (\forall\, t \le 0)$$

és

$$\varphi(t, z^1) \to B\,, \quad \varphi(t, z^2) \to B \qquad (t \to -\infty) .$$

Az

$$U^1 = \{\, \varphi(t, z^1),\ t \in R\,\}, \quad U^2 = \{\, \varphi(t, z^2),\ t \in R\,\}$$

halmazok a B instabil szeparatrixei (*8. ábra*). Az $U = U^1 \cup U^2 = \{B\}$ halmaz a B instabil halmaza. Mivel T^1 és T^7 pozitív invariánsok, ezért

$$\varphi(t, z^1) \in T^1\,, \quad \varphi(t, z^2) \in T^7 \qquad (\forall\, t \ge 0) .$$

Innen az következik, hogy $\varphi\left(t, z^1\right)$ $(\varphi\left(t, z^2\right))$ mindkét komponense szigorúan monoton növekvő (csökkenő) $t \in [0, \infty)$-re, és

$$\left|\varphi\left(t, z^1\right)\right| \to \infty\,, \quad \varphi\left(t, z^2\right) \to A = (0, 0) \qquad (t \to \infty) .$$

A fentiek alapján léteznek olyan

$$\sigma : R \to (0, \infty)\ , \quad u : (0, \infty) \to R$$

folytonos függvények, hogy $\sigma\,(b) = b$, $u\,(b) = b$, σ szigorúan monoton csökkenő, u szigorúan monoton növekvő, $u\,(x_1) < x_1$ minden $x_1 > b$-re, $u\,(x_1) > x_1$ minden $x_1 \in (0, b)$-re, és

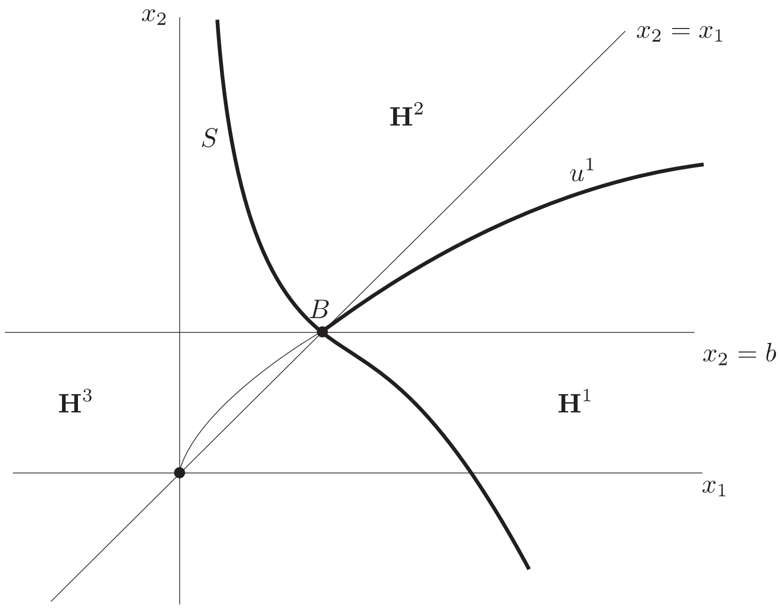
$$S = \{\, (\sigma(x_2), x_2) : x_2 \in R\,\}\ , \quad U = \{\, (x_1, u(x_1)) : x_1 > 0\,\}\ .$$

Most megmutatjuk, hogy a φ-nek nincs nemtriviális periodikus pályája. Ha valamely $\rho \in R^2$ esetén $\varphi\,(t, \rho)$ periodikus a $T > 0$ minimális periódussal, akkor a

$$\Pi : [0, T] \ni t \to \varphi(t, \rho) \in R^2$$

egyszerű zárt görbe belsejében van egyensúlyi helyzet, azaz az A vagy a B pont. Mivel A, $B \in \overline{U \cup S}$, ezért Π belseje $U \cup S$-beli pontokat is tartalmaz. De $U \cup S$ nem korlátos, így van olyan pontja is, amely a Π-n kívül van. A folytonosság és az $U \cup S$ összefüggősége miatt $U \cup S$ tartalmaz olyan pontot is, amely eleme Π-nek. Ez ellentmondás, mert az $U \cup S$ pontjai nem periodikusak.

Az $R^2 \setminus \left(S \cup U^1\right)$ halmaznak 3 összefüggő nyitott komponense van: H^1, H^2, H^3 (*9. ábra*). A H^1, H^2 és H^3 invariánsak.



9. ábra.

Ha $x \in H^1$, akkor $\varphi\,(t, x)$ komponenseire az alábbi érvényes: van egyetlen olyan $t_0 \in R$, amelyre $\varphi_2\,(t_0, x) = b$, és

$$(-\infty, t_0) \ni t \to \varphi_1\,(t, x) \in R \quad \text{szigorúan monoton csökkenő;}$$

$$(t_0, \infty) \ni t \to \varphi_1\,(t, x) \in R \quad \text{szigorúan monoton növekvő;}$$

$$(-\infty, \infty) \ni t \to \varphi_2\,(t, x) \in R \quad \text{szigorúan monoton növekvő.}$$

Ha $\varphi(t, x)$ véges határértékhez tart, amint $t \to \infty$ vagy $t \to -\infty$, akkor a határérték egyensúlyi helyzet. $\overline{H^1}$-ban B az egyetlen egyensúlyi helyzet, és $\varphi\,(t, x)$ nem tart B-hez. Így $\varphi_1\,(t, x)$ és $\varphi_2\,(t, x)$ monotonitási tulajdonsága alapján

$$|\varphi\,(t, x)| \to \infty \qquad (t \to \pm\infty)\ .$$

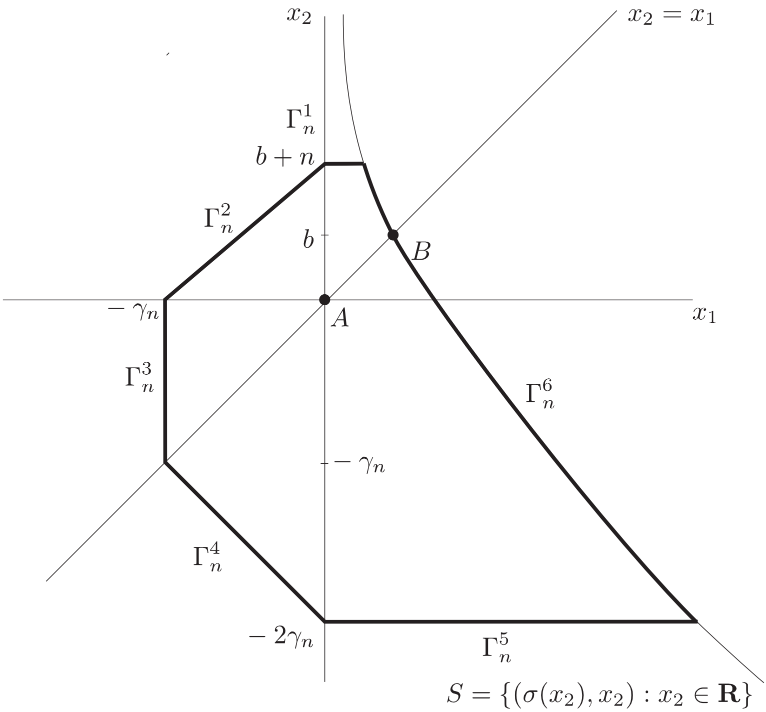
Tehát $\alpha\,(x) = \omega\,(x) = \emptyset$. Analóg módon kapjuk, hogy $\alpha\,(x) = \omega\,(x) = \emptyset$ minden $x \in H^2$ esetén.

Minden $n \geq 1$ egész számra definiáljuk a

$$\Gamma_n = \Gamma_n^1 \cup \ldots \cup \Gamma_n^6$$

görbét (*10. ábra*), ahol $\gamma_n = \frac{a}{c} n\,(b+n)$ és

$$\Gamma_n^1 = \{(x_1, b+n) : 0 \le x_1 < \sigma(b+n)\} \ ,$$
$$\Gamma_n^2 = \left\{\left(x_1, \frac{c}{an}x_1 + b + n\right) : -\gamma_n \le x_1 < 0\right\} \ ,$$
$$\Gamma_n^3 = \{(-\gamma_n, x_2) : -\gamma_n \le x_2 < 0\} \ ,$$
$$\Gamma_n^4 = \{(x_1, -x_1 - 2\gamma_n) : -\gamma_n \le x_1 < 0\} \ ,$$
$$\Gamma_n^5 = \{(x_1, -2\gamma_n) : 0 \le x_1 < \sigma\,(-2\gamma_n)\} \ ,$$
$$\Gamma_n^6 = \{(\sigma\,(x_2)\,, x_2) : -2\gamma_n \le x_1 \le b+n\} \ .$$



10. ábra.

Állítjuk, hogy a Γ_n egyszerű zárt görbe V_n belseje pozitív invariáns. Γ_n^6 az S invariáns halmaz része. Így V_n pozitív invarianciája következik, ha a $\Gamma_n^1, \ldots, \Gamma_n^5$ görbék pontjaiból az f vektormező elemei V_n-be mutatnak. Ez a 6. ábra alapján nyilvánvaló az

$$\left\{\left(x_1, \frac{c}{an}x_1 + b + n\right) : -\frac{a}{c}n^2 < x_1 < 0\right\} \subset \Gamma_n^2$$

halmaz pontjainak kivételével. Az utóbbi pontokra elegendő megmutatni, hogy

$$\left|\frac{x_2'}{x_1'}\right| = \left|\frac{\alpha(x)\,c\,(x_1 - x_2)}{\alpha(x)\,ax_1\,(x_2 - b)}\right| = \left|\frac{c\,(x_1 - x_2)}{ax_1\,(x_2 - b)}\right| > \frac{c}{an} .$$

Ha $-\frac{a}{c}n^2 < x_1 < 0$ és $x_2 = \frac{c}{an}x_1 + b + n$, akkor $0 < x_2 - b < n$. Így

$$\left|\frac{c\,(x_1 - x_2)}{ax_1\,(x_2 - b)}\right| = \frac{c\,(x_2 - x_1)}{a(-x_1)\,(x_2 - b)} > \frac{c(-x_1)}{a(-x_1)\,(x_2 - b)} = \frac{c}{a}\cdot\frac{1}{x_2 - b} > \frac{c}{an} .$$

Tehát Γ_n belseje pozitív invariáns.

Legyen $x \in H^3$. Ekkor létezik olyan $n \geq 1$ egész szám, hogy $x \in V_n$. A Poincaré-Bendixson tétel alkalmazásával, figyelembe véve a V_n pozitív invarianciáját és nemtriviális periodikus pályák nemlétezését, azt kapjuk, hogy

$$\omega(x) \subset \{A, B\} \cup U^2 .$$

Ha $A \in \omega(x)$, akkor az A stabilitása miatt $\omega(x) = \{A\}$. Ha $A \notin \omega(x)$, akkor csak $\omega(x) = \{B\}$ fordulhat elő, ami lehetetlen, mert csak $x \in S$ esetén lehet $\omega(x) = \{B\}$. Tehát $\omega(x) = \{A\}$.

Állítjuk, hogy minden $x \in H^3 \setminus \big(S^2 \cup \{A\}\big)$ esetén $|\varphi(t, x)| \to \infty$, ha $t \to -\infty$, azaz $\alpha(x) = \emptyset$. Ha $\{\varphi(t, x) : t \leq 0\}$ korlátos, akkor a Poincaré-Bendixson tétel alkalmazásával és A stabilitásának, nemtriviális periodikus pályák nemlétezésének figyelembe vételével adódik, hogy csak $\alpha(x) = \{B\}$ lehet. De ekkor szükségképpen $x \in U$, ami ellentmondás. Tehát

$$\{\varphi(t, x) : t \leq 0\}$$

nem korlátos. Így van olyan (t_k) sorozat, amelyre $t_k \to -\infty$ és $|\varphi(t, x)| \to \infty$ teljesül. Vegyük észre, hogy a $H^3 \setminus V_n$ halmazok negatív invariánsak. Mivel V_n korlátos, minden $n \geq 1$ egész számhoz van olyan $k = k(n) \geq 1$ egész szám, hogy $\varphi(t_k, x) \in H^3 \setminus V_n$. Ekkor $H^3 \setminus V_n$ negatív invarianciája miatt

$$\varphi(t, x) \in H^3 \setminus V_n \qquad (\forall\, t \leq t_k) .$$

Ebből következik, hogy $|\varphi(t, x)| \to \infty \;\; (t \to -\infty)$.

A fentiek alapján a φ kompakt, invariáns részhalmazai éppen az $\{A\}$, $\{B\}$, $\{A, B\} \cup U^2$ halmazok. Ezek közül az $\{A\}$ és $\{B\}$ a minimális halmazok. φ-nek nincs oszcilláló pályája, mert minden $x \in R^2$-re $\alpha(x)$ és $\omega(x)$ vagy üresek, vagy egyetlen pontot tartalmaznak, azaz kompaktak. Mivel nincs nemtriviális pálya, ezért

$$\mathrm{Per}(\varphi) = \{A,\, B\} .$$

Az A és B egyensúlyi helyzetek hiperbolikusak.

Legyen $x \in R^2$ olyan, hogy $\omega(x) = \emptyset$. Ekkor szükségképpen $x \in H^1 \cup H^2 \cup U^1$. Azt állítjuk, hogy $J^+(x) = \emptyset$. Már láttuk olyan $\tau_0 = \tau_0(x)$ létezését, hogy $\varphi(\tau_0, x) \in T^1$. A T^1 pozitív invarianciája miatt $\varphi(t, x) \in T^1$ minden $t \geq \tau_0$-ra. A vektormező T^1-beli iránya miatt

$$[\tau_0, \infty) \ni t \to |\varphi(t, x)| \in R$$

szigorúan monoton nő. Azt is tudjuk, hogy $|\varphi(t,x)| \to \infty$, ha $t \to \infty$. Legyen most $y \in R^2$ adott. A fentiek alapján van olyan $\tau_1 > 0$, amelyre $|\varphi(\tau_1,x)| > |y| + 1$. A megoldásoknak a kezdeti adatoktól való folytonos függése miatt van az x-nek olyan K_x környezete, hogy minden $z \in K_x$-re

$$|\varphi(\tau_1,z)| > |y| + 1/2, \quad \varphi(\tau_1,z) \in T^1 .$$

A fentiekhez hasonlóan innen minden $z \in K_x$-re és minden $t \geq \tau_1$-re

$$|\varphi(t,z)| \geq |\varphi(\tau_1,z)| \geq |y| + 1/2$$

következik. Legyen (x^n) egy olyan sorozat R^2-ben, és (t_n) pedig R-ben, hogy $x^n \to x$, $t_n \to \infty$. Minden elég nagy n-re $x^n \in K_x$ és $\tau_n \geq \tau_1$. Így az elég nagy n-ekre $|\varphi(t_n,x^n)| \geq |y| + 1/2$, azaz

$$\varphi(t_n,x^n) \not\to y \qquad (n \to \infty) .$$

Mivel $y \in R^2$ tetszőleges volt, $J^+(x) = \emptyset$ adódik. Ebből az is következik, hogy φ-nek nincs nyerge a ∞-ben. Tehát

$$W^+ = S^1 \cup S^2 \qquad W^- = U^1 \cup U^2 .$$

Így

$$\overline{W^+} \cap \overline{W^-} = \{B\} \subset \mathrm{Per}(\varphi) .$$

Ezzel beláttuk, hogy a Kotus-Krych-Nitecki tétel feltételei teljesülnek, azaz φ strukturálisan stabil. Ez egyúttal bizonyítja a Harrod modell strukturális stabilitását is a síkon.

Irodalom

1. Aftalion, A. (1909): 'La Réalité des surproductions générales: Essai d'une théorie des crises générales et périodiques', *Revue d'économie politique.*
2. Andronov, A. A. and L. Pontrjagin (1937): 'Structurally Stable Systems', *Doklady Akademii Nauk SSSR* 14, 247–251. o.
3. Andronov, A., A. A. Vitt and S. E. Khaikin (1966): *Theory of Oscillators*, Pergamon Press, New York.
4. Bickerdike, C. F. (1914): 'A Non-Monetary Cause of Fluctuations in Employment', *Economic Journal*, No. 3. 357–370. o.
5. Cagan, P. (1956): 'The monetary dynamics of hyperinflation.' In *Studies in the Quantity Theory of Money*, ed. by M. Friedman. University of Chicago Press, Chicago.
6. Carver, T. M. (1903): 'The Relation of Abstinence to Interest', *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 18. No. 1. 142–145. o.
7. Clark, J. M. (1917): 'Business Acceleration and the Law of Demand: A Technical Factor in Economic Cycles', *Journal of Political Economy*, Vol. 25. No. 1. 217–235. o.
8. Domar, E. (1946): 'Capital Expansion, Rate of Growth, and Employment', *Econometrica*, Vol. 14. 137–147. o.

9. Domar, E. (1957): *Essays in the Theory of Economic Growth*, Oxford University Press, Oxford.
10. Easterly, W. (1997): 'The Ghost of Financing Gap, (How the Harrod-Domar Model Still Haunts Development Economics)', *Policy Research Working Papers, World Bank*, Washington.
11. Engle, R. F. – Hendry, D. F. – Richard, J. F. (1983): 'Exogenity', *Econometrica*, 51, 277–304. o.
12. Feldman, G. A. (1928): 'K teorii tempov narodnogo dohoda', *Planovoe Hozjajsztvo*, No. 11. 148–170. o. és No. 12. 151–178. o.
13. Friedman, M. (1957): *A Theory of Consumption Function*, Princeton University Press, Princeton.
14. Hadjimichalakis, M. G.(1971): 'Equilibrium and Disequilibrium Growth with Money – Tobin Models', *Review of Economic Studies*, 457–479. o.
15. Hahn, F.(1985): *Money, growth and stability*, MIT Press, Cambridge, Massachusetts.
16. Harrod, R. F. (1939): 'An essay in dynamic theory', *Economic Journal*, vol. 49, 13–33. o. Magyarul: Egy esszé a dinamikus elméletről, in: Szakolczai(szerk.) (1963), 169–192. o.
17. Harrod, R. F. (1973): *Economic Dynamics*, London and Basingstoke.
18. Kaldor, N. (1957): 'A Model of Economic Growth', *Economic Journal*, Vol. 67. No. 268., 591–624. o.
19. Kotus, J., M. Krych, and Z. Nitecki (1982): 'Global structural stability of flows on open surfaces, *Memoirs A.M.S.*, 37, 1–108. o.
20. Lefschetz, S. (1962): *Differential Equations: Geometric Theory*, Interscience, New York.
21. Leijonhofvud, A. (1968): *On Keynesian Economics and the Economics of Keynes*, Oxford University Press, Oxford.
22. Lucas, R. E. (1976): 'Econometric policy evaluation: a critique.' In Lucas, R. E. (1995): *Studies in Business Cycle Theory*, MIT Press, Cambridge, Mass.
23. Móczár József (1991): 'Irreducible balanced and unbalanced growth paths (Business cycles and structural changes)', *Structural Change and Economic Dynamics, 2* , 159–176. o.
24. Okishio, N. (1964): 'Instability of Harrod-Domar's steady growth', *Kobe University Review*, 10, 19–27. o.
25. Pasinetti, L. L. (1962): 'Rate of profit and income distribution in relation to the rate of economic growth', *Review of Economic Studies*, 29, 267–27. o.
26. Perko, L. (1991): *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag, New York
27. Robinson, J. (1962): *Essays in the Theory of Economic Growth*, London: Macmillan.
28. Sidrauski, M.(1967): 'Inflation of Economic Growth', *Journal of Political Economy*, 796–810. o.
29. Solow, R. (1956): 'A Contribution to the Theory of Economic Growth', *Quarterly Journal of Economics*, 70, 65–94. o.
30. Szakolczai György (szerk.): (1963): *A gazdasági fejlődés feltételei*, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest
31. Zalai Ernő (2000): *Matematikai közgazdaságtan*, KJK-Kerszöv, Budapest

STRUCTURAL STABILITY OF THE HARROD MODEL

In this study it is shown that the nontrivial hyperbolic fixed point of a nonlinear dynamical system, which is formulated by means of the adaptive expectations, corresponds to the unstable equilibrium of Harrod. We prove that this nonlinear dynamical (in the sense of Harrod) model is structurally stable under suitable economic conditions. In the case of structural stability, small changes of the functions (C^1-perturbations of the vector field) describing the expected and the true time variation of the capital coefficients do not influence the qualitative properties of the endogenous variables, that is, although the trajectories may slightly change, their structure is the same as that of the unperturbed one, and therefore these models are suitable for long-time predictions. In this situation the critique of Lucas or Engel is not valid. There is no topological conjugacy between the perturbed and unperturbed models; the change of the growth rate between two levels may require different times for the perturbed and unperturbed models.

A DALANG–MORTON–WILLINGER TÉTEL[1]

MEDVEGYEV PÉTER
Budapesti Corvinus Egyetem

A dolgozatban röviden megvizsgáljuk a Dalang–Morton–Willinger tétel bizonyítását és rámutatunk arra, hogy a véges állapottérre, illetve a tetszőleges állapottérre kimondott tételek azonossága a sztochasztikus konvergencia sajátos és némiképpen meglepő tulajdonságai miatt esnek egybe.

1 Bevezetés

A matematikai pénzügyek talán legszebb állítása, a Dalang–Morton–Willinger tétel szerint véges és diszkrét időhorizont esetén a nincs arbitrázs tulajdonság szükséges és elegendő feltétele annak, hogy létezzen ekvivalens martingál mérték. A tétel több szempontból is figyelmreméltó: egyrészt rendkívül elegáns, másrészt végső soron a legáltalánosabb ilyen irányú állítás, ugyanis a tételben szereplő egyetlen lényegi megkötés, a lehetséges időpontok végességének megkötése, nem ejthető el. Ugyancsak érdekes, hogy a tétel születésekor az eredeti bizonyítás meglehetősen bonyolult volt. Jellemző a helyzetre, hogy az egyébként kíváló [4] könyv első kiadása nem adja meg a tétel bizonyítását és a közölt bizonyítás vázlat sok mindennek mondható, csak megvilágítónak vagy értelmezhetőnek nem. Hogyan lehet az, hogy egy ilyen egyszerű és elegáns tételnek ilyen bonyolult legyen a bizonyítása? Nem meglepő, hogy evvel a kérdéssel és a tétel bizonyításával, pontosabban annak egyszerűsítésével, a terület legjobbjai foglalkoztak [2,13]. Számos próbálkozás után az áttörést a [8] dolgozat hozta. A dolgozatban a szerzők egy igen rövid és elegáns bizonyítást adtak a tételre. Ugyanakkor feltehetően „sportot" csináltak abból, hogy a bizonyítást lerövidítsék és a közölt gondolatmenet ennek következtében vázlatos és némiképpen homályos. Ennek következtében például az [5] vagy a [6] számos ponton jelentősen eltér az eredeti gondolatmenettől, és megítélésem szerint továbbra is túlbonyolítja a bizonyítást.

A Dalang–Morton–Willinger tétel, illetve bizonyításának legfőbb sajátossága, hogy szinte majdnem azonos a jóval egyszerűbb, időnként Harrison–Pliska tételnek is mondott elemi állítás igazolásával, amikor a lehetséges kimenetelek tere véges [7]. A két állítás igazolása közötti eltérés nagyrészt a tételben szereplő feltételekből ered, ugyanis a Dalang–Morton–Willinger tétel indoklásában, az állítás természetéből eredően, néhány elemi mértékelméleti megfontolás nem kerülhető el. A jelen dolgozat fő mondanivalója, hogy a

[1]Szeretnék köszönetet mondani Badics Tamásnak, Rásonyi Miklósnak és a dolgozat ismeretlen bírálójának a dolgozat figyelmes elovasásáért és a segítőkész megjegyzéseikért. Beérkezett: 2006. február 4. E-mail: `medvegyev@math.bke.hu`.

két állítás közötti analógia a véges dimenziós terek és az összes valószínűségi változókat tartalmazó úgynevezett L^0 tér közötti meglepő hasonlóságokra vezethető vissza.

2 A tétel kimondása

Feltesszük, hogy az olvasó ismeri az eszközárazással kapcsolatos legfontosabb fogalmakat, v.ö. [11], és csak a tétel rövid és vázlatos ismertetésére szorítkozunk. Legyen $(-\ ,\mathcal{A},\mathbf{P})$ egy általános valószínűségi mező és $\mathcal{F}=(\mathcal{F}_t)_{t=0}^T$ véges idő horizontú, de minden más szempontból tetszőleges filtráció. Legyen $(S(t))_{t=0}^T$ tetszőleges m-dimenziós $\mathcal{F}$-adaptált folyamat. Miként közismert, az adaptáltság csak annyit jelent, hogy minden t-re az $S(t)$ vektor értékű valószínűségi változó $\mathcal{F}_t$-mérhető. Vezessük be az

$$R \overset{\circ}{=} \left\{ H : H=\sum_{t=1}^{T}\left[S(t)-S(t-1)\right]\theta(t)\right\}$$

halmazt, ahol θ az előrejelezhető stratégiákon fut keresztül, vagyis ahol a $\theta(t)$ minden t-re $\mathcal{F}_{t-1}$-mérhető. Az R az $S(t)$ árfolyamok megváltozásából származó lehetséges árfolyamnyereségek halmaza. Az analízisben megszokott módon L_+^0 jelölje a nem negatív valószínűségi változók halmazát. Vezessük be az

$$A \overset{\circ}{=} R-L_+^0\ ,$$

valamint a $\mathrm{cl}(A)$ halmazokat, ahol a lezárás a sztochasztikus konvergenciában értendő, és az A definíciójában a kivonás jel a komplexus kivonást jelent. Diszkrét, véges időhorizont esetén az úgynevezett eszközárazás első alaptételének legáltalánosabb alakja a következő:

Tétel 1 (Dalang–Morton–Willinger). *A következő állítások ekvivalensek:*

1. $A\cap L_+^0=\{0\}$.
2. $A\cap L_+^0=\{0\}$ *és* $A=\mathrm{cl}(A)$.
3. $\mathrm{cl}(A)\cap L_+^0=\{0\}$.
4. *Megadható olyan* $\mathbf{Q}$ *valószínűség, amely ekvivalens az eredeti* $\mathbf{P}$ *valószínűségi mértékkel, amelyre a* $d\mathbf{Q}/d\mathbf{P}$ *Radon–Nikodym derivált korlátos, és amely mellett az* S m*-dimenziós martingál.*

Érdemes hangsúlyozni, hogy a tételben szereplő első állítás azt jelenti, hogy nincsen olyan $(\theta(t))_{t=1}^T$ előrejelezhető stratégia, amelyre

$$\sum_{t=1}^{T}\left[S(t)-S(t-1)\right]\theta(t)\geq 0$$

és egy pozitív mértékű halmazon az egyenlőtlenség szigorú. Másképpen fogalmazva az első állítás szerint nincsen arbitrázs.

3 Az L^0 tér elemi tulajdonságai

Emlékeztetünk, hogy az $L^0(\text{-}\,,\mathcal{F},\mathbf{P})$ téren egy adott $\mathcal{F}$ σ-algebrára mérhető valószínűségi változók halmazát értjük. A továbbiakban az $(\text{-}\,,\mathcal{F},\mathbf{P})$ paramétert elhagyjuk, és a valamivel egyszerűbb L^0 jelölést fogjuk használni. A valószínűségi változókat a szokásos módon a $\mathbf{P}$ valószínűségi mérték szerint ekvivalencia osztályokba soroljuk. Az L^0 téren a konvergenciát a sztochasztikus konvergencia definiálja. Emlékeztetünk, hogy a sztochasztikus konvergencia metrizálható, így az L^0 részhalmazainak zártságát elegendő szekvenciális okoskodással igazolni, vagyis egy $Z \subseteq L^0$ halmaz pontosan akkor zárt, ha minden a Z halmazból vett konvergens sorozat határértéke is a Z halmazban van. A sztochasztikus konvergencia alapvetően fontos tulajdonsága, amely a későbbi gondolatmenet alapjául szolgál, hogy minden sztochasztikusan konvergens sorozat tartalmaz egy majdnem mindenhol konvergens részsorozatot, illetve, hogy a majdnem mindenhol való konvergenciából következik a sztochasztikus konvergencia [10]. Ennek megfelelően egy $Z \subseteq L^0$ halmaz pontosan akkor zárt, ha a Z-ből vett minden majdnem mindenhol konvergens sorozatnak a határértéke is Z-be esik. Másképpen fogalmazva az L^0 térben a zártságot szekvenciális gondolatmenettel tudjuk igazolni, miközben az egyébként nem metrizálható majdnem mindenhol való konvergenciát[2] használjuk. Az L^0 tér számunkra kulcs tulajdonságát a következő kompaktsági lemma tartalmazza [8]:

Lemma 2. *Legyen (η_n) $\mathbb{R}^m$ értékű mérhető függvények sorozata és tegyük fel, hogy a sorozat minden kimenetelre korlátos. Ekkor megadható olyan (σ_k) egész értékű, szigorúan monoton növő, mérhető függvényekből álló sorozat, amelyre az (η_{σ_k}) sorozat minden kimenetelre konvergens. Másrészről, ha* $\sup_n \|\eta_n\| = \infty$, *akkor van olyan (σ_k) egész értékű, szigorúan monoton növő, mérhető függvényekből álló sorozat, amelyre* $\lim_{k\to\infty} \|\eta_{\sigma_k}\| = \infty$ *minden kimenetelre.*

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy a Bolzano–Weierstrass tétel miatt a kimenetelenkénti korlátosság miatt minden ω esetén triviálisan található olyan $(\sigma_k(\omega))$ szigorúan monoton növekedő sorozat, amelyre az $\left(\eta_{\sigma_k(\omega)}(\omega)\right)$ sorozat konvergens. A lényeges észrevétel, hogy a σ_k indexsorozat mérhetőnek választható. Legyen először (η_n) skalár értékű sorozat. A feltétel szerint az $\eta_\infty \overset{\circ}{=} \liminf_n \eta_n$ minden kimenetelre létezik és véges. Az (η_n) mérhetősége miatt az η_∞ is mérhető. Legyen $\sigma_0 \overset{\circ}{=} 0$, és vezessük be a

$$\sigma_k \overset{\circ}{=} \inf\left\{n > \sigma_{k-1} : |\eta_n - \eta_\infty| \leq \frac{1}{k}\right\}$$

függvényeket. Elemi megfontolásokkal azonnal belátható, hogy a σ_k minden k-ra mérhető, illetve $\eta_{\sigma_k} \to \eta_\infty$. Következésképpen a lemma állítása ilyenkor teljesül. Többdimenziós esetben először az első koordinátához készítsük el a

[2]Érdemes megjegyezni, bár ennek nincsen jelentősége, hogy a majdnem mindenhol való konvergencia nem is topologizálható.

részsorozatot, majd a már megritkított sororozat második koordinátájához keressük meg a konvergenciát biztosító indexsorozatot. Az eljárást egymás után az összes koordinátákra megismételve a (σ_k) indexsorozatot egyszerű, véges lépésből álló iterációval megkaphatjuk. Az állítás második felének indoklásához elegendő a

$$\sigma_k \overset{\circ}{=} \inf\{n > \sigma_{k-1} : \|\eta_n\| \geq k\}$$

sorozatot venni.

□

A lemma közvetlen következménye, hogy a véges számú elem által generált kúpok zártságára vonatkozó közismert tétel átvihető véges dimenziós terekből az $L^0(\mathcal{F}, \mathbf{P})$ térbe.

Lemma 3. *Legyenek $f_1, f_2, \ldots, f_m$ tetszőleges valamely $\mathcal{A}$ σ-algebra szerint mérhető függvények. Tegyük fel, hogy $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ és tekintsük az*

$$L \overset{\circ}{=} \left\{ f : f = \sum_{i=1}^{m} f_i \varphi_i, \varphi_i \in L^0(\mathcal{F}, \mathbf{P}) \right\}$$

lineáris teret. Az L az $L^0(\mathcal{A}, \mathbf{P})$ zárt altere.

