ARBITRÁZS NAGY PÉNZÜGYI PIACOKON[1]

RÁSONYI MIKLÓS
MTA Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete

Pénzügyi piacok olyan matematikai modelljeivel foglalkozunk, melyekben termékek egy végtelen sorozata van jelen. Ilyen piacok arbitrázselméletének új eredményeiről adunk áttekintést. Az arbitrázsmentesség és a martingálmértékek létezése közötti kapcsolatot vizsgáljuk, elsősorban a klasszikus ,,arbitrázs árazási elmélet"-tel összefüggésben.

1 Bevezetés

A dolgozat célja az arbitrázs fogalmi tisztázása és vizsgálata olyan esetekben, amikor a piaci szereplőknek befektetési lehetőségek egész sokasága áll a rendelkezésére. Ilyenkor a kockázat mérsékelhető azáltal, hogy tőkéjüket számos különböző termékbe fektetik. Mindazonáltal továbbra sem állhatnak fenn tartósan arbitrázslehetőségek.

Nagy piac alatt tehát azt értjük, hogy nagyon sok termékkel lehet kereskedni. Példa erre a globális világgazdaság, de nagy piacnak tekinthetjük pl. az Egyesült Államokban forgalomban lévő különböző lejáratú és kibocsátójú kötvények öszszességét is.

A matematikai modellben ezért ugyanúgy indokolt megszámlálhatóan végtelen sok termék szerepeltetése, mint ahogyan a statisztikában is megfigyelések végtelen sorozatára vonatkozó aszimptotikus eredményekkel dolgozunk nagy minták esetén.

A cikkünk 2. szakaszában bemutatott piacmodellt S. A. Ross [23] úttörő munkája óta szokás vizsgálni. A minket foglalkoztató alapvető kérdések: Hogyan célszerű definiálni az arbitrázs fogalmát? Milyen feltételeket kell teljesíteniük a modellparamétereknek, hogy ne léphessen fel arbitrázs? Hogyan árazzunk származékos termékeket egy nagy piacon?

Az utóbbi másfél évtized pénzügyi matematikai eredményei megmutatták, milyen szoros az összefüggés a derivatív termékek árazása, illetve a piac arbitrázsmentessége között, lásd a 3. szakaszt. A 4. szakaszban rámutatunk, hogyan kapcsolódik az arbitrázs korszerű elmélete a korábbi lineáris árazási módszerekhez; ez utóbbiakról a jelen szakasz hátralévő részében ejtünk szót. Az 5. szakaszban potenciális jövőbeli kutatási irányokra utalunk.

Az elméleti közgazdaságtan egyik hagyományos megközelítése az árazási problémához a CAPM ("Capital Asset Pricing Model"), mely szerint egyensúlyban lévő piacon az egyes termékek várható hozama lineárisan függ a

[1] A szerző köszönetet mond az OTKA T 047193 és F 049094 szerződések alapján kapott támogatásért. Beérkezett: 2004. augusztus 29. e-mail: rasonyi@sztaki.hu.

termék “bétájától”. Ez a β az adott termék és a piaci portfólió (mikor az egész piacot egyetlen portfóliónak tekintjük) közötti korreláció egy mérőszáma, lásd a második szakaszban bemutatott modellt.

A CAPM elmélet J. Lintner [19], W. Sharpe [25] és J. Mossin [20] nevéhez fűződik; a [8] könyv alapos bevezetést nyújt ebbe a tárgykörbe. Bármennyire csábító egy ilyen lineáris összefüggés megléte, ez nem bizonyult mindig a tapasztalattal egybevágónak, s az elmélet bizonyos előfeltevései (normális eloszlású hozamok, kvadratikus hasznossági függvény) is megkérdőjelezhetőek.

S. A. Ross [23] cikkében merőben új kiindulópontokból jutott el hasonló következtetésekhez: ha kellően sok termék van a piacon és nincsenek arbitrázslehetőségek, akkor a CAPM által jósolt lineáris függés *közelítőleg* fennáll. Ez utóbbi elméletet “Arbitrage Pricing Theory” (APT) néven tartják számon.

2 Az APT modell

Röviden ismertetjük Ross APT modelljének egy egyszerű esetét, némileg módosítva, lásd [22]-t részletesebb tárgyalásért.

