DETERMINISZTIKUS ÉS VALÓSZÍNŰSÉGI ELOSZTÁSI ELJÁRÁSOK[1]

TASNÁDI ATTILA
Budapesti Corvinus Egyetem Matematika Tanszék

Az életben számtalan olyan esettel találkozunk, amikor egy jószág iránti kereslet meghaladja a rendelkezésre álló kínálatot. Példaként említhetjük a kárpótlási igényeket, egy csődbement cég hitelezőinek igényeit, valamely szerv átültetésére váró betegek sorát stb. Ilyen helyzetekben valamilyen eljárás szerint oszthatjuk el a szűkös mennyiséget a szereplők között. Szokás megkülönböztetni a determinisztikus és a sztochasztikus elosztási eljárásokat, jóllehet sok esetben csak a determinisztikus eljárásokat alkalmazzák. Azonban igazságossági szempontból gyakran használnak sztochasztikus elosztási eljárásokat is, mint például tette azt az Egyesült Államok hadserege a második világháború végét követően a külföldön állomásozó katonáinak visszavonásakor, illetve a vietnami háború során behívandó személyek kiválasztásakor.

Egy korábbi cikkben [6] egy determinisztikus elosztási eljáráshoz hozzárendeltük azokat a sztochasztikus elosztási eljárásokat, amelyek várható értékben azonos elosztást eredményeznek az adott determinisztikus eljárással. Ezek közül kitüntetettek azok a sztochasztikus elosztási eljárások, amelyek személyenként a legkisebb szórású elosztással járnak. Ilyen eljárások létezése biztosított [6, 1. tétel]. Ez az adott determinisztikus elosztási eljáráshoz társított minimális varianciájú eljárás. Mind a determinisztikus, mind a sztochasztikus elosztási eljárásokat szokás igazságossági, invariancia és más típusú tulajdonságokkal jellemezni. Például egy természetes igazságossági követelmény sztochasztikus elosztási eljárásokkal szemben, hogy az elosztás várható értékben igény arányos legyen.

Az igények és az elosztandó mennyiségek egészértékűsége mellett megvizsgáljuk, hogy melyek azok a nevezetes tulajdonságok, amelyek egy determinisztikus elosztási eljárásról szükségszerűen „átöröklődnek” a hozzárendelt minimális varianciájú elosztási eljárásokra. Ehhez előbb az 1. szakaszban definiáljuk az elosztási problémát, a determinisztikus elosztási eljárásokat és számos nevezetes tulajdonságot. Majd a 2. szakaszban tárgyaljuk a sztochasztikus elosztási eljárásokat és 1. szakaszban bevezetett tulajdonságok sztochasztikus megfelelőit. Ezek után a 3. szakaszban megvizsgáljuk, hogy egy determinisztikus elosztási eljárás mely tulajdonságai öröklődnek át a hozzája rendelt minimális varianciájú elosztási eljárásokra. Végül a 4. szakaszban röviden összefoglaljuk az elért eredményeket.

---

[1] A kutatást az OTKA (F043496) támogatta. Beérkezett: 2004. szeptember 26. e-mail: `attila.tasnadi@math.bke.hu`.

1 Determinisztikus modellkeret

Jelölje $I\!N$ a nem negatív egész számok, $I\!R_+$ a nem negatív valós számok halmazát és legyen $\mathcal{N}$ a lehetséges szereplők egy véges halmaza. Egy elemű halmazok esetén sokszor elhagyjuk majd a halmazt jelölő kapcsos zárójeleket, így például $\{i\}$ helyett általában csak egyszerűen i-t írunk, ahol ez nem vezet félreértéshez. Vektorok koordinátáit alsó indexszel jelöljük. Tetszőleges $N \subset \mathcal{N}$, $x \in I\!R^N$ és $M \subset N$ esetén vezessük be az $x_M = \sum_{i \in M} x_i$ és $x^M = (x_i)_{i \in M}$ jelöléseket. Legyen továbbá $\left(x^M, x^{N \setminus M}\right) = x$.

Egy *elosztási probléma* az $\left(N, t, (x_i)_{i \in N}\right)$ hármassal írható le, ahol $N \subset \mathcal{N}$ a szereplők halmaza, $t \in I\!N$ az N-beli szereplők részére elosztandó mennyiség és $x_i \in I\!N$ az $i \in N$ szereplő igénye.[2] Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $x_N > t$, mivel ellenkező esetben mindenki megkaphatja az általa igényelt teljes mennyiséget.

Egy r *determinisztikus elosztási eljárás* bármely $\left(N, t, (x_i)_{i \in N}\right)$ elosztási problémához hozzárendel egy $y \in I\!R_+^N$ elosztást, melyre $y_N = t$ és $0 \leq y_i \leq x_i$ minden $i \in N$-re. Ekkor azt írjuk, hogy $r(N, t, x) = y$.

1.1 Axiómák

A következőkben a determinisztikus elosztási eljárások hét nevezetes tulajdonságát vesszük sorra. Jogos elvárás, hogy egy szereplő igényének megnövekedése, a többiek igényének változatlansága mellett, ne vezessen a megnövekedett igényű szereplő részesedésének csökkenéséhez. Ez az úgynevezett kereslet-monotonitás.

1.1 axióma. *Az r determinisztikus elosztási eljárás* kereslet-monoton, *ha*

$$x^i \leq \hat{x}^i \Rightarrow r^i\left(N, t, \left(x^i, x^{N \setminus i}\right)\right) \leq r^i\left(N, t, \left(\hat{x}^i, x^{N \setminus i}\right)\right)$$

minden $N \subset \mathcal{N}$, $i \in N$, $t, x^i, \hat{x}^i \in I\!N$ és $x^{N \setminus i} \in I\!N^{N \setminus i}$ esetén.

A kereslet-monotonitással valamelyest analóg a kínálat-monotonitás, amely szerint a kínálat növekedésével senkinek sem csökkenhet a részesedése.

1.2 axióma. *Az r determinisztikus elosztási eljárás* kínálat-monoton, *ha*

$$t \leq t' \Rightarrow r^i(N, t, x) \leq r^i(N, t', x)$$

minden $N \subset \mathcal{N}$, $i \in N$, $t, t' \in I\!N$ és $x \in I\!N^N$ esetén.

Természetes igazságossági követelmény, hogy az azonos igényű szereplők azonos mennyiségekben részesüljenek.

1.3 axióma. *Az r determinisztikus elosztási eljárás kielégíti az* egyenlő elbánás elvét, *ha*

$$x^i = x^j \Rightarrow r^i(N, t, x) = r^j(N, t, x)$$

[2] Itt úgynevezett diszkrét elosztási problémákra szorítkozunk.

minden $N \subset \mathcal{N}$, $i, j \in N$, $t \in I\!N$ *és* $x \in I\!N^N$ *esetén.*

A következő négy strukturális tulajdonság interpretációja nem olyan természetes, és megkövetelésük nem is minden helyzetben indokolt. A konzisztencia szerint az elosztási eljárásnak, a szereplők igényteljesítési sorrendjétől függetlenül, ugyanazt az elosztást kell eredményeznie.

1.4 axióma. *Az r determinisztikus elosztási eljárás* konzisztens*, ha*

$$r^i(N, t, x) = r^i\left(N \setminus j, t - r^j(N, t, x), x^{N \setminus j}\right)$$

minden $N \subset \mathcal{N}$, $i, j \in N$, $i \neq j$, $t \in I\!N$ *és* $x \in I\!N^N$ *esetén.*

A konzisztencia megkövetelése indokolt lehet olyan helyzetekben, amelyekben a szereplők folyamatosan jelentik be igényeiket és az igényeik teljesítése is folyamatosan történik. Érdekes példa a konzisztencia természetes megkövetelésére egy parlament mandátumainak területi egységenkénti elosztása. Ennek jobb megértése céljából gondoljunk arra, hogy az Egyesült Államokhoz az elmúlt évszázadokban folyamatosan csatlakoztak újabb és újabb államok. Az egyes államok képviselőhelyeinek száma nem függhetett az államok belépési sorrendjétől.[3] Hasonló helyzet állhat elő az Európai Unió országainak Uniós parlamentbeli mandátumainak számításakor, hiszen a jövőben is számíthatunk újabb tagfelvételekre.

A következő tulajdonság megköveteli, hogy azonos eredményre vezessen a kínálat két lépésben történő elosztása és a kínálat egy lépésben történő elosztása. A két lépésben történő elosztás alatt az értendő, hogy az első lépésben szétosztunk egy adott mennyiséget, majd a második lépésben pótlólagosan egy további mennyiséget pusztán a fennmaradó igények ismeretében.

1.5 axióma. *Az r determinisztikus elosztási eljárás* alulról előállítható*, ha*

$$0 \leq t' \leq t \leq x_N \Rightarrow r(N, t, x) = r(N, t', x) + r(N, t - t', x - r(N, t', x))$$

minden $N \subset \mathcal{N}$, *minden* $t, t' \in I\!N$ *és minden* $x \in I\!N^N$ *esetén.*

Az alulról előállíthatóság azt jelenti, hogy a pótlólagos mennyiségek elosztása során, a múltat figyelmen kívül hagyva is, ugyanahhoz az elosztáshoz jutunk. Továbbá, ha a szétosztás párhuzamosan történik —például több telephelyen keresztül—, akkor az egymástól függetlenül működő egységek, mind ugyanazon elosztási eljárással dolgozva, pusztán a fennmaradó igényekre vonatkozó információ folyamatos kicserélésével, az igények kielégítésének sorrendjétől függetlenül, ugyanazt az elosztást eredményezik.

Az alulról előállíthatósággal rokon a felülről előállíthatóság, mivel az elosztás két lépésben és egy lépésben történő végrehajtásának egyfajta invarianciáját követeli meg. A felülről előállíthatóság esetében azonban képzeljük el, hogy először túl nagy mennyiséget osztottunk szét és a valójában rendelkezésre nem álló kínálatot utólag kell visszavonnunk a már elosztott mennyiségek ismeretében.

[3] Erre vonatkozóan részletesebben olvashatunk Balinski és Young [1], illetve Young [10] könyveiben.

1.6 axióma. *Az r determinisztikus elosztási eljárás* felülről előállítható, *ha*

$$0 \leq t \leq t' \leq x_N \Rightarrow r(N, t, x) = r(N, t, r(N, t', x))$$

minden $N \subset \mathcal{N}$, $t, t' \in I\!N$ *és* $x \in I\!N^N$ *esetén.*

Az utolsó tulajdonság, amellyel foglalkozni kívánunk az öndualitás tulajdonsága. Ennek teljesülése azt jelenti, hogy az adott eljárás alkalmazása ugyanarra az eredményre vezet, ha a rendelkezésre álló mennyiséget osztjuk szét vagy pedig a hiányt (túlkeresletet) vonjuk le a szereplők igényeiből.

1.7 axióma. *Az r determinisztikus elosztási eljárás kielégíti az* öndualitás *tulajdonságát, ha*

$$r(N, t, x) = x - r(N, x_N - t, x)$$

minden $N \subset \mathcal{N}$, $t \in I\!N$ *és* $x \in I\!N^N$ *esetén.*

1.2 Nevezetes determinisztikus eljárások

Elemzésünk során négy nevezetes determinisztikus eljárásra lesz szükségünk. Először három valós értékű eljárás leírásával kezdünk. Talán az egyik legnevezetesebb determinisztikus elosztási eljárás az úgynevezett *arányos elosztási eljárás* (proportional method), mely szerint a kínálatból mindenki keresletével arányosan részesül. Formálisan

$$pro(N, t, x) = \frac{t}{x_N} x,$$

ha $x_N > 0$. Megjegyzendő, hogy bármely elosztási eljárás esetén $x_N = 0$-ból szükségszerűen $r(N, t, x) = 0$ következik. Az arányos elosztási eljárás számos érdekes jellemzése megtalálható többek között Moulin [3] áttekintő munkájában. Az arányos elosztási eljárás két érdekes és az általunk ismertetett tulajdonságok segítségével is érthető jellemzését adta Young [9], amely szerint az arányos elosztási eljárás az egyetlen alulról előállítható és önduális, illetve az egyetlen felülről előállítható és önduális elosztási eljárás.

Az arányosság elvével szemben az egyenlőség elve áll, amelyet leginkább az úgynevezett *egyenletes nyereség eljárás* (uniform gains method) testesít meg. Az egyenletes nyereség eljárás azonos λ mennyiséget juttat azoknak a szereplőknek, akiknek igényei elérik a λ értéket, míg a λ értéknél kisebb igényű szereplőket maradéktalanul kielégíti. Formálisan

$$ug_i(N, t, x) = \min\{\lambda, x_i\},$$

ahol a λ értéke a $\sum_{i \in N} \min\{\lambda, x_i\} = t$ egyenlőség által meghatározott.

Az *egyenletes veszteség eljárás* (uniform losses methods) akárcsak az előző eljárás az egyenlőség elvére épít, azonban a kielégítetlen igényeket igyekszik egyenlően szétteríteni. Formálisan

$$ul_i(N, t, x) = \max\{x_i - \mu, 0\},$$

ahol $\sum_{i\in N} \max\{x_i - \mu, 0\} = t$.

Moulin [2] megmutatta, hogy *pro*-n kívül még pontosan az *ug* és *ul* eljárások azok, amelyek egyszerre konzisztensek, alulról előállíthatóak, felülről előállíthatók, skála invariánsak[4] és teljesítik az egyenlő elbánás elvét.