Bizonyítás. Vegyünk egy $l_n \in L$ sorozatot, és tegyük fel, hogy $l_n \to l_\infty$, ahol a konvergencián a majdnem mindenhol való konvergenciát értjük. Az $l_n \in L$ feltételből meg kell mutatnunk, hogy $l_\infty \in L$. Vektor jelölésre áttérve az L definíciója szerint

$$l_n \overset{\circ}{=} (g, y_n) ,$$

ahol $g \overset{\circ}{=} (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ és $y_n \overset{\circ}{=} \left(\varphi_1^{(n)}, \varphi_2^{(n)}, \ldots, \varphi_m^{(n)}\right)$ valamint minden n-re az y_n $\mathcal{F}$-mérhető. Vegyük észre, hogy a bizonyítás nehézsége pusztán abból áll, hogy az (l_n) konvergenciájából nem következik az (y_n) konvergenciája[3]. Ugyancsak vegyük észre, hogy elegendő belátni, hogy az (y_n) sorozatnak van az első lemma értelmében konvergens részsorozata, ugyanis ha alkalmas részsorozatra $y_{\sigma_k} \to y_\infty$, akkor az y_∞ $\mathcal{F}$-mérhető, ugyanis a lemma által biztosított (y_{σ_k}) részsorozat tagjai $\mathcal{F}$-mérhetőek, és

$$(g, y_{\sigma_k}) \to (g, y_\infty) = l_\infty .$$

A konvergens részsorozat létezéséhez elegendő belátni, hogy az (y_n) sorozat megválasztható úgy, hogy a sorozat majdnem minden kimenetelre pontonként korlátos. Legyen - $_1$ az - azon részhalmaza, ahol ez nem teljesül. Mivel (y_k) $\mathcal{F}$-mérhető ezért - $_1$ szintén $\mathcal{F}$-mérhető. A részsorozat megkonstruálásának céljából az - $_1$ halmazon

$$l_n(\omega) = (g(\omega), y_n(\omega))$$

[3]Érdemes hangsúlyozni, hogy pontosan ez a probléma lép fel akkor, amikor a véges dimenziós terekben azt kell igazolni, hogy minden véges kúp, vagy egy altér zárt. Az alábbi bizonyítás ezen az igen fontos állítás bizonyításának közismert ötletére épül.

egyenlőséget osszuk végig az $\|y_n(\omega)\|$ sorozattal:

$$\frac{l_n(\omega)}{\|y_n(\omega)\|} = \left(g(\omega), \frac{y_n(\omega)}{\|y_n(\omega)\|} \right) .$$

Az $(y_n(\omega) / \|y_n(\omega)\|)$ sorozat korlátos, így az előző lemma szerint van mérhető módon indexelt konvergens részsorozata. Természetesen előfordulhat, hogy a kiválasztott részsorozat bizonyos kimenetelekre korlátos. Ezen kimenetelek halmaza ismételten $\mathcal{F}$-mérhető. Ezeket a kimeneteleket töröljük az $-_1$ halmazból, és térjünk át a lemma második felében szereplő részsorozatra. A megmaradt kimenetelekre $\|y_{\sigma_n}(\omega)\| \to \infty$. Erre a részsorozatra az $-_1$-halmazon

$$\frac{l_{\sigma_n}(\omega)}{\|y_{\sigma_n}(\omega)\|} \to 0 ,$$

ugyanis a számláló konvergens, a nevező pedig végtelenbe tart. Az $-_1 \in \mathcal{F}$ halmazon ez azt jelenti, hogy van egy olyan változó, nevezetesen u_∞, amely $\mathcal{F}$-mérhető és amelyre

$$(g(\omega), u_\infty(\omega)) = 0, \quad \omega \in -_1 .$$

Az $u_\infty(\omega) \in I\!R^m$ vektor egységnyi hosszú vektorok határértéke, így nem lehet azonosan nulla egyetlen $\omega \in -_1$ esetén sem. Így minden $\omega \in -_1$-re az

$$g(\omega) \stackrel{\circ}{=} (f_1(\omega), f_2(\omega), \ldots, f_m(\omega))$$

egyik koordinátája, természetesen minden ω-ra más és más, kifejezhető a többi segítségével. A lényeges gondolat az, hogy amikor a g valamelyik koordinátáját $-_1$-en kifejezzük a többivel, a súlyok $\mathcal{F}$-mérhetőek. A kifejtéseket az

$$l_{\sigma_n}(\omega) = (g(\omega), y_{\sigma_n}(\omega))$$

egyenlőségbe visszahelyettesítve feltehető, hogy az $-_1$ halmazon minden ω-ra az $y_{\sigma_n}(\omega)$ súlyok közül csak $m-1$ súly nem nulla, miközben az $-_1$ komplementerén az y_{σ_n} korlátos és az $\omega \mapsto y_{\sigma_{n}(\omega)}(\omega)$ függvények $\mathcal{F}$-mérhetőek. Ha az így kapott súlyok halmaza még mindig nem korlátos, akkor az eljárást megismételjük. Vagyis létezik egy $-_2 \subseteq -_1$ pozitív mértékű halmaz, amelyhez már van olyan (y_{σ_N}) részsorozat, amely az $-_2$ komplementerén korlátos és amelynek az $-_2$-ön már legfeljebb $m-2$ koordinátája nem nulla. Utolsó lépésként már csak egyetlen koordináta marad, vagyis feltehető például, hogy

$$l_n = f_1 \varphi_1^{(n)} .$$

Ilyenkor a $\varphi_1^{(n)}(\omega)$ csak akkor lehet nem korlátos, ha az $f_1(\omega)$ nulla. Ha $-_m$ jelöli azt az $\mathcal{F}$-mérhető halmazt, ahol az $\left(\varphi_1^{(n)}\right)$ nem korlátos, akkor a $\left(\varphi_1^{(n)}\right)$ sorozat helyett a $\left(\varphi_1^{(n)} \chi_{-_m^c}\right)$ sorozatot véve a (y_n) sorozat $\mathcal{F}$-mérhető marad és korlátos lesz. Mivel az eljárás véges lépésben befejeződik, ezért feltehető, hogy az (y_n) sorozat korlátos, amivel az L zártságát igazoltuk.

$\square$

A nincsen arbitrázs feltétel a következő lemmában játszik szerepet:

Lemma 4. *Jelölje $L^0_+(\mathcal{A}, \mathbf{P})$ az előző lemmában szereplő $\mathcal{A}$ σ-algebrán nem negatív változók halmazát. Ha az előző lemmában szereplő L altérre*

$$L \cap L^0_+(\mathcal{A}, \mathbf{P}) = \{0\} ,$$

akkor az

$$A \overset{\circ}{=} L - L^0_+(\mathcal{A}, \mathbf{P})$$

kúp zárt az $L^0(\mathcal{A}, \mathbf{P})$ térben.

Bizonyítás. A lemma bizonyítása az előző lemma bizonyításának értelemszerű módosításával kapható. Az $l_n \overset{\circ}{=} (g, y_n)$ egyenlőség helyett az

$$a_n \overset{\circ}{=} (g, y_n) - r_n$$

egyenlőségből kell kiindulni, ahol $r_n \geq 0$. A végigosztás, illetve a konvergens részsorozatra való áttérés után az $(r_{\sigma_n} / \|y_{\sigma_n}(\omega)\|)$ sorozat szükségszerűen konvergens és az - előző lemmában szereplő megfelelő - $_m$ részhalmazán érvényes az

$$0 = (g, y_\infty) - r_\infty, \quad r_\infty \geq 0$$

felbontás, ahol értelemszerűen r_∞ jelöli az $(r_{\sigma_n} / \|y_{\sigma_n}(\omega)\|)$ sorozat határértékét. Értelemszerűen

$$(g, y_\infty \chi_{-_k}) = r_\infty \chi_{-_k} .$$

Ebből, felhasználva, hogy az $y_\infty \chi_{-_m}$ változó $\mathcal{F}$-mérhető az $L \cap L^0_+(\mathcal{A}, \mathbf{P}) = \{0\}$ feltétel miatt $r_\infty \chi_{-_m} = 0$, amiből az állítás indoklása az előző lemma gondolatmenetét megismételve már evidens.

$\square$

4 A tétel igazolása

A tétel bizonyítása a végtelen dimenziós szeparációs tételre épül. A véges dimenziós esetben, [11,12] a tétel bizonyításakor elegendő az

$$R \overset{\circ}{=} \left\{ H : H = \sum_{t=1}^{T} [S(t) - S(t-1)] \, \theta(t) \right\}$$

és az $\mathbb{R}^m_+$ konvex halmazokat elválasztani. Az általános esetben a nehézségek abból erednek, hogy két konvex halmaz csak akkor választható el, ha az egyiknek van belső pontja. Az L^1 térben a nem negatív változók halmazának azonban nincsen belső pontja. Ezt orvosolja a következő lemma. V.ö.: [9,13,15].

Lemma 5 (Kreps-Yan). *Legyen $(-, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ tetszőleges valószínűségi mező. Legyen K a mezőn értelmezett integrálható függvényekből álló $L^1(-, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ tér olyan zárt, konvex kúpja, amelyre $K \supseteq \left(-L^1_+\right)$ és $K \cap L^1_+ = \{0\}$. Ekkor* *az* $(- \ , \mathcal{A})$ *téren létezik olyan* $\mathbf{Q}$ *valószínűségi mérték, amely ekvivalens*[4] *az eredeti* $\mathbf{P}$ *valószínűségi mértékkel, és amelyre*

$$\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \in L^{\infty} ,$$

valamint

$$\mathbf{M}^{\mathbf{Q}}(k) \overset{\circ}{=} \int_{-} k \, d\mathbf{Q} = \int_{-} k \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \, d\mathbf{P} = \mathbf{M}^{\mathbf{P}} \left(k \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \right) \leq 0, \quad \forall k \in K .$$

Bizonyítás. Az L^1 duálisa L^{∞} [10], tehát az L^1 téren értelmezett folytonos, lineáris funkcionálok alkalmas L^{∞} függvény segítségével integrálként reprezentálhatóak, vagyis minden az L^1 téren értelmezett z folytonos, lineáris funkcionálnak egyértelműen megfeleltethető egy olyan, szintén z-vel jelölt L^{∞}-beli elem, amelyre tetszőleges $l \in L^1$ esetén

$$\langle z, l \rangle = \int_{-} zl \, d\mathbf{P} .$$

Legyen $\mathcal{Z}$ az olyan z folytonos, lineáris funkcionálok halmaza, amelyekre $\langle z, K \rangle \leq 0$. Mivel $K \supseteq \left(-L^1_+ \right)$ ezért $z \geq 0$ majdnem mindenhol. Mivel $0 \in \mathcal{Z}$, ezért $\mathcal{Z} \neq \emptyset$. Jelölje $\mathcal{Y}$ a $\mathcal{Z}$ elemeinek tartóhalmazaiból álló halmazt, vagyis $Y \in \mathcal{Y}$, ha van olyan $z \in \mathcal{Z}$, hogy $Y = \{z > 0\}$. Triviálisan az $\mathcal{Y}$ zárt a megszámlálható egyesítésre, ugyanis ha $z_n \in \mathcal{Z}$, akkor alkalmas α_n pozitív konstansokkal $\sum_n \alpha_n z_n \in \mathcal{Z}$. Ha

$$\lambda_0 = \sup \{ \mathbf{P}(Y) : Y \in \mathcal{Y} \} ,$$

akkor van olyan $(Y_n)_n$ sorozat, amelyre $\mathbf{P}(Y_n) \nearrow \lambda_0$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy az (Y_n) monoton nő, és miként az imént megjegyeztük, $Y_0 \overset{\circ}{=} \cup_n Y_n \in \mathcal{Y}$, tehát $\mathbf{P}(Y_0) = \lambda_0$. Az állítást belátjuk, ha megmutatjuk, hogy $\lambda_0 = 1$, ugyanis akkor találtunk egy olyan $z_0 \in \mathcal{Z}$ elemet, vagyis egy olyan $z_0 \in L^{\infty}$ függvényt, amelyre $\langle z_0, K \rangle \leq 0$, és amelyre $\mathbf{P}(z_0 > 0) = 1$. Ilyenkor a

$$z_0 \overset{\circ}{=} \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}$$

választás mellett a lemma állítása teljesül.

Tegyük fel, hogy $\mathbf{P}(Y_0) < 1$, és vegyük az $x \overset{\circ}{=} \chi_{Y_0^c} \in L^1_+ \setminus \{0\}$ függvényt. Mivel a K zárt, konvex halmaz és a lemma $K \cap L^1_+ = \{0\}$ feltétele miatt $x \notin K$, ezért a végtelen dimenziós szeparációs tétel, a Hahn—Banach-tétel szerint található az L^1 téren értelmezett olyan z_x folytonos, lineáris funkcionál, amelyre

$$\langle z_x, x \rangle > \langle z_x, k \rangle , \quad k \in K . \tag{1}$$

[4] Emlékeztetünk, hogy a $\mathbf{P}$ és a $\mathbf{Q}$ ekvivalenciája definíció szerint azt jelenti, hogy $\mathbf{P}(A) = 0$ pontosan akkor, ha $\mathbf{Q}(A) = 0$, vagyis a nulla valószínűségű események halmaza a két mérték esetében egybeesik. Természetesen a $\mathbf{P}$ és a $\mathbf{Q}$ pontosan akkor ekvivalens, ha a $d\mathbf{Q}/d\mathbf{P}$ létezik és pozitív. A $d\mathbf{Q}/d\mathbf{P}$ mindig normalizálható, vagyis feletehető, hogy a $\mathbf{Q}$ is valószínűségi mérték.

A K kúp, így ha $\langle z_x, k\rangle > 0$ valamely $k \in K$ elemre, akkor $\langle z_x, sk\rangle \nearrow \infty$ ha $s \nearrow \infty$, így az (1) szeparációs egyenlőtlenség nem teljesülhet. Ebből következően

$$\langle z_x, k\rangle \leq 0, \quad k \in K\,.$$

Tetszőleges $B \in \mathcal{A}$ esetén $\chi_B \in L^1_+$, ezért $z_x \geq 0$, ugyanis ha egy pozitív mértékű B halmazon $z_x < 0$, akkor a $-s\chi_B \in -L^1_+ \subseteq K$ halmazon

$$\langle z_x, -s\chi_B\rangle = -s\int_B z_x\, d\mathbf{P} > 0\,,$$

ami az s növelésével ismét tetszőlegesen naggyá tehető. Következésképpen az (1) szeparációs egyenlőtlenség ismét nem teljesülhetne. Mivel $0 \in K$, ezért $\langle z_x, x\rangle > 0$, vagyis $\int_{-} z_x x\, d\mathbf{P} > 0$, tehát a z_x tartója egy pozitív mértékű halmazon belemetsz az $x \overset{\circ}{=} \chi_{Y_0^c}$ tartójába, vagyis a z_x az Y_0^c halmaz egy pozitív valószínűségű részhalmazán pozitív. Ebből következően egyrészt

$$\langle z_0 + z_x, K\rangle = \langle z_0, K\rangle + \langle z_x, K\rangle \leq 0\,,$$

másrészt $z_0 + z_x \geq 0$ és a $z_0 + z_x$ tartója nagyobb mint Y_0, ami ellentmond a $\mathbf{P}(Y_0)$ maximalitásának.

□

Végezetül rátérhetünk a tétel bizonyítására. V.ö.: [8]

1. Meg kell mutatni, hogy a megadott feltételek teljesülése esetén az $A \overset{\circ}{=} R - L^0_+$ halmaz zárt[5]. A bizonyítás a T időperiódus szerinti indukcióra épül. Ha $T = 1$, akkor a Lemma 4 szerint az A halmaz zárt. Tegyük fel, hogy az állítást már $T - 1$ időpont esetén beláttuk, és legyen

$$a_n \overset{\circ}{=} \sum_{t=1}^{T} \left[S(t) - S(t-1)\right]\theta_n(t) - r_n \to a_\infty\,.$$

Vezessük be a

$$\begin{aligned} b_n &\overset{\circ}{=} [S(1) - S(0)]\,\theta_n(1) \\ c_n &\overset{\circ}{=} a_n - b_n \end{aligned}$$

jelöléseket. Vegyük észre, hogy a problémát az jelenti, hogy abból, hogy az (a_n) konvergens még nem következik, hogy a (b_n) és a (c_n) is konvergens. Ha a $(\theta_n(1))$ sorozat korlátos, akkor részsorozatra áttérve feltehető, hogy a $(\theta_n(1))$ konvergens. A részsorozatot megadó indexek $\mathcal{F}_0$-mérhetőek, így a többi $(\theta_n(t))_{t=2}^T$ stratégia a részsorozatra való áttérés után is mérhető marad a saját σ-algebrájára nézve, vagyis a megritkított $(\theta_n(t))_{t=1}^T$ stratégia is előrejelezhető marad. Ha a $(\theta_n(1))$ nem korlátos, akkor a már bemutatott

[5] A sztochasztikus, illetve a majdnem mindenhol való konvergenciában.

módon eljárva és a

$$\begin{aligned}\frac{b_n}{\|\theta_n(1)\|} &\overset{\circ}{=} [S(1)-S(0)]\frac{\theta_n(1)}{\|\theta_n(1)\|} = \\ &= \frac{a_n}{\|\theta_n(1)\|} - \left(\sum_{t=2}^{T}[S(t)-S(t-1)]\frac{\theta_n(t)}{\|\theta_n(1)\|} - \frac{r_n}{\|\theta_n(1)\|}\right)\end{aligned}$$

egyenlőségben határértéket véve feltehetjük, hogy a

$$\left(\sum_{t=2}^{T}[S(t)-S(t-1)]\frac{\theta_n(t)}{\|\theta_n(1)\|} - \frac{r_n}{\|\theta_n(1)\|}\right)$$

sorozat konvergens. Az indukciós feltétel miatt a határérték előállítható

$$\sum_{t=2}^{T}[S(t)-S(t-1)]\,\theta^*(t) - r^*$$

módon, ahol természetesen a $(\theta^*(t))_{t=1}^{T}$ előrejelezhető. Következésképpen

$$[S(1)-S(0)]\,\theta^*(1) + \sum_{t=2}^{T}[S(t)-S(t-1)]\,\theta^*(t) - r^* = 0\,.$$

A nincs arbitrázs feltétel miatt $r^*=0$. Ha valamely H pozitív valószínűségű $\mathcal{F}_0$-mérhető halmazon $[S(1)-S(0)]\,\theta_1^* > 0$, akkor az

$$[S(1)-S(0)]\,\theta_1^*\chi_H$$

egy arbitrázs stratégiát realizál, ami lehetetlen. Ha valamely H pozitív valószínűségű $\mathcal{F}_0$-mérhető halmazon $[S(1)-S(0)]\,\theta_1^* < 0$, akkor pedig az

$$\sum_{t=2}^{T}[S(t)-S(t-1)]\,\theta_t^*\chi_H$$

realizál arbitrázs stratégiát. Ebből következően majdnem mindenhol

$$[S(1)-S(0)]\,\theta_1^* = 0\,.$$

A már bemutatott módon az „effektív” koordinátákat csökkentve véges eliminációs lépés után feltehetjük, hogy a $(\theta_n(1))$ korlátos. Ebből következően alkalmas részsorozatra áttérve a (b_n) és a (c_n) sorozatok konvergensek, és az indukciós feltétel szerint a határértékük a megfelelő kúpban helyezkedik el.

2. A második állításból triviálisan következik a harmadik.

3. Megjegyezzük, hogy tetszőleges η változó esetén a $\mathbf{P}$ valószínűségi mező megválasztható úgy, hogy az η integrálható lesz. Elég például a $\mathbf{P}$ helyett a

$$\mathbf{P}'(A) \overset{\circ}{=} C\int_A \exp(-\|\eta\|)\, d\mathbf{P}$$

P-vel ekvivalens teret venni[6]. Mivel a tételben szereplő állítások érvényben maradnak, ha ekvivalens valószínűségre térünk át[7], ezért az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy az S folyamat minden időszakban integrálható. Mivel az L^1-ben való konvergenciából következik a sztochasztikus konvergencia, ezért a $K \overset{\circ}{=} \mathrm{cl}(A) \cap L^1$ kúp zárt az L^1 térben, és a feltétel szerint $K \cap L^1_+ = \{0\}$. Az előző lemmában szereplő szeparációs tétel alapján van olyan $\mathbf{Q}$ ekvivalens mérték, amelyre a $d\mathbf{Q}/d\mathbf{P} \in L^\infty$, és amelyre

$$\mathbf{M}^{\mathbf{Q}}(k) \leq 0, \quad k \in K .$$

Speciálisan, ha vesszük a $k \overset{\circ}{=} \pm [S(t) - S(t-1)]\,\theta(t)$ elemeket, ahol a $\theta(t)$ $\mathcal{F}_{t-1}$-mérhető, akkor

$$\mathbf{M}^{\mathbf{Q}}([S(t) - S(t-1)]\,\theta(t)) = 0 .$$

Ha $\theta(t) \overset{\circ}{=} \chi_F$ ahol $F \in \mathcal{F}_{t-1}$, akkor a feltételes várható érték definíciója szerint

$$\mathbf{M}^{\mathbf{Q}}(S(t) - S(t-1) \mid \mathcal{F}_{t-1}) = 0 ,$$

vagyis az S martingál a $\mathbf{Q}$ alatt következésképpen a harmadik állításból következik a negyedik.

4. Végezetül tegyük fel, hogy teljesül a negyedik állítás, vagyis van olyan $\mathbf{Q}$ a $\mathbf{P}$-vel ekvivalens mérték, amely mellett az S martingál. Ha $h \in A \cap L^0_+$, akkor van olyan θ előrejelezhető startégia, amelyre

$$0 \leq h \leq \sum_{t=1}^{T} [S(t) - S(t-1)]\,\theta(t) . \tag{1}$$

Elegendő megmutatnunk, hogy

$$0 \leq \mathbf{M}^{\mathbf{Q}}(h) \leq \mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(\sum_{t=1}^{T} [S(t) - S(t-1)]\,\theta(t)\right) = 0 .$$

Amiből a $h \geq 0$ felhasználásával a h $\mathbf{Q}$-majdnem minden kimenetelre nulla. Mivel a $\mathbf{P}$ és a $\mathbf{Q}$ ekvivalensek, ezért a h $\mathbf{P}$-majdnem mindenhol nulla, így teljesül az első állítás.

A bizonyításban némi technikai bonyodalmat jelent, hogy a $\theta(t)$ stratégiák nem feltétlenül korlátosak, így a feltételes várható értékben a kiemelési szabály közvetlenül nem használható, sőt még azt sem tudjuk, hogy az egyes

$$[S(t) - S(t-1)]\,\theta(t)$$

[6] Az $x \exp(-|x|)$ függvény korlátos, vagyis integrálható, az áttérést biztosító $\exp(-\|\eta\|)$ Radon–Nikodym-derivált korlátos.

[7] A sztochasztikusan konvergens sorozatok pontosan azok a sorozatok, amelyek bármely részsorozata rendelkezik ugyanahhoz a változóhoz konvergáló, majdnem mindenhol konvergens részsorozattal. Ekvivalens mértékek esetén a majdnem mindenhol konvergens sorozatok halmaza nyilván azonos.

szorzatok integrálhatóak, így azt sem tudjuk, hogy az összeg integrálja vehető-e tagonként vagy sem. Ugyanakkor, v.ö. [4,5], ez a következő gondolatmentettel orvosolható: Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. A (2) sort szorozzuk be $\chi\left(\|\theta(1)\| \leq n\right)$-nel. Az egyszerűbb jelölés kedvéért legyenek h és θ a már beszorzott kifejezések. Így feltehető, hogy a $\theta(1)$ korlátos. Tetszőleges n-re a $\chi\left(\|\theta(1)\| \leq n\right)$ függvény $\mathcal{F}_0$-mérhető, így az új θ stratégia előrejelezhető marad. Az S $\mathbf{Q}$-martingál tulajdonsága szerint

$$\begin{gathered}
\mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\big([S(1) - S(0)] \cdot \theta(1)\big) = \\
\mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\Big(\mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\big([S(1) - S(0)] \cdot \theta(1) \mid \mathcal{F}_0\big)\Big) = \\
\mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\Big(\mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\big([S(1) - S(0)] \mid \mathcal{F}_0\big) \cdot \theta(1)\Big) = \\
\mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\big(0 \cdot \theta(1)\big) = 0\,.
\end{gathered}$$

Vegyük észre, hogy a kiemelési szabályt azért használhattuk, mert a $\theta(1)$ függvény az előrejelezhetőség miatt $\mathcal{F}_0$-mérhető és természetesen korlátos [10]. Ebből következően az $\mathbf{M}^{\mathbf{Q}}$ szerinti várható értékben az összeg szétszedhető és

$$\begin{gathered}
0 \leq \mathbf{M}^{\mathbf{Q}}(h) \leq \\
\leq \mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left([S(1) - S(0)]\,\theta(1)\right) + \mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(\sum_{t=2}^{T} [S(t) - S(t-1)]\,\theta(t)\right)\,,
\end{gathered}$$

ahol az első várható érték nulla. Tekintsük tehát az

$$0 \leq \mathbf{M}^{\mathbf{Q}}(h) \leq \mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(\sum_{t=2}^{T} [S(t) - S(t-1)]\,\theta(t)\right)$$

egyenlőtlenséget. Szorozzuk be a (2) sort most $\chi\left(\|\theta(2)\| \leq n\right)$-nel. A majorált konvergencia tétel miatt van olyan n, hogy

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(h\chi\left(\|\theta(2)\| \leq n\right)\right) &\leq \mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left([S(1) - S(0)]\,\theta(1)\,\chi\left(\|\theta(2)\| \leq n\right)\right) + \\
&+ \mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(\sum_{t=2}^{T} [S(t) - S(t-1)]\,\theta(t)\,\chi\left(\|\theta(2)\| \leq n\right)\right) < \\
&< \frac{\varepsilon}{T} + \mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(\sum_{t=2}^{T} [S(t) - S(t-1)]\,\theta(t)\,\chi\left(\|\theta(2)\| \leq n\right)\right) = \\
&= \frac{\varepsilon}{T} + \mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left([S(2) - S(1)]\,\theta(2)\,\chi\left(\|\theta(2)\| \leq n\right)\right) + \\
&+ \mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(\sum_{t=3}^{T} [S(t) - S(t-1)]\,\theta(t)\,\chi\left(\|\theta(2)\| \leq n\right)\right) = \\
&= \frac{\varepsilon}{T} + \mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(\sum_{t=3}^{T} [S(t) - S(t-1)]\,\theta(t)\,\chi\left(\|\theta(2)\| \leq n\right)\right)\,.
\end{aligned}$$

Az eljárást folytatva megmutatható, hogy alkalmas n-re

$$\mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(h\prod_{t=1}^{T}\chi\left(\|\theta(t)\|\leq n\right)\right)\leq\varepsilon\ .$$

A monoton konvergencia tétel miatt

$$\mathbf{M}^{\mathbf{Q}}(h)\leq\varepsilon\ ,$$

amiből $\mathbf{M}^{\mathbf{Q}}(h)=0$.

□

Irodalom

1. Dalang, R. C., Morton, A., Willinger W., ,,Equivalent martingale measure and no-arbitrage in stochastic securities market model.", *Stochastics and Stochastic Reports*, 29, 1990, 185–201 oldal
2. Delbaen, F., *,,The Dalang–Morton–Willinger theorem"*, kézirat, lásd, http://www.math.ethz.ch/~delbaen
3. Duffie, D., *,,Security Markets, Stochastic Models"*, Academic Press, San Diego, 1988.
4. Elliott, R. J., Kopp, P. E., *,,Pénzpiacok matematikája"*, Typotex kiadó, Budapest, 2000
5. Elliott, R. J., Kopp, P. E., *,,Mathematics of Financial Markets"*, Springer, New York, 2004
6. Föllmer, H., Schied, A., *,,Stochastic Finance"*, de Gruyter, Berlin, 2002
7. Harrison, J. M. , Pliska, S. R., ,,Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous time trading", *Stochastic Processes and their Applications*, 11, 1981, 215–260 oldal
8. Kabanov, Yu., Stricker, C., *,,A teachers' note on no-arbitrage criteria"*, Lecture Notes in Mathematics, 1775, 2001, 149–152 oldal
9. Kreps, D. M., ,,Arbitrage in securities markets with infinitely many commodities". *Journal of Math. Economics*, 8, 1981, 15–35 oldal
10. Medvegyev Péter, *,,Valószínűségszámítás"*, Aula, Budapest, 2002
11. Medvegyev Péter, ,,A pénzügyi eszközök árazásának alaptétele diszkrét idejű modellekben", *Közgazdasági Szemle*, XLIX, 2002, 574–597 oldal
12. Ross, S., *,,An Introduction to Mathematical Finance, Options and Other Topics"*, Cambridge University Press, 1999.
13. Schachermayer, W., ,,A Hilbert space proof of the fundamental theorem of asset pricing in finite discrete time", *Insurance: Math Econ*, 11, 1992, 1–9 oldal
14. Shiryaev, A. N., *,,Essentials of Stochastic Mathematical Finance"*, World Scientific, 1999.
15. Yan, J. A., *,,Caracterisation d'une classe d'ensembles convexes de L^1 ou H^1"*, Seminaire de Probabilites XIV, Lecture Notes in Mathematics 784, 1980, 220–222 oldal

ON THE THEOREM OF DALANG–MORTON–WILLINGER

In the article we shortly discuss the proof of the theorem of Dalang–Morton–Willinger. We show that the proof of the theorem depends on some interesting general properties of the stochastic convergence.

PUHA KÖLTSÉGVETÉSI KORLÁT ÉS STOP-GO POLITIKA EGY KÉTSZEKTOROS *AK* MODELLBEN[1]

BESSENYEI ISTVÁN
PTE KTK

Egy kedvező stabilitási tulajdonságokkal rendelkező kétszektoros AK növekedési modellbe vezetjük be a vállalatok puha költségvetési korlátjának jelenségét és az emiatt követendő stop-go politikát. Mivel az így nyert nem-lineáris rendszernek nincs egyensúlyi helyzete, a nem-lineáris rendszerelmélet általánosan ismert módszerei sem alkalmazhatók. Számítógépes szimuláció segítségével megmutatjuk, hogy a kezdőállapottól és a paraméterértékektől függően a gazdaság egyaránt kerülhet összeomlás felé tartó, illetve azt elkerülő növekedési pályára. Mivel beruházási ciklusok mindkét növekedési pályán jelentkeznek, egy adott pálya jellegének meghatározása esetenként csak hosszabb idő eltelte után válik lehetségessé. A szimuláció tanulsága szerint a költségvetési korlát puhulása fokozza az összeomlás felé tartó növekedési pályára állás veszélyét.

1 Feldman kétszektoros *AK* modellje

Először Feldman (1928) modelljének egy módosított változatát ismertetjük. A tanulmány eredeti célja a korai szovjet gazdaság növekedési lehetőségeinek vizsgálata volt egy kétszektoros AK modell keretei között. Feldman eredményei nem nyerték el a sztálini vezetés tetszését, és nyugaton is meglehetősen későn, csak Domar (1957) munkájának megjelenése nyomán váltak ismertté. A modell alábbi interpretációja elsősorban abban tér el az eredetitől, hogy a gazdaság viselkedését egy nem-lineáris rendszer segítségével írja le. Ennek következtében lehetővé válik a modell kiterjesztése, amire a 3. szakaszban kerül majd sor.

Mivel a tervezett gazdaságokban minden beruházást az állami költségvetés finanszíroz, a továbbiakban G jelöli a bruttó beruházások nagyságát. Ez a modell egyik endogén változója. Nagyságát a központi tervező hatóság oly módon képes befolyásolni, hogy eldönti, mennyi beruházást helyez üzembe a tőkejavakat, s mennyit a fogyasztási cikkeket előállító szektorban. Az utóbbi döntési változók értékét G_1 és G_2 jelölik. Természetesen $G = G_1 + G_2$. A modellben alkalmazott feltevések az alábbiak:

1. Az egyes szektorok aggregált termelési függvénye a következő: $Y_i = A_i K_i$ és $i = 1, 2$.

[1]Beérkezett: 2006. január 11. E-mail: `essenyei@ktk.pte.hu`. A dolgozat elkészítését az OTKA T037291 számú pályázata támogatta, amelyért a szerző ezúton fejezi ki köszönetét.

2. $G = Y_1$, tehát az első szektor állítja elő a beruházási javak összességét, továbbá: $G_1 = \mu Y_1$, vagyis a bruttóberuházások μ-ed részét helyezik üzembe az 1. szektorban. μ mindenkori értékét a központi tervező hatóság szabja meg. Nem tételezzük fel μ konstans voltát.

3. A tőke nem képlékeny abban az értelemben, hogy amennyiben egy berendezést valamelyik szektorban üzembe helyeztek, az később nem vihető át a másikba. Ilyen módon tehát nincs lehetőség a téves beruházási döntések korrigálására.

4. $C = Y_2$, tehát a fogyasztási javak termelését a 2. szektor végzi. Az előző feltevésből következik, hogy a bruttó beruházások $(1 - \mu)$-ed része kerül a 2. szektorban üzembe helyezésre, azaz $G_2 = (1 - \mu)Y_1$. Következésképp μ megválasztása révén a kormányzat képes a fogyasztás alakulását is befolyásolni.

5. δ_i az egyes szektorok amortizációs rátája, így a tőkeállomány változása az egyes szektorokban a következő formában írható fel: $\dot{K}_i = G_i - \delta_i K_i$.

6. A gazdaság zárt, tehát tőkejavak külföldről nem importálhatók.

7. Az első szektor kibocsátása független a másodikétól. E föltevés következménye az, hogy az összkibocsátás növekedése oly módon is végbemehet, hogy a fogyasztási cikkek termelése csökken, és a munka újratermeléséhez szükséges szintet sem éri el.