Megszámlálhatóan végtelen sok terméket tekintünk. Feltesszük, hogy mindegyik termék egységnyi mennyisége \$1-ba kerül ma. Legyen az n-edik termék ára R_n egy adott T jövőbeli időpontban, $n \in \mathbb{N}$.

Legyen továbbá $R_0 = 1 + r$ konstans (azaz létezzen kockázatmentes befektetés), R_n, $n \geq 1$ pedig valószínűségi változók. Tételezzük fel, hogy a piacot alapvetően egy véletlen forrás (faktor) határozza meg, ehhez persze még hozzájönnek az egyes termékek saját kockázatai. Véges sok közös faktor esete is hasonlóan tárgyalható.

A matematikai modellben egy $(-\ ,\mathcal{F},P)$ valószínűségi mezőt veszünk; a közös faktort az ε_1 valószínűségi változó testesíti meg, a termékek egyedi kockázatait pedig ε_i, $i \geq 2$ írják le, legyenek ezek (teljesen) függetlenek. Feltesszük, hogy az első termék ára, R_1, kizárólag a közös kockázati tényezőtől függ. Másképpen fogalmazva, feltesszük, hogy e közös faktor maga is adható-vehető. Ez például fennáll akkor, ha valamely tőzsdeindexet vagy a fentebb már említett piaci portfóliót tekintjük. A kockázati tényezőktől való függést lineárisnak vesszük.

A következő formális modellhez jutunk:

$$R_1 = 1 + \mu_1 + \sigma_1\varepsilon_1, \quad R_n = 1 + \mu_n + \beta_n\varepsilon_1 + \sigma_n\varepsilon_n,\ n \geq 2,$$

ahol a μ_n, β_n, σ_n konstansok és feltesszük, hogy $E\varepsilon_n = 0,\ E\varepsilon_n^2 = 1,\ n \in \mathbb{N}$. Ekkor μ_n éppen ER_n-1-el, az n-edik termék várható hozamával egyezik meg. Teljesüljön még, hogy a termékek saját kockázatát kifejező szórás korlátos:

$$\sup_i |\sigma_i| < \infty,$$

azaz egy termék saját kockázata nem szökhet az égig.

Egy adott befektető egyszerre véges sok (mondjuk k) termékkel kereskedhet, de ez a k bármilyen nagy lehet. Tetszőlegesen eldöntheti bármely $1 \leq i \leq$

k-re, hogy az i-edik termékből mennyit vásárol, jelölje ezt a mennyiséget ϕ_i; ez bármilyen előjelű lehet (vagyis fedezetlenül is eladhatunk). Ha kezdőtőkéje c, a kockázatmentes befektetés ϕ_0 mennyiségét úgy kell megválasztani, hogy

$$\sum_{i=0}^{k} \phi_i = c \tag{1}$$

teljesüljön, ezt *önfinanszírozási feltétel*nek nevezzük.

A ϕ portfólió értéknövekedése a T időpontig

$$V(\phi) := \sum_{i=0}^{k} \phi_i R_i - c = \sum_{i=0}^{k} \phi_i (R_i - 1) \; .$$

1. definíció. *Azt mondjuk, hogy a piacon* aszimptotikus arbitrázs *van jelen, ha $c = 0$ és létezik természetes számok olyan n_k, $k \in I\!N$ növő sorozata és olyan ϕ_{n_k} önfinanszírozó portfóliók az n_k terméket tartalmazó piacon, hogy*

$$EV(\phi_{n_k}) \to C > 0, \quad D^2(V(\phi_{n_k})) \to 0, \quad k \to \infty \; .$$

Vagyis akkor beszélünk aszimptotikus arbitrázsról, ha 0 kezdőtőkéből egyre nagyobb piacokon kereskedve a befektetőnek módja nyílik pozitív átlagos hozamot produkálnia s egyszersmind kockázatát tetszőlegesen kicsire csökkentenie. A kockázatot jelen esetben a szórással mérjük.

A gyakorlatban egy ilyen arbitrázslehetőség jelenléte azt jelenti, hogy elegendően sok termékből már összeállítható pozitív hozamú portfólió, melynek szórása kisebb egy általunk megadott (tetszőlegesen kicsiny) küszöbnél. Ilyen portfólió konkrétan is megadható, lásd [9]-et vagy [10] 5. szakaszát.