A negyedik nevezetes elosztási eljárás a *prioritási szabály*, amely a szereplőket az igényüktől és a kínálattól független fontossági sorrendbe rendezi, majd az igényeket mindig ezen sorrend szerint elégíti ki. Így egy alacsonyabb fontosságú szereplő csak akkor részesülhet az elosztandó mennyiségből, ha az összes nála fontosabb szereplő igénye maradéktalanul teljesíthető. Már a definíciója alapján látható, hogy a prioritási szabály a korábban definiált három determinisztikus elosztási eljárással ellentétben ,,igazságtalan". Megjegyzendő még, hogy a prioritási szabály az általunk definiált problémákra egész értékű elosztásokat eredményez.

Moulin [2] determinisztikus elosztási eljárásokat vizsgálva kimutatta, hogy a prioritási szabály tulajdonságai alapján kitűntetett szerepet tölt be, mivel az egyetlen olyan egész értékű elosztási eljárás, amely kielégíti egyszerre az 1.4-1.6. axiómákat. Ez egy meglehetősen negatív eredmény, hiszen a prioritási szabály egy nem igazságos elosztási eljárás.

Az ismertetett négy nevezetes elosztási eljárás érdekesebb jellemzései megtalálhatók Moulin [3] és Thompson [8] áttekintő munkáiban.

2 Valószínűségi modellkeret

A valószínűségi modellkeretben már csak diszkrét elosztásokat engedünk meg. Jelölje $\Omega_{N,t,x}$ a lehetséges *elosztások* halmazát, azaz

$$\Omega_{N,t,x} = \left\{\omega \in I\!N^N \mid \omega_N = t, \forall i \in N : 0 \le \omega_i \le x_i\right\},$$

és jelölje $\mathcal{P}\left(\Omega_{N,t,x}\right)$ az $\Omega_{N,t,x}$ halmaz hatványhalmazát.

A ρ valószínűségi *elosztási eljárás* minden egyes $\left(N, t, (x_i)_{i\in N}\right)$ elosztási problémához hozzárendel egy az $(\Omega_{N,t,x}, \mathcal{P}\left(\Omega_{N,t,x}\right))$ téren értelmezett valószínűségi mértéket, amelyet $\rho_{N,t,x}$-szel jelölünk. Továbbá jelölje ekkor $\rho^i_{N,t,x}$ az $i \in N$ szereplőnek jutatott mennyiség eloszlását, amely a $\rho_{N,t,x}$ megfelelő peremeloszlása.

Vegyük sorra a determinisztikus modellkeretben tárgyalt hét tulajdonság kiterjesztéseit. Ehhez először is szükségünk lesz a sztochasztikus dominancia relációra. Azt mondjuk, hogy a $(\{0,1,\ldots,n\}, \mathcal{P}\left(\{0,1,\ldots,n\}\right))$ téren értelmezett μ és ν valószínűségi mértékek közül ν *sztochasztikusan dominálja*[5] μ-t, ha

$$\forall k \in \{0,1,\ldots,n\} : \mu\left(\{k,k+1,\ldots,n\}\right) \le \nu\left(\{k,k+1,\ldots,n\}\right).$$

[4] A skála invariancia szerint az elosztás nem függhet attól, hogy milyen mértékegységben mérjük a mennyiségeket.

[5] Ez a fajta sztochasztikus dominancia elsőrendű sztochasztikus dominancia néven ismeretes.

A sztochasztikus dominancia reláció jelölésére a $\preceq$ szimbólumot használjuk. Tehát $\mu \preceq \nu$ azt jelöli, hogy ν sztochasztikusan dominálja μ-t. Ellenőrizhető, hogy $\preceq$ egy parciális rendezés.

A kereslet-monotonitás kiterjesztése szerint, ha egy elosztási problémában egy személy igénye növekszik —a többiek igényének változatlansága mellett—, akkor bármely mennyiségnél nem kisebb mennyiségekhez legalább ugyanakkora valószínűséggel kell jutnia, mint igényének megnövekedése előtt.

2.1 axióma. *A ρ sztochasztikus elosztási eljárás* kereslet-monoton*, ha*

$$x^i \leq \hat{x}^i \Rightarrow \rho^i_{N,t,\left(x^i,x^{N\setminus i}\right)} \preceq \rho^i_{N,t,\left(\hat{x}^i,x^{N\setminus i}\right)}$$

minden $N \subset \mathcal{N}$, $i \in N$, $t, x^i, \hat{x}^i \in I\!N$ és $x^{N\setminus i} \in I\!N^{N\setminus i}$ esetén.

Egy sztochasztikus elosztási eljárás *determinisztikus*, ha minden $\left(N, t, (x_i)_{i\in N}\right)$ elosztási probléma esetén létezik egy olyan $\omega \in \Omega_{N,t,x}$, hogy $\rho_{N,t,x}(\omega) = 1$. Ennek alapján a 2.1 axióma az 1.1 axióma kiterjesztése.

A kereslet-monotonitáshoz hasonló módon kiterjeszthető a kínálat-monotonitás is.

2.2 axióma. *A ρ sztochasztikus elosztási eljárás* kínálat-monoton*, ha*

$$t \leq t' \Rightarrow \rho^i_{N,t,x} \preceq \rho^i_{N,t',x}$$

minden $N \subset \mathcal{N}$, $i \in N$, $t, t' \in I\!N$ és $x \in I\!N^N$ esetén.

Az egyenlő elbánás elvének kiterjesztése szerint két azonos igényű személy azonos eloszlások szerint részesül a szűkös mennyiségből.

2.3 axióma. *A ρ sztochasztikus elosztási eljárás kielégíti az* egyenlő elbánás elvét*, ha*

$$x^i = x^j \Rightarrow \rho^i_{N,t,x} = \rho^j_{N,t,x}$$

minden $N \subset \mathcal{N}$, $i, j \in N$, $t \in I\!N$ és $x \in I\!N^N$ esetén.

A 2.2-2.3 axiómák nyilván rendre az 1.2-1.3 axiómák kiterjesztései. Térjünk most rá a négy strukturális invariancia tulajdonság kiterjesztéseire.

2.4 axióma. *Konzisztencia:*

$$\rho^i_{N,t,x}(\omega_i) = \sum_{k=0}^{\min\{x_j, t-\omega_i\}} \rho^i_{N\setminus j, t-k, x^{N\setminus j}}(\omega_i)\, \rho^j_{N,t,x}(k)$$

teljesüljön minden $N \subset \mathcal{N}$, $i, j \in N$, $i \neq j$, $t \in I\!N$, $x \in I\!N^N$ és $\omega_i \in \{0, 1, \ldots, \min\{x_i, t\}\}$ esetén.

A következő lemma biztosítja, hogy a 2.4 axióma valóban az 1.4 axióma egy kiterjesztése.

2.1 lemma. *Ha ρ determinisztikus és konzisztens, akkor a vele ekvivalens r determinisztikus elosztási eljárás is konzisztens.*

Bizonyítás. Mivel ρ determinisztikus, $\rho_{N,t,x}(\omega) = 1$ valamely $\omega \in \Omega_{N,t,x}$ mellett. Ezért $\rho^i_{N,t,x}(\omega_i) = 1$ $\left(\text{azaz } r^i(N,t,x) = \omega_i\right)$, $\rho^j_{N,t,x}(k) = 0$ minden $k \in \{0, 1, \ldots, x_j\} \setminus \{\omega_j\}$-ra és $\rho^j_{N,t,x}(\omega_j) = 1$ $\left(\text{azaz } r^j(N,t,x) = \omega_j\right)$. Felhasználva ρ konzisztenciáját $\rho^i_{N\setminus j, t-\omega_j, x^{N\setminus j}}(\omega_i) = 1$ adódik. Ezek alapján

$$r^i(N,t,x) = \omega_i = r^i\left(N \setminus j, t - \omega_j, x^{N\setminus j}\right) = r^i\left(N \setminus j, t - r^j(N,t,x), x^{N\setminus j}\right)$$

minden $N \subset \mathcal{N}$, $i \neq j \in N$, $t \in \mathbb{N}$ és $x \in \mathbb{N}^N$ esetén. Tehát r konzisztens. ■

Most nézzük az alulról előállíthatóság kiterjesztését.

2.5 axióma. *Alulról előállíthatóság:*

$$0 \leq t' \leq t \leq x_N \Rightarrow \rho_{N,t,x}(\omega) = \sum_{\substack{\omega' \in \Omega_{N,t',x} \\ \omega' \leq \omega}} \rho_{N,t',x}(\omega')\, \rho_{N,t-t',x-\omega'}(\omega - \omega')$$

teljesüljön minden $N \subset \mathcal{N}$, $t, t' \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{N}^N$ és $\omega \in \Omega_{N,t,x}$ esetén.

Meg kell mutatnunk, hogy a sztochasztikus elosztási eljárásokra most megfogalmazott alulról előállíthatóság valóban az alulról előállíthatóság egy kiterjesztése.

2.2 lemma. *Ha ρ determinisztikus és alulról előállítható, akkor a ρ-val ekvivalens r determinisztikus elosztási eljárás alulról előállítható.*

Bizonyítás. Mivel ρ determinisztikus, ezért léteznek olyan $\omega \in \Omega_{N,t,x}$ és $\omega' \in \Omega_{N,t',x}$ elosztások, amelyekre $\rho_{N,t,x}(\omega) = 1$ és $\rho_{N,t',x}(\omega') = 1$. Tehát $r(N,t,x) = \omega$ és $r(N,t',x) = \omega'$. Ezért a 2.5 axióma összegének csak egyetlen $\omega' \in \Omega_{N,t',x}$ elosztáshoz tartozó tényezője nem nulla. Erre az ω' elosztásra a 2.5 axiómából adódóan $\omega \geq \omega'$ és $\rho_{N,t-t',x-\omega'}(\omega - \omega') = 1$. Ezért $r(N, t-t', x-\omega') = \omega - \omega'$. Tehát az ω és ω' elosztások ρ által egyértelműen meghatározottak, és így teljesülnek az alábbi egyenlőségek.

$$\begin{aligned} r(N,t,x) &= \omega = \omega' + \omega - \omega' = r(N,t',x) + r(N, t-t', x-\omega') = \\ &= r(N,t',x) + r(N, t-t', x - r(N,t',x)) \end{aligned}$$

minden $N \subset \mathcal{N}$ halmazra, minden $t, t' \in \mathbb{N}$ elosztandó mennyiségre és minden olyan $x \in \mathbb{N}^N$ igényvektorra, amelyre $0 \leq t' \leq t \leq x_N$ teljesül. ■

A felülről előállíthatóságot az alábbi módon terjesztjük ki.

2.6 axióma. *Felülről előállíthatóság:*

$$0 \leq t \leq t' \leq x_N \Rightarrow \rho_{N,t,x}(\omega) = \sum_{\substack{\omega' \in \Omega_{N,t',x} \\ \omega \leq \omega'}} \rho_{N,t',x}(\omega')\, \rho_{N,t,\omega'}(\omega)$$

teljesüljön minden $N \subset \mathcal{N}$, $t, t' \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{N}^N$ és $\omega \in \Omega_{N,t,x}$ esetén.

Az alábbi lemma szerint a 2.6 axióma valóban az 1.6 axióma egy kiterjesztése.

2.3 lemma. *Ha ρ determinisztikus és felülről előállítható, akkor a vele ekvivalens r determinisztikus elosztási eljárás felülről előállítható.*

Bizonyítás. ρ determinisztikus volta miatt léteznek olyan $\omega \in \Omega_{N,t,x}$ és $\omega' \in \Omega_{N,t',x}$ elosztások, amelyekre $\rho_{N,t,x}(\omega) = 1$ és $\rho_{N,t',x}(\omega') = 1$. Tehát $r(N,t,x) = \omega$ és $r(N,t',x) = \omega'$. A 2.6 axiómából kifolyólag $\omega \leq \omega'$ és $\rho_{N,t,\omega'}(\omega) = 1$ (azaz $r(N,t,\omega') = \omega$). Ezért

$$r(N,t,x) = \omega = r(N,t,\omega') = r(N,t,r(N,t',x))$$

minden $N \subset \mathcal{N}$, $t \in I\!N$ és $x \in I\!N^N$ esetén. ■

Moulin tétele [2] szerint a prioritási szabály az egyetlen olyan determinisztikus elosztási eljárás, amely kielégíti az 1.4-1.6 axiómákat. A sztochasztikus modellkeretben viszont léteznek a prioritási szabályon kívül további olyan sztochasztikus elosztási eljárások, amelyek egyszerre kielégítik a 2.4-2.6 axiómákat. Ezért a sztochasztikus elosztási eljárásokkal szemben megfogalmazunk egy további igazságossági követelményt, amely szerint a szereplőknek legalább várható értékben az arányos részesedésükhöz kell jutniuk.

2.7 axióma. *Arányos várható részesedés:*

$$\sum_{k=0}^{x_i} k\rho^i_{N,t,x}(k) = x_i \frac{t}{x_N}$$

teljesüljön minden $N \subset \mathcal{N}$, $i \in N$, $t \in I\!N$ és $x \in I\!N^N$ esetén.

A determinisztikus modellkeretben adódó negatív eredmény feloldható, ha az elosztás folyamata során megengedjük a véletlent, azaz az elosztásban résztvevő szereplőknek juttatott mennyiségek valószínűségi változók. A valószínűségi modellkeretben Moulin [4] többféleképpen karakterizálja az úgynevezett arányos elosztási eljárást, amely szerint az elosztandó egységeket úgy sorsoljuk ki a szereplők között egymás után, hogy minden egyes szereplő a fennmaradó igényekkel arányos valószínűségekkel juthat az éppen kisorsolandó egységhez. Az arányos elosztási eljárás —akárcsak a prioritási szabály— konzisztens, alulról előállítható és felülről előállítható.

Moulin [4] megadja a valószínűségi modellkeretben a három invariancia tulajdonságnak (konzisztencia, alulról előállíthatóság és felülről előállíthatóság) egyidejűleg eleget tevő elosztási eljárások halmazát. Lényegében az ezen halmazba tartozó eljárások a szereplőket prioritási osztályokba sorolják és az így adódó prioritási osztályokon belül engedik csak meg a visszatevéses mintavételen alapuló arányos elosztás alkalmazását.[6]

Végül megadjuk az öndualitás kiterjesztését.