A beruházások növekedési rátája az alábbiak szerint vezethető le: Vegyük az $Y_1 = A_1 K_1$ egyenlet mindkét oldalának idő szerinti deriváltját, $\dot{K}_1 = G_1 - \delta_1 K_1$ miatt ezt a következő módon írhatjuk fel: $\dot{Y}_1 = A_1 \dot{K}_1 = \mu A_1 Y_1 - \delta_1 A_1 K_1$. Mindkét oldalt elosztva $Y_1 = A_1 K_1$-gyel:

$$\hat{Y}_1 = \mu A_1 - \delta_1 \ . \tag{1}$$

A fogyasztás növekedési rátája pedig a következő megfontolások nyomán adódik: A $C = A_2 K_2$ egyenlet mindkét oldalát az idő szerint deriválva, majd alkalmazva a $\dot{K}_2 = (1 - \mu)Y_1 - \delta_2 K_2$ összefüggést: $\dot{C} = A_2 \dot{K}_2 = A_2[(1 - \mu)Y_1 - \delta_2 K_2]$. Mindkét oldalt osztva C-vel, a fogyasztás növekedési rátája a következő:

$$\hat{Y}_2 = \hat{C} = (1 - \mu) A_1 \frac{K_1}{K_2} - \delta_2 \ . \tag{2}$$

μ növelésének azonnali hatása tehát a fogyasztás növekedési rátájának csökkenésében jelentkezik. Másrészt a fogyasztás növekedési rátája annál magasabb, minél nagyobb a K_1/K_2 hányados. Ez pedig hosszú távon annál nagyobb, minél magasabb μ értéke. Az állandó ütemű növekedés feltétele $\dot{\mu} = 0$ esetén a (2) egyenlet szerint a K_1/K_2 hányados változatlansága. Figyelembe véve az 1. pontban bevezetett föltevést, ekkor és csak ekkor növekszik a két szektor kibocsátása azonos ráta szerint, ami egyúttal a $z = C/G = Y_2/Y_1$ hányados változatlanságával is ekvivalens. A kiegyensúlyozott növekedés feltétele ezek szerint $\hat{z} = 0$ teljesülése. Másrészt $\hat{z} = \hat{Y}_2 - \hat{Y}_1$ miatt az (1) és (2) egyenletekből $\hat{z} = (1-\mu)A_1\frac{K_1}{K_2} - \delta_2 - \mu A_1 + \delta_1$ adódik. Figyelembe véve továbbá, hogy $A_1\frac{K_1}{K_2} = \frac{A_2}{z}$, a következő egyváltozós dinamikus rendszert kapjuk:

$$\hat{z} = (1-\mu)\frac{A_2}{z} - \delta_2 - \mu A_1 + \delta_1 \ . \tag{3}$$

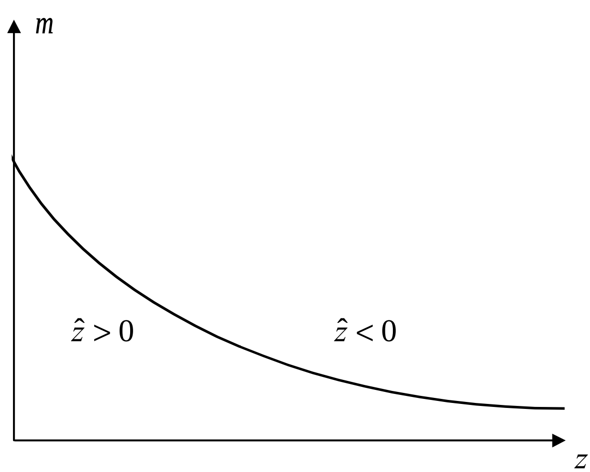
Mivel μ mindenkori nagyságát a központi tervező hatóság szabja meg, a kiegyensúlyozott növekedés elérése z bármely aktuális értéke esetén lehetséges. Ehhez μ értékét az alábbiak szerint kell megválasztani:

$$\mu = \frac{A_2 - z(\delta_2 - \delta_1)}{zA_1 + A_2} \ . \tag{4}$$

A (4) egyensúlyi feltételt kielégítő (z, μ) pontok halmazát tüntettük fel az *1. ábrán.* Ez nem más, mint a $\dot{z} = 0$ nyugalmi vonal. A (4) egyenletből

$$\frac{d\mu}{dz} = \frac{A_2(\delta_2 - \delta_1 - A_1)}{(zA_1 + A_2)^2}$$

adódik, azaz a $\dot{z} = 0$ nyugalmi vonal meredekségét a $\delta_2 - \delta_1 - A_1$ kifejezés előjele határozza meg. Figyelembe véve, hogy definíció szerint $0 < \delta_1, \delta_2 < 1$, továbbá reális feltevés, hogy $A_1 > 1$, a nyugalmi vonal negatív meredekségű. Megjegyzendő, továbbá, hogy $\delta_1 < \delta_2$ esetén az ábrán feltüntetett nyugalmi vonal metszi a vízszintes tengelyt. A metszéspont környezetében azonban μ alacsony értéke miatt a görbe nem releváns. Itt ugyanis az (1) egyenlet szerint $\hat{Y} < 0$, ami hosszú távon a termelőapparátus elhasználódását és a gazdaság összeomlását jelenti.



1. ábra.

Amint az ábráról látható, z minden releváns nagyságához lehet találni egy és csak egy olyan μ értéket, mely a (3) rendszer egyensúlyát biztosítja. A kormányzat tehát képes μ értékét úgy megválasztani, hogy az a kiegyensúlyozott növekedést biztosítsa, de másképp is dönthet. Például Kaposi (1998) szerint a szovjet gazdaságban a két világháború között általában $\hat{z} < 0$ volt jellemző, amit a gazdaságtörténet erőltetett iparosításként említ.

A modell mozgásegyenlete a (3) differenciálegyenlet. A stabilitásvizsgálat során arra a kérdésre keressük a választ, hogy amennyiben valamilyen exogén hatás kitéríti a gazdaságot a kiegyensúlyozott növekedési pályáról, szükségessé válik-e μ korábbi értékének a módosítása a kiegyensúlyozott növekedés helyreállítása érdekében. A kiegyensúlyozott növekedési pálya stabilitása az 1. ábra alapján látható. Amennyiben ugyanis valamilyen exogén tényező z értékét kimozdítja a kiegyensúlyozott növekedést jelentő konstans értékről, μ változatlansága esetén a (3) egyenlet szerint olyan folyamatok indulnak be, melyek a gazdaságot a kiegyensúlyozott növekedés irányába terelik. A konvergenciát a kormányzat gyorsíthatja is, ha $\hat{z} < 0$ esetén csökkenti μ értékét, $\hat{z} > 0$ esetén pedig növeli azt. Egy ilyen kormányzati politika legegyszerűbben a $\hat{\mu} = \alpha\hat{z}$ differenciálegyenlet segítségével modellezhető, ahol α negatív paraméter.

Az eredmények teljesebb körű értelmezéséhez érdemes párhuzamot vonni Feldman modellje és a piacgazdaságra konstruált legegyszerűbb növekedési modellek között. Ehhez mindenekelőtt azt kell megmutatni, hogy a μ paraméter megtakarítási hányadként értelmezhető, ami a következőképpen látható be: Definíció szerint $s = S/Y$ és $G = S$ miatt $s = G/Y$. Az összkibocsátás az egyes szektorok kibocsátásainak összegeként adódik, és így $s = G/(Y_1 + Y_2)$. Mivel a piacgazdaság növekedését leíró legegyszerűbb növekedési modellek egyszektorosak, a könnyebb egybevetés érdekében a jelen szakasz további részében feltesszük, hogy a két szektor azonos technológiával termel. Ekkor $A = A_1 = A_2$, továbbá $S = I = G = Y_1$ következtében

$$s = \frac{S}{Y} = \frac{Y_1}{Y_1 + Y_2} = \frac{AK_1}{AK_1 + AK_2} \ ,$$

és így $K = K_1 + K_2$ miatt $s = K_1/K$. Amennyiben pedig μ értéke konstans, definíció szerint $\mu = K_1/K$ teljesül. Mindezek alapján úgy tűnik, hogy a központi tervező képes a megtakarítások nagyságát a kívánatos szintre beállítani.

Az egyes szektorok növekedési rátáira kapott eredmények nagymértékben emlékeztetnek a harrodi garantált növekedési rátára, ami a megtakarítási hányad és a tőkekoefficiens hányadosaként adódik (Harrod (1939)). Láttuk, hogy az 1. szektor kibocsátása éppen e szerint a ráta szerint növekszik, a második szektoré pedig ehhez tart. Ugyanakkor az is látható, hogy a tervezett gazdaság sikeresen küszöböli ki a harrodi problémákat. Az egzisztenciaproblémát a megtakarítási hányad endogenizálása, azaz μ megfelelő szinten történő kormányzati meghatározása által, a stabilitási problémát pedig a téves vállalkozói döntések eliminálása révén. Ismert ugyanis (pl. Stiglitz és Uzawa (1969), Sen (1970)), hogy Harrod modelljében a vállalkozói várakozások destabilizálják a gazdaságot. A tervezett gazdaságban azonban minden megtakarítás automatikusan beruházássá válik, és a modell azt is felteszi, hogy nem születnek téves beruházási döntések. Ennek köszönhető, hogy a tervezett gazdaság számára felvázolt feldmani jövőkép jóval derűlátóbb a harrodinál.

Hasonlóan derűlátó jövőképet vázol fel a piacgazdaság számára Solow (1956) cikke, ennek feltevései azonban több ponton eltérnek mind Harrod, mind pedig Feldman modelljétől, így az egybevetés problematikus. Elegendő csupán a legfontosabb eltérést megemlíteni: Solow modelljében a tőke képlékeny, ami azt jelenti, hogy a tőkeintenzitás képes rugalmasan alkalmazkodni az exogén hatásokhoz, pl. a megtakarítási hányad megváltozásához. Ez a feltevés azt jelenti, hogy a már üzembe helyezett tőkejavak másfajta, az üzemeltetéshez több vagy kevesebb munkát igénylő tőkejószággá alakíthatók át, így a modellben téves beruházási döntések nem születhetnek. A feldmani feltevések között ezzel szemben kikötöttük, hogy a tőke nem képlékeny (3. pont), a téves beruházási döntések kiküszöbölését pedig a központi tervező hatóságnak kell garantálnia.

2 A modell bírálata

A Feldman modelljéből adódó optimista prognózis azonban éppúgy inkonzisztens a gazdaságtörténeti tényekkel, mint a postkeynesi teoretikusok pesszimista előrejelzései. Az inkonzisztencia oka Harrod modelljének esetében ismert: Jones (1975) szerint e konstrukciók figyelmen kívül hagyták a gazdaság stabilizálása érdekében rendszeresen és sikeresen alkalmazott keynesiánus kormányzati beavatkozásokat. Arra a kérdésre, hogy Feldman modelljének mely sajátosságai vezettek oda, hogy a kibocsátás hosszú távú idősora egyetlen tervgazdálkodást folytató országban sem alakult a modell előrejelzésének megfelelően, nem ad választ az irodalom. A dolgozat további részében egy lehetséges magyarázat kidolgozása következik.

Az (1) egyenletből látható, hogy gazdasági növekedés csakis abban az lehetséges, ha $\mu A_1 > \delta_1$ teljesül. Pl. Kaposi (1998) és (2001) könyveiből ismert, hogy ez a feltétel teljesült mind a szovjet, mind pedig a magyarországi szocialista gazdaság építésének első ötéves tervei során. Ismert az is, hogy ezt az időszakot $\hat{z} < 0$, azaz erőltetett iparosítás jellemezte. Problémánk az, hogy miért kerültek a tervezett gazdaságok az 1. ábrán bemutatott görbe fölötti régióból a görbe alatti régióba, és ha már odakerültek, milyen hatások eliminálták a (3) mozgásegyenlet által leírt stabilizáló mechanizmust. Még élesebben megfogalmazva a kérdést, az a következőképpen hangzik: Figyelembe véve az (1) egyenletben A_1 alacsony és δ_1 magas értékét, miért nem valósult meg hosszú távon legalább egy alacsony ütemű, stabil növekedés, ha már egyszer sikerült a két szektor növekedését beindítani. A kérdés megválaszolását két tényező teszi nehézzé. Egyrészt a szocialista gazdaságirányítás mindvégig igyekezett μ értékét a lehető legmagasabb szinten tartani. Másrészt a (2) egyenlet szerint K_1/K_2 növekedése hosszú távon a fogyasztás növekedési rátájának emelkedését is maga után vonja. E sorok írója szerint a válasz ott keresendő, hogy a valóságban egyenlőtlenség formájában teljesült a modell feltevései közül a 2. pontban felírt $G = Y_1$ egyenlet. Ez azt jelenti, hogy az 1. szektor által előállított termékmennyiség egy része sem a tőkeállomány növelésére, sem pedig az amortizációs veszteségek pótlására nem volt alkalmas egyik szektorban sem. Annak magyarázata, hogy ez a helyzet miként alakulhatott ki, a tervezett gazdaság működésének mélyebb elemzését igényli, ami megtalálható Kornai (1980) könyvében. Ennek alapján soroljuk fel a továbbiakban azokat a jellegzetességeket, amelyek a kérdés megválaszolása szempontjából fontosak lehetnek. Bár a felsorolásban központi fontosságú helyet foglal el a költség, illetve a költségvetési korlát puhaságának fogalma, szükséges megjegyezni, hogy ezeken mindig reálköltséget értünk. Ennek egyik oka, hogy Feldman eredeti modelljében is reálnagyságok szerepelnek. A másik ok az, hogy az árak hatását erőtlennek ítélve Kornai is reálnagyságokra fogalmazza meg mondanivalóját. Mindezek miatt az adó- és hitelrendszert a továbbiakban csak a vállalati költségvetési korlátot puhító tényezőként vesszük figyelembe.

A vállalati viselkedés legfontosabb sajátosságai az alábbiak:

V1. A tervezett gazdaság körülményei között működő vállalatnak természetesen nem elsődleges célja a nyereség maximalizálása. A tervfeladatok teljesítésének deklarált célkitűzése mellett azonban a dolgozók, elsősorban a vezetők személyes törekvései is fontos szerepet játszanak, melyek partikuláris vállalati érdekek gyanánt jelennek meg. Számunkra ezek közül most a legfontosabb az a törekvés, mely minél több erőforrás megszerzésére irányul. Hosszú távon ez egyfajta expanziós kényszerben nyilvánul meg, azaz nem létezik olyan vállalat, amelyik ne akarna beruházni.

V2. Egy hibás beruházási döntés megvalósítása is képes hatékonyan szolgálni a vállalat imént említett partikuláris érdekeit. A lekötött tőke nagyobb mennyisége és az ezzel általában együtt járó több foglalkoztatott akkor is erősebb alkupozíciót biztosít a felettes szervekkel folytatott tárgyalások során, ha a beruházás eredményeként sem a kibocsátás növelése, sem a hatékonyság javulása nem következik be.

V3. A vállalat költségvetési korlátja viszonylag puha, ezért az állandó beruházási éhséget nem korlátozza a kudarctól vagy veszteségtől való félelem. Az endogén korlátozás hiánya pedig exogén korlátozást tesz szükségessé, ami abban áll, hogy a vállalat önálló beruházási döntést nem hozhat, ez a jog a felettes szervek számára van fenntartva.

V4. Beruházási igényének kielégítésére abban az esetben számíthat jó eséllyel a vállalat, ha a várható költségeket jelentősen alátervezi. Célszerű a kapcsolódó beruházásokat az igénylésből kihagyni, ha azok valóban nélkülözhetetlenek, előbb-utóbb úgyis kerül rájuk pénz valamilyen forrásból.

A vállalatok iménti vázolt viselkedése részben a gazdaságirányítási hierarchia bizonyos szintjein is megjelenik, másrészt ott speciális reakciókat vált ki. Az ebből adódó jellegzetességek közül soroljuk fel az alábbiakban a modellünk szempontjából legfontosabbakat.

I1. A beruházási igények kielégítésére rendelkezésre álló keretet az elosztást végző allokátor úgy osztja szét az igénylők között, hogy tartalékot nem vagy alig képez. Előre nem látható igények kielégítésére, a korábbi igényekből kimaradt kapcsolódó beruházások megvalósítására csak a folyamatban lévő többi projekthez rendelt forrás átcsoportosítása révén van lehetőség. Ez egyrészt a kivitelezés lassítását eredményezi, másrészt azt, hogy az allokátor rendelkezésére álló keret szétforgácsolódik a sok megkezdett beruházás között.

I2. A gazdaságirányítás hierarchikus szerveződése a beruházási erőforrások allokációs mechanizmusában is megjelenik. A többszintű hierarchia valamely közbülső szintjén működő allokátor viselkedése kettős: Lefelé restriktív, azaz igyekszik az igényeket visszaszorítani, felfelé viszont expanzív, vagyis tágabb keretért harcol, mint aminek elfogadását reálisan remélheti. Mivel az expanzió belső kényszere az allokátorban is jelen van, a kettő közül az utóbbi által determinált magatartás válik dominánssá, így a közbülső szintű allokátor elsősorban a hozzá tartozó igénylők érdekeit képviseli.

I3. Az allokáció előző pontban említett, többszintű mechanizmusa olyan érdekérvényesítési csatornákat hoz létre, melyek hatékonyan jelenítik meg a vállalatok és ágazatok állandó beruházási éhségét az irányítási hierarchia legfelsőbb szintjén. Ugyanakkor nem jelennek meg az alsóbb szinteken a makrogazdaság olyan alapvető dilemmái, mint a fogyasztás vagy beruházás, illetve növekedés vagy egyensúly kérdése.

I4. Az irányítási hierarchia legfelsőbb szintjén a már kialakult elosztási szabályok megmerevítésére irányuló tendencia mutatkozna, ezzel szemben azonban a vállalatok általában hatékonyan képesek beruházásokkal kapcsolatos érdekeik érvényesítésére. Ez modellünkben μ lassú növekedését eredményezi.

I5. μ előző pontban említett lassú növekedése addig tart, míg a gazdaság valamely területén (pl: fogyasztás) oly mértékű zavar nem támad, ami a társadalom tűréshatárába ütközik. Ekkor a legfelsőbb szintű allokátor „beletapos a fékbe”, ami μ értékének csökkenésében nyilvánul meg. A tűréshatár megsértésének eloszlásával μ ismét növekedni kezd.

I6. Az előző pontban említett „fékezés” vagy félmonetáris restrikció Soós (1986) szerint kampányszerűen történik, ami gyors hatású eszköz, ám hatása csak rövid ideig tart. A fékezések során tehát μ értéke gyorsabban csökken, mint ahogy expanziós időszakokban növekszik.

3 A módosított modell

Az 1. szakaszban tárgyalt kétszektoros AK modellbe most bevezetjük a puha vállalati költségvetési korlátot és a restrikciós kampányokkal operáló gazdaságpolitikát. Ez egyebek mellett μ endogenizálását jelenti, melynek során az előző szakaszban mondottakat szükséges figyelembe venni. Amint ott kiderült, μ nem tekinthető egyértelműen a központi tervező hatóság döntési változójának. Amikor ugyanis nincsenek súlyosabb egyensúlyi zavarok, μ értéke a kormányzat szándéka ellenére lassan növekszik. Csak komolyabb egyensúlytalanság fellépése esetén csökkenti a kormányzat μ értékét, ám ennek során meglehetősen radikálisan jár el.

G továbbra is a termelőtőke növelésére vagy pótlására alkalmas bruttóberuházások nagyságát jelöli, azaz $G = \dot{K}_1 + \dot{K}_2 - \delta_1 K_1 - \delta_2 K_2$. Az előző alfejezet V2 pontjában mondottak szerint azonban az 1. szektor kibocsátásának egy része olyan beruházásokat jelent, melyek egyik szektorban sem növelik a termelőtőke állományát, így $G < Y_1$. A különbség azon elhibázott beruházási döntésekből adódik, melyek kizárólag partikuláris vállalati vagy ágazati érdekeket szolgálnak. Ez a különbség annál nagyobb, minél inkább teret enged a központi tervező hatóság a vállalatok beruházási éhségének, tehát minél nagyobb μ értéke. Mindezek miatt az 1. szektor kibocsátása és a bruttóberuházások között az alábbi összefüggés érvényes:

$$G = (1-\mu)^{\alpha} Y_1$$

ahol a jobb oldalon álló első tényező azt mutatja, hogy mennyire erőteljesen érvényesülnek a puha költségvetési korláttal kapcsolatban említett tendenciák. Ez egyrészt az $\alpha \geq 0$ paraméter értékétől függ. Például $\alpha = 0$ esetén ilyen tendenciák egyáltalán nem hatnak, ez a tökéletesen kemény költségvetési korlát esete. Némi egyszerűsítéssel α a költségvetési korlát puhaságának mérőszámaként is értelmezhető. Másrészt attól is függ, hogy a központi tervező hatóság mennyire enged a vállalatok beruházási éhségének. Ezt fejezi ki a μ paraméter. Elvégezve most az 1. szakaszban végrehajtott átalakításokat, az (1) egyenlet helyett a következőt írhatjuk:

$$\hat{Y}_1 = \mu(1-\mu)^{\alpha} A_1 - \delta_1 \,. \tag{5}$$

Az A_1 paraméter előtt álló kéttényezős szorzat az 1. szektor preferálásának kettős hatását reprezentálja. Az első tényező, mely már az (1) egyenletben is megjelent, azt fejezi ki, hogy a beruházások első szektorba történő allokálása e szektor kibocsátásának növekedési rátáját emeli. A második tényező ezzel szemben a vállalatok felől érkező nyomással szembeni kormányzati ellenállás gyengülése következtében növekvő számú elhibázott beruházásból adódó veszteséget reprezentálja, melyről a 2. szakasz V2 pontjában esett szó.

A (2) egyenlet pedig

$$\hat{C} = \hat{Y}_2 = (1-\mu)^{1+\alpha} \frac{A_2}{z} - \delta_2 \tag{6}$$

alakúra módosul. Egybevetve az eredeti egyenlettel látható, hogy az imént említett veszteségek most a 2. szektorban is éreztetik a hatásukat.

Továbbra is érvényes, hogy $\hat{z} = \hat{Y}_2 - \hat{Y}_1$, és így a (3) differenciálegyenlet helyett z alábbi mozgásegyenletét kapjuk:

$$\dot{z} = (1-\mu)^{\alpha}[(1-\mu)A_2 - \mu A_1 z] - (\delta_2 - \delta_1)z\,. \tag{7}$$

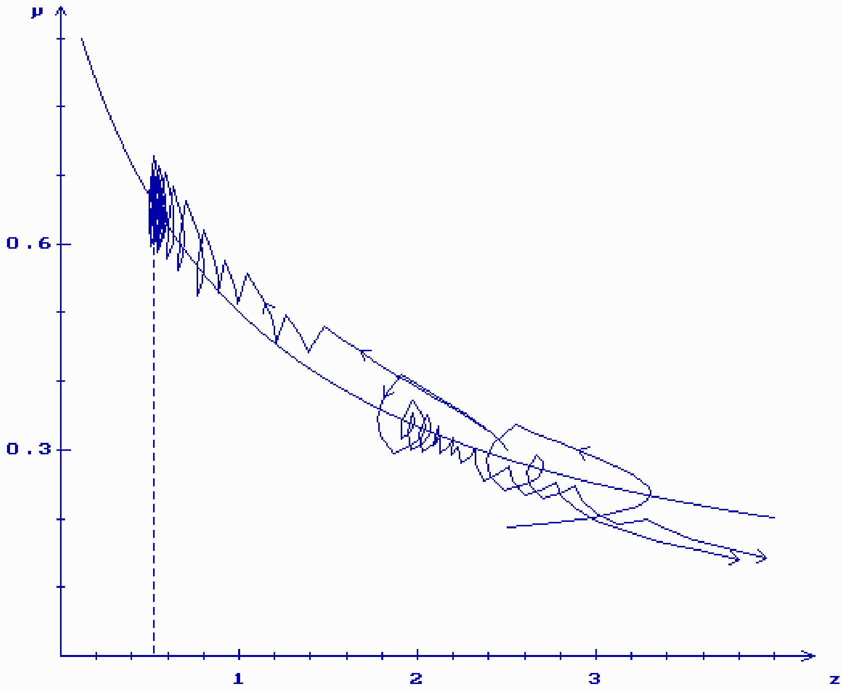
Az előző szakasz I4-6 pontjaiban mondottak miatt szükséges még bevezetni a modellbe μ mozgásegyenletét. Legyen az egyszerűség érdekében $C(0) = 1$. Feltesszük, hogy a központi tervező akkor kezdeményez félmonetáris restrikciót, ha a fogyasztás egy kritikus szint alá esik, azaz $C < 1 - d$ teljesül, ahol $0 < d < 1$ a társadalom tűréshatárát számszerűsítő konstans. A restrikció $C \geq 1 - d$ eléréséig tart, és ennek során $\hat{\mu} = -\gamma_2 < 0$. Ha a központi tervező nem avatkozik be, szabadon érvényesülnek az I4 pontban említett mechanizmusok, ennek következményeként $\hat{\mu} = \gamma_1 > 0$, továbbá az I6 pontban mondottak miatt: $\gamma_1 < \gamma_2$. Ezek a feltevések egyébként ellentétesek az 1. szakasz 7. pontjában ismertetett feltevéssel. Mindezek alapján μ mozgásegyenlete a következő:

$$\dot{\mu} = \begin{cases} \gamma_1\mu\,, & \text{ha } C \geq 1 - d \\ -\gamma_2\mu & \text{különben}\,. \end{cases} \tag{8}$$

A (7) és (8) differenciálegyenletek által definiált dinamikus rendszernek nincs fixpontja. Ennek oka, hogy μ mozgásegyenletéből következően $\dot{\mu} = 0$ nem fordulhat elő. Így a (8) differenciálegyenletből következően a modellben nem lehetséges kiegyensúlyozott növekedés. A rendszer dinamikájáról számítógépes szimuláció révén nyerhetők bizonyos információk. Néhány szimulált trajektóriát mutatok be a *2. ábrán.* A pályagörbéken elhelyezett nyilak μ és z időbeli változásának irányát jelzik. Az ábrán a $\dot{z} = 0$ nyugalmi vonalat is feltüntettem, ami az 1. ábrához hasonlóan ezúttal is egy negatív meredekségű, konvex görbe. Az egyes szimulációk paraméter és kezdőértékeit az ábrát követő táblázat foglalja össze.

A Feldman-modell optimista következtetéseit leginkább az 1. szimuláció közelíti. Jóllehet μ növekedése és z csökkenése nem monoton, és nem is tart minden határon túl, a (6) egyenlet szerint mégis úgy tűnik, hogy a fogyasztás növekedési rátája idővel egy pozitív érték körüli ingadozásra áll be. Az pedig, hogy z értéke a $(0.4, 0.6)$ intervallumon belül marad, egyúttal a gazdaság kiegyensúlyozott növekedési pálya körül történő ingadozását is jelenti.

A 2. szimulációt μ alacsonyabb kezdőértékének feltevése mellett végeztem. Bár az 1. esethez hasonlóan az itt kapott trajektóriának is van egy olyan szakasza, melyet μ szigorúan monoton növekedése és z szigorúan monoton csökkenése jellemez, némi ingadozás után e tendencia megfordul, ami az (5) egyenlet szerint $\hat{Y}_1$ csökkenését is maga után vonja. Tovább folytatva a szimulációt megmutatható, hogy μ értéke nullához tart, ami az (5) egyenlet szerint az 1. szektor kibocsátásának tartós csökkenését vonja maga után, és ez a gazdaság összeomlását jelenti. E két szimuláció az erőltetett iparosítás stratégiájának, azaz μ magas kezdőértékének a létjogosultságát támasztja alá, hisz az összeomlás ilyen módon elkerülhető.



2. ábra.

	α	A_1	A_2	δ_1	δ_2	γ_1	γ_2	d	$z(0)$	$\mu(0)$
1.	1.1	1	1	0.2	0.2	0.04	0.08	0.25	2.5	0.3
2.	1.1	1	1	0.2	0.2	0.04	0.08	0.25	2.5	0.187
3.	1.297	1	1	0.2	0.2	0.04	0.08	0.25	2.5	0.3

A 3. szimuláció során visszatérünk az erőltetett iparosítás stratégiájához, és mindössze annyi változtatást teszünk az elsőhöz képest, hogy α magasabb értékét, tehát a vállalatok puhább költségvetési korlátját tételezzük fel. A két közös kezdőpontból induló pályagörbe végül ellentétes irányú tendenciát mutat, és egy, a 2. szimulációhoz hasonló trajektória adódik. Ha az előzőekben alkalmazott terminológiát követve $\mu(0) = 0.3$ esetén erőltetett iparosításról beszélünk, akkor most kiderül, hogy ez sem elegendő az összeomlás elkerüléséhez, ha a vállalatok költségvetési korlátjának puhasága bizonyos korlátot meghalad. Megjegyzendő továbbá, hogy α értékének megváltozása természetesen a $\dot{z} = 0$ nyugalmi vonal elmozdulását is maga után vonja, ez az elmozdulás azonban olyan csekély mértékű, hogy az ábrán nem jeleníthető meg.

Érdekesnek látszik azon a kérdés vizsgálata, hogy az 1. szimuláció során kialakul-e ciklus. Több mint 2000 periódusra végezve el a szimulációt, úgy tűnik, igen, a ciklus periódusainak a száma viszont több mint 100. Ilyen hosszú időtávon azonban semmiképp sem tekinthető konstansnak a modell többi paramétere. Másrészt az itt adódó értékek kevéssé tűnnek valószínűnek, és a jelenség a gazdaságtörténet eredményei alapján is irreleváns. Mindenesetre az ábra alapján úgy tűnik, hogy a költségvetési korlát puhulása fokozza az összeomlás felé tartó pályára állás veszélyét.

Jelentős mértékben függ a modell viselkedése a többi paraméter értékétől is. E dolgozat keretei azonban nem teszik lehetővé ezek hatásának részletes elemzését.

4 Záró megjegyzések

Nem tartom valószínűnek, hogy az előző szakaszban bemutatott modell adekvát módon írná le a tervezett gazdaság működését. A bemutatott pályagörbék között azonban akad olyan, mely a tényeknek jobban megfelel, mint Feldman modelljének hosszú távon derűlátó következtetése.

A ténylegesen működő tervgazdaságok központi tervező hatóságai általában azzal a feltételezéssel éltek, hogy α értéke zérus, ezért az (5) egyenlet alapján úgy vélték, hogy a beruházási javakat előállító szektor preferálása (azaz μ növelése) révén e szektor növekedése gyorsítható. Az 1. szektor túlzott preferálása ($(1+\alpha)^{-1} < \mu$) esetén azonban a μ növelése következtében fellépő erőforrás-bővítő hatást túlkompenzálja a 2. szakasz V2 pontjában említett hibás beruházási döntések miatt jelentkező veszteség az 1. szektorban. Így ebben a helyzetben a beruházások 1. szektorba irányított hányadának növelése azzal jár együtt, hogy e szektor termelése is csökken.

A 2. és 3. szimuláció esetén a pályagörbék kezdeti szakaszán meglehetősen nehéz eldönteni, hogy az összeomlás felé tart-e a gazdaság vagy sem. Az 1. trajektóriával összehasonlítva a különbség abban áll, hogy μ értékének mélypontjaiban z nagysága növekszik. E jelenség azonban csak több mint 20 periódus után ismerhető fel. Negyedéves periódusokkal számolva ez is több, mint 5 év.

A dolgozat végén fel kell vetni a kérdést, hogy több mint másfél évtizeddel a magyar gazdasági és politikai rendszerváltás után van-e még értelme AK típusú termelési függvényekkel, illetve a vállalatok puha költségvetési korlátjával foglalkozni.

Az AK típusú termelési függvényekkel kapcsolatban érdemes Antinolfi és szerzőtársainak (2001) megjegyzését felidézni, mely szerint e függvénytípus rendkívüli egyszerűsége ellenére is fontos helyet foglal el a gazdasági növekedés irodalmában. Amint az Barro és Sala-i-Martin (1995) könyvéből kiderül, ennek felhasználása révén nyerhetők az endogén növekedés legegyszerűbb modelljei.

A puha költségvetési korlátról mondottak sem kizárólag a tervezett gazdaságra érvényesek. Kornai (1997) cikkében kijelenti, hogy a fejlett tőkés országokban évszázados trend a vállalatok költségvetési korlátjának puhulása, és fel is sorolja e tendencia okait. Ugyanakkor Kornai (2000) szerint a posztszocialista országokban egy ezzel a trenddel ellentétes irányú tendencia zajlik. Ennek nem túlságosan nagy sebességére lehet következtetni pl. Gray és szerzőtársainak (1996) empirikus vizsgálatából. A partikuláris vállalati érdekek rendkívül markánsan jelentek meg például a magyarországi privatizáció során. Ezzel kapcsolatban is igen tanulságosak Voszka (1996), (1997) munkái. Ugyanakkor Fama és French (2000) Egyesült Államokra vonatkozó vizsgálódásai szerint a tulajdonosok képesek hatékonyan korlátozni a vállalati menedzserek érdekérvényesítő képességét.