Az APT alaptétele a következő:

1. tétel. *Ha nincsenek aszimptotikus arbitrázslehetőségek, akkor létezik olyan $\gamma \in I\!R$, hogy*

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\mu_i - r - \beta_i \gamma)^2 < \infty \; . \tag{2}$$

Megmutatható, hogy a γ konstans éppen $(\mu_1 - r)/\sigma_1$-gyel egyenlő.

A tétel lényege, hogy arbitrázsmentes piacon $\mu_i - r$ (az átlagos hozamok kockázatos része) nagy i-re körülbelül lineárisan függ az adott i-edik termék "betájától". Az eltérés gyorsan 0-hoz tart (még az eltérések négyzetösszege is véges), tehát a CAPM alapösszefüggésének ($\mu_i = r + \beta_i \gamma$) egy aszimptotikus változatát kapjuk. Láthatóan $\beta_i \sigma_1$ éppen $\mathrm{cov}\,(R_i, R_1)$-gyel egyenlő, tehát β_i egy korreláció jellegű mennyiség.

Ez az eredmény először S. A. Ross [23] cikkében jelent meg. G. Huberman [9] dolgozatában világos és matematikailag kifogástalan levezetést adott, lásd úgyszintén a [10] áttekintést. A γ konstans értéke ugyanaz, mint a CAPM alaprelációjában, de az APT esetében ezt csak az [1] cikkben mutatta meg A. Admati és P. Pfleiderer.

A modell több szempontból kifogásolható: az ε_i véletlen mennyiségeknek kell, hogy létezzen a második momentuma, holott a hozamok modellezésénél sokszor vastag farkú, pl. stabil eloszlásokat is használnak, lásd [24, 6] és az utóbbiban szereplő hivatkozásokat. Egy másik gyenge pont a szórás, mint kockázati mérőszám használata: ez az átlagtól felfelé való eltérést ugyanúgy veszi figyelembe, mint a lefelé való eltérést, noha nyilván nem mindegy, hogy az átlagosnál többet vagy kevesebbet jövedelmez az adott értékpapír. A 4. szakaszban látni fogjuk, hogyan küszöböli ki az újabb elmélet ezeket a fogyatékosságokat.

3 Kockázatsemleges árazás

Az arbitrázsmentes piacok vizsgálata más okból is az érdeklődés homlokterébe került. F. Black és M. Scholes [2] cikkükben az opciók olyan árazási módszerét javasolták, melyben ún. *kockázatsemleges árazó funkcionálok* jutnak szerephez.

Ezek a leggyakrabban alkalmazott modellekben olyan valószínűségi mértékeknek felelnek meg, melyekre nézve az árfolyamatok ún. *martingálok.* Az ilyeneket röviden *martingálmértéknek* nevezzük.

Régóta ismert, hogy ha egy szerencsejátékban a játékos összes nyeresége (vagy vesztesége) a t időpontig M_t, és az M_t folyamat martingált alkot, akkor nem lehetséges biztos nyereséghez jutnia. A modern pénzügyi matematika egyik legfontosabb észrevétele a fenti megfigyelés megfordítása, azaz

Metatétel. *Ha nincs kockázat nélküli haszon (arbitrázs), akkor van olyan, az objektív valószínűséggel ekvivalens valószínűségi mérték, melyre nézve a piacon lévő termékek diszkontált árfolyamatai martingálok.*

Ezt a kijelentést a ,,Származékos termékek árazásának alaptétele”-ként szokás emlegetni; valójában inkább egy általános alapelvről van szó, melyet azonban a konkrét modellosztályokban mindig igazolni kell. Először olyan modelleket vizsgáltak, ahol a kereskedés diszkrét időpillanatokban történik; a metatételt [7]-ben mutatták meg véges valószínűségi mező esetére, majd [3]-ban az általános esetre. Ez a kiterjesztés már mélyebb matematikát igényelt, [13]-ban egyszerű bizonyítás található erre a szép eredményre.