[6] A pontosan két szereplőt tartalmazó prioritási osztályokon belül az arányos elosztási eljáráson kívül másfajta elosztási eljárás is megengedhető.

2.8 axióma. *A ρ sztochasztikus elosztási eljárás* önduális*, ha*

$$\rho_{N,t,x} = x - \rho_{N,x_N - t,x}$$

minden $N \subset \mathcal{N}$, $t \in \mathbb{N}$ és $x \in \mathbb{N}^N$ esetén.

3 Minimális varianciájú elosztási eljárások tulajdonságai

Először a [6]-ban bevezetett minimális varianciájú elosztási eljárások ismertetésével kezdjük. Legyen r egy adott determinisztikus elosztási eljárás. Jelölje $\mathcal{E}(r)$ azon sztochasztikus elosztási eljárások halmazát, amelyek várható értékben r-rel azonos elosztásokat eredményeznek bármely elosztási problémára. Az $\mathcal{E}(r)$ halmazbeli legkisebb varianciaösszegű sztochasztikus elosztási eljárásokat hívjuk az r-hez rendelt *minimális varianciájú elosztási eljárásoknak*. Formálisan, ρ egy r-hez rendelt minimális varianciájú elosztási eljárás, ha bármely elosztási probléma esetén

$$\forall \mu \in \mathcal{E}(r) : \forall i \in N : Var\left(\rho^i_{N,t,x}\right) \leq Var\left(\mu^i_{N,t,x}\right).$$

Jelölje $\mathcal{E}^{mv}(r)$ az r-hez rendelt minimális varianciájú elosztási eljárások halmazát. A [6]-beli 1. tétel alapján minden r elosztási eljáráshoz rendelhető legalább egy minimális varianciájú elosztási eljárás. Továbbá bármely $\mathcal{E}^{mv}(r)$-beli eljárás egy adott (N,t,x) elosztási problémánál az $i \in N$ szereplőnek $y_i^* := \lfloor r_i(N,t,x) \rfloor$, illetve y_i^*+1 mennyiséget juttat $1-r_i(N,t,x)+\lfloor r_i(N,t,x)\rfloor$, illetve $u_i := r_i(N,t,x) - \lfloor r_i(N,t,x) \rfloor$ valószínűséggel. Tehát

$$\rho^i_{N,t,x}\left(y_i^*\right) = 1 - u_i \quad \text{és} \quad \rho^i_{N,t,x}\left(y_i^* + 1\right) = u_i\,. \tag{1}$$

Most rátérhetünk annak megállapítására, hogy a bevezetett hét determinisztikus tulajdonság közül melyek sztochasztikus kiterjesztéseit őrzik meg a minimális varianciájú elosztási eljárások. Először azokkal a tulajdonságokkal kezdünk, amelyek egy r determinisztikus eljárásról ,,átöröklődnek" a hozzája rendelt $\mathcal{E}^{mv}(r)$-beli minimális varianciájú elosztási eljárásokra.

Nyilván, ha r kereslet-monoton, akkor (1) alapján bármely $\rho \in \mathcal{E}^{mv}(r)$ is kereslet-monoton, mivel

$$\forall k \in \{0,1,\ldots,x_i\} : \sum_{l=0}^{k} \rho^i_{N,t,x}(l) \leq \sum_{l=0}^{k} \rho^i_{N,t,\hat{x}}(l)$$

teljesül minden $x_i > \hat{x}_i$ és $x_{N\setminus i} = \hat{x}_{N\setminus i}$ esetén. Hasonlóan igazolható a kínálat-monotonitás öröklődése. Az egyenlő elbánás elvének átöröklődésének teljesülése is nyilvánvaló hiszen, ha r kielégíti az egyenlő elbánás elvét, akkor (1) szerint azonos x_i és x_j igények esetén $y_i^* = y_j^*$ és $u_i = u_j$.

Vegyünk most egy önduális r determinisztikus elosztási eljárást, egy $\rho \in \mathcal{E}^{mv}(r)$ sztochasztikus elosztási eljárást, egy (N,t,x) elosztási problémát, és legyen $i \in N$. Ekkor a $\rho_{N,x_N-t,x}$ elosztás során i a $z_i^* = \lfloor r_i(N, x_N - t, x) \rfloor$ mennyiséghez $s_i = 1 - r_i(N, x_N - t, x) + \lfloor r_i(N, x_N - t, x) \rfloor$ valószínűséggel jut, míg a $z_i^* + 1$ mennyiséghez pedig $1 - s_i$ valószínűséggel. Ha $u_i > 0$, akkor

$$\begin{aligned} x_i - z_i^* &= x_i - \lfloor r_i(N, x_N - t, x) \rfloor = x_i - \lfloor x_i - r_i(N, t, x) \rfloor = \\ &= -\lfloor -r_i(N, t, x) \rfloor = \lfloor r_i(N, t, x) \rfloor + 1 = y_i^* + 1. \end{aligned}$$

Ezért $x_i - (z_i^* + 1) = y_i^*$. Továbbá ha $u_i > 0$, akkor

$$\begin{aligned} \rho_{N,x_N-t,x}(z_i^* + 1) &= 1 - s_i = r_i(N, x_N - t, x) - \lfloor r_i(N, x_N - t, x) \rfloor = \\ &= -r_i(N, t, x) - \lfloor -r_i(N, t, x) \rfloor = \\ &= 1 - (r_i(N, t, x) - \lfloor r_i(N, t, x) \rfloor) = 1 - u_i = \rho_{N,t,x}(y_i^*). \end{aligned}$$

Ebből már $\rho_{N,x_N-t,x}(z_i^*) = \rho_{N,t,x}(y_i^* + 1)$ is következik. Az $u_i = 0$ esetben pedig közvetlenül adódik az öndualitás teljesülése.

Összegezve beláttuk a következő állítást.

3.1 állítás. *Az r kereslet-monotonitása, kínálat-monotonitása, egyenlő elbánás elvének teljesülése és öndualitása öröklődik bármely r-hez rendelt $\rho \in \mathcal{E}^{mv}(r)$ sztochasztikus elosztási eljárásra.*

Sajnos a bevezetett többi három tulajdonság egyike sem öröklődik szükségszerűen egy r determinisztikus elosztási eljárásról egy $\rho \in \mathcal{E}^{mv}(r)$ sztochasztikus elosztási eljárásra. Ezt a negatív eredményt egy-egy ellenpéldán mutatjuk meg.

Az arányos determinisztikus eljáráshoz rendelt minimális varianciájú eljárásokat [6]-ban *igazságos maradék elosztási eljárásoknak* neveztük el. [6]-ban megtalálható ez utóbbi típusú eljárások két jellemzése is. Egy $\mathcal{E}(pro)$-beli eljárás kielégíti a 2.7 axiómát. [2] alapján pro konzisztens, alulról előállítható és felülről előállítható. Belátjuk, hogy egy $\rho \in \mathcal{E}^{mv}(pro)$ sztochasztikus elosztási eljárás sérti a 2.4-2.6 axiómákat. Így ezen tulajdonságok nem öröklődnek pro-ról $\rho \in \mathcal{E}^{mv}(pro)$-ra. Ismeretes [4, 7], hogy egyetlen olyan sztochasztikus elosztási eljárás létezik, amely egyszerre kielégíti a 2.5 és a 2.7 axiómákat, illetve a 2.6 és a 2.7 axiómákat. Ez az úgynevezett arányos valószínűségi elosztási eljárás, amely lényegében egy visszatevés nélküli mintavételen keresztül sorsolja ki a szűkös mennyiséget a keresletükkel megegyező számú sorsjegyekkel ellátott szereplők között.[7] Mivel az arányos valószínűségi eljárás nem eleme $\mathcal{E}^{mv}(pro)$-nak, ezért egy $\mathcal{E}^{mv}(pro)$-beli eljárás semmiképpen sem alulról előállítható, illetve felülről előállítható. Megmutatjuk még, hogy az igazságos maradék elosztási eljárások nem konzisztensek. Ehhez tekintsük a következő példát. Legyen $N = \{1, 2, 3\}$, $t = 4$ és $x = (1, 2, 3)$. Ez esetben $\rho_{N,t,x}((0, 2, 2)) = 1/3$, $\rho_{N,t,x}((1, 1, 2)) = 2/3$, $\rho_{\{1,3\},3,(1,3)}((0, 3)) = 1/4$, $\rho_{\{1,3\},3,(1,3)}((1, 2)) = 3/4$, $\rho_{\{1,3\},2,(1,3)}((0, 2)) = 1/2$, $\rho_{\{1,3\},2,(1,3)}((1, 1)) = 1/2$, $\rho^2_{N,t,x}(1) = 2/3$ és $\rho^2_{N,t,x}(2) = 1/3$. A konzisztencia sérülését mutatja a $\rho^3_{N,t,x}(2) = 1 \neq \frac{2}{3} = \frac{2}{3}\frac{3}{4} + \frac{1}{3}\frac{1}{2} = \rho^2_{N,t,x}(1)\, \rho_{\{1,3\},3,(1,3)}((1, 2)) + \rho^2_{N,t,x}(2)\, \rho_{\{1,3\},2,(1,3)}((0, 2))$ eset.

[7] Az eljárásról részletesebben olvasható [4]-ben, illetve [7]-ben.

A már bevezetett ug-vel és ul-lel jelölt determinisztikus eljárások sztochasztikus megfelelői[8] a fair sorbaállási és a fair sorbaállási* eljárások, amelyek részletes elemzését Moulin és Stong [5] végezte el. A fair sorbaállási eljárás szerint az elosztandó mennyiséget több fordulóban osztjuk el úgy, hogy minden egyes fordulóban a még igényekkel rendelkező szereplőket véletlen sorrendben egy-egy egységhez juttatjuk a még el nem osztott egységekből. A fair sorbaállási* eljárás hasonló módon rendeli a hiányokat a szereplőkhöz. Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy a fair sorbaállási eljárás egy ug-hez rendelt, míg a fair sorbaállási* eljárás egy ul-hez rendelt minimális varianciájú eljárás. Moulin és Stong [5] két sztochasztikus elosztási eljárása alapján példákat találtunk olyan esetekre, amelyekben a konzisztencia és felülről előállíthatóság, illetve a konzisztencia és alulról előállíthatóság öröklődik.

Végül nézzünk egy példát mindhárom strukturális invariancia tulajdonság öröklődésére. Ehhez tekintsük a prioritási szabályt mint egy determinisztikus és mint egy (degenerált) sztochasztikus elosztási eljárást. Ismert, hogy a prioritási szabály (lásd Moulin [2]) teljesíti mindhárom strukturális invariancia tulajdonságot. Továbbá könnyen belátható, hogy a prioritási szabálynak önmaga egy minimális varianciájú elosztási eljárása.

4 Összefoglalás

Hét nevezetes tulajdonság segítségével megvizsgáltuk a [6]-ban bevezetett minimális varianciájú elosztási eljárások tulajdonságait. Egyrészt megállapítottuk, hogy ha egy determinisztikus elosztási eljárás kereslet-monoton, kínálat-monoton, teljesíti az egyenlő elbánás elvét és önduális, akkor a hozzárendelt minimális varianciájú elosztási eljárások is teljesítik ugyanezen tulajdonságokat. Másrészt példákon keresztül megmutattuk, hogy a konzisztencia, alulról előállíthatóság és felülről előállíthatóság általában nem ,,öröklődik" egy determinisztikus elosztási eljárásról egy hozzátartozó minimális varianciájú elosztási eljárásra.

Irodalom

1. Balinski, M. L., Young, H. P., *Fair Representation: Meeting the Ideal of One Man, One Vote,* second edition. Brookings Institution Press, Washington, D.C., (2001).
2. Moulin, H., Priority rules and other asymmetric rationing methods, *Econometrica*, 68 (2000) 643–684.
3. Moulin, H., Axiomatic Cost and Surplus-Sharing. In: Arrow, K. J., Sen, A. K., Suzumura, K., (eds.), *Handbook of Social Choice and Welfare, Volume 1.* North-Holland, Amsterdam, (2002) 289–357.
4. Moulin, H., The Proportional Random Allocation Of Indivisible Units, *Social Choice and Welfare*, 19 (2002) 381–413.
5. Moulin, H., Stong, R., Fair Queuing and Other Probabilistic Allocation Methods, *Mathematics of Operations Research*, 27 (2002) 1–30.

[8] Abban az értelemben, hogy ugyanazon típusú nevezetes tulajdonságokat elégítik ki.

6. Tasnádi, A., On Probabilistic Rationing Methods, *Mathematical Social Sciences*, 44 (2002) 211–221.
7. Tasnádi, A., Az arányos elosztási eljárás egy karakterizációja, *Alkalmazott Matematikai Lapok*, 21 (2004) 261–267.
8. Thompson, W., Axiomatic and Game-Theoretic Analyisis of Bancruptcy and Taxation Problems: a Survey, *Mathematical Social Sciences*, 45 (2003) 249–297.
9. Young, H. P., Distributive Justice in Taxation, *Journal of Economic Theory*, 44 (1988) 321–335.
10. Young, H. P., *Equity, in Theory and Practice.* Princeton University Press, Princeton, (1994).

DETERMINISTIC AND PROBABILISTIC RATIONING METHODS

We investigated the minimal variance methods introduced in Tasnádi [6] based on seven popular axioms. We proved that if a deterministic rationing method satisfies demand monotonicity, resource monotonicity, equal treatment of equals and self-duality, than the minimal variance methods associated with the given deterministic rationing method also satisfies demand monotonicity, resource monotonicity, equal treatment of equals and self-duality. Furthermore, we found that the consistency, the lower composition and the upper composition of a deterministic rationing method does not imply the consistency, the lower composition and the upper composition of a minimal variance method associated with the given deterministic rationing method.