Az előző két szakasz következtetései döntő mértékben a puha vállalati költségvetési korlát feltevésén alapultak. Ezért érdemel különös figyelmet Kornai imént említett megjegyzése a költségvetési korlát puhulásának tendenciájával kapcsolatban. Maskin (1999) alapján úgy tűnik, a jelenség mindinkább az érdeklődés középpontjába kerül. Például Duggan (2000) a kormányzat által működtetett kórházak puha költségvetési korlátjában látja annak okát, hogy az egészségügyre fordított közkiadások jelentős növelése sem eredményezi a szegények egészségügyi helyzetének javulását. Maskin (2001) szerint különös jelentősége van a puha költségvetési korlát problémájának az átmeneti gazdaságokban.

Végül megjegyezzük, hogy a vállalati viselkedés 2. szakaszban felsorolt jellegzetességeinek nagy része a nagyvállalati szervezeti egységek vállalaton belüli magatartásában is kimutatható, amit Dobák (1996) funkció, illetve divízió egoizmus gyanánt említ. Mindezek még indokoltabbá teszik e jellegzetességek figyelembe vételét a modellalkotás során.

Irodalom

1. Antinolfi, G., Keister, S. és Shell, K. (2001) Growth Dynamics and Returns to Scale: Bifurcation Analysis, *Journal of Economic Theory*, 96, pp. 70–96.

2. Barro, R. J. és Sala-i-Martin, X. (1995) *Economic Growth*, McGraw-Hill, New York

3. Dobák, M. és munkatársai (1996) *Szervezeti formák és vezetés*, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.

4. Domar, E. D. (1957) *Essays in the Theory of Economic Growth*, Oxford University Press, New York.

5. Duggan, M. G. (2000) Hospital Ownership and Public Medical Spendig, *Quarterly Journal of Economics*, 115, pp. 1343–73.

6. Fama, E. F. és French, K. R. (2000) Forecasting Profitability and Earnings, *Journal of Business*, 73, pp. 161–175.

7. Feldman, G. A. (1928) K teorii tempov narodnogo dihoda, Planove hozjajsztvo (A tervezett gazdaság) GOSZPLAN, Moszkva (magyarul megjelent: *Közgazdasági Szemle*, 1967, 11. pp. 1342–82.)

8. Gray, C. W., Schlorke, S. és Szanyi, M. (1996) A csődtörvény tapasztalatai – 1992-1993 – Egy empirikus kutatás eredményei, *Közgazdasági Szemle*, 43, pp. 403–419.

9. Harrod, R. F. (1939) An Essay in Dynamic Theory, *Economic Journal*, 49, pp. 14–33.

10. Jones, H. (1975) *An Introduction to Modern Theories of Economic Growth*, Nelson, Sunbury-on-Thames.

11. Kaposi, Z. (1998) *A XX. század gazdaságtörténete I. (1918-1945)*, Dialóg Campus Kiadó, Budapest - Pécs.
12. Kaposi, Z. (2001) *A XX. század gazdaságtörténete II. (1945-1990)*, Dialóg Campus Kiadó, Budapest - Pécs.
13. Kornai, J. (1980) *A hiány*, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest
14. Kornai, J. (1997) Pénzügyi fegyelem és puha költségvetési korlát, *Közgazdasági Szemle*, 44, pp. 940–953.
15. Kornai, J. (2000) A költségvetési korlát megkeményítése a posztszocialista országokban, *Közgazdasági Szemle*, 47, pp. 1–22.
16. Maskin, E. (1999) Recent Theoretical Work on the Soft Budget Constraint, *American Economic Review*, 89, pp. 421–425.
17. Maskin, E. (2001) Soft Budget Constraint Theories – From Centralisation to the Market, *Economics of Transition*, 9, pp. 1–27.
18. Soós, K. A. (1986) *Terv, kampány, pénz*, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó – Kossuth Könyvkiadó, Budapest
19. Sen, A. K. (szerk.) (1970) *Growth Economics*, Penguin, Harmondsworth.
20. Solow, R. M. (1956) A Contribution to the Theory of Economic Growth, *The Quarterly Journal of Economics*, 70, pp. 65–94.
21. Stiglitz, J. E. és Uzawa, H. (szerk.) (1969) *Readings in the Modern Theory of Economic Growth*, M.I.T. Press, Cambridge, Massachusetts, and London, England.
22. Voszka, É. (1996) A tulajdonváltás felemás sikeréve, *Közgazdasági Szemle*, 43, pp. 385–402.
23. Voszka, É. (1997) Csontvázak a szekrényben (Privatizáció 1996), *Közgazdasági Szemle*, 44, pp. 407–425.

SOFT BUDGET CONSTRAINT AND STOP-GO POLICY IN A TWO-SECTOR AK MODEL

We introduce a soft budget constraint and stop-go policy into a stable two-sector AK model. As the extended model does not have any equilibrium point, we use a computer-simulation to show that depending on the initial situation and the parameter values, the economy can follow a trajectory leading to the collapse or moves oscillatory avoiding the downfall.

PIACI KOCKÁZAT ÉS DIVERZIFIKÁCIÓ A HAZAI TŐKEPIACON[1]

KÓBOR ÁDÁM
Világbank

A tanulmány három hazai piaci változó —a részvény- kötvény- és devizapiacot reprezentáló BUX index, 3 éves állampapír, illetve forint-euró árfolyam— viselkedését vizsgálja több szempontból. Az egyik fő szempont e három piaci szektor kockázatosságának, és a közöttük fennálló diverzifikációnak vizsgálata eltérő időtávokon. Tapasztalatunk szerint a három piaci kockázati faktor árfolyamváltozásának együttmozgása erősödik, ha a befektetési (illetve elemzési) időtávot egy napról heti, illetve havi hosszúságúra nyújtjuk. A másik fő elemzési szempont a piaci faktorok viselkedésének részletesebb leírása: rezsimváltó modellek segítségével elkülöníthetünk nyugodt illetve hektikus periódusokat, melyekben a volatilitások és korrelációk szignifikáns különbséget mutatnak. Tapasztalatunk szerint a részvény- és kötvénypiacok közötti korrelációs együttható erősödik a magasabb volatilitású időszakokban, jelentősen rontva a nyugodt időszaki adatok alapján várható diverzifikációs hatást – ez a jelenség ellentétes például az amerikai piacokon tapasztaltakkal.

JEL klasszifikáció: C10, G10

1 Bevezetés

A pénzügyi piaci eszközök illetve kockázati faktorok kovariancia mátrixa kritikus szerepet játszik mind az optimális eszközallokáció meghatározásában, mind pedig a kockázatkezelés szempontjából. Az optimális eszközallokáció eltérő formákban fejezhető ki, kezdve a klasszikusnak tekinthető kvadratikus hasznosságfüggvény maximalizálásától egészen a különböző alsóági kockázatok melletti várható hozam-maximalizálás problémájáig. Amíg a jól viselkedő hasznosságfüggvények használata inkább az elméleti tudományos kutatások körében gyakori, a gyakorlatban tipikusan valamelyik intuitívabb alsóági kockázatot mérő indikátor melletti hozammaximalizálás tekinthető általánosnak. Ilyen alsóági kockázati mérőszám a kockáztatott érték avagy Value at Risk (VaR), egy meghatározott hozamküszöb alatti teljesítmény valószínűsége (Shortfall Probabilty), vagy pedig a várható veszteség nagysága (Expected Shortfall illetve Conditional Value at Risk). A kockáztatott érték fogalmáról és módszertanáról részletesen olvashatunk Jorion (1999) illetve Király (1998)

[1]Quantitative Strategies, Risk and Analytics Department, The World Bank (Világbank). A tanulmányban kifejtett nézetek a szerző véleményét tükrözik, és nem feltétlenül egyeznek meg a Világbank hivatalos álláspontjával. Beérkezett: 2006. február 18. E-mail: `akobor@worldbank.org`.

írásaiban. Bár az említett indikátorok mind hordoznak valamilyen intuitív jelentést és interpretálhatóságot, közülük nem mind, így például a népszerűnek mondható VaR sem tekinthetők jól viselkedő —ún. koherens— kockázati mértéknek. A kockázati mértékek elméleti tulajdonságairól ajánljuk például Artzner et al. (1998) tanulmányát, a koherens kockázati mérték melletti portfólió optimalizációról pedig például Krokhmal et al. (2001) illetve Cheklov et al. (2003) tanulmányaiban olvashatunk. Azonban bármilyen módon is határozzuk meg a portfólió optimalizációs feladatot, a kovariancia mátrixra, azaz a faktorok volatilitására és korrelációira szinte biztos, hogy szükségünk lesz.

Bár a kovariancia mátrix statisztikai szempontból alapvető fogalom, a pénzügyi piaci alkalmazások mégis számos kihívás elé állítják az elemzőt. Az egyik ilyen közismert megfigyelés szerint a volatilitások és korrelációs együtthatók időben változóak, klaszterezettek, azaz időben elkülöníthetők alacsony és magas volatilitású periódusok. Ennek a problémának a leírására gyakran alkalmazott módszerek többek között a GARCH módszerek, illetve inkább elméleti vonalon a sztochasztikus volatilitás modellek. A GARCH modellek hazai alkalmazásáról részletesebben olvashatunk pl. Varga és Rappai (2002) tanulmányában.

Egy másik, ugyancsak közismert tapasztalat szerint a pénzügyi kockázati faktorok nem írhatók le tökéletesen a klasszikusan feltételezett normális eloszlással: a tapasztalati hisztogram gyakran ferdült és leptokurtikus, azaz a vastag szélek jelenségét mutatja – azaz szélsőséges eseményekre gyakrabban kell számítanunk mint azt a normalitás alapján feltételezhetnénk. Ezt a problémát részben feltételes normalitáson alapuló modellekkel (GARCH, kevert normális eloszlás), részben pedig nemnormális eloszlásokkal (extrémérték eloszlások, alfa-stabil eloszlás, Student-eloszlás, stb.) korrigálhatjuk. Különböző eloszlások és modellek hazai piacokon történő alkalmazásáról részletesen olvashatunk például Janecskó (2000) illetve Kóbor (2000) írásaiban. Tapasztalatok szerint a feltételes normalitás nem oldja meg minden esetben az illeszkedés problémáját, viszont a jobban illeszkedő, de nehezebben becsülhető eloszlások nagyon nehezen terjeszthetők ki és becsülhetők meg sokdimenziós esetre, és sokszor inkább csak statisztikai technikákról beszélhetünk semmint portfólió allokációban és pénzügyi modellezésben alkalmazható eszközökről (példa lehet erre a Student-eloszlás). Tanulmányunkban az időben változó volatilitások és korrelációk modellezésére a rezsimváltó modelleket alkalmazzuk, amelyek segítségével elkülöníthetünk nyugodt és hektikus időszakokat, és a korrelációk megváltozására, így a hektikus időszakban leromló diverzifikációs hatásokra is rávilágíthatunk. A rezsimváltó modellekkel becsült kevert normális eloszlás egyúttal a vastag szélek jelenségére is magyarázatot adhat. Mindazonáltal máris megjegyezzük, hogy nem a statisztikai illeszkedést tartjuk a rezsimváltó modellek elsődleges előnyének, hanem a rendkívül intuitív interpretálhatóságot, a portfóliókezelésben való alkalmazhatóságot, és a viszonylag könnyű sokdimenziós kiterjeszthetőséget.

Amíg a kutatók jelentős figyelmet szenteltek az eddigiekben leírt jelenségek tárgyalásának, kevesebb figyelmet érdemelt a pénzügyi faktorok időbeli függetlenségének (így például az autókorrelációinak) vizsgálata. A normalitással szemben továbbra is él a faktorváltozások függetlenségébe (és ezáltal a gyakorlat szempontjából nagyon fontos „szabály", a volatilitás idő négyzetgyökével történő skálázásába) vetett általános bizalom. Ha a faktorváltozások időben függetlenek, a volatilitások valóban az időhorizont négyzetgyökével arányosak, a faktorok közötti korrelációk pedig nem függnek attól, hogy azokat napi, heti vagy havi lépésközben mérjük. A tapasztalati adatok azonban mást mutatnak: a korrelációk kimondottan függnek a mérési időhorizonttól. A függetlenség feltételezése azonban több okból is időtállóbb lehet. Egyrészt, tapasztalati oldalról tekintve, kevésbé szembeötlő problémáról van szó, mint például a leptokurtikusság esetében. Ha egy elemző VaR modellt kíván tesztelni 1 napos időhorizonton, akkor 1 napos időtávon mért volatilitásokból és egyéb paraméterekből építi fel modelljét, és nincs szükség semmiféle időbeli átskálázásra. Másrészt, elméleti síkon, a függetlenség szoros viszonyban van a hatékony piacok hipotézisével, azaz a függetlenség esetleges elvetése olyan kérdések elé állíthatja a kutatót, amelyek megválaszolása sokkal mélyebbre vezet, mint például a vastag szélűség azonnal szembeötlő jelenségének elfogadása. Ez a tanulmány alapvetően empirikus indíttatású, így a hazai piac hatékonyságával kapcsolatban nem szándékozunk következtetéseket levonni. Ezen kérdés további vizsgálatára azonban fel szeretnénk hívni a figyelmet: az időhorizonttól függő korrelációk ugyanis nem pusztán elemzési szempontból mondhatók érdekesnek, hanem rendkívüli jelentőségűnek mondhatók portfólió diverzifikációs, fedezeti és kockázatbecslési oldalról is.

Tanulmányunk első részében összehasonlítjuk három hazai kockázati faktor, a BUX index, a 3 éves állampapír, illetve a forint-euró árfolyam kovariancia mátrixát napi, heti és havi időtávon mérve. Az időtáv függvényében látható, hogy a korrelációs együtthatók emelkedő értékeket mutatnak, amelyek ellentmondanak a függetlenség hipotézisének. Megjegyezzük, hogy tanulmányunkat egyből többdimenziós, a hazai pénzügyi piacokat jól reprezentáló kockázati faktorok együttes elemzésével kezdjük, figyelmünk középpontjában ugyanis az egyedi volatilitások mérése mellett a faktorok közötti interakciók állnak. A volatilitások és korrelációs együtthatók „lejárati struktúrájának" megértésére vektorautoregresszív (VAR)[2] modellt alkalmazunk.

A tanulmány második részében nyugodt és hektikus periódusokat különítünk el rezsimváltó modellek segítségével, és a különböző rezsimek szerint elkülönítve vizsgáljuk a piaci faktorok volatilitását és a közöttük fennálló korrelációkat. Fontos tapasztalat, hogy a például az amerikai piacon megfigyelhető „flight to quality" jelenség (azaz a kockázatos részvények és alacsony kockázatú állampapírok közötti korreláció hektikus időben negatívvá válása) a hazai piacon nem figyelhető meg: ellenkezőleg, a részvények és állampapírok közötti korrelációs együttható hektikus időben felerősödik, rontva a remélt diverzifikációs hatást.

A tanulmány végén összegezzük következtetéseinket, és áttekintjük a nyitott, további kutatásra váró kérdéseket.

---

[2] A „kockáztatott érték" rövidítésére tanulmányunkban a VaR, a „vektorautoregresszív" modellek rövidítésére pedig a VAR kifejezést használjuk.

2 Piaci kockázat: klasszikus feltételezések, empirikus tapasztalatok

Tanulmányunkban mindhárom klasszikus piaci kockázati faktor —azaz a részvénypiaci, a devizapiaci és a kötvénypiaci kockázatok— együttes viselkedését kívánjuk elemezni. A részvénypiac elemzése a kutatók kedvelt kutatási területe, ugyanis a tőzsde megfelelő mennyiségű és könnyen elérhető adatot szolgáltat, ezek az adatok a kutatók számára érdekes viselkedést is produkálnak, és a tőzsdeindex igen gyakran a gazdaság megítélését és hangulatát tükröző barométerként is értékelhető. A részvénypiac kockázatát a BUX értékváltozásaival mérjük.

Az MNB 2005. áprilisi „Jelentés a Pénzügyi Stabilitásról” kiadványa szerint azonban a tőzsdén jegyzett részvények a belföldi befektetők portfóliójában meglehetősen alacsony arányt képviselnek — a lakosság esetében például 2.4%-ot, ha a befektetési jegyeket és a nyugdíjpénztárakat is figyelembe vesszük.

A részvénypiac kapcsán, ugyancsak a stabilitási jelentésre hivatkozva, kiemelendő még, hogy a tőzsdei részvények 78%-a külföldi befektetők portfóliójában van, így viszont a tőzsdepiac feltételezhetően komoly hatással lehet a devizapiacra is. A devizapiac kockázatát a forint euróval szembeni értékváltozásával mérjük.

A kötvénypiac kockázatát tanulmányunkban a 3 éves állampapír képviseli. A 3 éves lejárat meglehetősen önkényes választásnak tűnhet, de a választás során figyelembe vettük, hogy a stabilitási jelentés szerint a bankok eszközoldali átlagos hátralevő futamideje (duration) 2.6 év, mely igen közel esik a 3 éves állampapír kamatláb érzékenységéhez. A kamatlábkockázatot a 3 éves állampapír teljesítményével (azaz a felhalmozott kamat és az árfolyamváltozás együttes összegével) mérjük. Közgazdasági szempontból talán természetesebb választásnak tűnne ugyan a kamatláb változások elemzése a kötvény teljesítménye helyett, de jelen tanulmányban mindhárom kockázati faktorra mint pénzügyi eszközre vagy eszközosztályra tekintünk. Mivel rövid időtávon a kötvény teljesítményét alapvetően az átárazódás dominálja, kvantitatív szempontból végső soron nincs is lényegi súlya a két alternatíva közötti választásnak.

	Nem pénzügyi vállalatok	Háztartások	Külföld
Készpénz és betétek	14.7%	40.8%	1.6%
Nem részvény értékpapírok	2.1%	8.2%	23.2%
Tőzsdei részvények	1.1%	1.3%	15.0%
Egyéb részesedések	27.4%	28.1%	32.0%
Befektetési jegyek	0.5%	4.9%	0.0%
Biztosítástechnikai tartalékok	0.7%	15.1%	0.0%
Hitelek és egyéb követelések	53.5%	1.5%	28.1%
Összesen, Mrd Ft	17 968	15 811	26 683

Forrás: MNB.

1. táblázat. Egyes szektorok pénzügyi eszközeinek megoszlása, 2004. IV. negyedév

Hangsúlyozni kell, hogy mindhárom instrumentum esetében az árfolyamváltozásokat, nem pedig magukat az árfolyamokat elemezzük, hiszen az árfolyam-idősorok jellemzően nem stacionáriusak, az árfolyamváltozások viszont stacionerek. A stacioner árfolyamváltozások esetében a kapcsolatszorosság elemzésre megfelelő módszer a korrelációs együtthatók vizsgálata.

Fontos ugyancsak hangsúlyozni, hogy a három kockázati faktort mindhárom esetben mint befektetési eszközt tekintjük. Ezt a döntést a könnyebb interpretálhatóság indokolja: például egy pozitív korrelációs kapcsolat a részvények és kötvények árfolyamváltozása között azt jelenti, hogy várhatóan mindkét eszközosztály együtt erősödik vagy gyengül. Ha a kötvények esetében a kamatlábváltozást választottuk volna megfigyelési alapul (ami ellen persze semmilyen elméleti érv nem szólna), az együttes felértékelődést negatív korreláció jelezné, ami talán megnehezítené a könnyű interpretálhatóságot. Hasonló érv hozható fel amellett, hogy a forint euróban kifejezett árát, és nem pedig a piacon jegyzett euró forintban kifejezett árfolyamváltozásait használjuk.

A BUX index, a HUF/EUR árfolyam és a 3 éves állampapír hozamának napi záró értékeit a Bloomberg rendszerből töltöttük le. A forint és a BUX napi teljesítményét az

$$r_t = \ln P_t - \ln P_{t-1}$$

folytonos hozamképlettel számoltuk, ahol P_t a t napi záróárat jelenti. A kötvények napi teljesítményének becslésében a Campbell és Viceira (2002) által is alkalmazott közelítő képletet használtuk:

$$r_{nt} \approx y_{n,t-\Delta t}/\Delta t - D_{n,t-\Delta t} \cdot (y_{n-\Delta t,t} - y_{n,t-\Delta t}) ,$$

ahol az n futamidejű kamatláb t napi záróértéke Y_{nt}, és:

$$y_{nt} = \ln(1 + Y_{nt}) .$$

A kamatlábkockázatot kifejező átlagidő (duration) pedig a

$$D_{nt} = \frac{1 - (1 + Y_{nt})^{-n}}{1 - (1 + Y_{nt})^{-1}}$$

formulával került közelítésre. Mivel elemzésünkben csak a 3 éves állampapírhozamokkal dolgozunk, és nem becsültünk az egész hozamgörbét leíró paramétereket, a következő közelítéssel is élnünk kellett: $y_{n-\Delta t,t} \approx y_{nt}$. Más szóval: a tegnapi vagy az egy héttel ezelőtti 3 éves állampapírt ma is 3 éves kamatlábbal diszkontálunk, nem pedig 3 év mínusz egy nap vagy egy hét lejáratúval. Ezzel az egyszerűsítéssel elhagyjuk az ún. ,,roll-down" hatást[3], amely szerint az öregedő kötvényt rövidebb lejáratú kamatlábbal kellene diszkontálni. Ez, illetve a konvexitás hanyagolása okozhat ugyan kis teljesítménybecslési pontatlanságot, de nincs lényegi hatása a számított kockázatokra és korrelációkra.

[3]Mivel a magyar állampapírpiaci hozamgörbe a vizsgált időszak nagy részében invertált volt, talán helyesebb lenne ,,roll-up hatás" kifejezéssel élni.

Elemzésünket a 2001. május 7. és 2005. augusztus 31. közötti adatokkal kezdjük. Bár a BUX adatai 1991. január 3-ig, a 3 éves állampapírhozamok pedig 1997. október 10-ig rendelkezésre állnak, a szimultán elemzésben a 2001. május 4-i sávnyitás előtti forint árfolyamadatok figyelembevétele félrevezető és torzító lenne. A sávnyitás után a forint azonban, kockázatkezelési szempontból legalábbis, lebegőnek tekinthető (lásd: *1. ábra*). A forint-árfolyam mélyebb közgazdasági elemzéséről számos tanulmány olvasható (lásd például Mikolasek (1998) illetve Naszódi (2004) írásait.)

Első lépésben feltételezzük, hogy a három eszköz teljesítménye jól leírható a geometriai Brown-mozgás folyamatával, azaz a periodikus eszközhozamok $r_t = \mu dt + \sigma dw_t$ alakban írhatók le, ahol

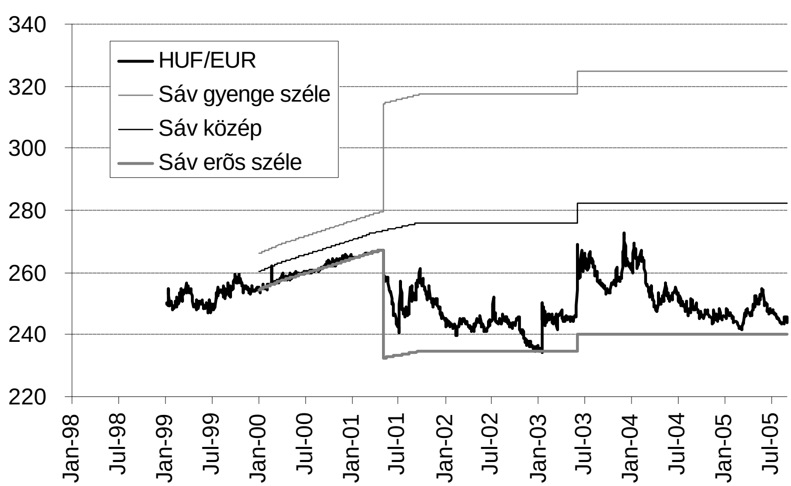
$$dw_t \sim N(0, \sqrt{dt})$$

és

$$f(r_t) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2} \det(\text{-}\ )^{1/2}} \exp\left\{\frac{1}{2}(r_t - \mu)'\text{-}\ ^{-1}(r_t - \mu)\right\}.$$

Ez a formalizáció feltételezi, hogy a t időbeli teljesítmény (árfolyamváltozás) független a $(t-1)$ vagy $(t-k)$ időbelitől. Függetlenség esetén a volatilitások az idő négyzetgyökével skálázhatók át, a korrelációk pedig függetlenek a mérési időtáv lépésközétől. Az évesített volatilitás számításához az alábbi hüvelykujj szabályokat használtuk:

- A napi volatilitást 260 négyzetgyökével,
- A heti volatilitást 52 négyzetgyökével,
- A havi volatilitást 12 négyzetgyökével szorozva jutottunk az éves volatilitás becslésére.



1. ábra. A forint/euró árfolyam és az árfolyamsáv

Napi adatsor
2001. máj. 7. – 2005.aug. 31. (1083 megfigyelés)

Korreláció	BUX	3 éves ÁP	Forint (vs. euró)
BUX	1.00	0.07	0.10
3 éves ÁP	0.07	1.00	0.12
Forint	0.10	0.12	1.00
Volatilitás	20.2%	5.6%	8.5%

Heti adatsor
2001. máj. 11. – 2005. aug. 26. (225 megfigyelés)

Korreláció	BUX	3 éves ÁP	Forint (vs. euró)
BUX	1.00	0.20	0.14
3 éves ÁP	0.20	1.00	0.52
Forint	0.14	0.52	1.00
Volatilitás	19.8%	5.3%	7.2%

Havi adatsor
2001. jún. 30. – 2005. aug. 31. (51 megfigyelés)

Korreláció	BUX	3 éves ÁP	Forint (vs. euró)
BUX	1.00	0.39	0.42
3 éves ÁP	0.39	1.00	0.60
Forint	0.42	0.60	1.00
Volatilitás	20.5%	6.4%	6.2%

2. táblázat. Korreláció és volatilitás adatok

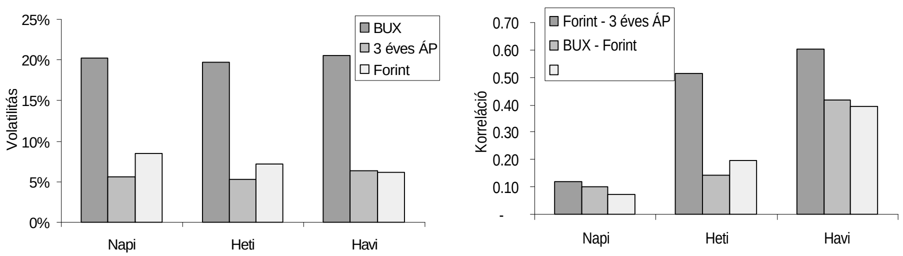
Ezen hüvelykujj szabályokat alkalmazva számítottuk ki a 3 eszközosztály évesített volatilitását illetve korrelációs együtthatóit napi, heti és havi megfigyelések alapján. Az alábbiakban közölt eredmények máris rávilágítanak a kovariancia-mátrix becslés egy lehetséges problémájára: még ha ugyanazt a nagyjából 4 éves megfigyelési időszakot is alkalmazzuk, becslési eredményeink jelentős mértékben függhetnek a napi, heti, havi vagy egyéb lépésköz választásától.

A táblázatokat illetve az 1. ábrát összehasonlítva két fontos megfigyelést kell kiemelnünk:

- A forint kockázata (volatilitása) az időhorizont növekedésével csökken, míg az állampapír-befektetések kockázata az időhorizont havi hosszúságúra növekedésével növekszik.

- Még drámaibb a mért korrelációs együtthatók összehasonlítása: az eszközosztályok közötti korrelációk az időhorizont tágulásával drasztikusan növekszik (a forint és az állampapír esetében például 0.12-ről 0.60-ra, ha a napi adatok helyett havi adatokkal számolunk).

Az optimális portfólióallokáció illetve a kockázatkezelés szempontjából egyaránt kritikus diverzifikáció kapcsán nem kérdőjelezhető meg ennek az észrevételnek a relevanciája: ha a releváns időhorizont 1 hónap, rendkívül félrevezető lehet a napi adatokból számított korrelációs együtthatók használata — ha egyúttal azt is feltételezzük, hogy az egymást követő árfolyamváltozások egymástól időben függetlenek.



2. ábra. A volatilitások és korrelációk ,,lejárati szerkezete”

Bár a korrelációk és a volatilitások változása önmagában is látványosnak mondható, gyakorlati szempontból kérdéses, hogy milyen hatással lehet mindez egy adott portfólió kockázatára. A *3. táblázat* néhány, önkényesen kiválasztott portfólió évesített kockázatát (volatilitását) mutatja napi, heti illetve havi időtávon. A *2. ábrán* láthattuk, hogy a forint árfolyamkockázata hosszabb időtávon mérséklődik, miközben az állampapír-befektetések kockázata növekszik. Ezek alapján nem meglepő, hogy a táblázat utolsó sorában mutatott 80% állampapír: 20% részvény kombináció forintban mért kockázata jelentős mértékben —23%-kal— növekszik, ha a mérési időtávon napiról havira tágítjuk. Más szóval, amennyiben a releváns időtáv 1 hónap, viszont a portfólió szórását napi adatokból számolt kovariancia mátrix alapján becsüljük, kb. 19%-kal becsüljük alá a portfólió valódi volatiltiását.

Minta portfóliók	Napi	Heti	Havi	Havi/Napi
50% BUX : 50% ÁP (Forintban)	10.7%	10.7%	11.9%	1.11
50% BUX : 50% ÁP (Euróban)	14.4%	14.4%	16.0%	1.11
20% BUX : 80% ÁP (Forintban)	6.3%	6.4%	7.7%	1.23

3. táblázat. Mintaportfólió kockázatok

Ez a megfigyelés több kérdést is felvet:

1. Más országok piacain is megfigyelhető-e hasonló jelenség?
2. Valóban szükséges-e, hogy elemzésünket a 2001. május 5. – 2005. augusztus 31. közötti időszakra szorítsuk, ha némely adatsorokból (pl. BUX) lényegesen hosszabb adatsor is rendelkezésre áll?
3. Mi okozza, illetve mivel mérhető és modellezhető a megfigyelt változás a volatilitások és korrelációk lejárati struktúrájában?

Kezdjük a kérdések megválaszolását az első kérdéssel: bár eltérő mértékben, de számos piacon tapasztalható, hogy az egymást követő hozamok nem teljesen függetlenek egymástól illetve más eszközök időben korábbi hozamától. Azonos —közel 4 éves időszakot tekintve— például az S&P 500 illetve az 5 éves lejáratú állampapír napi hozamváltozása napi szinten 0.3584, havi szinten pedig 0.5564 korrelációs értéket mutatott. A cikk terjedelmére hivatkozva a vizsgálatot ebbe az irányba nem tágítom, hiszen rengeteg eszközosztály és ország piaca lehetne érdekes további összehasonlításra.

A második kérdés láttán gyakorlati kockázatkezelők azt mondhatják, hogy 4 évre visszamenő napi adatsor máris elég hosszúnak tűnhet, és a napi kockázatmérésben használatosabb GARCH jellegű modellek érzékelhető módon ennél lényegében még rövidebb időszakot vesznek csak figyelembe. Más esetben —például hosszú távú, több éves stratégia felállításakor— mégis szükséges vagy legalábbis releváns lehet hosszabb időtáv figyelembe vétele. Nem azonos hosszúságú idősorok elemzésére kínál megoldást Stambaugh (1997) módszere —tárgyalását lásd még például De Santis et al. (2003) írásában— amely segítségével felépíthető egy kovariancia mátrix, amely teljes hosszúságban veszi figyelembe a hosszabb múltra rendelkezésre álló adatsorainkat, miközben a pozitív definitség kritériumát teljesítő módon illeszti be a rövidebb időszakra rendelkezésre álló adatsorok volatilitásait, illetve a más adatsorokkal szembeni korrelációit. Az eljárás menete —De Santis et al. írását követve— a következőképpen foglalható össze, ha két, m illetve n megfigyelésből álló $(m > n)$ X és Y adatsor csoportra kívánjuk a kovariancia mátrixot megbecsülni:

1. Becsüljük meg az adatsorok közös metszetének kovariancia mátrixait, n megfigyelés alapján: $\sigma^2_{XX,n}$, $\sigma^2_{XY,n}$ illetve $\sigma^2_{YY,n}$.

2. Végezzünk becslést a rövidebb adatsornak a hosszabb idősorra vonatkozó regressziójára n megfigyelés alapján: $\beta_{YX,n} = (X'X)^{-1}(X'Y)$.

3. Végezzük el csak a hosszabb adatsor $\sigma^2_{XX,m}$ kovariancia mátrixának becslését m adat alapján.

4. Vessük össze a hosszabb adatsor m illetve n adat alapján becsült kovariancia értékeit: amennyiben valamely, az m adat alapján becsült kovariancia és az n adat alapján becsült érték $\sigma^2_{XX,m} - \sigma^2_{XX,n}$ különbsége pozitív, minden más körülményt azonosnak tekintve[4] azt mondhatjuk, hogy a rövidebb minta alulbecsli a feltehetően precízebb, hosszú minta alapján számított értéket.