A további fejlemények a valószínűségszámítás és a funkcionálanalízis egyre nehezebb fejezeteit használták. Szükségessé vált az arbitrázs fogalmának kibővítése: folytonos időparaméterű modellekben (azaz ahol a kereskedés folytonosan történik) ahhoz, hogy martingálmértékeket kaphassunk, fel kell tenni, hogy még befektetések limeszeként sem lehetséges arbitrázshoz jutni. Evégett az 1. definícióban bemutatott aszimptotikus arbitrázshoz hasonló fogalmak születtek, melyekben különféle módokon kell határértéket venni (pl. sztochasztikusan vagy 1 valószínűséggel). A 4. szakaszban konkrét példát is mutatunk erre. A terjedelmes irodalomból most csak a [5, 18] cikkekre és [10]-re utalunk.

Nézzük meg most, mit értünk martingálmértéken az APT modellben!

2. definíció. *Azt mondjuk, hogy a Q valószínűségi mérték martingálmérték az APT modellben, ha minden $n \in I\!N$ esetén*

$$E^Q R_n = 1 + r,$$

azaz e mérték szerint minden termék átlagos hozama megegyezik a kockázatmentes hozammal.

4 A két elmélet összefonódása

Elsőként a [11] dolgozat vizsgálta nagy piacokon az arbitrázsmentesség és a martingálmértékek kapcsolatát. Ezt [16], [17], [12], [14], [15], [4] követték. Jó áttekintést ad e témáról a [10] tanulmány.

Példaképpen a [15] cikk egy aszimptotikus arbitrázsfogalmát ragadjuk ki:

3. definíció *Azt mondjuk, hogy az NFLBR feltétel ("no free lunch with bounded risk") teljesül, ha a $c = 0$ a kiindulási tőke esetén nincsen olyan n_k, $k \in I\!N$ növő sorozat és ϕ_{n_k} önfinanszírozó portfóliók az n_k terméket tartalmazó piacon, hogy*

$$V(\phi_{n_k}) \stackrel{st}{\rightarrow} V,$$
$$\text{van olyan } A > 0, \text{ hogy minden } k\text{-ra, } V(\phi_{n_k}) \geq -A,$$
$$V \geq 0 \text{ és } P(V > 0) > 0.$$

Itt $X_n \stackrel{st}{\rightarrow} X$ azt jelenti, hogy valószínűségi változók egy X_n sorozata sztochasztikusan tart az X-hez.

A második feltétel azt jelenti, hogy az arbitrázsügyletek során nem lehet korlátlan hitelt felvenni, ez meglehetősen természetes feltételezés.

Látható e definíció számos előnye: már nem követeljük meg, hogy az árfolyamat második momentuma létezzen, és szakítunk a szórás mint kockázati mérték használatával.

Az elmélet tipikus tételei a következő módon festenek (a zárójeles példa mindig a [15] cikkre vonatkozik): ha nincs aszimptotikus arbitrázs (pl. NFLBR igaz) árfolyamatok egy adott osztályában (pl. folytonos trajektóriájú folyamatok), akkor léteznek jó tulajdonságokkal bíró kockázatsemleges árazó funkcionálok (pl. a piac minden véges szegmensén létezik martingálmérték, és ezek sorozata „szépen viselkedik").

Sajnos, az ismert eredmények jó része csak meglehetősen komplikált és nehezen megragadható módon szolgáltat kockázatsemleges árazó funkcionálokat: az előző bekezdés példájában mindössze ilyenek egy sorozatát kapjuk. Fontos volna feltételeket találni a 2. definícióban szereplő martingálmérték létezésére.

Ez a [21] és [22] közlemények kiindulópontja. E két cikk (mint korábban [12] is) a 2. szakaszbeli APT modellt vizsgálja. [21] szükséges és elégséges feltételt ad martingálmértékek létezésére egy bizonyos erős értelemben, ez a kritérium alkalmazható olyan modellekben is, ahol a hozamokat stabil eloszlású valószínűségi változókkal írják le, mint például [6]-ban. A [22] cikk a klasszikus APT-ben ad feltételt kockázatsemleges árazó mérték létezésére:

2. tétel. *Bizonyos technikai feltételek megléte esetén ha nincs aszimptotikus arbitrázs az 1. definíció értelmében, akkor létezik Q martingálmérték (a 2. definíció szerinti értelemben).*

5 Nyitott kérdések

Továbbra sem ismeretesek pontos, általános feltételek arra nézve, hogy egy nagy piacon létezzék martingálmérték. Másik, a gyakorlat szempontjából lényeges probléma: találjunk a (2)-höz hasonló relációkat, melyeknek egy arbitrázsmentes piacon teljesülniük kell. Az ilyen összefüggéseket arbitrázs kimutatására lehetne használni pl. kötvénypiacok esetében.