RUGALMAS ÖREGKORI NYUGDÍJSZABÁLY OPTIMÁLIS TERVEZÉSE KÉT TÍPUS ESETÉN[1]

SIMONOVITS ANDRÁS
MTA, Közgazdaságtudományi Kutatóközpont, BME és CEU

Ez a dolgozat a rugalmas öregkori nyugdíjszabály tervezésének legegyszerűbb esetét mérlegeli, amikor a népesség két típusból áll: a (várhatóan) rövidebb és hosszabb életű típusból. Öt eredményt fogalmazunk meg: 1. A hagyományosan semleges szabály esetén a kormányzat mindenkinek olyan életjáradékot fizet, amely az életpálya befizetések és hátralévő élettartam hányadosa: NDC-szabály. Minden egyénnek magáninformációja van saját várható élettartamáról, és ennek függvényében választja meg szolgálati idejét. Mivel a várhatóan rövidebb életű egyének rövidebb ideig dolgoznak, mint a várhatóan hosszabb életűek, ezért az előbbiek ráfizetnek, az utóbbiak támogatást kapnak; és a rendszer egyenlege sem nulla, hanem negatív. 2. Az aszimmetrikus információ miatt az érdekeltségi feltételeket is figyelembe kell venni. Ha mindkét típus esetén külön költségvetési korlátot állítunk föl, akkor meghatározhatjuk a "semleges" második legjobb szabályt, amely azonban túlságosan alacsony nyugdíjat és korai nyugdíjkort ad a rövidebb életűnek. 3. Aggregált költségvetési korláttal helyettesítve a típusfüggő korlátokat, de megtartva az érdekeltségi feltételeket, a kormányzat olyan szabályt választ, amely maximalizálja a társadalmi jóléti függvényt, és *újraelosztást* hajt végre a rövidebb életűtől a hosszabb életű számára. 4. A semleges szabály nemcsak jóléti értelemben marad el az újraelosztótól, hanem gyakran Pareto-értelemben is. 5. Kiterjesztve az elemzést eltérő munkaáldozatú egyénekre (de megkövetelve a várható élettartamok azonosságát), a semleges megoldás elfogadhatóvá válik.

Köszönetnyilvánítás. Külön hálával tartozom Eső Péternek korábbi együttműködéséért (Eső–Simonovits, 2003), amelynek hatása különösen a 4. ponton érezhető. Köszönetemet fejezem ki Alács Péternek, Csorba Gergelynek, Peter Diamond-nak, Wulf Gaertnernek és Pierre Pestieau-nak előzetes írásaimhoz fűzött hasznos megjegyzéseikért. A cikkben kifejtettekért természetesen egyedül én vagyok felelős. A kutatást az OTKA T046175 támogatta.

1 Bevezetés

„Az időskori válság elhárítása" (World Bank, 1994) megjelenése óta a létező társadalombiztosítási nyugdíjrendszerek bírálata folyamatosan hatalmas figyelmet kapott. Egyrészt több szakember (például Kotlikoff, 1996) kifogásol-

[1] Beérkezett: 2005. január 22. e-mail: `simonov@econ.core.hu`.

ta, hogy számos tb-rendszer alkalmaz *újraelosztó* (degresszív) nyugdíjképleteket, amelyek csak gyenge kapcsolatot teremtenek a havi befizetések és a havi kifizetések közt. Hasonló irányú kritikát tartalmazott Gruber–Wise, szerk. (1999) és Börsch-Supan (2001), akik kifogásolták a korai, illetve késői nyugdíjbavonulás elégtelen büntetését és jutalmazását. Másrészt a Világbank (131. o.) azért támadta e rendszereket, mert „a degresszív képlet ellenére a tb-rendszer elégtelen mértékben osztja el újra a befizetéseket a gazdagoktól a szegényeknek". Érve: „e formulák tartalmaznak keresetfüggő részt is, ugyanakkor a jól kereső egyének később állnak munkába és nyugdíjazás után tovább élnek." Ezzel egyidőben Orszag–Stiglitz (2001) éppen azon az alapon védte a degresszív rendszereket, hogy az életpálya egészét tekintve alig osztják újra a jövedelmeket.

Számos modell létezik (például Sheshinski, 1978), amely a nyugdíjba vonulási döntést adott nyugdíjszabály esetén modellezi. E modellek alapötlete a következő: a felnőtt kor két részből áll: munka- és nyugdíjaskor. A nyugdíjasok életjáradékot kapnak, amelynek értéke a járulékkulcstól és a nyugdíjazási kortól (valamint a szolgálati időtől) függ. Minden dolgozó optimalizálja nyugdíjba vonulási korát – életpálya hasznosságfüggvényét maximalizálva.

A vonatkozó irodalom zöme (például Gruber–Wise, szerk., 1999) felteszi, hogy a kormányzatnak és az egyéneknek azonos információjuk van a várható élettartamokról, és az egyéni munkaáldozatok különbözők. Ekkor létezik egy kézenfekvő szabály, amelyet az irodalom *biztosításmatematikailag semlegesnek* (vagy korrektnek vagy méltányosnak) hív: az életjáradék az életpálya befizetés és a hátralévő várható élettartam hányadosa. Ekkor azok a dolgozók, akik előnyben részesítik a szabadidőt (másképpen: nagyobb a munkaáldozatuk), korábban mennek nyugdíjba és kisebb életjáradékot kapnak – kisebb életpálya-járulékuknak és rövidebb hátralévő várható élettartamuknak megfelelően. Figyeljük meg, hogy a kormányzatnak nem kell ismernie az egyéni munkaáldozatokat a szabály megalkotásához.

Az *eszmei tőkeszámlák* (angol rövidítésük: NDC) gyakorlati bevezetésével (Svédország, Lengyelország, stb.) a biztosításmatematikailag semleges szabály lépett életbe, ahol az ösztönzést és az újraelosztás kiküszöbölését állítólag megoldották. (Az eszmei tőkeszámla problémáinak technikai elemzését lásd Valdés-Prieto (2000). Gyakorlati nehézségekről Legros (2003) számol be.)

Ez a szabály azonban figyelmen kívül hagyja az imént említett tényt: a gazdagok tovább élnek és később mennek nyugdíjba (empirikus igazolást Waldron (2001) nyújt). Ezzel szemben a legtöbb modell elhanyagolta azt a fontos körülményt, hogy a kormányzat nem ismeri előre a különböző típusú dolgozók várható élettartamát, a dolgozók viszont ismerik saját típusukat: aszimmetrikus információ. Smith és szerzőtársai (2001) adatokkal támasztják alá, hogy az egyének viszonylag jól előrejelzik várható élettartamukat.

Ezért a szóban forgó szabály általában nem méltányos: sőt, még aggregált szinten is hiányt okoz (vö. Simonovits, 2001, Függelék). Ezért a szabályt *hagyományosan semleges*nek nevezzük a továbbiakban. Az NDC rendszerek eme hibája miatt alaposabban kell elemeznünk a társadalmilag optimális nyugdíjszabályokat.

A rugalmas nyugdíjkorhatár és a nyugdíjrendszeren belüli újraelosztás kérdését szabatosan az optimális nyugdíjösztönzés elméletével oldhatjuk meg, amely a *Mirrlees* (1971) által kialakított *mechanizmustervezés* módszerén alapul (magyarul: Gömöri, 2001). Érdekeltségi feltételeket vezetünk be, amelyek az egyéneket igazmondásra késztetik: minden típusnak érdeke a saját típusára tervezett szerződést választania. Itt a kormányzat a társadalmi jóléti függvényt (például az életpálya-hasznosságok ellentett reciprokának várható értékét) egy költségvetési korlát (például a várható életpálya-egyenleg nulla) mellett maximalizálja, figyelembe véve az egyéni érdekeltségi korlátokat is.

Elhanyagolva a kereseti különbségeket, kétféle heterogenitás releváns: a várható élettartamok és a munkaáldozat (vagy szabadidő-preferencia) heterogenitása. A várható élettartamok heterogenitására koncentrálunk (2–5. pont), és a munkaáldozati heterogenitásával csak a 6. pontban foglalkozunk. Az egyszerűség kedvéért a típusfüggő korlátokkal indítunk, az igazi, *semleges* második legjobb szabályt elemezzük. Látjuk majd, hogy megtalálása viszonylag egyszerű, és független a társadalmi jóléti függvénytől; azonban a szabálynak kellemetlen tulajdonságai is vannak. Ezért a típusfüggő korlátokat egyetlen egy költségvetési korláttal helyettesítjük: újraelosztó szabály.

Vegyük észre, hogy ebben a bevezető cikkben több egyszerűsítő feltevést használunk, mint amennyire szükség van. Nevezetesen mindössze *két típus*t különböztetünk meg: a vizsgált népesség (korosztály) a várhatóan rövidebb és a várhatóan hosszabb élettartamú típusokból áll. Még ebben a végletesen leegyszerűsített keretben is lehetséges az optimum legfontosabb tulajdonságait bemutatni: 1. A hagyományosan méltányos szabály ilyen fajta aszimmetrikus információ esetén nem semleges. 2. A második legjobb semleges szabályban a szolgálati idő gyakran túlzottan érzékeny a várható élettartamra: a két szolgálati idő közti különbség nagyobb mint a várható élettartamok közti különbség. 3. Az újraelosztó második legjobb rendszerben a várhatóan rövidebb életű támogatja a várhatóan hosszabb életűt. 4. Az újraelosztó második legjobb rendszer gyakran nemcsak a támogatott, hosszabb életűnek ad nagyobb hasznosságot, mint a semleges megoldás, de a támogató, rövidebb életűnek is. (A 2. és a 4. eredmény akkor igaz, ha a rövidebb és a hosszabb várható élettartam hányadosa kellően közel esik 1-hez.) 5. Kiterjesztve az elemzést eltérő munkaáldozatú egyénekre (de megkövetelve a várható élettartamok azonosságát), belátjuk, hogy ilyenkor a semleges megoldás nem is olyan rossz.

Analitikus eredményeinket kiegészítjük numerikus szimulációkkal. Bár majdnem minden kéttípusú modell rossz közelítés, a numerikus eredmények segítenek megérteni, hogy a különféle mechanizmusok közti minőségi különbségek mennyiségileg is fontosak. A kéttípusú modellekre vonatkozó eredményeket összehasonlítva a többtípusúakkal, érdekes eltéréseket tapasztalunk. Például a Pareto-dominanciáról szóló 4. eredmény szigorúbb feltételeket követel meg a kéttípusos esetben, mint a többtípusosban.

Ezen a helyen vázoljuk az irodalmi előzményeket. A mechanizmustervezést először Diamond–Mirrlees (1978) alkalmazta a nyugdíjrendszerre. Egy olyan modellt vizsgált, ahol az egyének ex ante egyformák, de a minimális nyugdíjkorhatár elérése után bizonyos valószínűséggel olyan nehézzé válik számukra a munka, hogy kénytelenek nyugdíjba menni, ha ugyan már korábban nem mentek nyugdíjba. A kormányzat képtelen vagy nem akarja megfigyelni, hogy tényleg lerokkant-e egy dolgozó vagy sem, ezért kifinomult járadék–szolgálati idő függvényt kell alkalmaznia ahhoz, hogy egyensúlyt találjon a biztosítás és az ösztönzés között. A módszert az ex-ante heterogén népesség elemzésére Fabel (1994), Diamond (2003), Eső–Simonovits (2003) és Simonovits (2003), (2004) terjesztette ki. (Simonovits (2001) még csak pedzegette a tervezéselméleti megközelítést! Simonovits (2002) lineáris járadékfüggvényre szorítkozva, képes volt olyan helyzetet is modellezni, ahol mind a munkaáldozat, mind a várható élettartam heterogén, és korrelálatlan. Alács (2004) újszerű numerikust eljárást dolgozott ki a speciális, de kétdimenziós feladat megoldására.)

Tehát az egyének különböznek várható élettartamban (vagy munkaáldozatban), és a kormányzat olyan járadék–szolgálati idő függvényt keres, amely maximalizálja a társadalmi jóléti függvényt az érdekeltségi és a költségvetési feltételek mellett. Tudomásom szerint csupán Simonovits (2004) vizsgálta a semleges nyugdíjszabályt, bár más területeken már évtizedekkel korábban is foglalkoztak a kérdéssel. Például Rothschild–Stiglitz (1976) második legjobb biztosítási szerződésében mind a jó sofőr, mind a rossz sofőr a ,,pénzénél marad", a jó vezető a viszonylag nagy önrészesedés vállalásával igazolja a biztosítónak, hogy ő tényleg kevés balesetet csinál. Sőt, a Pareto-dominancia is megjelenik (638. o.): ,,A [semleges] elválasztó egyensúly... lehet, hogy nem Pareto-optimális, még a rendelkezésre álló információ mellett sem." Ugyanakkor az eredeti jövedelemadózási feladat eleve újraelosztást tételezett föl. A nyugdíjrendszeren belüli újraelosztást más szempontból elemezte Augusztinovics (2000a).

A heterogén munkaáldozatot tükrözi az eszmei számlarendszer, azonban elemzését nehézzé teszi az újraelosztó első legjobbnál jelentkező sarokmegoldás – legalább is az utilitarista társadalmi jóléti függvény esetén. Ekkor ugyanis a kis munkaáldozatú típus sohasem megy nyugdíjba, a nagy munkaáldozatú típus sohasem dolgozik. Vagy felcserélve a korfüggetlen munkaáldozati függvényeket korfüggőkkel, vagy bevezetve a minimális és a maximális szolgálati időt (Diamond, 2003 és Sheshinski, 2004), megszabadulhatunk a fenti visszásságtól. (Érdekes, hogy a gyakorlatban előre meghatározott, minimális vagy a normális korhatáron megy nyugdíjba a dolgozók jelentős része.) Az említett két szerző elhanyagolta a munkába állástól a korai nyugdíjazásig terjedő szakaszt, megnehezítve ezzel a numerikus elemzést.