5. A regressziós becslések és a 4. pontban számított különbségek segítségével korrigáljuk a rövidebb időszak alapján az Y adatsorra becsült kovarianciákat:

   – A közös kovariancia mátrix X adatokra vonatkozó része: $\sigma^2_{XX} = \sigma^2_{XX,m}$;

[4]Fontos feltétel. Ha ugyanis a hosszú minta minőségileg más jellegű történeti szakaszokat takar, nem feltétlenül van értelme kinyújtani a megfigyelési időszakot. Mi is így tettünk például a forint-euró árfolyam esetében, amely technikailag rendelkezésre áll ugyan 1999-ig visszamenőleg, mégis csak a 2001-es sávnyitás utáni időszakot vettük tekintetbe.

– A közös kovariancia mátrix X és Y adatok kovarianciáit tartalmazó része: $\sigma^2_{XY} = \sigma^2_{XY,n} - \beta'_{YX,n}\left[\sigma^2_{XX,m} - \sigma^2_{XX,n}\right]$;
– A közös kovariancia mátrix Y adatokra vonatkozó része: $\sigma^2_{YY} = \sigma^2_{YY,n} - \beta'_{YX,n}\left[\sigma^2_{XX,m} - \sigma^2_{XX,n}\right]\beta_{YX,n}$.

A *4. táblázat* mutatja a napi adatsorok alapján becsült korrelációk és volatilitások adatait, amennyiben mindhárom kockázati faktor rendelkezésre álló adatait figyelembe kívánjuk venni:

Korreláció	BUX	3 éves ÁP	Forint (vs. euró)
BUX	1.00	0.18	0.14
3 éves ÁP	0.18	1.00	0.14
Forint	0.14	0.14	1.00
Volatilitás	26.4%	6.1%	8.5%

BUX: 1991. jan. 3. – 2005. aug. 31. (3660 megfigyelés)
ÁP: 1997. okt. 10. – 2005. aug. 31. (1969 megfigyelés)
Forint: 2001. máj. 7. – 2005. aug. 31. (1083 megfigyelés)

4. táblázat. Korreláció- és volatilitásbecslés eltérő hosszúságú idősorok alapján

A hosszú időszakra becsült korrelációs együtthatók némiképp magasabbak a 4 éves adatsor alapján becsült értékeknél, és a BUX illetve az állampapír volatilitása is magasabb a rövidebb idősor értékeihez képest — ennél lényegesen szembetűnőbb eltérést nem találni, és markánsabb következtetések sem vonhatók le. A harmadik kérdésre pedig a következő pontban keressük a választ.

3 Kovariancia mátrix az időbeli függetlenség feloldása mellett

A volatilitások az időskála mentén azzal a feltételezéssel skálázhatók át az idő négyzetgyökével, hogy az egymást követő időszaki hozamok függetlenek egymástól, illetve még pontosabban fogalmazva: nem mutatnak nullától eltérő autokorrelációt. Abban az esetben, ha például az első rendű autókorreláció ρ értékű, a k-időszakra számított volatilitás kiszámításakor ezt az autokorrelációt is figyelembe kellene, hogy vegyük:

$$\sigma(r_t + \ldots + r_{t-k}) = \left((k+1)\sigma^2 + 2\sum_{i=1}^{k}\sigma^2\rho^i(k-i+1)\right)^{1/2}.$$

Ha magasabb rendű autokorrelációk figyelembevételét is indokoltnak tartjuk, az iménti képlet természetesen a további késleltetéseknek megfelelően módosul.

Mivel azonban vizsgálatunkat 3 kockázati faktorra együttesen végezzük, az autokorrelációk mellett szükséges annak figyelembevétele is, hogy a különböző eszközök miként hatnak egymásra az idő múlásával: például egy tegnapi zuhanás a részvénypiacon magyaráz-e valamit a forint devizaárfolyamának mai alakulásából. Stratégiai eszközallokációs elemzések készítéséhez Campbell és Viceira (2002) vektor-autoregresszív (VAR) rendszer felépítését javasolja, amelynek segítségével —egyebek között— a volatilitások és korrelációk lejárati szerkezete is modellezhető. Tanulmányunkban a VAR(1) becslésére és interpretációjára szorítkozunk. Ennek az első látásra ugyancsak önkényesnek tűnő választásnak az oka, hogy feltételezhető, hogy a piaci szereplőknek szükségük lehet egy rövidebb, egy napos átfutási időre ahhoz, hogy megfelelően reagáljanak bizonyos piaci eseményekre, illetve például a t-ik napon likvidált eszközeikből származó forint ellenértéket másnap konvertálják euróra. Megjegyzendő, hogy nemzetközi összehasonlításban az időeltolódás önmagában is okozhat VAR(1)-gyel mérhető hatást: például a BUX és az S&P 500 együttes viselkedéséről a VAR(1) sokkalta árnyaltabb képet nyújthat, mintha kizárnánk az előző napi (Magyarországon már éjszakának számító) amerikai piaci hatásokat a BUX modellezéséből.

A VAR(1) alakú modellünk tehát a következő:

$$y_t = v + Ay_{t-1} + u_t \qquad \text{ahol} \quad u_t \sim N(0, \Sigma)\,.$$

A VAR modellek rendkívül mély tárgyalása olvasható például Hamilton (1994) könyvében, és Campbell és Viceira (2004) ugyancsak külön technikai papírt szentel a VAR modellek portfóliókezelésben történő alkalmazásaira, így a jelen pontban továbbiakban tárgyalt formulák kapcsán erre a papírra hivatkozunk. A VAR(1) idősorok feltétel nélküli várható értéke

$$Y = (I - A)^{-1} \cdot v$$

alakban fejezhető ki, a feltétel nélküli kovariancia mátrixa pedig

$$\text{vec}(\Sigma_y) = (I_{m^2} - A \quad A)^{-1}\text{vec}(\Sigma_u)\,, \qquad \text{ahol} \quad u_t \sim N(0, \Sigma)$$

formában adható meg. Tanulmányunk szempontjából különösen fontos még, hogy a VAR(1) modell paramétereivel kifejezhető a k perióduson keresztül aggregált hozamok feltételes kovariancia mátrixa az alábbi iteráció szerint:

$$\begin{aligned} \sigma_t^2(y_{t+1} + \ldots + y_{t+k}) = \Sigma + (I + A)\Sigma(I + A)' + \\ + (I + A + AA)\Sigma(I + A + AA)' + \ldots + \\ + (I + A + \ldots + A^{k-1})\Sigma(I + A + \ldots + A^{k-1})'\,. \end{aligned}$$

A tanulmány elején tárgyalt jelenség, a volatilitások és korrelációk lejárati struktúrájának modellezésére VAR(1) becslést végeztünk: becslési eredményeinket az *5. táblázat* foglalja össze (zárójelben a paraméterek t-statisztikái olvashatóak):

Napi adatsor: 2001. máj. 7. – 2005. aug. 31. (1083 megfigyelés)

	BUX	3 éves ÁP	Forint (vs. euró)
Konstans	0.0010 (2.64)	0.0003 (3.06)	0.0000 (0.01)
BUX $(t-1)$	-0.0232 (-0.76)	0.0009 (0.11)	0.0121 (0.95)
3 éves ÁP $(t-1)$	0.1427 (1.29)	-0.0307 (-1.08)	0.1553 (3.39)
Forint $(t-1)$	0.0499 (0.68)	0.2537 (13.41)	-0.0892 (-2.92)

A VAR rendszer R^2-értéke: 0.0025.

Korreláció	BUX	3 éves ÁP	Forint (vs. euró)
BUX	1.00	0.07	0.10
3 éves ÁP	0.07	1.00	0.16
Forint	0.10	0.16	1.00
Volatilitás	20.2%	5.2%	8.4%

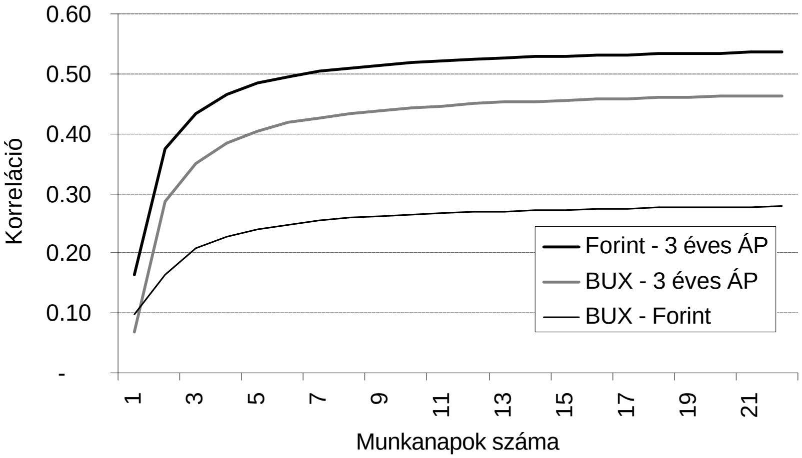
5. táblázat. Vektor-autoregresszív paraméterek

A becsült VAR együtthatók és t-statisztikáik alapján figyelemre méltó, hogy az állampapír t-ik napi teljesítményében a forint előző napi alakulása, a forint t-ik napi teljesítményében pedig az állampapír és a forint egyaránt szignifikánsnak bizonyult az elmúlt 4 év adatai alapján. Tanulmányunk mindössze a tapasztalati jelenségek feltárására és azok kockázatkezelési vetületeire szorítkozik, így nem célunk, hogy ezen csatornák mélyebb közgazdasági értelmezését adjuk.

Tekintsük tehát, hogy az imént bemutatott formula alkalmazásával a VAR(1)-rendszer alapján milyen korrelációs struktúrát becsülhetünk. A *6. táblázat* alapján látható, hogy a napi korrelációkhoz képest a VAR(1) paraméterekkel számított korrelációk lényegesen jobban közelítik a tapasztalati korrelációkat, bár a BUX-állampapír esetében felülbecslik, a másik két esetben alulbecslik azokat. A *3. ábra* a korrelációk becsült lejárati struktúráját illusztrálja.

Volatilitás	BUX– 3 éves ÁP	BUX–Forint	Forint–ÁP
Napi	0.07	0.10	0.12
Havi, valós	0.39	0.42	0.60
Havi, VAR alapján becsült	0.46	0.28	0.54

6. táblázat. VAR(1) rendszer alapján számított korrelációk



3. ábra. VAR(1) alapján becsült korrelációk

A volatilitások hasonlóképpen származtathatók a VAR(1) együtthatók segítségével: az állampapír esetében a VAR(1) rendszer a bolyongáshoz képest közelebbi havi volatilitás értéket ad meg, azonban a BUX esetén alulbecsli, a forint esetén pedig túlbecsli a volatilitást. A VAR modell további késleltetett időszakokra történő kiterjesztésével valószínűleg tudnánk finomítani a becslési eredményeket, de a gyakorlatban azon modellek használata meglehetősen nehézkes lenne, és túl sok késleltetett időszak számbavétele közgazdasági szempontból is egyre nehezebben lenne indokolható.

Volatilitás	BUX	3 éves ÁP	Forint (vs. euró)
Napi	20.2%	5.6%	8.5%
Havi, valós	20.5%	6.4%	6.2%
Havi, VAR alapján becsült	19.9%	6.9%	8.5%

7. táblázat. VAR rendszer alapján számított volatilitások

A becsült és a tapasztalati adatok összehasonlítása után a VAR(1) rendszert alapvetően a korrelációk leírásában találtuk hatékony módszernek, a volatilitások esetén —legalábbis napi-havi összevetésben— kevésbé találtuk magyarázó erejűnek a modellt.

Miközben a tapasztalati korrelációk napi-havi összevetésben drasztikus emelkedésének magyarázatában a VAR modellt lényegesen jobbnak találtuk a bolyongás modelljéhez képest, automatikusan felvetődhet a kérdés, hogy ezzel együtt automatikusan levonható-e valamilyen következtetés a hazai tőkepiac hatékonyságára vonatkozóan. Bár ez rendkívül érdekes kérdés kutatási szempontból, nem vállalkozunk ennek a kérdésnek a megválaszolására ebben a tanulmányban. Ugyanakkor feltétlenül hivatkoznunk kell Ross (2005) *Hatékony piacok* című tanulmányára, amelyben a szerző részletesen tárgyalja a piaci hatékonyság tesztelésének kvantitatív módszereit, és azok számos, az eszközárazás elmélete által támasztott problémáit. Meg kell említeni, hogy Ross a napi szintű adatok elemzésekor 0.25% körüli, heti szinten 0.19% körüli R^2 értéket tekint egyfajta határértéknek a hatékonyság elfogadására illetve elvetésére, így tehát a tanulmányunkban bemutatott volatilitás és korrelációs struktúrák jelensége —amelyre ő maga is utalást tesz— nem interpretálható úgy, mint a piaci hatékonyság hipotézisének automatikus elvetése.

4 Jó idők, rossz napok: rezsimváltó modellek

Az eddig tapasztalatok arra világítanak rá, hogy a hazai pénzügyi piaci kockázati faktorok heti és havi időtávon jóval szorosabb együttmozgást produkálnak, mint azt a napi eszközhozamok alapján sejteni lehetne. Ennek gyakorlati relevanciája a portfólió kockázat idő négyzetgyökével történő arányosíthatóságát érinti. Ugyanakkor az eddigi vizsgálatok során feltételeztük, hogy a vizsgált időszakban az egyes eszközök homogén viselkedést mutattak, azaz volatilitásuk, átlaghozamuk, illetve az eszközök közötti korrelációk időben lényegében változatlanok. A gyakorlatban ugyanakkor a piacon megfigyelhetők emelkedő (hausse) és gyengülő (baisse) piacok, nyugodt és hektikus periódusok, és ezek a kvalitatív ismérvek is jelzik, hogy feltétel nélküli átlagok és kovarianciák meglehetősen összemosott képet adnak a múltról. Rezsimváltó modellek segítségével azonban szétválaszthatók a megfigyelt idősorok homogén részei egymástól, és árnyaltabb képet kaphatunk arról, hogy miként változnak az átlagos hozamok, volatilitások és korrelációk egymástól jól elkülöníthető jellegű időszakokban.

A rezsimváltó modellek először főleg makrogazdasági folyamatok elemzésében váltak népszerűvé (lásd Hamilton (1989 és 1990) írásait), de a módszertan a piaci folyamatok elemzésére is kiválóan alkalmazható. Rezsimváltó modellek átfogó leírását olvashatjuk többek között Hamilton (1994), Kim et al. (1999) illetve Krolzig (1997) műveiben. Hazai vonatkozású alkalmazásaként megemlíthető Darvas (2001) tanulmánya, aki az állampapírhozamok változékonyságát és a monetáris politika hitelességét elemzi, továbbá Kóbor és Székely (2004) a régióbeli devizák együttes mozgását vizsgálják rezsimváltó modellek alkalmazásával.

Amennyiben a piaci hozamok és faktorváltozások időben egymástól függetlenek, a geometriai Brown-mozgás modellje 2 rezsim esetén az alábbi modellel írható le:

$$r_t = \begin{cases} \mu_1 dt + \sigma_1 dw_t & \mid s_t = 1 \\ \mu_2 dt + \sigma_2 dw_t & \mid s_t = 2 \end{cases}$$

ahol

$$f(r_t \mid s_t = i) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2} \det(\text{-}\ )^{1/2}} \exp\left\{ \frac{1}{2} (r_t - \mu_i)' \text{-}\ ^{-1} (r_t - \mu_i) \right\} ,$$

és az első illetve a második rezsim állapotvalószínűsége a $P(s_t = 1)$ illetve $P(s_t = 2) = 1 - P(s_t = 1)$ paraméterekkel adható meg, továbbá s_t a t-

edik időszakbeli rezszim indexe. Az állapotvalószínűség mellett szükséges a rezszimváltás, azaz a rezszimek közötti átmenet-valószínűségek megadása is. A rezszimváltásra vonatkozóan általános feltételezés, hogy Markov-lánc tulajdonságot mutat, azaz $(t-1)$-edik időszakból a t-edik időszakba való átmenet valószínűsége csakis attól függ, hogy melyik rezszimben vagyunk a $(t-1)$-edik időszakban:

$$P\{s_t = j \mid s_{t-1} = i, s_{t-2} = k, \ldots\} = P\{s_t = j \mid s_{t-1} = i\} = P_{ij} \; .$$

Az átmenetvalószínűségek az alábbiak szerint foglalhatók össze két rezszim esetén:

$$\begin{aligned}
P(s_t = 1 \mid s_{t-1} = 1) &= P_{11} \\
P(s_t = 2 \mid s_{t-1} = 1) &= P_{12} = 1 - P_{11} \\
P(s_t = 1 \mid s_{t-1} = 2) &= P_{21} = 1 - P_{22} \\
P(s_t = 2 \mid s_{t-1} = 2) &= P_{22} \; ,
\end{aligned}$$

illetve mátrix formában leírva:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} P_{11} & 1 - P_{22} \\ 1 - P_{11} & P_{22} \end{pmatrix} .$$

Az átmenetvalószínűségek ismeretében két rezszim esetén az alábbi egyszerű alakban következtethetünk az állapotvalószínűségekre:

$$P(s_t = 1) = \frac{1 - P_{22}}{2 - P_{11} - P_{22}} , \qquad \text{illetve} \quad P(s_t = 2) = \frac{1 - P_{11}}{2 - P_{11} - P_{22}} .$$

Amint tanulmányunk korábbi részében kiderült, a magyar tőkepiaci eszközök viselkedése nem írható le teljesen az egyszerű bolyongás modelljével, hanem —főleg kockázatkezelési szempontból— számolnunk kell a különböző eszközök autokorrelációjával, illetve az egymásra gyakorolt hatásaival az egymást követő napok során. Hasonlóan a bolyongás modelljéhez, a VAR(1) modell is kiterjeszthető rezszimváltó formában:

$$y_t = \begin{cases} v_1 + A_1 y_{t-1} + u_t & \mid s_t = 1 \\ v_2 + A_2 y_{t-1} + u_t & \mid s_t = 2, \end{cases}$$

ahol

$$u_t \mid s_t = i \sim N(0, \Sigma) \; .$$

A rezszimváltó VAR modellek egyszerre teljesítenek potenciálisan két olyan tulajdonságot is, amelyekkel empirikus elemzéseink során gyakran szembesülünk, és a hagyományos geometriai Brown-mozgással nem elemezhetünk: leírhatók velük vastagszélű (feltételesen normális) eloszlások, és időben nem autokorrelálatlanok, azaz a volatilitások és korrelációk lejárati struktúrája potenciálisan jobban közelíthető. Mindezek portfóliókezelési és kockázatelemzési szempontból fontos tulajdonságnak tekinthetők. A rezszimváltó VAR modellekről részletesen Krolzig (1997) munkájában olvashatunk.

Rezsimváltó modellek becslési eljárásairól Diebold et al. (1994), Gray (1996) illetve Kim et al. (1999) munkáiban olvashatunk részletesen. Tanulmányunkban az úgynevezett *Expectation-Maximization* iteratív technikát alkalmaztuk, amely a numerikus *maximum likelihood* eljárásnál lényegesen stabilabb. Becslési kódunkat a Kim et al. (1999) könyve 4-ik fejezetében leírt lépések szerint készítettük, de rendkívül hasonló eredményeket kaphatunk Krolzig Ox nyelven írt programjával.[5]

Tanulmányunk hátralevő részében az alábbi kérdéseket vizsgáljuk:

1. A nemzetközi tőkepiacokon megfigyelhető az a jelenség, miszerint hektikusabb időszakokban illetve baisse piacon a kockázatos és biztonságos szektorok közötti korrelációs kapcsolat szorossága jelentős mértékben csökken, azaz a tőke a kockázatos eszközökből a biztonságos állampapírokba menekül („flight to quality"). Ezt a jelenséget vizsgáljuk meg a hazai piacra leszűkítve: volatilis időszakban betöltenek-e a magyar állampapírok hasonló szerepet a hazai részvényekkel szemben?

2. Miként árnyalható rezsimváltó modellek segítségével az meglehetősen eltérő viselkedés a magyar piacon, amelyet rövid (napi), illetve valamivel hosszabb (heti vagy havi) időtávon tapasztalhattunk.

4.1 Változó korreláció az állampapírok és a kockázatos szektorok között

Az első alkalmazás során a kockázatos befektetéseket képviselő részvények, és a hitelkockázat szempontjából kockázatmentes, piaci kockázat tekintetében pedig a részvényekhez képest mindenképpen biztonságosabb állampapírok együttes viselkedését vizsgáljuk. Közismert jelenség, hogy stresszes időszakban a két eszköz közötti korreláció átmenetileg negatívvá válik, jelezve, hogy a befektető a kockázatos szektorok irányából a biztonságosabb eszközök irányába menekülnek. A jelenséget az amerikai piacon az S&P 500 index és az 5 éves amerikai állampapír 1991. január 2. – 2005. augusztus 31. közötti napi adatsora alapján illusztráljuk a rezsimváltó modellek segítségével.

A *8. táblázat* összegzi a becslési eredményeket 2 rezsim és feltételes bolyongás feltételezése (azaz VAR hatás kizárása) mellett. A becslési eredmények szerint a részvények és kötvények teljesítményének eloszlása árnyaltabban leírható két feltételes normális eloszlás együttesével, semmint egyetlen feltétel nélküli eloszlással. A két rezsim az alábbiak szerint jellemezhető:

1. Az első rezsimben a részvények alacsony, zéró alatti átlag teljesítménnyel jellemezhetők, miközben az állampapírok a második rezsimhez képest jobban teljesítettek.

[5] Az Oxban írt és futtatható programok letölthetők a http://www.economics.ox.ac.uk/research/hendry/krolzig/index.html?content=/research/hendry/krolzig/msvar.html honlapról.

2. Az eszközök volatilitása az első rezsimben magasabb a második rezsimben mért értékekhez képest. A részvények esetében a volatilitás megugrása drasztikus: a második rezsimben tapasztalt volatilitás több mint kétszeresét mérhetjük.

3. A részvények és kötvények korrelációja ugyancsak jelentős változást mutat a két rezsim között: a második, alacsonyabb volatilitású rezsimben a korrelációs együttható pozitív, 0.36 közeli érték, ezzel szemben az első, magasabb volatilitású stresszes rezsimben a korrelációs együttható negatívvá, -0.40 közeli értékké válik. Ez a korrelációváltozás valóban drasztikus, és a mindeddig leírtak szerint összhangban van a ,,flight to quality" jelenséggel.

4. Az elmúlt közel másfél évtized során 34.48% valószínűséggel figyelhettünk meg az első rezsimhez sorolható napokat, míg a nyugodtabb, második rezsim valószínűsége 65.52%-ra becsülhető a vizsgált periódusban. A második rezsim némileg perzisztensebbnek is mutatkozott: amennyiben második rezsimhez sorolható napot figyeltünk meg, 98.73% valószínűséggel ugyancsak a második rezsimhez illeszthető nap következett, míg az első rezsimhez tartozó napot 97.58%-kal követett ugyancsak első rezsimhez sorolható nap. Elöljáróban megjegyezzük, hogy a magyar piac adatait vizsgálva ennél lényegesen alacsonyabb perzisztenciát találunk, különösképpen a magasabb volatilitású rezsim tekintetében.

Átmenet- és állapotvalószínűségek

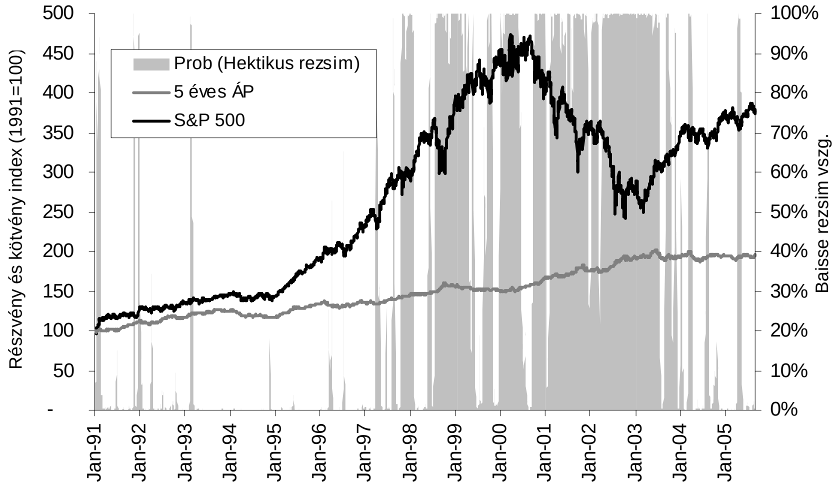
Rezsimbe / *Rezsimből*	Rezsim 1	Rezsim 2
Rezsim 1	97.58%	2.42%
Rezsim 2	1.27%	98.73%
Állapotvalószínűség	34.48%	65.52%

Átlag és volatilitás

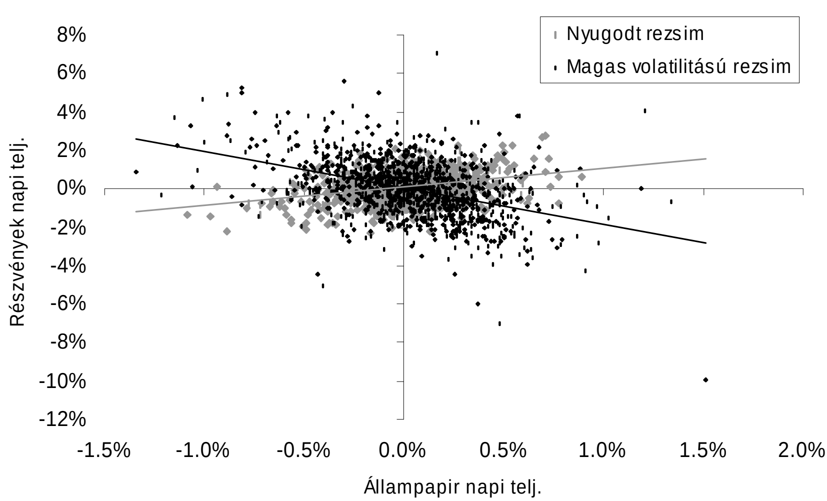
	Részvény	Állampapír
Átlag 1	-0.01%	0.03%
Átlag 2	0.06%	0.01%
Volatilitás 1	1.48%	0.32%
Volatilitás 2	0.67%	0.26%
Korreláció 1	-0.3954	
Korreláció 2	0.3583	

8. táblázat. Rezsimváltó modell paraméterek: amerikai részvény és állampapír

A *4. ábra* az S&P 500 indexbe és az amerikai állampapírba történő befektetés értékének időbeli alakulását, illetve a napi megfigyelések alapján a magasabb volatilitású rezsimre adott valószínűségbecsléseinket mutatja. Az egyszerűbb láthatóság kedvéért napi hozamok helyett tehát a befektetések értékét reprezentáló indexeket mutatunk, de a becslés természetesen a napi hozamok alapján történt. Az *5. ábra* a feltételes korreláció viselkedését illusztrálja: a szürke pontok a nyugodtabb, második rezsimhez sorolható napok során mért napi részvény és kötvény hozamokat, a fekete pontok pedig a magasabb volatilitású rezsimben mért napi hozamokat ábrázolják.



4. ábra. Rezsimvalószínűségek az amerikai piacon



5. ábra. Állampapír-részvény korreláció nyugodt és hektikus időben

A vizsgálatot megismételtük a magyar piacra is: az elemzés során a BUX és 3 éves állampapír adatait vizsgáltuk az 1997. október 11. – 2005. augusztus 31. közötti időszakban. Becslési eredményeinket a *9. táblázatban* foglaltuk össze, és az amerikai példához hasonlóan az első rezsim interpretálható magas volatilitású stresszes rezsimként. Azonban e hasonlóság mellett számos különbség is tapasztalható:

1. A részvény-kötvény korreláció 0.11-ről 0.23-ra növekedett a magasabb volatilitású rezsimben, amely éppen ellentétes az amerikai példában tapasztalt csökkenő iránnyal. A *„filght to quality”* hatás tehát nem tapasztalható a hazai piacon.

2. A volatilitások változékonysága nagyobb intenzitást mutat: a részvények volatilitása közel 3-szorosára, az állampapír volatilitás pedig egyenesen 5-szörösére emelkedett. Bár tapasztalhattunk enyhe volatilitás emelkedést az amerikai állampapír-piacon is, távolról sem beszélhettünk ott ilyen arányról.

3. A magas volatilitású rezsim lényegesen alacsonyabb perzisztenciával jellemezhető: viszonylag alacsonyabb, 66.3% valószínűsége volt annak, hogy egy hektikus napot egy újabb hektikus nap fog követni.

Hasonlóképpen a 4. ábrához, a *6. ábra* a BUX indexbe és a 3 éves állampapírba történő befektetés értékét, illetve a napi megfigyelések alapján a magasabb volatilitású rezsimre adott valószínűségbecsléseinket mutatja.

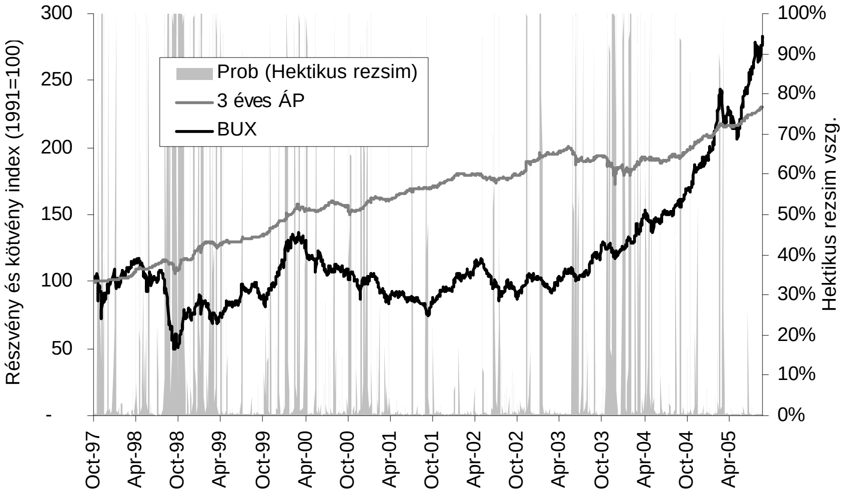
Átmenet- és állapotvalószínűségek

Rezsimbe / *Rezsimből*	Rezsim 1	Rezsim 2
Rezsim 1	66.30%	33.70%
Rezsim 2	5.84%	94.16%
Állapotvalószínűség	14.77%	85.23%

Átlag és volatilitás

	Részvény	Állampapír
Átlag 1	-0.38%	0.02%
Átlag 2	0.13%	0.05%
Volatilitás 1	3.77%	0.82%
Volatilitás 2	1.32%	0.17%
Korreláció 1	0.2303	
Korreláció 2	0.1106	

9. táblázat. Rezsimváltó modell paraméterek: részvény és állampapír a magyar piacon



6. ábra. Rezsimvalószínűségek a magyar piacon: állampapír és részvény, napi adatok alapján

4.2 Feltételes volatilitások és korrelációk eltérő időtávon

Végezetül tekintsük a részvények, kötvények és a forint együttes viselkedését a BUX, EUR/HUF és a 3 éves állampapír 2001. május 7. – 2005. augusztus 31. közötti napi és heti adatai alapján. A *10. táblázatban* bemutatott becslési eredmények szerint ismét elkülöníthetünk egy negatív várható hozamú, magas volatilitású rezsimet, illetve egy pozitív hozamokat és alacsonyabb volatilitást mutató rezsimet. Minthogy a vizsgált időszak rövidebb, ugyanakkor a részvényindex és az állampapír mellett a forint árfolyam is a becslési adatbázis része, a becsült paraméterek számszakilag eltérnek az előbbi elemzésben tárgyaltaktól. E háromdimenziós esetben a legnagyobb volatilitás-ugrást a devizaárfolyam produkálja: a BUX és az állampapír volatilitása kb. másfélszeresre, a forint volatilitása viszont több mint három és félszeres értékre ugrik a hektikusabb rezsimben.