Irodalom

1. A. Admati and P. Pfleiderer. Interpreting the factor risk premia in the arbitrage pricing theory. *J. Econom. Theory*, 35(1):191–195, 1985.
2. F. Black and M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *J. Political Econom.*, 72:637–659, 1973.
3. R. C. Dalang, A. Morton, and W. Willinger. Equivalent martingale measures and no-arbitrage in stochastic securities market models. *Stochastics and Stochastic Rep.*, 29(2):185–201, 1990.
4. M. DeDonno. A note on completeness in large financial markets. *Math. Finance*, 14(2):295–315, 2004.
5. F. Delbaen and W. Schachermayer. A general version of the fundamental theorem of asset pricing. *Math. Ann.*, 300(3):463–520, 1994.
6. B. Gamrowski and S. T. Rachev. Stable models in testable asset pricing. In *Approximation, probability, and related fields (Santa Barbara, CA, 1993)*, 223–235. Plenum, New York, 1994.
7. J. M. Harrison and S. R. Pliska. Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading. *Stochastic Process. Appl.*, 11(3):215–260, 1981.
8. C. Huang and R. H. Litzenberger. *Foundations for financial economics.* North-Holland, New York, 1988.
9. G. Huberman. A simple approach to arbitrage pricing theory. *J. Econom. Theory*, 28(1):289–297, 1982.
10. Yu. M. Kabanov. Arbitrage theory. In *Handbooks in Mathematical Finance: Topics in Option Pricing, Interest Rates and Risk Management.* Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
11. Yu. M. Kabanov and D. O. Kramkov. Large financial markets: asymptotic arbitrage and contiguity. *Theory Probab. Appl.*, 39(1):182–187, 1994.
12. Yu. M. Kabanov and D. O. Kramkov. Asymptotic arbitrage in large financial markets. *Finance Stoch.*, 2(2):143–172, 1998.
13. Yu. M. Kabanov and Ch. Stricker. A teachers' note on no-arbitrage criteria. In *Séminaire de Probabilités, XXXV*, 149–152. Springer, Berlin, 2001.
14. I. Klein. A fundamental theorem of asset pricing for large financial markets. *Math. Finance*, 10(4):443–458, 2000.

15. I. Klein. Free lunch for large financial markets with continuous price processes. *Ann. Appl. Probab.*, 13(4):1494–1503, 2003.
16. I. Klein and W. Schachermayer. Asymptotic arbitrage in non-complete large financial markets. *Theory Probab. Appl.*, 41(4):780–788, 1996.
17. I. Klein and W. Schachermayer. A quantitative and a dual version of the Halmos-Savage theorem with applications to mathematical finance. *Ann. Probab.*, 24(2):867–881, 1996.
18. D. M. Kreps. Arbitrage and equilibrium in economies with infinitely many commodities. *J. Math. Econom.*, 8(1):15–35, 1981.
19. J. Lintner. The valuation of risky assets, and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets. *Review of Economics and Statistics*, 47:13–37, 1965.
20. J. Mossin. Equilibrium in a capital asset market. *Econometrica*, October, 1966.
21. M. Rásonyi. Equivalent martingale measures for large financial markets in discrete time. *Math. Methods Oper. Res.*, 58:401–415, 2003.
22. M. Rásonyi. Arbitrage pricing theory and risk-neutral measures. *Decis. Econ. Finance*, 27(2):109–123, 2004.
23. S. A. Ross. The arbitrage theory of capital asset pricing. *J. Econom. Theory*, 13(3):341–360, 1976.
24. G. Samorodnitsky and M. S. Taqqu. *Stable non-Gaussian random processes.* Chapman & Hall, New York, 1994.
25. W. Sharpe. Capital asset prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk. *J. Finance*, 19:425–442, 1964.

ARBITRAGE IN LARGE FINANCIAL MARKETS

We present an overview of recent results in the arbitrage theory of financial market models with an infinite sequence of assets. We analyze the relationship between absence of arbitrage and the existence of martingale measures focusing on the classical Arbitrage Pricing Theory.