Összehasonlítva a kétfajta modellt, az érdekeltségi feltételek közti különbség nyilvánvaló: a heterogén várható élettartamú modellben a hosszabb élettartamú hazug típus ingyen nyugdíjat kapna a letagadott időszakra, míg a heterogén munkaáldozatú modellben a korai nyugdíjba vonulást arányosan csökkentett járadékkal büntetik.

Mint minden modell, a cikkben szereplő modellek is számos bonyodalmat figyelmen kívül hagynak. *a)* A nyugdíjszabályok bonyolultsága miatt az optimalizálók dolga eléggé nehéz. Amint Aaron (1982, 60–61. o.) megjegyzi: ,,Ha az elemzőknek egyelőre nem sikerült megfejteniük [a járadékújraszámítás és az aktuáriusi kiigazítás] hatásait, és továbbra is vitatkoznak, hogy e hatások támogatást vagy adót jelentenek-e, mennyire valószínű, hogy a dolgozók és hitveseik megtalálják a választ?" *b)* Inkább a szakirodalmat, mintsem a valóságot követve, föltesszük, hogy a dolgozó választja meg szolgálati idejének hosszát. A munkakeresleti korlátokkal foglalkozó kevés forrás közül hármat említek: Lazear (1979), Augusztinovics–Martos (1995) és Spieza (2002).

A cikk felépítése a következő: a 2–5. pont a heterogén élettartamú típusokkal foglalkozik. A 2. pontban ismertetjük a hagyományosan semleges ösztönzést és bírálatát. A 3. pontban a semleges első- és második legjobb megoldásokat. A 4. pont módosítja a megoldást az újraelosztás esetére. Az 5. pontban összehasonlítunk számos megoldást. A 6. pont a heterogén munkaáldozat modelljét elemzi. A 7. pont néhány következtetést fogalmaz meg. A korábbi cikkekre való hivatkozások nem jelentik azt, hogy a cikk csak ezek ismeretében olvasható.

2 A hagyományosan semleges ösztönzés

Ebben a pontban a *hagyományosan semleges* ösztönzést elemezzük. Két esetet mérlegelünk: (i) a kormányzatnak ugyanaz az információ áll az egyéni élettartamokról a rendelkezésre, mint az egyéneknek: szimmetrikus információ; (ii) a kormányzatnak kevesebb információja van az egyéni élettartamokról, mint az egyéneknek: aszimmetrikus információ.

Szimmetrikus információ

Az egyszerűség kedvéért elhanyagoljuk a gyerekkor, a növekedés, az infláció, a leszámítolási- és a kamatláb létezését. Egyelőre minden egyén azonos véletlen élettartamú, jele: D. E változó értéke D_L és D_H, $D_L < D_H$, 1/2–1/2 valószínűséggel. Átlaguk $\overline{D} = (D_L + D_H)/2$. Minden dolgozó egységnyi bért kap egységnyi idő alatt, amelyből évente τ járulékot fizet, R évig. Cserében a várhatóan hátralévő $\overline{D} - R$ évre évi $\overline{b}(R)$ járadékot kap. A kormányzat és az egyének ugyanazt tudják D eloszlásáról: *szimmetrikus információ*, ezért a kormány az R szolgálati időtől függő

$$\overline{b}(R) = \frac{\tau R}{\overline{D} - R} \tag{2.1}$$

járadékot fizeti.

A be- és kifizetések *életpálya-egyenlege* $\overline{z} = \tau R - \overline{b}(R)(D - R)$, azaz D-től függően $\overline{z}_L$ vagy $\overline{z}_H$. Átlaguk $\overline{Z} = (\overline{z}_L + \overline{z}_H)/2 = 0$. Rátérünk a heterogenitásra. Feltesszük, hogy $i = 1, \ldots, n$ típusú egyén létezik, típustól függő R_i szolgálati idővel. Ekkor is érvényben marad $\overline{Z}_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Aszimmetrikus információ

Már a Bevezetésben is utaltunk arra, hogy a szimmetrikus információ feltevése gyakran elfogadhatatlan. Az aszimmetrikus információ legegyszerűbb esetét mérlegelendő, tegyük föl, hogy két típusú egyén létezik: a *várhatóan* rövidebb és a hosszabb életű, D_L és D_H élettartammal, mindkettő súlya a népességben 1/2. Föltesszük, hogy az egyének ismerik saját várható élettartamukat, a kormányzat viszont nem: *aszimmetrikus információ*. Feltesszük, hogy mindketten ugyanakkor, 0 évesen kezdenek dolgozni; és évi keresetük egységnyi, amelyből R_L, illetve R_H éven keresztül évi τ összeget fizetnek a nyugdíjbiztosításra.

Ha mindkét típusú egyén saját magáról gondoskodik: *autarkia*, akkor a járadékfüggvény egyszerűen

$$b_i(R) = \frac{\tau R}{D_i - R}\,, \tag{2.2}$$

és az egyének a megfelelő $b_i(R)$ járadékot életük végéig kapják; az életpálya-egyenleg 0.

Az öngondoskodásban azonban nem bízik meg a modern társadalom, helyette mindenkinek társadalombiztosításban kell részt vennie. Mivel feltevésünk szerint a kormányzat nem tudja megkülönböztetni a két típust, egyéni várható élettartam helyett a $\overline{D} = (D_L + D_H)/2$ *átlagos* várható élettartammal számol. A nevezett elv hívei szerint R évi szolgálat után az éves nyugdíj értékét ismét (2.1) adja, bár most a D-k mást jelentenek, mint a szimmetrikus esetben.

Ez az eljárás azonban hibás. Ezt a legegyszerűbb esetben igazoljuk. Föltesszük, hogy a legkorábbi halált is megelőzi a legkésőbbi nyugalomba vonulás. Nem túl nehéz belátni, hogy abban a valószerű esetben, amikor a várhatóan rövidebb életűek kevesebb ideig dolgoznak, mint a várhatóan hosszabb életűek: $R_L < R_H < D_L$, az előbbiek kevesebbet, az utóbbiak többet kapnak, mint amennyi járna, sőt az egész rendszer veszteséges (lásd 1. tétel).

A pontosabb megfogalmazáshoz szükségünk lesz a következő jelölésekre. Az évi nyugdíj értéke: $\overline{b}_L = \overline{b}(R_L)$ és $\overline{b}_H = \overline{b}(R_H)$; illetve az életpálya során befizetett járulékok és járadékok *várható egyenlege*: $\overline{z}_i = \tau R_i - \overline{b}(R_i)(D_i - R_i)$, azaz $\overline{z}_L$ és $\overline{z}_H$. Az egy főre jutó teljes egyenleg $\overline{Z} = (\overline{z}_L + \overline{z}_H)/2$. Most már kimondhatjuk állításunk.

1. tétel. *Tegyük föl, hogy a várhatóan rövidebb életűek kevesebb ideig dolgoznak, mint a várhatóan hosszabb életűek: $R_L < R_H < D_L$. Ha a nyugdíjakat a (2.1) képlet szerint állapítják meg, akkor a várhatóan rövidebb életűek életpálya-egyenlege pozitív, a várhatóan hosszabb életűeké negatív, és az átlagegyenleg is negatív:*

$$\overline{z}_L > 0 > \overline{z}_H \quad \text{és} \quad \overline{Z} < 0\,. \tag{2.3}$$

Megjegyzés. Ha a két típus szolgálati ideje azonos: $R_L = R_H$, akkor legalább az átlagos várható egyenleg nulla: $\overline{Z} = 0$.

Bizonyítás. Helyettesítsük be $\overline{z}$-ba a $\overline{b}$ képletet:

$$\overline{z} = \tau R - \frac{\tau R}{\overline{D} - R}(D - R) = \tau \frac{R(\overline{D} - D)}{\overline{D} - R} = \overline{b}(R)(\overline{D} - D) . \qquad (2.4)$$

Ebből már adódik a $\overline{z}_L > 0 > \overline{z}_H$ egyenlőtlenség. A $\overline{Z} < 0$ egyenlőtlenség bizonyításához vegyük figyelembe, hogy $\overline{D} - D_L = -(\overline{D} - D_H)$, tehát (2.4) értelmében $\overline{Z} = (\overline{D} - D_L)(\overline{b}_L - \overline{b}_H)/2$. Mivel az első tényező pozitív, a második tényező viszont az $R_L < R_H$ feltevésünk szerint negatív, tehát $\overline{Z} < 0$. Ha $R_L = R_H$, akkor $\overline{b}_L = \overline{b}_H$, azaz $\overline{Z} = 0$ ∎

Ezentúl az ún. semleges járadékfüggvényt *hagyományos*nak nevezzük (korábban a naiv elnevezést használtam). Ha csupán az összesített hiány zavarna bennünket, könnyen megszabadulhatunk tőle. A *kiigazított hagyományos* járadék esetén a $\bar{\tau}$ kifizetési kulcsot annyira csökkentjük a τ befizetési kulcshoz képest, hogy a teljes egyenleg nulla legyen:

$$\bar{b}(R) = \frac{\bar{\tau} R}{\overline{D} - R}, \quad \text{ahol} \quad \overline{Z}(\tau, \bar{\tau}) = 0 . \qquad (2.\overline{2})$$

Természetesen a várhatóan rövidebb életűek továbbra is többet fizetnek, a várhatóan hosszabb életűek pedig kevesebbet, mint kellene — de tompítva.

Szemléltetésül egy számpéldát mellékelünk (*1. táblázat*), táblázatos alakban. (Az utolsó három sorában szereplő szabályokkal csak később ismerkedünk meg.)

Szabály	Szolgálati idő		Járadék		Életpálya egyenleg	
	rövid R_L	hosszú R_H	kicsi b_L	nagy b_H	rövid z_L	hosszú z_H
Autark	40,0	48,0	0,80	0,80	0,0	0,0
Hagyományos	40,0	48,0	0,53	1,37	2,7	−6,9
Kiigazított	40,0	48,0	0,43	1,10	3,7	−3,9
Semleges 2. legjobb	34,7	48,0	0,45	0,80	0,0	0,0
Újraelosztó 1. legjobb	37,3	50,7	0,80	0,80	−2,7	2,7
Újraelosztó 2. legjobb	41,0	45,3	0,61	0,80	2,7	−2,7

1. táblázat. Nyugdíjszabályok összehasonlítása: eltérő élettartamok

Megjegyzések: 1. $D_L = 50$, $D_H = 60$, $f_L = f_H = 0{,}5$; $\tau = 0{,}2$ és $\bar{\tau} = 0{,}16$; – kerekítési hibákkal. 2. Az autark megoldással még semleges első legjobb megoldásként fogunk találkozni a későbbiekben.

A szimmetrikus információ esetén minden dolgozó várható felnőtt élettartamának a 80 százalékát tölti munkával, teljes keresetének 20 százalékát fizeti járulékként, és a nettó keresetével megegyező nyugdíjat élvez. Ugyanez a helyzet az autark szabály és aszimmetrikus információ esetén.

Hagyományos szabály esetén az átlagos várható élettartammal való számítás jelentősen csökkenti a várhatóan rövid életűeknek a teljes keresethez viszonyított nyugdíját (53 százalékra), és jelentősen növeli a várhatóan hosszú életűekét (137 százalékra), és az életpálya során az előbbi 2,7 évnyi keresetével többet, az utóbbi 6,9 évnyi keresettel kevesebbet fizet, mint várható értékben kellene. Figyeljük meg, hogy a várható egyensúlyhiány páronként 4,2 évnyi kereset!

A kiigazítás során a járulékkulcsot 4 százalékponttal kell csökkenteni, hogy az egyensúly fennmaradjon: $\bar{\tau} = 0{,}16$. A hagyományos rendszer torzulásai arányaiban megmaradnak, csak nagyságuk csökken. Kerekítési hiba miatt $Z = 0{,}1$. Természetesen az 1. tétel igaz tetszőleges típusszám és eloszlás esetén is, csak a számolás némileg bonyolultabb (Simonovits, 2002).

Egyéni optimalizálás

A neoklasszikus közgazdaságtan hagyományát követve, a továbbiakban egyéni optimalizálásból származtatjuk a modell bizonyos változóit (Sheshinski, 1978).

Föltesszük, hogy az egyéneknek jól viselkedő pillanatnyi *hasznosságfüggvényük van*, amely a fogyasztáson kívül a szabadidőtől is függ: c fogyasztás és l szabadidő esetén a pillanatnyi hasznosság értéke $\mathbf{u}(c, l)$. Fenntartva azt a feltevést, hogy az életpálya dolgozó és nyugdíjas korszakra bomlik, ahol $0 < l_m < l_M$ a dolgozók, illetve a nyugdíjasok szabadideje, definiáljuk a dolgozók és a nyugdíjasok pillanatnyi hasznosságfüggvényét: $u(a) = \mathbf{u}(a, l_m)$ és $v(b) = \mathbf{u}(b, l_M)$, ahol $a = 1 - \tau$ a dolgozó pillanatnyi fogyasztása és b a nyugdíjas pillanatnyi fogyasztása. Mivel egy nyugdíjasnak több szabadideje van, mint egy dolgozónak, $u(c) < v(c)$ minden c-re áll. Érdektelen eredményeket elkerülendő, ahol a dolgozók nem dolgoznak vagy nem mennek nyugdíjba, vagy ha mégis, akkor nyugdíjuk nagyobb korábbi teljes keresetüknél, tegyük föl, hogy $v(0) - v'(0)\tau < u(1 - \tau) < v(1) - v'(1)(\tau + 1)$. Néha még azt is megköveteljük, hogy $v(0) = -\infty$.