Átmenet- és állapotvalószínűségek

Rezsimbe / *Rezsimből*	Rezsim 1	Rezsim 2
Rezsim 1	66.63%	33.37%
Rezsim 2	5.63%	94.37%
Állapotvalószínűség	14.44%	85.56%

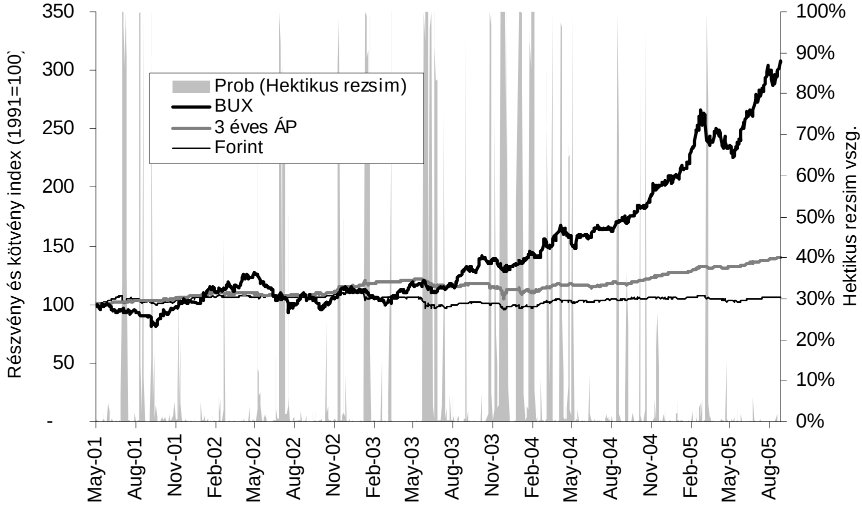
Átlag és volatilitás

	Részvény	Állampapír	Forint
Átlag 1	-0.12%	-0.06%	-0.13%
Átlag 2	0.15%	0.03%	0.03%
Volatilitás 1	1.83%	0.45%	1.13%
Volatilitás 2	1.13%	0.30%	0.31%

Korreláció

	Részvény	Állampapír	Forint
Részvény	1.0000		
Állampapír	-0.2429	1.0000	
Forint	0.1061	-0.0158	1.0000
Részvény	1.0000		
Állampapír	-0.2085	1.0000	
Forint	0.1215	-0.0342	1.0000

10. táblázat. Rezsimváltó modell paraméterek: részvény, állampapír és deviza, napi adatok alapján



7. ábra. Rezsimvalószínűségek a magyar piacon: állampapír, részvény és deviza, napi adatok alapján

Hasonlítsuk most össze a 3 eszközcsoport azonos időszakra, de heti hozamai alapján számított becsléseinket a *11. táblázat* illetve a *8. ábra* alapján. Az átlagteljesítmények továbbra is negatívak az első rezsimben, és pozitívak a második rezsimben. Az állampapírok és devizák volatilitása az első rezsimben lényegesen magasabb (2.24-szeres illetve 3.60-szoros a második rezsimhez viszonyítva), ugyanakkor a részvények volatilitása enyhébbnek mutatkozik első rezsimben. A rezsimek tekintetében tehát alapvetően az állampapír és a devizaárfolyam volatilitása tűnik a fő meghatározó tényezőnek. Az idegesebb forintárfolyam és az emelkedett kötvényvolatilitás időszaka egyúttal a kötvény-részvény korrelációk jelentős megemelkedésével is egybeesik: a perzisztensebb második rezsimben mért 0.16-os heti korreláció az első, kevésbé perzisztens rezsimben 0.49 körüli értékre ugrik.

Átmenet- és állapotvalószínűségek

Rezsimbe / *Rezsimből*	Rezsim 1	Rezsim 2
Rezsim 1	61.41%	38.59%
Rezsim 2	4.67%	95.33%
Állapotvalószínűség	10.80%	89.20%

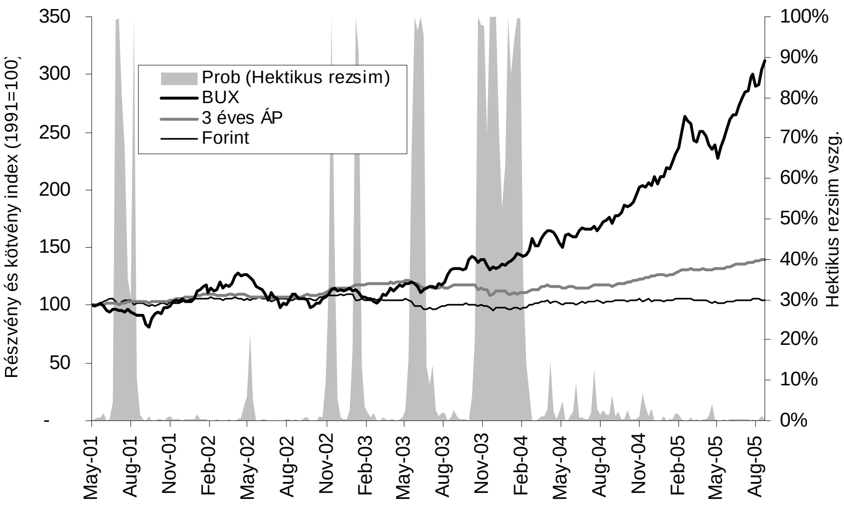
Átlag és volatilitás

	Részvény	Állampapír	Forint
Átlag 1	-0.23%	-0.32%	-0.84%
Átlag 2	0.64%	0.20%	0.11%
Volatilitás 1	2.08%	1.69%	1.75%
Volatilitás 2	2.80%	0.47%	0.78%

Korreláció

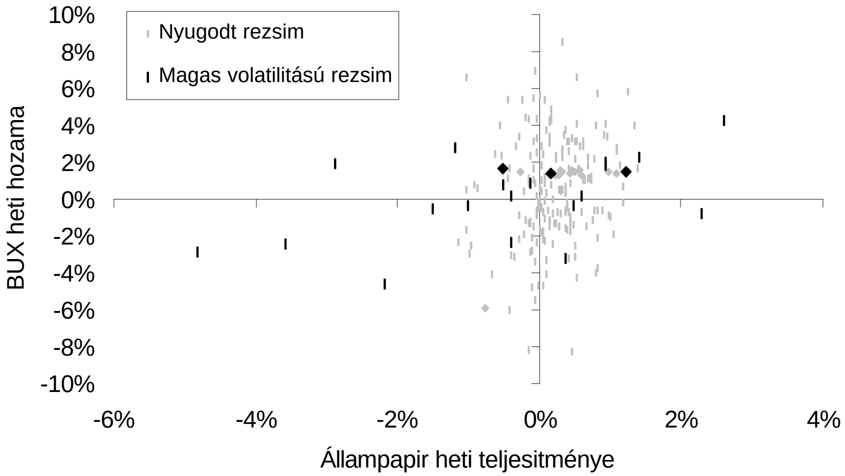
	Részvény	Állampapír	Forint
Részvény	1.0000		
Állampapír	0.4845	1.0000	
Forint	0.0490	0.4156	1.0000
Részvény	1.0000		
Állampapír	0.1612	1.0000	
Forint	0.1910	0.5729	1.0000

11. táblázat. Rezsimváltó modell paraméterek: részvény, állampapír és deviza, heti adatok alapján



8. ábra. Rezsimvalószínűségek a magyar piacon: állampapír, részvény és deviza, heti adatok alapján

Az állampapírok és részvények heti hozamainak együtteseit a *9. ábra* szemlélteti: a fekete pontok az állampapírok és a forint szempontjából magasabb, a szürke pontok az alacsonyabb volatilitású rezsimből származnak.



9. ábra. Állampapír-részvény korreláció a magyar piacon

Elemzésünk legfontosabb tapasztalataként azt mondhatjuk ki, hogy a hazai piacon az állampapírok együtt válnak kockázatossá a részvényekkel, és a korreláció megnövekedése szerint nem várható hasonló diverzifikációs hatás mint az amerikai példában volt tapasztalható.

5 Következtetések

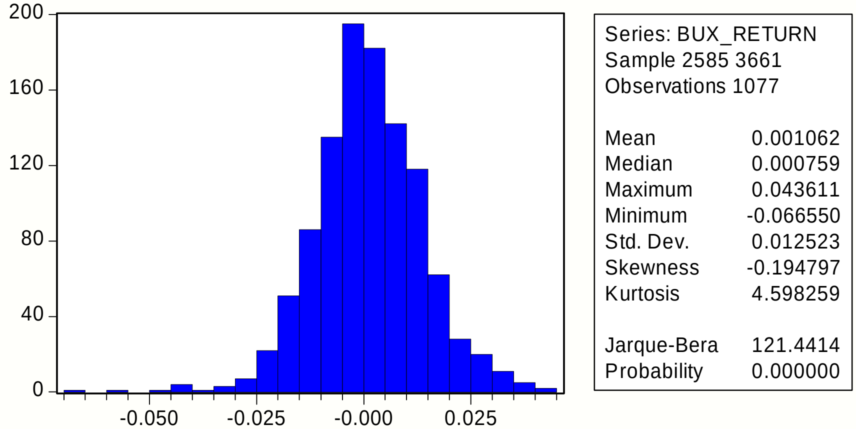
Tanulmányunkban három alapvető hazai pénzügyi piaci kockázati faktor, a részvénypiacot reprezentáló BUX index, a kamatlábakat reprezentáló 3 éves állampapír, illetve a devizapiacot reprezentáló euró-forint árfolyam együttes viselkedését vizsgáltuk. Főbb megállapításaink közé sorolható, hogy a volatilitások és a korrelációk időben nem skálázhatók át a függetlenség feltételezése mellett megszokott módon, a növekvő korrelációs együtthatók szignifikáns, időben átnyúló hatásokról tanúskodnak: valamely piaci szegmenst érő sokkok esetleg egy napos késéssel, de átgyűrűznek más szegmensekre is. A másik fő megállapítás az, hogy a nyugodt és stresszes időszakokat elkülönítve nem tapasztalható az a korreláció csökkenés az állampapírok és részvények között, amely például az amerikai piacon nyomon követhető. Ellenkezőleg: az állampapírok inkább mint kockázatos eszközök viselkednek a magasabb volatilitású időszakokban.

A volatilitások és korrelációk időhorizont szerinti változékonysága mind kockázatmérési mind pedig portfóliókezelési szempontból releváns észrevétel. Ha egy portfólió havi időtávon mért kockázatának becslésére napi adatokból számított kovariancia mátrixot használunk, jó eséllyel alulbecsülhetjük a valós kockázatot, hiszen tapasztalataink szerint a heti és havi időskálán mért korrelációs együtthatók magasabb értékeket mutatnak a napi lépésközzel mért értékeknél. Eszközallokációs szempontból továbbá fel kell hívni a figyelmet arra, hogy azonos hasznosságfüggvény feltételezése esetében egy kimondottan rövid időtávra fókuszáló befektető optimális allokációja nagy valószínűséggel el fog térni egy hosszabb időhorizonttal rendelkező befektetőjétől.

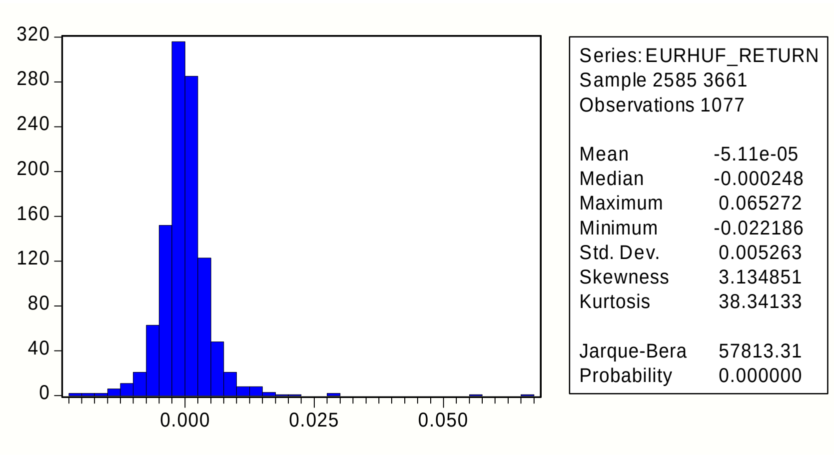
Hasonlóképpen említést kell tenni az eltérő rezsimek gyakorlati vonatkozásairól is. A rezsimváltó modellek alkalmazása várhatóan pontosabb kockázatbecslést tesz lehetővé, hiszen a mögöttes kevert normális eloszlás vastag szélű és csúcsos a sztenderd normális eloszláshoz képest. A várhatóan jobb illeszkedésen túl fontos figyelembe venni azt is, hogy információt kaphatunk a rezsimek dinamikájáról az átmenetvalószínűségek elemzésén keresztül: becslést adhatunk például egy stresszes időszakból nyugodtabb időszakba történő visszatérés valószínűségére illetve a stresszes időszak hosszára. A rezsimváltó modellek persze nemcsak szigorúan kvantitatív, hanem kvalitatív módon is alkalmazhatók. Egy nyugodt, emelkedő piac esetében az optimális portfólióallokációban nagyobb súlyt kapnak a kockázatos eszközök, míg egy stresszesebb időszakban jellemzően a biztonságosabb eszközöknek jut nagyobb szerep. Az eltérő rezsimek melletti optimális allokáció kiindulópont lehet például a taktikai eszközallokációban is: a portfóliókezelő ezen optimális allokációk között mozoghat a különböző rezsimeket illető várakozásai függvényében.

A tanulmány alapvetően empirikus jellegű, de több további lehetséges kutatási témát is felvet. Egyfelől érdekes lehet a sokkhatások átgyűrűzését leíró csatornák kvalitatív, tartalmi feltárása. Másik lehetséges kutatási irány a kvantitatív elemzések kiterjesztése egyrészt a közép-európai régióra, másfelől a magyar és nyugat-európai vagy amerikai piacok együttes elemzésének irányába.

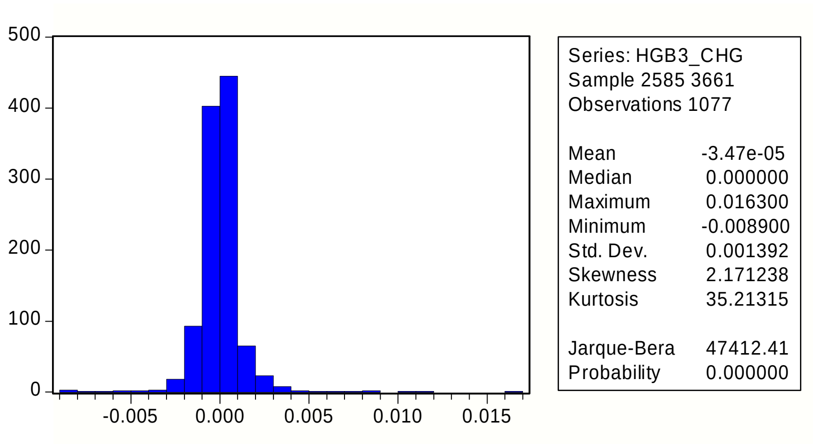
1. Melléklet. A hozamadatok fő statisztikái



BUX



EUR/HUF



3 éves állampapír

2. Melléklet. A hozamadatok fő statisztikái

Időbeli eltolás (nap)	Autokorreláció	Parciális autokorreláció	Q-Stat	p-érték
1	-0.018	-0.018	0.3323	0.564
2	0.026	0.026	1.0806	0.583
3	-0.036	-0.035	2.4616	0.482
4	0.019	0.017	2.8351	0.586
5	-0.021	-0.019	3.3317	0.649

BUX, mintaelemszám: 1077

Időbeli eltolás (nap)	Autokorreláció	Parciális autokorreláció	Q-Stat	p-érték
1	-0.075	-0.075	6.0471	0.014
2	0.000	-0.005	6.0473	0.049
3	0.006	0.005	6.0821	0.108
4	-0.053	-0.052	9.1141	0.058
5	-0.022	-0.030	9.6191	0.087

EUR/HUF, mintaelemszám: 1077

Időbeli eltolás (nap)	Autokorreláció	Parciális autokorreláció	Q-Stat	p-érték
1	0.011	0.011	0.1300	0.718
2	0.057	0.057	3.5990	0.165
3	-0.024	-0.026	4.2477	0.236
4	-0.061	-0.064	8.2588	0.083
5	0.006	0.010	8.2981	0.141
6	0.002	0.009	8.3031	0.217
7	-0.016	-0.020	8.5760	0.285
8	-0.028	-0.032	9.4228	0.308
9	0.035	0.040	10.786	0.291
10	-0.043	-0.041	12.805	0.235

3 éves állampapír, mintaelemszám: 1077

Irodalom

1. Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J., Heath, D. (1998): *Coherent Measures of Risk*. ETH Zürich
2. Campbell, J. Y., Viceira, L. M. (2004): *Long-Horizon Mean-Variance Analysis: A User Guide*, Working Paper
3. Cambell, J. Y., Viceira, L. M. (2002): *Strategic Asset Allocation – Portfolio Choice for Long-Term Investors*, Oxford University Press
4. Cheklov, A., Uryasev, S., Zabarankin, M. (2003): *Portfolio Optimization with Drawdown Constraints, University of Florida, Risk Management and Financial Engineering Lab*, Working Paper
5. Darvas Zs. (2001): Árfolyamrendszer-hitelesség és kamatláb-változékonyság. *Statisztikai Szemle*, 79. évf. 6. szám
6. De Santis, G., Litterman, B., Vesval, A., Winkelmann, K. (2003): Covariance Matrix Estimation, in: *Modern Investment Management*, ed. Litterman, B., John Wiley & Sons, New Jersey, pp. 224–248
7. Diebold, F., Joon-Haeng, L., Weinbach, G. (1994): Regime-switching with time-varying transition probabilities. in: Hargreaves (szerk.) *Nonstationary time series analysis and cointegration*; Oxford University Press, pp. 284–302
8. Gray, S. F. (1996): Modeling the conditional distribution of interest rates as a regime-switching process. *Journal of Financial Economics* 42, Elsevier

9. Hamilton, J. D. (1989): A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle. *Econometrica*, Vol. 57, No. 2

10. Hamilton, J. D. (1990): Analysis of Time Series Subject to Changes in Regime. *Journal of Econometrics* 45, pp. 39–70, Elsevier Science Publishers

11. Hamilton, J. D. (1994): *Time Series Analysis.* Princeton University Press, New Jersey

12. Hamilton, J. D. (1996): Stock Market Volatility and the Business Cycle. *Journal of Applied Econometrics*, Vol. 11

13. Janecskó, B. (2000): Idősor-modellezés és opcióárazás a csonkolt Lévy-eloszlással. *Közgazdasági Szemle*, XLVII 899-917.

14. Jorion, P. (1999): *A kockáztatott érték.* Panem, Budapest

15. Kim, C., Nelson, C. R. (1999): *State-Space Models with Regime Switching – Classical and Gibbs-Sampling Approaches and Applications.* The MIT Press, Cambridge

16. Király, J. (1998): Beszélgetések a kockáztatott értékről. in: *Bankról, pénzről, tőzsdéről.* A Bankárképző jubileumi kötete

17. Kóbor, Á. (2000): A feltétel nélküli normalitás egyszerű alternatívái a kockáztatott érték számításában. *Közgazdasági Szemle*, XLVII. 878–898., 2000. november

18. Kóbor Á., Székely P. I. (2004): Foreign Exchange Market Volatility in EU Accession Countries in the Run-Up to Euro Adoption: Weathering Uncharted Waters. *Economic Systems* 28, pp. 337–352, Elsevier Publishers

19. Krokhmal, P., Palmquist, J., Uryasev, S. (2001): *Portfolio Optimization with Conditional Value-at-Risk Objective and Constraints*, University of Florida, Department of Industrial and Systems Engineering, Working Paper

20. Krolzig, H. M. (1997): *Markov-Switching Vector Autoregressions.* Modelling, Statistical Inference and Application to Business Cycle Analysis, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Volume 454, Berlin, Springer

21. Krolzig, H. M. (1998): *Econometric Modelling of Markov-Switching Vector Autoregressions Using MSVAR for Ox*, Institute of Economics and Statistics and Nuffield College, Oxford

22. Lo, A. W. (2002): The Statistics of Sharpe Ratio, *Financial Analyst Journal*, 2002. jul.-aug., pp. 36–52

23. Mikolasek, A. (1998): A magyar árfolyamrendszer egy elméleti kerete. *Közgazdasági Szemle*, XLV. évf. 1998. szeptember

24. MNB (2005): *Jelentés a Pénzügyi Stabilitásról*, 2005. április

25. Naszódi A. (2004): *A sávmódosítások árfolyamhatásának vizsgálata opciós modell keretei között*, MNB Füzetek, 2004/2

26. Ross, S. A. (2005): *Neoclassical Finance*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey

27. Stambaugh, R. F. (1997): Analyzing investments whose histories differ in length, *Journal of Financial Economics*, Vol. 45, pp. 285–331

28. Varga, J., Rappai, G. (2002): Heteroszkedaszticitás és a szisztematikus kockázat hatékony becslése GARCH modell alapján — A magyar részvénypiac elemzése, *Szigma*, Vol. 33. pp. 103–113

MARKET RISK AND DIVERSIFICATION ON THE HUNGARIAN CAPITAL MARKET

We analyze three representative market factors of the Hungarian capital markets, namely the BUX index representing the stock market, the 3-year Government bond representing the fixed income markets, and the euro-forint exchange rate that represents the currency markets. First, we focus on the volatilities and the cross-correlations of these factors on different time horizons. We find that the correlations across these factors increase as the daily measurement period is expanded to weekly or monthly time horizons. Second, we study the conditional behavior of the selected market risk factors: we can separate quite and hectic periods by Markov switching models. In the hectic regime the risk factors typically exhibit higher volatilities, as well as higher cross-correlations. Unlike in the case of the US markets, the correlation between government bonds and equities increases in the higher volatility periods, deteriorating the expected diversification benefits significantly.

ADALÉKOK AZ „ÁRELFOGADÓ" ÉS „ÁRMEGHATÁROZÓ" FOGALMAK ÉRTELMEZÉSÉHEZ[1] I.

BARANCSUK JÁNOS
PTE KTK

Tanulmányunk hozzájárulás kíván lenni a címben megjelenő, Scitovsky által bevezetett, ám a standard mikroökonómiában gyakran megfelelő körültekintés nélkül használt fogalmak tartalmi tisztázásához. A cikk első részében azzal foglalkozunk, hogyan célszerű (egyelőre *homogén* iparág keretei között) értelmezni illetve kvantifikálni a (*kínálati* oldalon megjelenő) gazdasági szereplők árelfogadó/ármeghatározó jellegét. Miközben különös figyelmet szánunk a logikai kontextusként szolgáló *keresleti* összefüggések feltérképezésére is, az alábbi főbb kérdésekre próbálunk válaszolni: Mi a különbség „ármeghatározó" és „árakra orientált" vállalat között? Miért nincs árrugalmassága a *price taker (maker)* pozíciót jelző keresleti görbének? Hogyan függ össze a cégek ármeghatározó tulajdonságának erőssége a monopolerő fokával és a piac viszonylagos tágasságával?

1 Bevezetés

„Talán nem egyedül velem történt meg, hogy hosszú időn át anélkül használtam az 'ármeghatározó' *versus* 'árelfogadó' *(price maker/setter versus price taker)* megkülönböztetést, hogy tudtam volna, ez Scitovsky elméleti teremtménye" — vallja (talán helyettünk is) *Kornai János* [1997] az „Egy 'büszke magyar' emlékiratai"-hoz írt előszavában (8. o.). Mint soraiból kiderül, a nemzetközi és hazai szakirodalomban rendkívüli karriert befutó, és ma már általánosan alkalmazott fogalompárt a neves, magyar származású szerző egy [1951]-ben írt tankönyvében vezette be, és eredetileg az eladó és vevő alkufolyamatát jellemző *információs aszimmetriával* hozta kapcsolatba. Eszerint „az eladók, akik minden termék piacán okkal kevesebben vannak, mint a vásárlók, lényegesen többet tudnak a piaci feltételekről és a választási lehetőségekről, s ezzel a tudásukkal könnyen visszaélhetnek" (*Scitovsky* [1997] 156. o.). Az így értelmezett információtöbblet pedig —erodálva a tranzakcióban résztvevő felek egyenrangúságát— piaci fölé- és alárendeltséghez vezet, amelynek mibenléte abban tükröződik, hogy az *eladók diktálják*, a *vevők* pedig *elfogadják* az árakat. Ez utóbbiaknak ugyanis „túlságosan sok termék piaca között kellene megosztania csekély tudását ahhoz, hogy mindegyiken szakértő lehessen" (i.m. 157. o.).

[1] Beérkezett: 2006. szeptember 8. E-mail: `indian@ktk.pte.hu`.

Amint észrevehető, az árelfogadó/ármeghatározó kifejezések tartalma Scitovsky felfogásában leginkább az *árdiszkriminációt* alkalmazó ,,dörzsölt", és az azt elszenvedő ,,kiszolgáltatott", ,,balek" szereplők modelljével mutat szellemi rokonságot. Eltérően a terminusok mai értelmezésmódjától, amely elsősorban az (informáltsággal csak közvetett kapcsolatban lévő) piaci részesedésre, tehát a kínálati vagy keresleti *tömeg* által a tranzakciók ,,terében" előidézett ,,görbületek" erősségére vezeti vissza az egységárra gyakorolt befolyás lehetőségét vagy lehetetlenségét. Ne csodálkozzunk ezen: a *,,habent sua fata libelli"* igazsága a tudományos szókincs elemein is beteljesedik, elég, ha csak *Coase* talán túlzottan is szerény —saját szellemi termékének pályafutása, egyfajta ,,közkinccsé" válása kapcsán tett— vallomására gondolunk. Mint írja: ,,Sem a 'Coase-tétel' elnevezés, sem annak szabatos megfogalmazása nem tőlem származik. Mindkettőt Stiglernek köszönhetjük." ([2004b] 217. o.). *Blaug* [2003] szerint jó példa ez arra, hogy ,,még a nagy gondolkodók sem tudják teljesen átlátni saját újításaikat, [... és] hogy a nagy eszmék és ötletek teljes potenciálját csak a követők és kritikusok révén sokszor évtizedekig tartó folyamatban lehet kiaknázni" (247. o. *B.J.* kiegészítése).

A terminus technicusok története, jelentéstartalmuk változása, átalakulása tehát nem lineáris, minden pontján ,,konszenzusos", átlátható letisztulási folyamat, hanem inkább egy zegzugos, gyakran úttalan utakon való barangolásra hasonlít az értelmezésmódok kusza dzsungelében. ,,Majdnem harminc évre, és Allyn Young, valamint Robertson, Knight, Sraffa és Viner urak egyesített erejére volt szükség ahhoz, hogy kibogozzák azokat a helyes és téves szálakat, amelyek átszövik a Marshall—Pigou koncepciót" — állapítja meg például *Bator* [1958] ezúttal az *externáliák* elméletére vonatkozóan, de az árelfogadó/meghatározó modell esetére is jellemző módon. *Neumann János* [1965] szintén tapasztalja ezt a problémát: ,,Ami különösen nehéznek tűnik a közgazdaságtanban, az a kategóriák definiálása... Az egzaktság hiánya mindig a fogalmi területről ered..." — vallja (i.m. 153. o.).

Alapvetően kétféle módon viszonyulhatunk a most vázolt helyzethez. A Nobel-díjas dán fizikus, *Niels Bohr* például nem tekintette tragikusnak a fogalmi rendszer tökéletlenségeit. Amint egy barátaival folytatott ebédet követően bölcs sztoicizmussal megjegyezte: ,,a mosogatás is olyan, mint a nyelv. Piszkos a vizünk, piszkos a törlőruhánk, valahogy mégis megtisztítjuk az edényt meg a poharakat. Így állunk a nyelvvel is: tisztázatlan fogalmakkal dolgozunk, és olyan logikát használunk, amelynek nem ismerjük a pontos érvényességi körét; ennek ellenére reménykedünk, hogy mégiscsak tisztaságot teremtünk a természet megértésében" (idézi *Heisenberg* [1975] 183. o.). A másik fajta hozzáállást a híres francia szerző, *Camus* képviselhetné, akinek ugyan nem szak-, hanem szépirodalmi munkássága jelentős, de intelme a tudomány művelői számára is megszívlelendő: ,,ha rosszul, pontatlanul [...] nevezzük meg a dolgokat, ha így definiálunk — hozzáadunk a világ nyomorúságához..."

A magunk részéről inkább Camus felfogásával azonosulunk, gyakran megtapasztalva, hogy a kategóriák, fogalmak —mint a teoretikus megismerés eszközeinek— tökéletlenségei fölöttébb megnehezítik a valóság elemezni kívánt szeletének igényes feltérképezését, süketek párbeszédévé változtatva a tudományos diskurzust. Klasszikus példái ennek a „kereslet- vagy kínálatváltozás" terminusok pongyola alkalmazásából származó kínos félreértések (lásd pl. *Heyne* [1991] 41. o.), vagy a marshalli fogyasztói többlet és keresleti függvény lényegét megismerni vágyó kutatók bolyongása a pénz(?) —netán jövedelem(?)— konstans határhasznával kapcsolatos felfogások labirintusában (lásd pl. *Barancsuk* összefoglalását: [1998] 5-7. fej.). Vélhetően az sem a közgazdaságtan egzaktságába vetett hitünket erősíti, ha az aktorok attitűdjeinek(?), magatartásának(?), képességeinek(?), piaci pozícióinak(?) jellemzésére használt „ármeghatározó", „árkereső", „árképző", „árvezérlő", „árorientált", „áralkalmazkodó" *versus(?)* „árelfogadó", „árkövető", „mennyiségi alkalmazkodó", „kínálat- vagy volumenorientált" stb. kifejezésmódok „olaszosan kedélyes", ám a jelentéstartalmak dimenziójában korántsem „konszenzusos" együttélésére gondolunk.

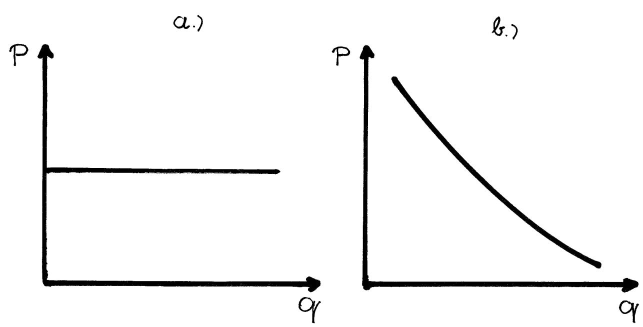
Tanulmányunk hozzájárulás kíván lenni a Scitovsky által bevezetett, és most emlegetett fogalmak tartalmi tisztázása, értelmezése terén. Arra vállalkozunk, hogy körüljárjuk: pontosan mit is kell (vagy inkább célszerű) érteni az árelfogadó/ármeghatározó tulajdonságok jelentésén, megpróbálva akkurátusan felépíteni/feltérképezni azt a vonatkoztatási rendszert, amelyben ezek a —napjaink szakirodalmában *általánosan*, ám gyakran csak ösztönösen, *megfelelő körültekintés nélkül* használt— kifejezések elhelyezhetők, alkalmazhatók. Itt jelezzük, hogy modellünk főszereplői a *kínálati* oldal aktorai lesznek, megállapításaink azonban —*mutatis mutandis*— a keresleti oldal résztvevőire is érvényesek.

További törekvéseink közé tartozik, hogy a logikai kontextus feltárása révén legalább elvi szinten *mérhetővé* tegyük az árak befolyásolásának képességét, és a standard mikroökonómia fogalmi-módszertani készletét gyarapítsuk eredményeinkkel. Munkánk mottójául Camus maximája mellett Coase [2004a] sorait választhatnánk, melyek szerint „a közgazdasági elmélet nagy kárát látta annak a múltban, hogy nem fogalmazta meg világosan előfeltevéseit. Az elmélet felépítése közben a közgazdászok gyakran megfeledkeztek arról, hogy megvizsgálják az alapokat, amelyekre építkeztek. Ez a vizsgálat azonban nemcsak azért nélkülözhetetlen, hogy megakadályozza az alapfeltevések tisztázatlanságából adódó félreértéseket és felesleges vitákat, hanem azért is, mert a közgazdaságtan számára rendkívül fontos, hogy megalapozottan választhasson a rivális alapfeltevések közül" (i.m. 55. o.).

2 Vizsgálati keretek

A szakirodalmi források —szinte kivétel nélkül— a *„keresleti görbe vállalati perspektívából észlelhető elhelyezkedésével"* illusztrálják a *kínálati* oldalon megjelenő árelfogadó vagy ármeghatározó pozíciót. Eszerint a price *taker* szereplők *vízszintes* keresleti görbével szembesülnek, amelynek nívója a piac *egésze* által meghatározott, a vállalat számára tehát *adottságot* jelentő ár színvonalára utal. A price *maker* cégek által figyelembe vehető keresleti grafikon ezzel szemben jól észrevehetően *negatív lejtésű*, mintegy a vállalat döntési-választási lehetőségét szimbolizálva a *különböző* egységárakat és mennyiségeket egymáshoz rendelő kombinációk halmaza fölött. Az *1. ábra* alapján (ahol P az egységár, q a termékmennyiség) triviálisnak, tisztázottnak tűnik a kétféle piaci státusz lényege: az ár állandósága *versus* változékonysága, hajlékonysága.