Időben additív *életpálya-hasznosságfüggvényt* feltételezünk:

$$U(D, R, a, b) = u(a)R + v(b)(D - R) . \tag{2.5}$$

A nyugdíjrendszer modellezésénél gyakori egyszerűsítő feltevés, hogy a dolgozó pillanatnyi hasznosságfüggvénye csak egy állandóban különbözik a nyugdíjasétól:

$$u(c) = v(c) - \varepsilon , \qquad \varepsilon > 0 . \tag{2.6}$$

A továbbiakban rögzítjük a járulékkulcsot, és az $u = u(1 - \tau)$ rövidítést alkalmazzuk.

Adott járadék–szolgálati idő szabály

Könnyebb egy általános, sima és növekvő $b(R)$ járadék–szolgálati idő szabályt tanulmányozni, mint a speciális, hagyományosan semleges szabályt. Az optimális szolgálati időt meghatározó szabályt idézzük.

2. tétel. *a) Belső optimumban, az U hasznosságfüggvény, a $b(R)$ járadékfüggvény és a τ járulékkulcs esetén az optimális $R(D)$ szolgálati idő–élettartam-függvény kielégíti a következő egyenletet:*

$$u + v'(b)b'(R)(D - R) - v(b) = 0 . \tag{2.7}$$

b) (2.7) mellett az optimum elégséges feltétele:

$$(v''^2 + v'b'')(D - R) - 2v'b' < 0 \,, \tag{2.8}$$

amelyből következik, hogy az optimális $R(D)$ szolgálati idő a D várható élettartam növekvő függvénye.

c) Konkáv v és b függvény esetén, az optimális szolgálati idő növekedése kevesebb, mint fele a várható élettartam növekedésének: $0 < R'(D) < 1/2$.

Bizonyítás. a) Deriváljuk U-t R szerint, és tegyük nullává a deriváltat, stb.

b) Elegendő, ha az $U'_R(D,\tau,R)$ függvény R-nek csökkenő függvénye. Az implicit függvény tételét alkalmazva az $U'_R(D,\tau,R) = 0$ függvényre:

$$R'(D) = -\frac{U''_{RD}}{U''_{RR}} = \frac{v'b'}{2v'b' - (v''b'^2 + v'b'')(D - R)} \,. \tag{2.9}$$

Figyelembe véve, hogy $v' > 0$, $b' > 0$, feltételünkből következik $R'(D) > 0$.

c) Nyilvánvalóan következik (2.9)-ből és $b'' < 0$-ból. ∎

Az 1. táblázatban megkezdett szimulációt most már folytathatjuk. Eddig nem foglalkoztunk a hasznosságfüggvények előjelével. Ha azonban megfelelően akarjuk korlátozni az időbeli helyettesíthetőséget ($\sigma < 0$), akkor a szimulációban szereplő, CRRA-alakú u és v negatívnak adódik. Tehát (2.5) miatt U is negatív lenne, ezért a később bevezetendő társadalmi jóléti függvény CRRA-specifikációja értelmetlen lenne. Emellett minél tovább él az egyén, annál kisebb lenne az életpálya-hasznossága, s ez ellent mondana a később bevezetendő érdekeltségi feltételeknek is. Ezeket a következményeket el kell kerülnünk, tehát hozzáadunk egy megfelelően nagy pozitív θ állandót u-hoz és v-hez. Csupán azt kell tudatosítanunk, hogy minél nagyobb állandót alkalmazunk, annál inkább eltűnnek a relatív különbségek az életpálya-hasznosságfüggvények között. CRRA-hasznosságfüggvényt feltételezve: $v(b) = b^\sigma/\sigma + \theta$, ahol $-\infty < \sigma < 1$ a *rugalmasság.* Legyen $\sigma = -0{,}5$; $\varepsilon = 1{,}4$; $\theta = 4{,}1$ (vö. Eső–Simonovits, 2003).

Simonovits (2002, 2. következmény) megmutatta, hogy a járadékszabályok széles osztályában az életpálya-egyenleg növekvő függvénye a várható élettartamnak. Két-típusú kiegyensúlyozott modellünkben ($Z = 0$), ebből már következik $z_L > 0 > z_H$.

Befejezvén az adott járadékszabály hagyományos elemzését, rátérünk cikkünk központi kérdésére, a nyugdíjszabályok tervezésére.

3 Semleges nyugdíjszabályok tervezése

Egy járadékszabályt *semleges*nek nevezünk, ha minden típusfüggő egyenleg 0. Egy ilyen rendszerben, amelyet $\tilde{}$ jelöl, a szolgálati időt meghatározza a járadék:

$$\tilde{R}_L = \frac{b_L D_L}{\tau + b_L} \quad \text{és} \quad \tilde{R}_H = \frac{b_H D_H}{\tau + b_H} \,. \tag{3.1}$$

Főleg második legjobb (az érdekeltségi feltételeket kielégítő) optimumok érdekelnek bennünket, de az elemzést megkönnyíti, ha először eltekintünk az érdekeltségi feltételektől: első legjobb optimumot tanulmányozzuk. A semleges rendszer sajátos természete miatt mindkét megoldás vizsgálható a társadalmi jóléti függvény bevezetése nélkül. Ez a pont a Simonovits (2004) cikken alapul.

3.1 Semleges első legjobb

Ha a kormányzat ismerné az egyéni paraméterek értékét, és rá tudná kényszeríteni az egyéneket parancsai követésére, akkor az *első legjobb megoldás* egy olyan (b_L^*, b_H^*) járadékpár és egy olyan (R_L^*, R_H^*) szolgálati idő pár lenne, hogy mindkét típus életpálya-hasznossága maximális lenne, feltéve, hogy a másik érték adott: Pareto-optimalitás. (Azok, akik az első legjobb megoldásnál csupán a fizikai korlátokat engedik meg, szimmetrikus információ melletti optimumra is gondolhatnak.) A következő tétel jellemzi az első legjobb megoldásokat.

3. tétel. *Ha minden egyén megválaszthatja b járadékát vagy az R szolgálati idejét, akkor a D várható élettartamától függetlenül a b^* semleges első legjobb járadék kielégíti a következő nem lineáris egyenletet:*

$$u - v(b^*) + v'(b^*)(\tau + b^*) = 0 \,. \tag{3.2}$$

A semleges első legjobb szolgálati idő arányos a várható élettartammal:

$$R^*(D) = \frac{b^*}{b^* + \tau} D \,. \tag{3.3}$$

Megjegyzések. 1. A 3. tétel igazolja, hogy az 1. táblázatban szereplő szimmetrikus szabály, azaz a semleges első legjobb szabály megegyezik az önkényesen választott járadék és nyugdíjazási kor értékével.

2. Megoldásunkban a semleges első legjobb szolgálati idő nagyon egyszerűen függ a várható élettartamtól: arányos vele, és az arányossági szorzó $b^*/(b^* + \tau) < 1$.

3. A hasznossági függvényről tett feltevések szerint egyetlen egy olyan b^* járadék létezik, amely kielégíti a (3.2) egyenletet.

Bizonyítás. Behelyettesítve (3.1)-et (2.5) életpálya-hasznosságfüggvénybe, adódik

$$\tilde{U}_L = \varphi(b_L)D_L \quad \text{és} \quad \tilde{U}_H = \varphi(b_H)D_H \,, \tag{3.4}$$

ahol

$$\varphi(b) = \frac{ub + v(b)\tau}{\tau + b} \,. \tag{3.5}$$

Deriválva $\varphi(b)$-t, majd nullává téve: $\varphi'(b) \approx [u + v'(b)\tau](\tau + b) - [ub + v(b)\tau] = \tau[u - v(b) + v'(b)(\tau + b)] = 0$. (3.2) segítségével adódik $b = b^*$, függetlenül D-től. Az egyértelműség oka: $\varphi''(b) \approx v'(b) \approx -v'(b) + v''(b)(\tau + b) - v'(b) \approx v''(b) < 0$. ∎

3.2 Semleges második legjobb

A valóságban azonban a kormányzat csak az egyéni paraméterek eloszlását ismeri (vagy használhatja föl). Ekkor az első legjobb – ömlesztett – megoldás csalásra csábít: például a várhatóan hosszabb életű egyének érdekeltek abban, hogy várhatóan rövidebb életűnek tüntessék föl magukat, csak hogy hamarabb mehessenek nyugdíjba, és a kormányzat által várt időszaknál hosszabb ideig élvezhessék alacsonyabb nyugdíjukat. De fordított irányú csalás is elképzelhető, ha túlzottan kicsiny az L-járadék. A csalást kizárandó, *érdekeltségi feltételek*et kell kirónunk. Képletben:

$$uR_H + v(b_H)(D_H - R_H) \geq uR_L + v(b_L)(D_H - R_L) \ , \tag{3.6H}$$

és

$$uR_L + v(b_L)(D_L - R_L) \geq uR_H + v(b_H)(D_L - R_H) \ . \tag{3.6L}$$

Ekkor a *második legjobb megoldás* egy Pareto-optimális megoldás, amely az első legjobb megoldás (3.1) költségvetési korlátjai mellett kielégíti (3.6) érdekeltségi feltételeket is. Ekkor a feladat a következőképpen fogalmazható meg: melyik az a $(\bar{b}_L, \bar{b}_H)$ második legjobb járadékpár, amelyre mindkét típus életpálya-hasznosságfüggvénye maximális — (3.1) és (3.6) mellett? Látni fogjuk, hogy a H-korlát lesz feszes. A bizonyításokat leegyszerűsítendő, tegyük föl, hogy $\tau = 1 - b^*$ és $v(0) = -\infty$.

Belátjuk a következő tételt.

4. tétel. *A semleges második legjobb megoldásban a* $\bar{b}_H = b^*$*, és a* $\bar{b}_L < b^*$ *járadékot a*

$$D_H \varphi(b^*) = D_L \varphi(\bar{b}_L) + (D_H - D_L) v(\bar{b}_L) \tag{3.7}$$

implicit egyenlet határozza meg.

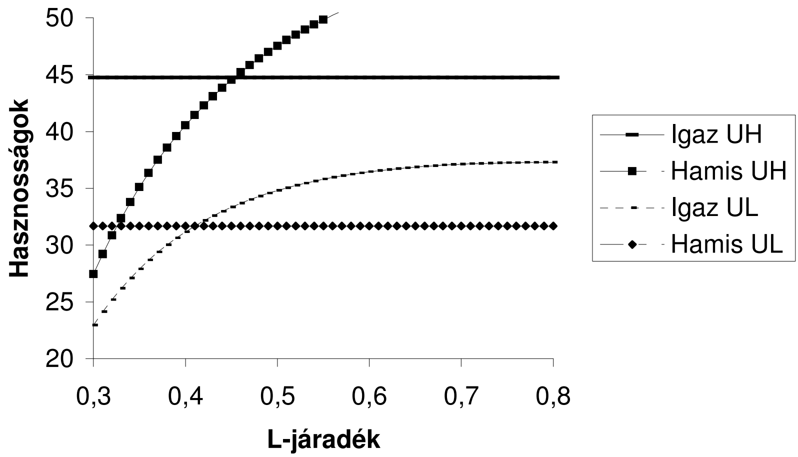
Megjegyzés. Vegyük észre, hogy a második legjobb megoldásban csak a H-típus kaphat első legjobb járadékot. Ez jellemző az ilyen modellekre. (Például a Bevezetésben említett Rothschild–Stiglitz (1976) optimális biztosítási modellben az L-típus csak részleges biztosítást vehet, hogy bizonyítsa: nem H-típusú.)

Bizonyítás. A (3.6H) érdekeltségi feltétel a

$$D_H \varphi(b_H) = D_L \varphi(b_L) + (D_H - D_L) v(b_L) \tag{3.8}$$

egyenlőségre egyszerűsödik. Ebben a feltételben minél nagyobb $b_H \leq b^*$, annál nagyobb $\tilde{U}_H$ és annál gyengébb a b_L-re vonatkozó korlát. Ezért a második legjobb megoldásban az $\tilde{U}_H$ függvény $\bar{b}_H = b^*$-nél maximális, míg az $\tilde{U}_L$ függvény $\bar{b}_L$-nél, amely kielégíti (3.7)-et. A (3.6L) feltétel is teljesül. ■

Az *1. ábra* a hasznosságtérképet a rövidebb életűek járadékának a függvényében ábrázolja: IgazUH (U_H), HamisUH (U_{HL}) és IgazUL (U_L), HamisUL (U_{LH}) görbék az L-járadék (b_L) függvényei. IgazUH egy folytonos vízszintes vonal, amelyet a HamisUH görbét az N2B jelzésű semleges második legjobb járadékban metszi: $\bar{b}_L = 0{,}45$. Figyeljük meg, hogy $b_L = 0{,}42$ előtt az IgazUL görbe a HamisUL alatt húzódik, érdekeltté téve L-t, hogy H-nak tettesse magát. Ez a körülmény azonban nem játszik szerepet a Pareto-optimális választás esetében.



1. ábra. Semleges 1. és 2. legjobb

Az 1. táblázatban már találkoztunk a semleges első legjobbal autarkia néven, és most hozzávesszük a második legjobb megoldást. Vegyük észre, hogy a szolgálati idők *túlságosan érzékenyek*, hiszen eltérésük nagyobb, mint a várható élettartamok eltérése: 13 év szemben a 10 évvel. (Összehasonlításként megjegyezzük, hogy a 2.c tétel szerint az adott járadékszabályok tág osztályára nincs érzékeny függés.) Ahhoz, hogy ezt és más állításokat megfogalmazhassunk, szükségünk lesz a *minmax-hányados*ra, amely a rövidebb és a hosszabb várható élettartam hányadosa.