Ez az egyértelműség azonban csak látszat. Mint ahogyan a napkelte vagy napnyugta megszokott, hétköznapian természetes jelenségét is teljesen eltérően magyarázza pl. a ptolemaioszi és kopernikuszi világnézet, ugyanígy az ábrán megjelenő görbék helyzetét, az *általuk leképezett szituáció mibenlétét* is többféleképpen reprezentálják és többféleképpen kapcsolják az árelfogadó/ármeghatározó pozícióhoz az egyes forrásmunkák. Tárgyunk szabatos kifejtése érdekében tehát, és amiatt is, mert logikai rendszerünk felépítése során különösen exponált objektumnak számít, szükségesnek érezzük a „keresleti görbe" fogalmát a szokottnál is mélyebben analizálni: tisztázni az e kifejezés mögött megbúvó relációk *sokféleségét*, explicitté téve a különböző függvénytípusok tartalmában, „mondanivalójában" mutatkozó eltéréseket. Kérjük az Olvasót, tiszteljen meg türelmével, ha tanulmányunk e részében taglalt összefüggések, levezetések némelyikét netán *l'art pour l'art* jellegűnek, a címben jelzett témával „köszönő viszonyban" sem álló felesleges kalandozásnak érezné. Fejtegetéseink további, érdemi szakaszában remélhetőleg kiderül, hogy ez a „blokk" az árelfogadó/ármeghatározó magatartás vizsgálatára alkalmas gondolati séma szerves és nehezen nélkülözhető alkotóelemeit képezi.



1. ábra. Keresleti görbék a.) árelfogadó; b.) ármeghatározó pozíciók esetén

Elemzésünk egy n-szereplős ($n \geq 1$, egész szám) *iparág* vállalataira irányul. E tanulmányban a *független* terméket előállító tiszta monopóliumra, illetve az *egymást kölcsönösen helyettesítő* javakat termelő vállalatok halmazára használjuk e kifejezést. Az „iparág" értelmezése a szakirodalomban *heterogén* termékek esetén problematikus, velünk ellentétben például *Chamberlin* [1933] és különösen *Triffin* [1940] tartózkodott is e fogalom használatától (v.ö. *Carlton – Perloff* [2003] 139. o., *Friedman* [1986], *Lerner* [1943], *Marshall* [1930] 34-48. és 45. o., *Mátyás* [1979] 250. és 269. o., *Porter* [1993] 27. és 51-52. o.). *Bara* ([1989] 413-414. o.), *Daubner* és *Vági* ([1993] 288-289. o.), Mátyás ([1979] 278. o.), valamint *Olson* és *McFarland* [1962] ugyanakkor —a nehézségek ellenére— az iparág fogalmát relevánsnak tartják. Álláspontjukhoz csatlakozva dolgozatunkban közös iparágba tartozónak tekintjük azokat a vállalatokat, amelyek halmazának tagjaira *páronként kölcsönösen és tranzitív módon* teljesül, hogy gyártott termékeik keresletének *kereszt-árrugalmassága* (ε^+) *pozitív* szám. Ha tehát M és N, továbbá N és O, valamint O és M között *vica versa* igaz, hogy $\varepsilon^+ > 0$, akkor M, N és O ugyanazon iparág tagja (v.ö. *Zalai* [2000] 71-72., 270-272. o.). Azokat a vállalatokat/javakat, amelyekre nem teljesül most adott definíciónk (amelyek viszonylatában tehát a keresztelaszticitás vagy egyáltalán nem, vagy pedig *nem-kölcsönösen* pozitív), az iparág *piaci környezeteként* határozzuk meg.

A kereszt-árrugalmasság nagysága a helyettesítés *szorosságára* utal, vagyis ha

- $\varepsilon^+ \to \infty$, akkor a javak *tökéletesen helyettesítik* egymást,
- $0 < \varepsilon^+ < \infty$, a *helyettesítés korlátozott,*
- $\varepsilon^+ = 0$, a javak *függetlenek*, helyettesítő viszonyuk eltűnik, valamint
- $\varepsilon^+ < 0$, a javak közötti *komplementaritás*, kiegészítő („negatív helyettesítő") viszony kerül előtérbe, amelynek lehetőségétől —az egyszerűség kedvéért— a továbbiakban szinte mindig eltekintünk.

A dolgozatunk tárgyát képező összefüggések *lényegi* elemeinek bemutatását, elemzését nagymértékben megkönnyíti, ha kiküszöbölünk bizonyos, mondanivalónk érdemi részét nem érintő motívumokat az általunk alkalmazott modellből. Ennek érdekében feltételezzük, hogy

- a vásárlók preferenciái *uniformak,* ami lehetővé teszi, hogy szükséges esetben az *aggregált* keresleti viselkedést *egyetlen,* ún. *reprezentáns fogyasztó* magatartásával azonosítsuk;
- a fogyasztó(k) nem végez(nek) megtakarítást, az összes jövedelmet elkölti(k).
- Ugyancsak praktikus célokat szolgál, ha a fenti módon definiált iparág termékeire vonatkozó vásárlói preferenciákat az általunk követett gondolatmenet bizonyos pontjain *„jól viselkedő"* hasznossági (index-) függvényekkel jellemezzük. Ez —értelmezésünk szerint— azt jelenti, hogy
  - az említett függvények az *iparág termékei* tekintetében *homotetikusak,* továbbá
  - az iparág egyes vállalatai/termékváltozatai oldaláról kiinduló árváltoztatások az említett vállalatok/termékváltozatok által lekötött vásárlóerők arányában váltanak ki —az *összes* kereslet %-ában megadott— saját-, illetve kereszt-árhatásokat.

A tanulmányunkban taglalt jelenségek bemutatására elsősorban a kereslet saját- és kereszt-árrugalmasságának viszonyát leíró azonosság(ok) rendszere (majd ennek ,,tükörképe") szolgál logikai kontextusként. Az említett azonosság(ok) levezetését többek között Varian [1991] *6.10. alfejezete* adja meg —eredetileg *kéttermékes*, de tetszés szerint további jószágfajtákkal bővíthető modellre vonatkozóan. Ennek megfelelően jelölje a továbbiakban X és Y a vizsgált iparágba tartozó javak fajtáját és mennyiségét, amikor Y —ha szükséges— az iparág X-en túli *összes többi* output-változatának együtteseként, vagyis ún. *kompozit jószágként* is felfogható. Z —mint a további (X és Y ,,környezetét" képező) iparágak termékfajtáinak aggregátuma— ugyancsak *kompozit* jószágot jelent.

Az említett azonosság nem más, mint

$$-s_x = s_x\varepsilon_x^x + s_y\varepsilon_y^x + s_Z\varepsilon_Z^x \;, \tag{1}$$

amikor

$$s_x = XP_x/I\,, \quad s_y = YP_y/I\,, \quad s_Z = ZP_Z/I \tag{2}$$

További jelölések:

- $\varepsilon_x^x =$ X keresletének saját-árrugalmassága,
- $\varepsilon_{y;Z}^x =$ Y és Z keresletének kereszt-árrugalmassága X árváltozása esetén,
- $s_{x;y;Z} =$ a termékféleségek költségvetési részesedései,
- $P_{x;y;Z} =$ az outputok egységárai.

Megtakarítások hiányában igaz, hogy:

$$s_x + s_y + s_Z = 1\,. \tag{3}$$

Mivel az (1) formulát —a termékindexek megfelelő alkalmazásával— a többi outputot exponálva is felírhatjuk, belátható, hogy tulajdonképpen a jószágfajták számának megfelelő azonosság-*rendszerről* van szó.

3 Aggregált és aszimmetria keresleti görbék

Elsőként az *aggregált (iparági) keresleti függvény*t helyezzük górcső alá, amely az iparági output árszintje és a vásárlók által *együttesen* keresett mennyisége közötti viszonyt fejezi ki. Értelmezése egynemű javak esetén problémamentes, ha azonban *heterogén* termékekről van szó, akkor változóinak jelentése a termékegységek átváltási arányainak problematikája miatt nem magától értetődő. A függvény *általános* definíciójára törekedve ezért a magunk részéről célszerűnek tartjuk, ha a P ,,árszintet" *bázis súlyozású árindex*, a Q aggregált keresletet pedig *bázis súlyozású volumenindex* formájában adjuk meg valamely kiinduló értékhez képest. Belátható, hogy az iparági keresleti függvény a preferenciák *homotetikus* jellege miatt a bázis súlyarányok alkalmazásakor az *optimális* jószágkombinációk pontjaival kapcsolatos „árszint-volumen" megfeleltetést implikál, feltéve, hogy a bázisállapot is optimális fogyasztói választást képviselt.

Az aggregált (iparági) kereslet árrugalmassága ($\varepsilon_{\Sigma D}$) a függvény P változó szerinti elaszticitása, amelynek *meghatározása akkor releváns, ha az iparág vállalatai kezdeményeznek/hajtanak végre* —szimultán módon és uniform dinamikájú— *árváltoztatást.* Számítása az

$$\varepsilon_{\Sigma D} = dQ/Q_0 : dP/P_0 \qquad (dP \to 0) \tag{4}$$

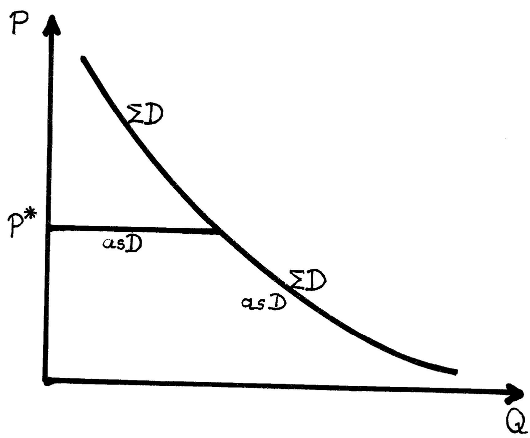
formulával történik, értéke pedig azt jelzi, hogy az ár 1 %-os, *egységes* változtatásának következményeként az iparági output iránti aggregált kereslet hány %-kal módosul.

Az aggregált keresleti függvény *mennyiség* (Q) szerinti elaszticitása is *értelmezhető, ha az iparág vállalatai az egységár helyett a kínálati tömeg vonatkozásában határoznak el* —ugyancsak szimultán és uniform arányú— *változtatást.* Ezt a továbbiakban az *ár iparági kínálati flexibilitásának* — rövidebben: *iparági árflexibilitásnak*— ($\Phi_{\Sigma S}$) nevezzük, értéke pedig arra utal, hogy az iparági kínálat összetevőinek egységes, 1%-os módosítása hány %-os változást generál a keresleti (vagyis az iparág által *maximálisan érvényesíthető*) árban. Arról informál tehát, hogy ha elmozdul a piacra vitt terméktömeg, akkor relatíve milyen intenzitású árváltoz(tat)ás szükséges ahhoz, hogy a kereslet az új ár mellett éppen találkozzon az eladni kívánt mennyiséggel. Formulája az aggregált kereslet árrugalmasságának *reciproka*, azaz:

$$\Phi_{\Sigma S} = dP/P_0 : dQ/Q_0 = 1/\varepsilon_{\Sigma D} \qquad (dQ \to 0) \tag{5}$$

Másodikként az *„aszimmetria"* típusú keresleti függvényekkel foglalkozunk, amelyeket Chamberlin [1933] vezetett be —eredetileg a monopolisztikus verseny elemzése céljából—, de a versenyző felek árharcának ábrázolásánál is hasznos módszertani segédeszköznek bizonyulnak. Ezek a függvények az iparág valamely vállalata által megállapított ár és az illető cég terméke iránt jelentkező, ehhez az árhoz rendelhető kereslet viszonyát fejezik ki, feltéve, hogy a rivális(ok) által érvényesített árszint *konstans.* E görbék —kellőképpen alacsony („saját") árnál— az iparági keresleti görbében folytatódnak tovább, jelezve, hogy ilyenkor a cég elvileg (gyakorlatilag pedig kapacitásai függvényében) képes a másik (többi) versenytárs terméke iránti kereslet *teljes bekebelezésére.* Az aszimmetria görbék elaszticitása *(aszimmetria árrugalmasság,* ε_{asD}) azt méri, hogy valamely vállalat saját terméke esetében elhatározott 1%-os árváltoztatás —*ceteris paribus*— hány %-os változást indukál a szóban forgó cég által vonzott keresletben.

A *2. ábrán homogén* termékeket forgalmazó iparág esetére mutatjuk be az aggregált (ΣD) és egy bizonyos vállalathoz tartozó aszimmetria keresleti görbe (asD) viszonyát. P^*-gal az iparág *többi* vállalata által érvényesített (konstans és egységes) árszintet jelöljük. A kereslet *végtelen árrugalmasságát* jelző, *vízszintes* pozíciójú görbe-részlet a javak *tökéletes helyettesítő* viszonyára, a vásárlóerőért folytatott verseny szorosságára utal. Ilyenkor a szereplők bármelyikének végtelenül kicsi eltérése a közös (P^*) árszinttől a kereslet rendkívül dinamikus elmozdulását indukálja. Ez azzal magyarázható, hogy a konkurrens(ek) termékére irányuló vásárlóerő az egységesnél éppen csak valamivel is kedvezőbb ár megállapításával elcsábítható, de ugyanilyen ,,hatékonyan" idegeníthetők, taszíthatók el a saját kuncsaftok is egy jelentéktelennek tűnő áremelés következtében.



2. ábra. Aggregált és aszimmetria keresleti görbék homogén iparág esetén

A termékek differenciáltságának növekedésével az aszimmetria-görbe (negatív) meredeksége nő, és ezért az iparági keresleti görbével alkotott találkozási pontja egyre alacsonyabb árszintre helyeződik, vagy akár el is tűnhet. (Jegyezzük azonban meg: ha a javak rokonsági viszonya már alig érzékelhető, a közös iparág —és emiatt az iparági keresleti függvény egzisztenciája— még a fentiekben adott értelmezési lehetőség ellenére is megkérdőjelezhető lesz.) Az aszimmetria árrugalmasság csökkenése ilyen esetben azzal magyarázható, hogy a fogyasztók bizonyos termékjellemzőkhöz való kötődése —,,márkahűsége"— miatt a kereslet ,,ragadósabbá", ,,viszkózusabbá" válik.

Az előbbiekben bevezetett függvények, és a velük kapcsolatban tett megállapításaink illusztrálására ugyancsak az (1) azonosság kínál alkalmas logikai kereteket, amelyben ε_x^x, vagyis X keresletének saját-árrugalmassága tulajdonképpen nem más, mint a most bevezetett *aszimmetria-rugalmasság.* Az azonosság egyik fontos értelmezésmódja szerint az ε_x^x, ε_y^x, és ε_Z^x rugalmasságok költségvetési részesedésekkel súlyozott átlaga $-s_x$-szel egyenlő, ami azt jelenti, hogy az X árufajta —*ceteris paribus*— 1%-os árváltozása esetén az *összes* (beleértve Z-t is) termék kereslete *átlagosan* s_x %-kal módosul az egységárral ellentétes irányban.

E megfogalmazás a fizikából ismert *impulzus-megmaradási törvényre* (*Gamow – Cleveland* [1977] 4. fej.) ,,rímel", amelynek egyik —számunkra fontos— interpretációja szerint egy több testből álló rendszerben *az egységnyi tömegre számított átlagos sebesség* (vektoriálisan) *állandó*. Ha a fizikai és közgazdasági jelenségek egymásra vonatkoztatása érdekében modellünk vállalatait (vagy az általuk gyártott outputhalmazt) költségvetési részesedésüknek megfelelő *tömegű* (de nem feltétlenül azonos *anyagú* és/vagy *állagú*) golyókkal, a saját- és kereszt-árrugalmasságokat pedig az egyes golyók *sebességével* azonosítjuk, akkor a törvényben emlegetett konstans átlagos sebesség sémánkra adaptálva $-s_x$-nek felelne meg.

Ez az átlag azonban az *egyes* golyók *konkrét* sebességének (ami a kinetikus energia elnyelődésének vagy éppen felszabadulásának mikéntjétől —tehát a golyók helyzetétől, minőségi tulajdonságaitól, ütközésük körülményeitől stb.— függ) sokféle variációja mellett teljesülhet, míg a közgazdasági modellben nem utolsósorban a jószágfajták különböző intenzitással és ,,mintázatban" érvényesülő helyettesítő, kiegészítő és/vagy független viszonyai eredőjeként alakul ki.

Induljunk most ki abból, hogy az egyik, meghatározott kezdő sebességgel rendelkező golyó ütközik a többi mozdulatlannal, aminek hatására a rendszer (általában) összes tagjának sebessége módosul — bár ezek átlaga változatlan marad. Esetünkben ez azt jelentené, hogy valamely termék árváltoztatása miatt az illető áruféleség egy bizonyos $|s_x TR|$ (ahol TR az iparág összbevétele) keresleti impulzussal rendelkezik, amely aztán —saját- és kereszt-árhatásokat kiváltva— valamilyen módon szétterül, ugyanakkor meg is marad a jószágfajták halmazán. (Jegyezzük meg: mivel az egyes árváltozások következtében —úgymond a ,,tárgyidőszakra"— tipikusan a költségvetési részesedések is módosulnak, egy minden részletre precízen figyelő modellben a ,,golyók" ,,ütközéseikkel" járó ,,tömegnyereségét vagy -veszteségét" is figyelembe kellene venni ,,sebességük" kiszámítása során.)

Alakítsuk most át az (1) formulát az alábbi módon:

$$\frac{-s_x - s_Z\varepsilon_Z^x}{s_{ind}} = \frac{s_x\varepsilon_x^x + s_y\varepsilon_y^x}{s_{ind}} = \varepsilon_{ind}^x \tag{6}$$

ahol

$$s_{ind} = s_x + s_y \tag{7}$$

az iparág részesedése a *teljes* vásárlóerőből, ε_{ind}^x pedig az X —*ceteris paribus*— 1%-os árváltoztatásának átlagos hatása az iparág termékei iránti keresletre (ugyancsak %-ban kifejezve).

Analóg módon, Y termékfajtára vonatkoztatva is igaz, hogy

$$\frac{-s_y - s_Z\varepsilon_Z^y}{s_{ind}} = \frac{s_y\varepsilon_y^y + s_x\varepsilon_x^y}{s_{ind}} = \varepsilon_{ind}^y \tag{8}$$

Itt jegyezzük meg, hogy az *iparági kereslet parciális átlag-rugalmasságai*: ε_{ind}^x és ε_{ind}^y —mint számításuk módja is tükrözi— csak *közvetett* módon kapcsolódnak keresleti görbékhez, szemben a kereszt-árrugalmasságokkal, amelyek az ún. keresztváltozós keresleti görbe elaszticitásait jelentik.

Egyszerűen belátható, hogy az *iparág* aggregált keresletének árrugalmassága *általánosságban* nem más, mint

$$\varepsilon^x_{ind} + \varepsilon^y_{ind} = -1 - \frac{s_Z}{s_{ind}}(\varepsilon^x_Z + \varepsilon^y_Z) = \varepsilon_{\Sigma D} \tag{9}$$

A formulából értelemszerűen következik, hogy ha az iparág $(X;Y)$ és környezete (Z) által gyártott javak között egyáltalán nem léteznek keresleti kereszt-árhatások,

- vagy azért, mert a kereszt-árrugalmasságok —az *elméletileg tiszta esetnek* megfelelően— *kölcsönösen*, *„oda-vissza”* zérus értéket vesznek fel, tehát
$$\varepsilon^x_Z = \varepsilon^y_Z = 0\ , \tag{10}$$
- vagy az illető környezet puszta hiánya miatt, ha
$$s_Z = 0\ , \tag{11}$$

akkor

$$\varepsilon^x_{ind} = -s_x/s_{ind} = -\hat{s}_x \qquad \text{és} \qquad \varepsilon^y_{ind} = -s_y/s_{ind} = -\hat{s}_y\ . \tag{12}$$

Mivel pedig

$$(-\hat{s}_x) + (-\hat{s}_y) = -1\ , \tag{13}$$

ezért $\varepsilon_{\Sigma D}$ értéke (5) alapján *kivételesen* saját reciprokával, az *iparági árflexibilitással* is egyenlő. Vegyük észre, hogy a környezetétől tökéletesen független iparág esetén kapott eredmények a *jól viselkedő preferenciák* érvényesüléséről tanúskodnak, hiszen

$$\varepsilon^x_{ind} + \varepsilon^y_{ind} = -1 = \varepsilon_{\Sigma D} \tag{14}$$

miatt

$$\varepsilon^x_{ind}/\varepsilon^y_{ind} = \hat{s}_x/\hat{s}_y \tag{15}$$

teljesül.

Térjünk azonban vissza a (9) összefüggéshez, amely a (6) és (8) formulák második tagjainak, valamint a (12)-ben bevezetett szimbólumok felhasználásával az

$$\varepsilon_{\Sigma D} = (\hat{s}_x\varepsilon^x_x + \hat{s}_y\varepsilon^x_y) + (\hat{s}_y\varepsilon^y_y + \hat{s}_x\varepsilon^y_x) = \hat{s}_x(\varepsilon^x_x + \varepsilon^y_x) + \hat{s}_y(\varepsilon^y_y + \varepsilon^x_y) \tag{16}$$

módon is felírható. Vezessük most be az

$$\varepsilon^x_x + \varepsilon^y_x = \varepsilon^{ind}_x \qquad \text{és} \qquad \varepsilon^y_y + \varepsilon^x_y = \varepsilon^{ind}_y \tag{17}$$

jelöléseket! Ezek az egyes jószágfajták keresletének ún. *szimmetria-rugalmasságai*, amelyek —mint az ugyancsak Chamberlin [1933] által definiált, dolgozatunkban azonban csupán másodlagos szerephez jutó— *„szimmetria”* keresleti görbék elaszticitásai azt mutatják meg, hogy ha az *iparág* vállalatai *egységesen és azonos irányban* 1%-kal változtatják termékeik árát, akkor a vizsgált jószágfajta kereslete hány %-kal módosul. A (16)-ban is alkalmazva ezt a kategóriát észrevehető, hogy *az iparág aggregált keresletének árrugalmassága a szimmetria-rugalmasságok költségvetési részesedésekkel súlyozott átlaga*ként nyerhető:

$$\varepsilon_{\Sigma D} = \hat{s}_x \varepsilon_x^{ind} + \hat{s}_y \varepsilon_y^{ind} \ . \tag{18}$$

További információkat szerezhetünk ε_{ind}^x vagy ε_{ind}^y átlag-rugalmasságok tulajdonságáról, ha a (6), (8) és (9) formulák felhasználásával levezetjük az

$$\varepsilon_{ind}^x = \hat{s}_x \left[\varepsilon_{\Sigma D} + \frac{s_Z}{s_{ind}} \left(\varepsilon_Z^y - \frac{\hat{s}_y}{\hat{s}_x} \varepsilon_Z^x \right) \right] \ , \tag{19}$$

általánosságban teljesülő összefüggést, amely a (10) vagy (11) által leírt esetekben ugyancsak a már ismert, (15) implikációt generálja.

A (19)-ből kiindulva azonban az is igazolható, hogy —habár a *jól viselkedő preferenciák* némileg idillikus, de reményeink szerint inkább a lényeget kiemelő, és nem azt elfedő körülményeit feltételezve— az iparági kereslet X és Y árára vonatkozó átlag-rugalmasságai

- nem csupán az aggregált kereslet (mínusz) *egységnyi*, hanem *bármilyen* rugalmassága mellett, továbbá
- *homogén* termékek esetében *is* érvényes módon

az *aggregált* keresleti elaszticitás $\hat{s}_x$- (és $\hat{s}_y$-)szeresei.

Állításunk bizonyításához térjünk vissza a jól viselkedő preferenciák azon kritériumához, amely szerint az iparág egyes vállalatai/termékváltozatai oldaláról kiinduló árváltoztatások az említett vállalatok/termékváltozatok által lekötött vásárlóerők arányában váltanak ki —az összes kereslet %-ában megadott— saját-, illetve kereszt-árhatásokat. Ez a feltételezésünk az impulzus-megmaradás fizikai modelljében az egyes golyók —átlag körüli— konkrét sebességének alakulására vonatkozó meggondolással lenne egyenértékű, és az illető testekre ható erők „tömegekkel súlyozott” *szimmetriájára* utalna. Az ilyen szabályosság akkor lenne észlelhető, ha az egyes „ütközési” kísérleteket —természetesen az „aktív golyók” rotációjával— egymással egyébként mindenben megegyező körülmények (pozíciók, induló sebesség, ütközés jellege stb.) között hajtanánk végre. A kevésbé gondosan, de nagyon sokszor kivitelezett kísérletekben az említett szabályosság *statisztikai* érvényesülésére számíthatunk csupán.

A most vázolt kondíciókat keresleti modellünk (1) formulájára, és ennek Y-ra felírt párjára vonatkoztatva a

$$\frac{-s_x}{-s_y} = \frac{s_x\varepsilon_x^x + s_y\varepsilon_y^x + s_Z\varepsilon_Z^x}{s_y\varepsilon_y^y + s_x\varepsilon_x^y + s_Z\varepsilon_Z^y} = \frac{s_x\varepsilon_x^x}{s_y\varepsilon_y^y} = \frac{s_y\varepsilon_y^x}{s_x\varepsilon_x^y} = \frac{s_Z\varepsilon_Z^x}{s_Z\varepsilon_Z^y} \tag{20}$$

teljesül. A keresleti impulzus *szabályos* terjedésén alapuló modellünkben tehát (20)-ból következően igaz, hogy a termékfajták saját-árrugalmassága azonos, továbbá az is, hogy

$$\varepsilon_Z^y = \frac{s_y}{s_x}\varepsilon_Z^x \tag{21}$$

Ha a most nyert egyenlőséget (19)-ben érvényesítjük,

$$\varepsilon^x_{ind} = \hat{s}_x \varepsilon_{\Sigma D} \tag{22}$$

következik még akkor is, ha nem zárjuk ki az $X;Y$ iparág és Z környezete közti *nem-szimmetrikus* keresleti interdependenciák létezését. Mivel *homogén* iparágon belül (amikor X és Y *tökéletesen helyettesítik egymást*) a keresleti impulzus szabályos terjedése eleve biztosított, hiszen nem deformálják a termékfajták eltérései, ezért a (20) és (21) triviálisan teljesül.

Figyelmeztetjük azonban az Olvasót, hogy az iparág *homogenitására* vonatkozó feltételezés —legalábbis ezen a ponton— modellünk egyértelműségét veszélyeztetheti. Az egyes vállalatok árváltoztatásai ugyanis eltérő implikációkhoz vezetnek attól függően, hogy szereplőink képesek-e kapacitásaikat kvázi határtalanul bővíteni (vagy „hősiesen" kihasználatlanul hagyni) a — tökéletes helyettesítőkre *elméletileg* jellemző— *végtelen* kereszt- és saját-árhatásokra reflektálva. Közelebbről:

- ha a termelési szint viszonylag *merev*, akkor a kereslet —ármanipulációkat követő— átrendeződése *de facto* csupán korlátozottan valósulhat meg, melynek következtében nem kell az $\hat{s}_x$ és $\hat{s}_y$ hányadok szignifikáns módosulására számítani.

- Ha viszont az egyes cégek kibocsátásai *elasztikusan* tudnak a kereslet elmozdulásaihoz alkalmazkodni, akkor a relatíve nagy árhatások szabad kibontakozása a költségvetésből lefoglalt részek arányait radikálisan átalakítják.

Komoly dilemma előtt állunk tehát, hogy ilyen esetben a *bázis-* vagy *tárgy-*időszaki adatokat alkalmazzuk-e súlyokként azonosságainkban.

Az imént vázolt problémával találkozhatunk a *saját- (aszimmetria)* árrugalmasságra ható tényezők elemzésénél is. Ennek bemutatásához térjünk vissza ismét a (6) formula második tagjához, amelyet —továbbra is *jól viselkedő preferenciákat* feltételezve— behelyettesíthetünk (22) megfelelő helyére, majd ez utóbbiból kifejezhetjük ε^x_x-t:

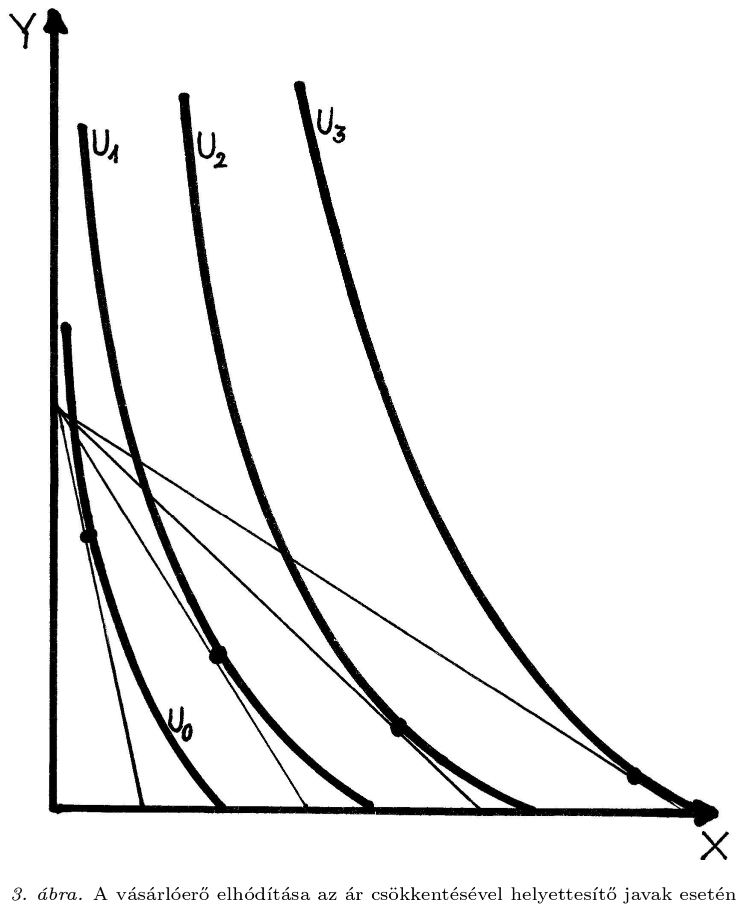
$$\varepsilon^x_x = \varepsilon_{\Sigma D} - \frac{s_y}{s_x}\varepsilon^x_y \tag{23}$$

A most nyert azonosság szerint

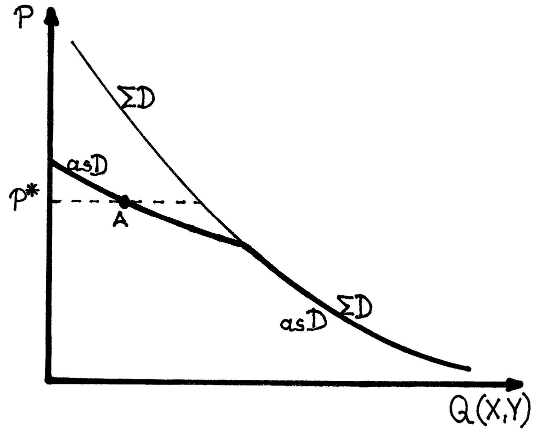
- *differenciált* javak mellett az X és Y közötti kereszt-árhatás viszonylag gyenge, s ezért a saját-árrugalmasság (abszolút) értéke is kisebb lesz, mint ha X és Y *tökéletes helyettesítő* kapcsolatban állnának egymással. Ez utóbbi helyzetben ugyanakkor X árváltoztatása Y keresletének végtelenül rugalmas változását generálja, amivel összhangban az X terméknél mért saját-árrugalmasság is végtelen szintet vesz fel. Tegyük azonban hozzá: szereplőink megfelelő kapacitástartalékait feltételezve.

- Ha viszont X vállalat/termék —kedvezőbb árszintje révén— a teljes iparági keresletet meghódítaná, akkor az új helyzetben, Y immáron *elenyészett* költségvetési részesedése mellett az $\varepsilon_x^x = \varepsilon_{asD}$ saját- (és egyben aszimmetria) árrugalmasság az aggregált keresleti elaszticitásnak megfelelő $\varepsilon_{\Sigma D}$ értékkel lenne egyenlő.

A *3. ábrán* a közömbösségi görbék rendszerében mutatjuk be, hogy —egy reprezentáns fogyasztó és *heterogén* iparág esetében— az X cég árcsökkentése miként vezet a teljes vásárlóerő elhódításához. (Az egyszerűség kedvéért itt feltételezzük, hogy a fogyasztó által e két termékfajtára költött jövedelem nagysága állandó, ezért elegendő, ha a fogyasztói térnek csupán XY metszetére koncentrálunk.) A *4. ábrán* ugyanezt a jelenséget a keresleti görbék síkjára képezzük le.



3. ábra. A vásárlóerő elhódítása az ár csökkentésével helyettesítő javak esetén



4. ábra. Az aggregált és aszimmetria keresleti görbék viszonyának magyarázata heterogén iparág esetén

Ábránk A pontjának helyzetéből következtethetünk arra, hogy ha a vállalat is az iparág által érvényesített P^* árszinten értékesít, milyen részesedést mondhat magáénak az ágazat termékei iránt megnyilvánuló összes keresletből és/vagy az iparág kibocsátásából. (Az A pont ártengelyhez való közelsége alacsony, az aggregált keresleti görbéhez való közelsége nagy részesedésre utal.) Abban az esetben, ha a versenytárs(ak) egységesen magasabb (alacsonyabb) nívón rögzíti(k) árai(ka)t, akkor az emiatt kibontakozó kereszt-árhatás miatt a cég aszimmetria keresleti görbéje is magasabb (alacsonyabb) pozíciót vesz fel.