1. következmény. *A semleges második legjobb szolgálati idő pontosan akkor függ érzékenyen a várható élettartamtól:* $\bar{R}_H - \bar{R}_L > D_H - D_L$, *ha a minmax-hányados elég közel esik 1-hez:*

$$\delta = \frac{D_L}{D_H} > \delta_* \, , \tag{3.9}$$

ahol a δ_* *kritikus hányadost a*

$$(1-\delta_*)u + (1-b^*)v^* = (2-b^*-\delta_*)(v^*-1+\delta_*), \quad v^* = v(b^*) \tag{3.10}$$

egyenlet határozza meg.

Megjegyzés. Megmutatható, hogy (3.10)-nek létezik egy minimális pozitív gyöke.

Bizonyítás. Be akarjuk látni, hogy $\bar{R}_L < R_* = \bar{R}_H - D_H + D_L$. Bevezetve a δ és az $R_H^* = b^* D_H$ mennyiségeket, egyenlőtlenségünk ekvivalens

$$\bar{b}_L < b_* = \frac{(1-b^*)R_*}{D_L - R_*} = b^* - 1 + \delta$$

egyenlőtlenséggel. Most (3.8) a következő képletre egyszerűsödik:

$$b^*u + (1 - b^*)v^* = \varphi(b^*) = \delta\varphi(\bar{b}_L) + (1 - \delta)v(\bar{b}_L)\ . \qquad (3.8')$$

Átrendezve az egyenlőtlenséget:

$$ub^* + v^*(1 - b^*) < (\delta - 1 + b^*)u + (2 - b^* - \delta)\ . \qquad (3.11)$$

Egyszerű számolással igazolható, hogy (3.11) pontosan akkor érvényes a $0 < \delta < \delta_*$ szakaszon, ha (3.9)–(3.10) teljesül. ■

4 Újraelosztó nyugdíjszabályok tervezése

Tudomásom szerint az összes nyugdíjtervezési cikk – Simonovits (2004) kivételével – újraelosztó szabályokat mérlegelt, ahol a semleges rendszer típusfüggő egyenlegei helyett egy aggregált egyenleg szerepel. (Ez természetes feltevés volt az optimális jövedelemadó-tervezésben, ahonan az egész mechanizmustervezés indult.) Azt várhatnánk, hogy bármely újraelosztás az egyik típusnak a másik típus kárára kedvez. Ez azonban nem mindig van így. A következő (5.) pontban látni fogjuk, hogy az újraelosztó második legjobb megoldás gyakran Pareto-dominálja a semlegest. Már korábban említettük, hogy ez a pont az Eső–Simonovits (2003) cikken alapul.

Társadalmi jólét

Már két típus esetén is különböző egyéni hasznossági optimumpárokat kell minősítenünk. Ha nem elégedünk meg a határozatlan Pareto-rendezéssel, akkor be kell vezetnünk egy alkalmas társadalmi jóléti függvényt. Tegyük föl, hogy az L- és a H-típusú egyének súlya születéskor a népességben rendre $f_L > 0$ és $f_H > 0$, $f_L + f_H = 1$. Stacionárius népességet tételezünk föl, ezért a korosztályi hosszmetszeti adatok megegyeznek az aggregált keresztmetszeti adatokkal. Két típus esetén a két legegyszerűbb *társadalmi jóléti függvény* rendre a két életpálya-hasznosság összege, illetve minimuma. Képletben,
Utilitarista:

$$V = f_L U_L + f_H U_H\ . \qquad (4.1')$$

Rawls-féle:

$$V = \min(U_L, U_H)\ . \qquad (4.1'')$$

Általánosabban, legyen ψ egy konkáv skalár-skalár függvény, amely az egyéni életpálya-hasznosságokat transzformálja, mielőtt összeadnánk őket. Ekkor a kétszemélyes CRRA-típusú *társadalmi jóléti függvény* képlete:

$$V = f_L\psi(U_L) + f_H\psi(U_H)\ . \qquad (4.1)$$

Minél konkávabb a ψ függvény, annál inkább egyenlősítő a társadalmi jóléti függvény. Szimulációban alkalmazható a CRRA-specifikáció: $\psi(U) = U^\phi/\phi$, ahol ϕ 1-nél nem nagyobb valós szám az *egyenlőtlenségi index.* Sajnos, az elemzésben el kell különítenünk az utilitarista esetet a többitől (Eső–Simonovits, 2003). Emlékeztetünk arra, hogy minél nagyobb a θ additív állandó, annál kisebb a U_i-k közti relatív különbség.

Mivel nem követeljük meg, hogy az egyéni életpálya-egyenlegek nullák legyenek (semlegesség), társadalmi költségvetési korlátot kell felállítanunk, amelyben a z_H és z_L egyéni egyenleg súlyozott összege szerepel:

$$Z = f_L z_L + f_H z_H = 0\,. \tag{4.2}$$

A mechanizmustervezés eszközeit követve, most is az első legjobb megoldást elemezzük először, és csak aztán térünk rá a második legjobb megoldásra.

Újraelosztó első legjobb megoldás

Ha a kormányzat ismerné az egyéni jellemzőket, és képes lenne érvényesíteni akaratát, akkor az *első legjobb megoldás* egy olyan (b_L°, b_H°) nyugdíjpár és (R_L°, R_H°) szolgálatiidő-pár lenne, amelyre a (4.1) társadalmi jóléti függvény maximális lenne a (4.2) költségvetési korlát mellett.

5. tétel (Vö. Eső–Simonovits, 2003, 0. tétel.) *Az újraelosztó első legjobb megoldásban mindkét nyugdíj független a várható élettartamtól: $b_L^\circ = b_H^\circ = b^*$, és a közös érték kielégíti a semleges első legjobb megoldás optimális feltételét: (3.2)-t. A két optimális szolgálati idő a két egyéni várható élettartam inhomogén lineáris függvénye:*

$$R_L^\circ = R^* + \omega(D_L - \overline{D}) \quad \text{és} \quad R_H^* = R^\circ + \omega(D_H - \overline{D})\,, \tag{4.3}$$

ahol

$$R^\circ = \rho\overline{D}, \qquad \rho = \frac{b^*}{\tau + b^*} < 1 \quad \text{és} \quad \omega = \frac{v^*}{v^* - u} > 1\,. \tag{4.4}$$

Megjegyzések. 1. Meglepő, hogy az első legjobb nyugdíj értéke független a társadalmi jóléti függvénytől. Az ok egyszerű: a bizonyításban a ψ „kiesik”, a két életpálya-hasznosság egyenlővé tehető az optimumban.

2. Ugyanez a függetlenség igaz a megfelelő szolgálati időkre is. Kivétel az utilitarista eset, ahol az optimum határozatlan. Ekkor az optimális szolgálati idő-párok egy olyan folytonos szakaszt alkotnak a paramétertérben, amelyet a $Z = 0$, $R_L < D_L$ és $R_H < D_H$ feltételek határoznak meg. Szimmetria miatt ilyenkor a továbbiakban (4.3) helyett az $R_L^\circ = R_H^\circ = R^\circ$ választással élünk, ahol R° az átlagos élettartamhoz tartozó autark szolgálati idő.

3. Az $R_L^\circ > 0$ és a $R_H^\circ < D_H$ feltételhez a következő feltevésekre van szükség:

$$D_H < \frac{\omega}{\omega - \rho} D_L \quad \text{és} \quad D_H < \frac{\omega - \rho}{(\omega + \rho - 2)_+} D_L\,,$$

ahol x_+ az x szám pozitív része.

4. Vegyük észre a hasonlóságot a semleges második legjobb megoldással: a szolgálati idő mindkét esetben érzékenyen függ a várható élettartamtól.

Bizonyítás. Vegyük a következő Lagrange-függvényt:

$$\mathcal{L} = f_L\psi(U_L) + f_H\psi(U_H) + \mu[f_L z_L + f_H z_H] .$$

Az elsőrendű optimalitási feltételek a következők:

$$\mathcal{L}'_b = \psi'(U_i)v'(b_i)(D - R_i) + \mu(R_i - D) = 0 \Leftrightarrow \psi'(U_i)v'(b_i) = \mu ,$$
$$\mathcal{L}'_R = \psi'(U_i)[u - v(b_i)] + \mu(\tau + b_i) = 0 .$$

Behelyettesítve az első egyenlet μ-jét a másodikéba, $\psi'(U_i^\circ)$-vel való egyszerűsítés után adódik a (3.2) egyenlet, azaz az optimális nyugdíj független a típustól. Ekkor az első egyenletből adódóan $\psi'(U_L^\circ)v'(b^\circ) = \psi'(U_H^\circ)v'(b^\circ)$, azaz $\psi'(U_L^\circ) = \psi'(U_H^\circ)$. Szigorúan konkáv jóléti függvényre szorítkozva, $U_L^\circ = U_H^\circ$: a két típus maximális életpálya-hasznossága egyenlő. (Az elfajult, utilitarista esetben a semmitmondó $1 \equiv 1$ azonosság adódik.) Behelyettesítve (2.1)-et egyenletünkbe és z°-okat $Z^\circ = 0$-ba [(4.2)], e két egyenlet adódik:

$$v^* D_H - [v^* - u]R_H = v^* D_L - [v^* - u]R_L ,$$
$$f_L[(\tau + b^*)R_L - b^* D_L] + f_H[(\tau + b^*)R_H - b^* D_H] = 0 .$$

A kétismeretlenes lineáris egyenletrendszert megoldva, adódik (4.3)–(4.4). ■

Figyeljük meg a szoros kapcsolatot az újraelosztó első legjobb [(4.3)] és a semleges második legjobb szolgálati idők [(3.3′)] között: $R^*(D)$ és $R^\circ(D)$ szakaszok központja közös: $(\overline{D}, R^\circ)$, meredekségük rendre $\rho < 1$ és $\omega > 1$. Ebből adódik a

2. következmény. *Az újraelosztó első legjobb optimumban a várhatóan hosszabb életűek támogatják a várhatóan rövidebb életűeket:* $z_L^\circ < 0 < z_H^\circ$.

Egészítsük ki a korábbi numerikus futásokat a $\phi = -1$-hez tartozó futással! Ekkor az első legjobb szabályban a rövid életű csak 37 évet, a hosszú életű viszont 51 évet dolgozik, megsértve a második legjobbra kirótt $R_H < D_L$ feltételt. Azonos nyugdíjuk a semleges első legjobb megoldással egyezik, és jócskán eltér a korábbiaktól.

Második legjobb megoldás

De a kormányzat nem ismeri az egyéni jellemzőket, csak eloszlásukat. Ezért a *második legjobb megoldás*t kell bevezetnie, ahol az első legjobb megoldás célfüggvénye és korlátja mellett a (3.6H) *érdekeltségi korlát* is megjelenik. Egy meglepő tételt idézünk az utilitarista társadalmi jóléti függvény esetére.

6. tétel (Vö. Eső–Simonovits, 2003, 1. tétel). *Ha a jóléti függvény utilitarista, akkor egyetlen egy újraelosztó második legjobb nyugdíjszabály létezik, amely egyúttal megvalósítja az első legjobb szabályt:*

$$b(R) = \begin{cases} 0, & \text{ha } R < R^\circ; \\ b^*, & \text{ha } R \geq R^\circ. \end{cases}$$

Bizonyítás. Az első legjobb megoldás, ahol $b_L^\circ = b_H^\circ = b^*$ és $R_L^\circ = R_H^\circ = R^\circ$, kielégíti az érdekeltségi feltételt, tehát második legjobb is. ■

Mivel ez a megoldás túl merev és igazságtalan, az utilitarista helyett a szigorúan konkáv társadalmi jóléti függvényekre szorítkozunk. Ekkor alaposabb elemzésre lesz szükség.

7. tétel (vö. Eső–Simonovits, 2003, 2. tétel). *A hosszabb várható élettartamúak járadéka azonos a semleges első legjobbal, míg a rövidebbé kisebb; hasonló a szolgálati idők sorrendje:*

$$\hat{b}_L < \hat{b}_H = b^* \quad \text{és} \quad \hat{R}_L < \hat{R}_H \; . \tag{4.5}$$

Bizonyítás. Először (4.5) elemi részét látjuk be: Helyettesítsük (3.6H) bal és jobb oldalát rendre U_H-val és $U_L + (D_H - D_L)v(b_L)$-lel:

$$U_H \geq U_L + (D_H - D_L)v(b_L) \; .$$

Hasonlóan (3.6L)-re:

$$U_L \geq U_H + (D_L - D_H)v(b_H) \; .$$

A két egyenlőtlenség összehasonlításából következik $\hat{b}_L < \hat{b}_H$.

Ha $\hat{R}_L \geq \hat{R}_H$ igaz lenne, akkor a rövidebb életű azt tettetné, hogy hosszabb életű, ellentmondás.