Fontos megjegyeznünk, hogy az aszimmetria keresleti görbék fordított *(mennyiség → ár)* értelmezése *nem releváns!* Ez ugyanis egy olyan ,,történetet" feltételezne, amelynek első lépéseként vállalatunk alaposan megnöveli kínálatát, a második lépésben pedig versenytársaink ,,udvariasan" csökkentik —ha nem is teljesen ugyanannyival— sajátjukét. Aztán a ,,sztori" záróakkordjaként —a partnerek e téren mutatkozó merevségével ellentétben— valamicskét engednénk az árból, hogy a piacon megjelenő árumennyiséget teljes egészében eladhassuk. Mivel tehát az aszimmetria típusú görbék *kizárólag olyan magatartás leképezésére alkalmasak, amely az árakat tekinti a vállalat(ok) döntési változójának*, ezért ezek esetében az árflexibilitás —habár kiszámítható— nem értelmezhető! Mint ahogy valamely betűsor általában csak az egyik irányból követve ad értelmes szöveget, bár ha akarjuk, természetesen fordítva is olvashatjuk.

Ha viszont az asszimetria görbék olyan viselkedést írnak le, amikor az ár tölti be a vállalat akcióparaméterének szerepét, felmerül a kérdés: kapcsolatban vannak-e —ha igen, hogyan— ezek a görbék a cégek ármeghatározó (vagy árelfogadó) jellegével?

Először is szögezzük le: az aszimmetria keresleti görbék —önmagukban— homályban hagyják, hogy a vállalatok *valóban* stratégiai eszközként kezelik, módosítják-e áraikat, vagy nem, és arról sem tájékoztatnak, hogy egyik vagy másik viselkedésmód gazdaságilag mennyire racionális. Csupán arról informálnak, hogy *ha —ceteris paribus—* változtat*nának* áraikon, mi történ*ne* az eladható mennyiséggel. Másodszor: természetesen lefoglalhatjuk az ,,ármeghatározó" kifejezést azokra a szereplőkre, melyek —mindegy, hogy milyen okból vagy milyen adottságok közepette, ésszerűen-e vagy sem— áraikat tekintik döntési változójuknak; az ,,árelfogadó" terminust pedig azokra, amelyekre ez a magatartás nem jellemző. Célszerűbbnek tartjuk azonban, ha a *tényleges, megfigyelhető* viselkedést mégsem ármeghatározónak *versus* árelfogadónak, hanem inkább az *árakra orientáltnak* versus *kínálatra (mennyiségre) orientáltnak* nevezzük. A *price maker/price taker* fogalompárt ezzel szemben a vállalatok bizonyos *képességére* javasoljuk alkalmazni — függetlenül attól, hogy e képesség megnyilvánul-e magatartásukban, vagy látens marad-e, netán antagonizmusban a menedzsment piaci megnyilvánulásaival. Mint ahogyan hétköznapjainkban sem teszünk automatikusan egyenlőségjelet például a valódi szakácsok és azok közé, akik ételek készítésére szánják el (nemritkán felelőtlen módon) magukat. Megfontolásaink értelmében tehát *az aszimmetria keresleti görbék pozíciója az iparági outputok helyettesítő viszonyának szorosságára utal, amely* —mint tanulmányunk további részeiből kiderül— *nincs kapcsolatban a kínálati szereplők általunk értelmezett ármeghatározó versus -elfogadó lehetőségével.*

4 Az árelfogadó/ármeghatározó piaci pozíciók logikai elemei. Reziduális keresleti görbék. Az árflexibilitás és a piaci hatalom kapcsolata

De mit is értünk a dolgozatunk fókuszába emelt fogalmak jelentésén? Felfogásunknak megfelelően *árelfogadónak nevezzük azt a vállalatot, amely*

- *kínálatának parciális, a többi szereplőtől elszigetelt változtatásával nem (lenne) képes outputja keresleti árára hatni (vagyis nem lenne képes dömpinghatást vagy éppen hiányt előidézni a piacon), továbbá*
- *az árakra orientált viselkedés sem lenne számára racionális.*

Ármeghatározó ezzel szemben az a szereplő, amely

- *kínálatának —ceteris paribus— változtatásával befolyásolni tudja/tudná a keresleti árat, és*
- *a kínálatorientált viselkedés mellett az árakra orientált magatartás is eszköztárának racionális eleme lehet.*

A szakirodalom jelentős — bár korántsem egyértelműen hegemón — része hasonló tartalmú (bár esetenként oda nem illő motívumokkal ,,fűszerezett", eklektikus) definíciókat nyújt (lásd még pl. *Henderson – Quandt* [1971] 104-105. o., Heyne [1991] 187. o., *Pearce* [1993] 446.o, *Samuelson – Nordhaus*

[2003] 150. o., *Schumann* [1998] 168-169. o. stb.). Mi azonban ennél tovább megyünk, és megpróbáljuk egzakt logikai környezetben elhelyezni a fogalmak mögött álló jelenségeket, kiküszöbölve a szakforrások gyakran következetlen, pongyola szóhasználatából eredő csúsztatásokat. Ennek érdekében vezetjük be az *ár vállalati kínálatra reagáló flexibilitásának* —röviden: *vállalati árflexibilitás*— (φ_S) fogalmát, amellyel egy cég *price maker/price taker* potenciálját mérhetjük. Értéke azt mutatja meg, hogy valamely iparági szereplő kínálatának 1%-os, *ceteris paribus* változása hány %-os elmozdulást generál a keresleti árban. Pontosabb meghatározását dolgozatunk I. részében *homogén* javakat termelő iparágra vonatkozóan végezzük el.

Mivel a vállalati árflexibilitás számításánál feltételezzük, hogy az iparági kínálat növekedése (dQ) *egyetlen* vállalat kibocsátásának változása miatt következett be, és eredetileg az illető cég az iparág teljes termelésének s-ed részét állította elő, ezért igaz, hogy:

$$s = q_0/Q_0 \ , \tag{24}$$

ahol q_0 az említett vállalat kiinduló kibocsátási szintje, és értelemszerűen teljesül, hogy

$$0 \leq s \leq 1 \ , \tag{25}$$

valamint

$$q_0 = s \cdot Q_0 \ . \tag{26}$$

A vállalati árflexibilitás formulája ennek megfelelően:

$$\varphi_S = dP/P_0 : dQ/Q_0 \cdot s \ , \quad (dQ \to 0) \ , \tag{27}$$

amelynek értelmében az is teljesül, hogy:

$$\varphi_S = \Phi_{\Sigma S} \cdot s \ . \tag{28}$$

Ha most felhasználjuk az iparági árflexibilitás és az aggregált kereslet árrugalmassága között fennálló, (5) reciprok viszonyt, akkor láthatóvá válik, hogy:

$$\varphi_S = s/\varepsilon_{\Sigma D} \ , \tag{29}$$

vagyis egy cég ármeghatározó pozíciójának erőssége azonos irányban változik a vállalati kibocsátás iparágon belüli részesedésével (s), és fordított irányban mozdul el az aggregált kereslet árrugalmasságához ($\varepsilon_{\Sigma D}$) képest. Az ármeghatározó (-elfogadó) pozíció megszerzésére tehát akkor lehet számítani, ha

- a vállalat termelése minél nagyobb (kisebb) hányadát képviseli az iparág teljes kibocsátásának, vagy/és
- minél rugalmatlanabbul (rugalmasabban) reagál a teljes kereslet az árak változására.

Konvencionális (és némileg önkényes) módon *a vállalatot ármeghatározónak (-elfogadónak) tekinthetjük, ha kínálata (abszolút értékben) 1-nél nagyobb (kisebb) árflexibilitással jellemezhető.*

s / $\varepsilon_{\Sigma D}$	$\longrightarrow 0$ ($\rightarrow$ árelfogadó)	$\longrightarrow 1$ ($\rightarrow$ ármeghatározó)
$\longrightarrow 0$ ($\rightarrow$ármeghatározó)	?*	Meghatározó
$0 \longrightarrow$ (semleges)	Elfogadó	Meghatározó
$\longrightarrow \infty$ ($\rightarrow$árelfogadó)	Elfogadó	Elfogadó**

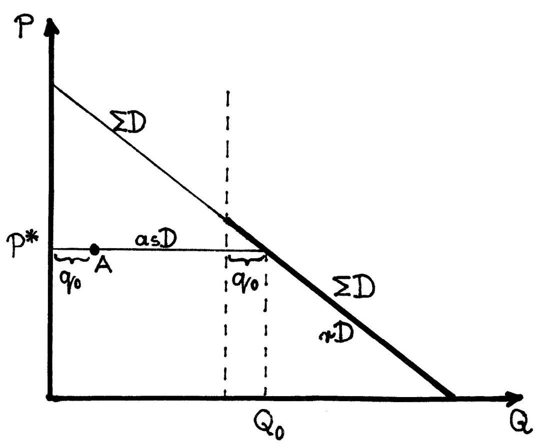
5. ábra. A vállalat árelfogadó vagy ármeghatározó pozíciójának tényezői

Az árflexibilitásra ható tényezők mértékei természetesen a legkülönbözőbb kombinációkban találkozhatnak: erősíthetik, vagy akár gyengíthetik is egymás hatását. Az egyes lehetőségekhez kapcsolódó következtetéseket összesítettük az *5. ábrán.*

A táblázat bal felső rovatában található, csillaggal ellátott kérdőjel arra utal, hogy az árflexibilitás szintjét befolyásoló tényezők ekkor *ellentétes* irányban és nehezen összemérhető módon fejtik ki hatásukat, eredőjük ezért bizonytalan. A jobb alsó sarokban szereplő, dupla csillaggal megjelölt kifejezés ugyanakkor azt jelzi, hogy habár az árbefolyásoló pozíció milyensége ezúttal is ellentétes erők függvényében alakul, mégis biztosak lehetünk, hogy ez esetben a vállalat *árelfogadó* helyzetbe kerül. Belátható ugyanis, hogy ha a piaci kereslet tökéletesen rugalmas, az aggregált keresleti görbe vízszintes, akkor az *iparágnyi méretű* cég kínálata sem képes a piaci ár befolyásolására.

A továbbiakban azonban vizsgáljuk meg alaposabban, hogy a most bevezetett vállalati árflexibilitás *közvetlenül* milyen keresleti görbéhez is kapcsolódik valójában! A szóban forgó függvény —még ha elsősorban nem is a tanulmányunk tárgyát jelentő kontextusban— jól ismert a vállalatok kínálatorientált viselkedését feltételező Cournot-féle duopólium egyes interpretációiból: nem más, mint a *maradék* (vagy *reziduális*) *kereslet görbéje* (rD). Azt mutatja meg, hogy milyen egységárat (keresleti árat) érvényesíthet a (homogén) iparág, ha egy bizonyos vállalata különböző kibocsátási szintekkel csatlakozik a többiek *konstans* (éppen érvényes) kínálatához. A *6. ábrán* vastag vonallal jelöltük a cég maradék-keresleti görbéjét, amely —mint látjuk— az aggregált keresleti görbe bizonyos szakaszának szaggatott vonallal történő leválasztásával jön létre. Elnevezése abból a hipotézisből ered, hogy a vállalat a többiek által szabadon hagyott („megmaradt”) piaci rést (illetve az ennek megfelelő aggregált keresleti görbe-részt) töltené be kínálatával. Az ábra —amely egy *oligopol* iparágra utal— az aszimmetria görbével való viszonyt is tükrözi, egyúttal a vállalat és az iparág kezdő kibocsátásának (q_0 illetve Q_0) nagyságát is feltünteti mindegyik keresleti görbe rendszerében.

A vállalati árflexibilitás a most definiált görbe *mennyiség* szerinti elaszticitásával egyenlő. A szakirodalom —mint tanulmányunk második részében majd látni fogjuk— általában „jótékony” homályban hagyja, és/vagy oda nem illő motívumokkal „gazdagítja” az árelfogadó/ármeghatározó képességre utaló (ún. ,,vállalati") keresleti görbe genézisét, továbbá előszeretettel emlegeti annak *árrugalmasságát.* Ez azért helytelen, mert *a maradék keresleti görbe ár → mennyiség irányú értelmezése, és ily módon az ár szerinti elaszticitása sem releváns.* Nagyon erőltetett, valószerűtlen történet ugyanis, amelyben egy iparág összes vállalata egységesen határoz az érvényesíteni kívánt ár változtatásáról, melynek (bármilyen előjelű) keresleti konzekvenciái —ki tudja miért— *egyetlen* partnerre hárulnak. Jegyezzük tehát meg: a kereslet saját- (aszimmetria) rugalmassága és a vállalati árflexibilitás *értékei* —annak ellenére, hogy képleteik megtévesztő módon egymás inverzei— nem állnak reciprok viszonyban, hiszen *nem ugyanazon* keresleti görbe viselkedését jellemzik.



6. ábra. A maradék, aszimmetria, és az aggregált keresleti görbék viszonya homogén iparág esetén

A vállalati árflexibilitás, a termékár és —az ábrán ugyancsak képviseltetett— határbevétel (MR) között az

$$MR = P(1 - |\varphi_S|) \tag{30}$$

formulával kifejezhető kapcsolat írható fel, amelynek levezetése többek között ugyancsak fellelhető Varian [1991] könyvében (346-347. o.). A szerző azonban, amikor a most közölt alakhoz ér, jellemző módon így folyatja: ,,Mi lesz a zárójelben lévő második tag? *Nem, sajnos ez nem az árrugalmasság*, de igen közel van hozzá. Ez a rugalmasság reciproka." (uo., *B.J.* kiemelése). Majd a számára ,,értelmetlen", *nem nevesített* tagot —az ár kínálati flexibilitását— a jól ismert (?) árelaszticitás inverzeként szerepeltetve végre sikerül ,,megnyugtató" formára hoznia a képletet.

A (30) összefüggés az árflexibilitás és a vállalat *gazdasági erőfölényének* viszonyát taglalva bizonyul számunkra hasznosnak. De mit is kell értenünk gazdasági vagy piaci erőfölényen? ,,Minden olyan esetben, amikor egy vállalat *képes befolyásolni a termékeiért kapott árat*, azt mondjuk, hogy a vállalat monopolerővel (monopoly power) vagy piaci erőfölénnyel (market power) rendelkezik. [... Ezeket a] fogalmakat [...] használják annak leírására, hogy a versenyzői szintnél (a határköltségnél) magasabb ár profitot eredményez” — fogalmaz Carlton és Perloff ([2003] 122. o., *B.J.* kiegészítése és kiemelése). E definíció alapján viszont természetesnek tűnik, hogy a piaci hatalom mérésére —legalábbis egyfajta lehetőségként— a kínálat árflexibilitását alkalmazzuk.

Ha a (30) formulából $|\varphi_S|$-t kifejezzük, akkor az

$$|\varphi_S| = \frac{P - MR}{P} \tag{31}$$

összefüggést nyerjük, amelynek értéke *valamely kibocsátási szintnél az ár és határbevétel közötti rés relatív nagyságát méri a teljes árhoz képest.* Elemzésével arra a következtetésre jutunk, hogy egy meghatározott termelési tartomány fölött *a keresleti- és határbevétel-görbe relatív távolsága a cég ármeghatározó képességével van kapcsolatban. Tiszta versenyző* vállalat esetén például —amikor a rendkívül alacsony termelési nívó mellett a két görbe közötti rés elenyésző— az árflexibilitás (vagyis a piaci hatalom) várakozásainknak megfelelően *zérus*. Egyúttal belátható, hogy *magas kibocsátási nagyságok felé haladva* —a keresleti és MR-görbék távolodásával— $|\varphi_S|$, vagyis *a monopolerő szintje is egyre nagyobb.*

Az „erőfölény” terminushoz azonban a *normál profit nívóját meghaladó nyereségesség* képzete is erősen kapcsolódik. Erre fókuszál *A. Lerner* orosz származású angol közgazdász ötlete, aki az 1900-as évek közepén a monopolista hatalom mérésére szolgáló legismertebb eljárást dolgozta ki. Gondolatmenete szerint a gazdasági erőfölény fokát jól tükrözi, hogy *a kibocsátás bizonyos szintjét feltételezve* mennyire képes a vállalat (a profit javára) megdézsmálni a fogyasztói többletet. Mivel a fogyasztói többlet lefölözése attól függ, hogy mennyire tér el az érvényesített ár a tiszta versenyző piacon érvényes nagyságától, vagyis a határköltségtől, a *Lerner-index* (L) ezt a különbséget fejezi ki valamely kínálathoz tartozó keresleti ár %-ában. Ennek értelmében —az egyszerűség kedvéért feltételezve a vizsgált cég határ- és átlagköltség-görbéinek *vízszintes* (egymást fedő) pozícióit— a monopolerő foka nem más, mint

$$L = \frac{P - LMC}{P}\,, \tag{32}$$

ahol LMC a (hosszú távon érvényes) határköltség.

Belátható, hogy az index nagysága

- a *tiszta versenyző* vállalatra jellemző kibocsátásnál *zérus*, hiszen

  $$LMC = MR \to P \tag{33}$$

  érvényesül,

- *alacsonyabb kibocsátási szinteknél magasabb*, hiszen a maradék-keresleti görbe mentén az egységár ebben az irányban emelkedik, továbbá

- az *árbevétel profitfedezeti részének %-aként* is értelmezhető.

Lerner szerint tehát a cég annál erősebben érvényesíti monopolhatalmát, minél nagyobb szűkösséget teremt a piacon, vagyis minél kisebb kínálattal jelentkezik, hiszen ekkor az ár és a határ- (átlag-) költség közötti rés tágul. Vegyük észre, hogy a Lerner-index —furcsa módon— a piaci hatalom éppen *ellentétes* irányú változását jelzi az árflexibilitáshoz képest, ha a kibocsátás növekszik vagy csökken. Ez a paradoxon azonban látens marad, ha a szakírók által követett —Lerner eredeti koncepcióját némileg nagyvonalúan kezelő— szokás szerint *a cég erőfölényét az optimális kibocsátási szintjénél mérjük.* Itt a határköltség és határbevétel egyenlőségének köszönhetően a két megközelítés azonos értéket ad, vagyis

$$L = \frac{P - (MC = MR)}{P} = |\varphi_S| = s/\varepsilon_{\Sigma D} \; . \tag{34}$$

Ha azt is feltételezzük, hogy az iparág azonos méretű vállalatokból áll, akkor Carlton és Perloff könyvéből meggyőződhetünk róla, hogy a vállalati árflexibilitás mértéke —a Lerner-index közvetítésével— a piaci koncentráltságra utaló Herfindahl–Hirschmann-indexszel (H) is kapcsolatba hozható ([2003] 301. o.):

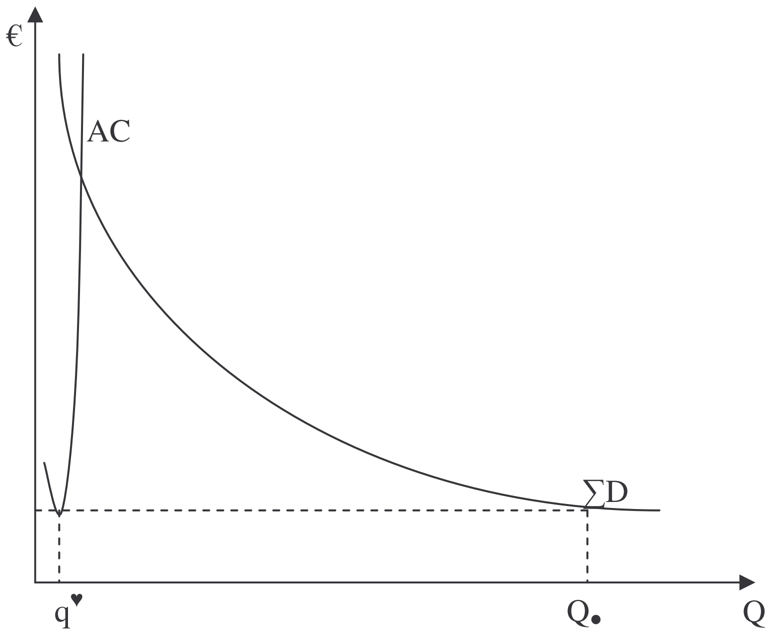
$$|\varphi_S| = L = H/\varepsilon_{\Sigma D} \; . \tag{35}$$

Végül el kell oszlatnunk egy gyakori félreértést, amely szerint a vállalat piachoz mért nagyságától —vagy fordítva: a piac vállalathoz viszonyított méretétől— függne a cég árbefolyásoló képessége. Ehhez azonban előbb definiálnunk kell *a piac relatív méretét* (viszonylagos szűkösségét-tágasságát), amely egy iparág reprezentáns vállalatának esetében az az *arány, amely az átlagköltség- (AC-) görbe minimumának nívóján mért piaci összkereslet és az optimális üzemnagyságnak megfelelő kibocsátás között áll fenn.* A kereslet (piac) relatív mérete végső soron arról tudósít, hogy *hány azonos méretű vállalat „férne" el a piacon oly módon, hogy éppen megtérülnének költségeik.* A *7. ábrának* megfelelően ez a

$$\Psi = Q_\bullet / q^\heartsuit \tag{36}$$

képlettel határozható meg. Minél nagyobb Ψ, a piac annál „tágabbnak" számít a vállalathoz képest.

A hétköznapi gondolkodás alapján elvárnánk, hogy egy, a piachoz képest „porszemnyi", miniatűr vállalat *árelfogadó* legyen. Ez az anticipáció azonban két *különböző*, tehát nem mindig együtt fellépő jelenség: a cég —piachoz viszonyított— elenyésző méretének, *versus* jelentéktelen iparági részesedésének azonosításából, összekeveréséből ered. Könnyen belátható ugyanis, hogy az alacsony iparági részesedés ugyan majdnem mindig implikálja a vállalat kis méretét, fordítva azonban ez nem igaz.



7. ábra. A piac relatív mérete

Ábránk éppen arra világít rá, hogy ha egy *hiperbola* írja le legjobban a piaci ár és az aggregált vásárlási szándék viszonyát, akkor egy *rendkívül kis kapacitású*, s ezért *nagyon tág piacon* megjelenő *monopólium* kínálatának árflexibilitása *egységnyi*, kvázi *ármeghatározó* státuszt indikáló. Egy *ugyanekkora, de sok, hasonló méretű vállalat társaságában működő* cég kínálata ezzel szemben alacsony flexibilitású lesz — nem utolsósorban a maradék-keresleti görbe függőleges *tengelymetszetének* létéből fakadóan. A piacot *kitöltő* cég ugyanakkor nem lehet *price taker* szereplő, hiszen AC-görbéjének minimuma és a piaci keresleti görbe közötti kis távolság csak ez utóbbi negatív meredeksége, tehát a (29) nevezőjének alacsony rugalmassága mellett jelenhet meg.

5 Összegzés

Tanulmányunk eddigi fejezeteiben az árelfogadó/ármeghatározó fogalmak egzakt tartalmi meghatározására tettünk kísérletet. Ennek során fontosnak tekintettük, hogy e kifejezéseket a vállalatok bizonyos *képességeire* alkalmazzuk, szemben az *árakra orientált* versus *kínálatra (mennyiségre) orientált* megjelölésekkel, amelyeket a valóban megfigyelhető —de a képességeket nem mindig tükröző— piaci *viselkedés* irányultságának jellemzésére javasolunk.

A dolgozatban *árelfogadóként* definiáltuk azokat a vállalatokat, amelyek *kínálatuk parciális változtatásával nem tud(ná)nak outputjuk keresleti árára hatni, továbbá az árakra orientált viselkedés sem lenne számukra racionális.*

Az ármeghatározók körébe soroltuk ezzel szemben azokat a szereplőket, amelyek *kínálatuk —ceteris paribus— módosításával képesek (lennének) befolyásolni a keresleti árat, az árakra orientált magatartás pedig* ezzel összhangban *eszköztáruk racionális eleme lehet.*

Törekedtünk arra is, hogy rávilágítsunk a *price taker* szereplők *vízszintes*, és a *price maker* szereplők *negatív meredekségű* —egyfajta rekvizitumként szolgáló— keresleti görbéinek valódi természetére és jelentésére. Ezt azért éreztük rendkívül lényegesnek, mert mint bemutattuk, a szakirodalmi források —fölöttébb felületesen— hajlamosak arra, hogy az ár*elfogadó* pozíciót a *homogén*, az ár*meghatározó* pozíciót pedig a *heterogén* verseny attributumának tartsák, az ilyen vagy olyan helyzetű görbékkel (azok *árrugalmasságával*) pedig e téves koncepciót hordozó eseteket jellemezzék. Figyelmeztettünk tehát, hogy *a verseny homogén/inhomogén és a szereplők árelfogadó/ármeghatározó tulajdonsága a piaci típusok két, egymástól független logikai eleme, amelyek karakterizálására kétféle keresleti görbe (aszimmetria és reziduális) különíthető el.* Ezek közül *az aszimmetria görbék meredeksége az iparági outputok helyettesítő viszonyának szorosságára utal, amely nincs közvetlen kapcsolatban a kínálati szereplők általunk értelmezett ármeghatározó versus -elfogadó lehetőségével. A maradék-keresleti görbe vállalat által „belátható" szakasza ugyanakkor éppen ez utóbbi vonatkozásban nyújt információkat, míg a verseny szorosságának jelzésére direkt módon nem alkalmas.*

Nem véletlen, hogy a kétféle keresleti funkció analízise során külön-külön *vagy csak az „egyenes" (ár → mennyiség), vagy csak az „inverz" (mennyiség → ár) megközelítés tekinthető relevánsnak.* Azaz, mivel az *aszimmetria* típusú görbék olyan magatartás leképezésére predesztináltak, amely az árakat tekinti a vállalat(ok) döntési változójának, ezért ezek esetében —értelmes módon— *a kereslet árrugalmassága* határozható meg. A *maradék*-keresleti görbe ugyanakkor —mivel a vállalati kínálat piaci árra gyakorolt hatását szemlélteti— *az ár kínálati flexibilitásával* jellemezhető. Ez utóbbi nagyság — amelyről megállapítottuk, hogy *a vállalat piaci részesedésével arányosan, az aggregált kereslet árrugalmasságával pedig fordított irányban* alakul— egyúttal egy cég price maker/price taker potenciáljának mérésére is szolgál. Az ármeghatározó (-elfogadó) pozíció megszerzésére eszerint akkor lehet számítani, ha

- a vállalat termelése minél nagyobb (kisebb) hányadát képviseli az iparág teljes kibocsátásának, vagy/és
- minél rugalmatlanabbul (rugalmasabban) reagál a teljes kereslet az árak változására.

Cikkünk *első* részében *homogén* iparág körülményei között vizsgálódtunk. A tanulmány *második* részében eredményeinket egy olyan modell keretei között kívánjuk *általánosítani*, amely —egyformán befogadva a *sokszereplős versus monopolista*, más szempontból a *homogén versus differenciált* iparág specifikumait— a végleteket határesetként kezeli.

Irodalom

1. Bara Z. (1989): Piaci formák, piaci szerkezetek. In: Kopányi M. (szerk.) *Mikroökonómia*, Economix, Budapest
2. Barancsuk J. (1998): *A fogyasztói többlet: Egy közgazdasági kategória története*, Janus Pannonius Egyetemi Kiadó, Pécs
3. Bator, F. M. (1958): The Anatomy of Market Failure, *The Quarterly Journal of Economics*, 8.
4. Blaug, M. (2003): Elmélettörténetet ne! Közgazdászok vagyunk! In: *Tantörténet és közgazdaságtudomány* (szerk. Bekker Zsuzsa), Aula, Budapest, 233–256.old.) [*Journal of Economic Perspectives*. vol. 15, pp. 145–164., 2001]
5. Carlton, D. W. — Perloff, J. M. (2003): *Modern piacelmélet*, 3rd, Panem, Budapest [Pearson Education, Inc., publ. as Addision Wesley Longman & Comp., 2000]
6. Chamberlin, E. H. (1933): *The Theory of Monopolistic Competition*, Cambridge of Mass., Harvard University Press
7. Coase, R. H. (2004a): A vállalat természete, In: A vállalat, a piac és a jog, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 53–83. o. [*Economica*, új sorozat, 4. évf., november, 386–405. p., 1937]
8. Coase, R. H. (2004b): Megjegyzések a társadalmi költség problémájához, In: A vállalat, a piac és a jog, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 215–254. o. [In: *The Firm, the Market, and the Law.* University of Chicago Press, Chicago, 1959]
9. Daubner K. — Vági M. (1993): Oligopol piac és monopolisztikus verseny. In: Kopányi M. (szerk.) *Mikroökonómia*, Műszaki Könyvkiadó — AULA, Budapest
10. Friedman, M. (1986): A pozitív közgazdaságtan módszertena, In: *Infláció, munkanélküliség, monetarizmus* (vál.), KJK, Budapest [In: Essays in Positive Economics, The University of Chicago Press, 3–43., Chicago, 1953]
11. Gamow, G. — Cleveland J. M. (1977): *Fizika*, Gondolat, Budapest [Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1969]
12. Heisenberg, W. (1975): *A rész és az egész: Beszélgetések az atomfizikáról* (vál.), Gondolat, Budapest
13. Henderson, J. M. — Quandt, R. E. (1971): *Microeconomic Theory: A Mathematical Approach*, McGraw-Hill Book Company, New York, London
14. Heyne, P. (1991): *A gazdasági gondolkodás alapjai*, Tankönyvkiadó, Budapest [Macmillan Publ. Comp. 3rd ed., New York, 1991]
15. Kornai J. (1997): Előszó Scitovsky Tibor könyvéhez. In: *Egy „büszke magyar” emlékiratai*, Közgazdasági Szemle Alapítvány, Budapest
16. Lerner, A. P. (1943): The Concept of Monopoly and the Measurement of Monopoly Power, *Review of Economic Studies* 6
17. Marshall A. (1930): *Principles of Economics*, Macmillan and Co., Limited St Martin's street, London
18. Mátyás A. (1999): *A modern közgazdaságtan története*, Aula, Budapest
19. Neumann J. (1965): *Válogatott előadások és tanulmányok*, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest
20. Olson, M. — McFarland, D. (1962): The Restoration of Pure Monopoly and the Concept of the Industry, *Quarterly Journal of Economics* 4

21. Pearce, D. W. (szerk.) (1993): *Macmillan Dictionary of Modern Economics — A modern közgazdaságtan ismerettára*, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest
22. Porter, M. E. (1993): *Versenystratégia*, Akadémiai Kiadó, Budapest [Free Press, A Division of Macmillan, Publ. Co., New York, 1980]
23. Samuelson, P. A. — Nordhaus, W. D. (2003): *Közgazdaságtan*, 16. ed., KJK-KERSZÖV Jogi és Üzleti Kiadó, Budapest [McGraw-Hill Comp. Inc. New York, 1998]
24. Schumann, J. (1998): *A mikroökonómiai elmélet alapvonásai*, 6. ed., JATE-Press, Szeged [Auflage Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1992]
25. Scitovsky T. (1951): *Welfare and Competition*, Allen & Unwin, London
26. Scitovsky T. (1997): *Egy „büszke magyar" emlékiratai*, 3. ed., Közgazdasági Szemle Alapítvány, Budapest
27. Stigler, G. J. (1989): Verseny, In: *Piac és állami szabályozás* (vál.), Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest [In: International Encyclopedia of the Social Sciences, vol. 3., Crowell-Collier and Macmillan Inc., 1968]
28. Triffin, R. (1940): *Monopolistic Competition and General Equilibrium Theory*, Harvard University Press, Cambridge, Mass.
29. Varian, H. R. (1991): *Mikroökonómia középfokon: Egy modern megközelítés*, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest [W. W. Norton & Comp., New York, London, 1987]
30. Zalai E. (2000): *Matematikai közgazdaságtan*, KJK-Kerszöv Jogi és Üzleti Kiadó, Budapest

A CONTRIBUTION TO THE CLARIFICATION OF „PRICE TAKER" AND „PRICE MAKER" TERMS

Our paper contributes to the clarification of Scitovsky's concepts written in the title that are often used without due foresight in standard microeconomics. In the first part of the paper, we examine (at first, within a *homogenous* industry) the reasonable ways of explaining and quantifying the agents' price taking/price making behaviour (in the *supply* side of the economy). While paying special attention to the examination of the *demand* side rules as a logic context, we attempt to answer the following questions: What is the difference between the „price maker" company and the „price-oriented" company? Why does the demand curve that indicates the *price taker (maker)* position lack price elasticity? How is the degree of the companys' price making capacity related to the degree of monopolistic power and the relative capaciousness of the market?

CONTENTS

TARTALOM

SZIGMA
Matematikai-közgazdasági folyóirat

A Gazdaságmodellezési Társaság lapja

Terjeszti a Gazdaságmodellezési Társaság

ISSN 0039-8128

www.szigma.ktk.pte.hu