Rátérünk a $\hat{b}_H = b^*$ állítás bizonyítására. Az 5. tétel bizonyításában szereplő, első legjobb feladat Lagrange-függvényéhez hozzáadjuk a (3.6H) egyenlőtlenség nullára rendezett alakját ν szorzóval, kiszámítjuk a négy parciális deriváltat, és hozzávesszük a két korlátot. A kibővített Lagrange-függvény a következő:

$$\hat{\mathcal{L}} = f_L\psi(U_L) + f_H\psi(U_H) + \mu[f_L z_L + f_H z_H] +$$
$$+ \nu[uR_H + v(b_H)(D_H - R_H) - uR_L - v(b_L)(D_H - R_L)] \; .$$

Vegyük a Lagrange-függvényes optimalitási feltételekből az alábbi kettőt!

$$\mathcal{L}'_{b_H} = f_H\psi'(U_H)v'(b_H)(D_H - R_H) + f_H\mu(R_H - D_H) + \nu v'(b_H)(D_H - R_H) = 0,$$
$$\mathcal{L}'_{R_H} = f_H\psi'(U_H)[u - v(b_H)] + f_H\mu(\tau + b_H) + \nu(u - v'(b_H)) = 0 \; .$$

Kifejezve ν-t az első egyenletből, és behelyettesítve a másodikba:

$$\left(\psi'(U_H) + \frac{\nu}{f_H}\right)[u - v(b_H) + v'(b_H)(\tau + b_H)] = 0 \; .$$

Az utolsó egyenlet első tényezője pozitív, a második tényezője éppen (3.2). ■

Mivel $\hat{b}_H = b^*$, a négy változóból egy kiesik. A két korlátban a szolgálati idők lineárisan szerepelnek, ezért könnyen kifejezhetők mint a várhatóan rövidebb életűek járadékának a függvényei: a többváltozós feltételes maximumfeladat egy skalár-skalár függvény maximalizálására vezethető vissza.

A bizonyítást egyszerűsítendő, két technikai feltevéssel élünk: a két típus gyakorisága azonos: $f_L = f_H$, és (2.6) additív kapcsolat esetén a járulékkulcs egyénileg is optimális: $\tau = 1 - b^*$.

Íme, az egyszerűsített feladat.

8. tétel. *Legyen $f_L = f_H$, $\tau = 1 - b^*$ és legyen b_L egy pozitív skalár, és $v^* = v(b^*)$. A második legjobb megoldást a következő skalár-skalár függvény maximalizálása adja:*

$$V(b_L) = \frac{\psi(U_L(b_L)) + \psi(U_H(b_L))}{2}$$

a $0 < b_L \le b^*$ szakaszon, ahol

$$R_L(b_L) = \frac{(v^* - u)(b^* D_H + b_L D_L) + (v(b_L) - v^*)D_H}{(v^* - u)(\tau + b_L) + v(b_L) - u}\ , \tag{4.6}$$

$$U_L(b_L) = [u - v(b_L)]R_L(b_L) + v(b_L)D_L\ , \tag{2.5L}$$

$$R_H(b_L) = b^* D_H + b_L D_L - (\tau + b_L)R_L(b_L)\ , \tag{4.7}$$

$$U_H(b_L) = (u - v^*)R_H(b_L) + v^* D_H\ . \tag{2.5H}$$

Megjegyzés. A feltételekben szereplő négy függvény valójában csak b_L-től függ.

Bizonyítás. Elhagyva (3.6H)-ból az egyenlőtlenséget, és behelyettesítve $\hat{b}_H = b^*$-t az új egyenletbe és (4.2)-be, adódik

$$uR_H + v^*(D_H - R_H) = uR_L + v(b_L)(D_H - R_L) \tag{3.6H'}$$

$$(\tau + b_L)R_L - b_L D_L = b^* D_H - R_H\ . \tag{4.2$'$}$$

(4.2$'$) meghatározza R_H-t mint R_L függvényét: (4.7). Behelyettesítve (4.7)-et (3.6H')-be, (4.6) adódik, stb. ■

Azt sejtjük, hogy figyelemre méltó kapcsolat van a $\hat{b}_L$ járadék és a ϕ egyenlőtlenségi index között. A Rawls-i jóléti függvény esetén csak $U_L(b_L)$-t kell maximalizálni (4.6) mellett; jelölje a feladat megoldását $\hat{b}_L(-\infty)$. Az utilitarista esetben $\hat{b}_L(1) = b^*$ (5. tétel). Általánosan, bármely b_L valós szám, amely a $b_L(-\infty) < b_L < b^*$ szakaszra esik, megfelelő egyenlőtlenségi indexre megegyezik egy második legjobb, rövid életű egyén járadékával. Képletben: létezik egy olyan ϕ valós szám, amelyre $b_L = \hat{b}_L(\phi)$.

3. következmény. *Minél nagyobb a ϕ egyenlőtlenségi index, annál kisebb $\hat{R}_H$. Speciálisan:*

$$\hat{R}_L < R^* < \hat{R}_H\ . \tag{4.5$'$}$$

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy $\hat{U}_H$ növekvő függvénye ϕ-nek. (2.5H) értelmében $\hat{U}_H$ csökkenő függvénye R_H-nak. Következésképpen $\hat{R}_H(\phi)$ csökkenő. ■

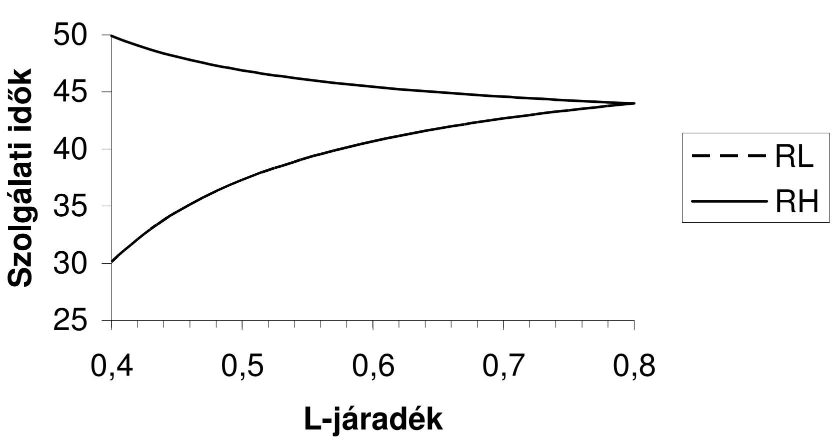
Hasonlóan $\hat{U}_L(\phi)$ növekvő. Nem tudjuk azonban, hogy ez a csökkenés hogyan oszlik meg $\hat{b}_L$ és $\hat{R}_L$ között.

Megjegyzések. 1. A Bevezetésben már említettük, hogy az aszimmetrikus információs keretben végzett optimális ösztönzést a *mechanizmustervezés* adja. Egyébként az irodalomban is a most tapasztalthoz hasonló jelenséggel találkoztunk: Mirrlees (1971) optimális jövedelemadórendszerében a leggazdagabb egyén optimális adókulcsa nulla.

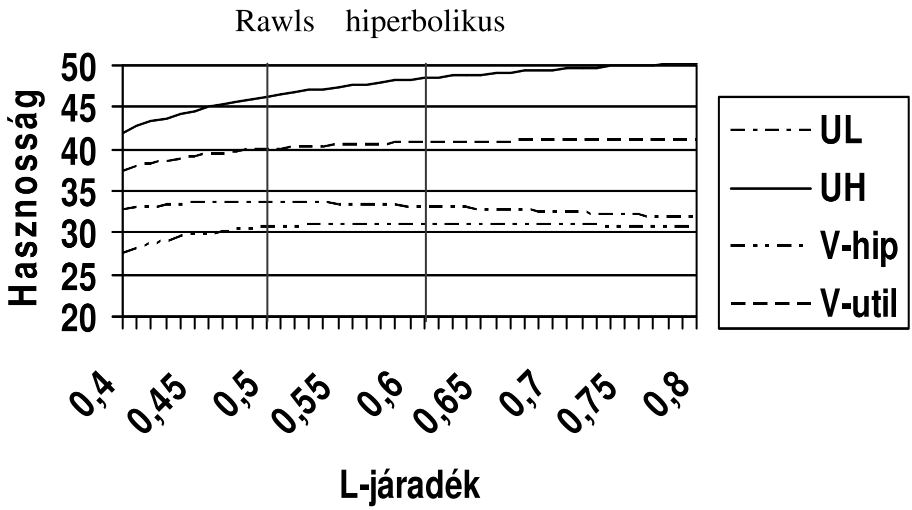
2. Végig rögzítjük a τ járulékkulcsot, pedig a nyugdíjösztönzés egyik legizgalmasabb kérdése éppen a járulékkulcs optimalizálása. A már meghatározott optimumokat parametrikus optimumnak tekintve, a τ változtatásával az abszolút jóléti optimum is meghatározható lenne, legalábbis numerikusan (vö. Eső–Simonovits, 2003, 3. ábra).

Az 1. táblázatbeli szimulációt most már befejezhetjük. A második legjobb szabály esetén az autarkiától való eltérés irányt vált: a rövid életű többet (41 évet), a hosszú életű kevesebbet (45 évet) dolgozik, mint az autarkiában.

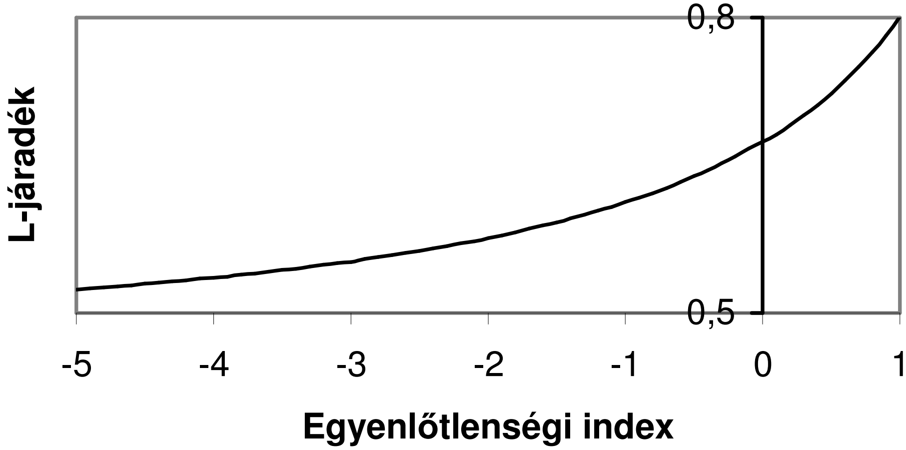
A 8. tételben tárgyalt algoritmus-egyszerűsítést a *2. és a 3. ábrán* szemléltetjük. Mindkét esetben b_L a független változó, és rendre $R_L(b_L)$, $R_H(b_L)$ a függő változó a 2. ábrán és $U_L(b_L)$, $U_H(b_L)$, $V(b_L)$ a 3. ábrán. A $b_L(-\infty) = 0{,}5$, $b_L(-1) = 0{,}61$ és $b_L(1) = 0{,}8$ pontban húzott függőleges egyenesek rendre a Rawls-féle, a hiperbolikus és az utilitarista maximumokban metszik ki az optimális R-eket és U-kat. Ahhoz, hogy egy ábrán mutathassuk be a hasznosság és jóléti függvényeket, a $200V + 82$ transzformációt alkalmaztuk V-re. Végül a *4. ábra* a $b_L(\phi)$ függést mutatja.



2. ábra. Második legjobb szolgálati idők



3. ábra. Járadék és hasznosság



4. ábra. Egyenlőtlenség és L-járadék

5 Összehasonlítások

Ebben a pontban több analitikus összehasonlítást végzünk különféle szabályok között. Először összehasonlítjuk az újraelosztó második legjobb megoldást a semleges első legjobbal.

4. következmény. *Az újraelosztó második legjobb optimumban a várhatóan hosszabb életűek kevesebbet dolgoznak, mint a semleges első legjobb optimum-*

ban, és a várhatóan rövidebb életűek támogatják őket:

$$\hat{R}_H < R_H^\circ \quad \text{és} \quad \hat{z}_L > 0\,.$$

Bizonyítás. Valóban, a 7. tétel szerint az utilitarista esetben $\hat{R}_H(1) = R^\circ < R_H^\circ$. Elég nagy egyenlőtlenségi indexekre a folytonosság miatt az egyenlőtlenség fennáll, de az általános esetben további megfontolásokra van szükség. Tegyük föl az állítás ellenkezőjét: $\hat{z}_H \geq 0$. Ha szigorú egyenlőtlenség állna valamilyen ϕ-ra, akkor a 3. következmény és a folytonosság értelmében létezne egy olyan közbülső $\bar{\phi} \in (\phi, 1)$, amelyre $\hat{z}_H(\bar{\phi}) = 0$: semleges első legjobb.

$\hat{z}_L = \hat{z}_H = 0$ értelmében $\hat{R}_H = b^* D_H$ és $\hat{R}_L = b_L D_L/(\tau + b_L)$. Behelyettesítve (3.5)–(3.6H)-ba,

$$ub^* D_H + v^* \tau D_H = \varphi(b_L) D_L, \quad \text{ahol} \quad \varphi(b_L) = \frac{ub_L + v(b_L)\tau}{\tau + b_L}\,.$$

A b^* létezésének és egyértelműségének igazolásakor már láttuk, hogy $b_L < b^*$ esetén $\varphi'(b_L) > 0$, azaz

$$ub^* D_H + v^* \tau D_H > \varphi(b^*) D_L > \varphi(b_L) D_L\,,$$

ellentmondás. ∎

Másodszor, összehasonlítjuk az újraelosztó első legjobbat a hagyományossal.

5. következmény. *A hagyományos megoldásban a hosszabb várható idejű típus szolgálati ideje nagyobb, mint az utilitarista újraelosztó első legjobb:*

$$\overline{R}_H > R^\circ.$$

Bizonyítás. Kiszámítjuk a hosszabb élettartamú típus hagyományos optimumát: $(2.\overline{2})$ és (2.7) szerint

$$\overline{U}_H{}'(R) = u - v(\overline{b}(R)) + v'(\overline{b}(R))\overline{b}'(R)(D_H - R) = 0\,, \tag{5.1}$$

ahol

$$\overline{b}'(R) = \frac{\tau \overline{D}}{(\overline{D} - R)^2}\,.$$

Elegendő megmutatni, hogy $\overline{U}_H{}'(R^\circ) > 0$, vagy másképp: mivel az első és a második tag rendre azonos (3.2)-ben és (5.1)-ben, (5.1) harmadik tagja nagyobb, mint (3.2)-é, azaz $\overline{b}'(R^\circ)(D_H - R^\circ) > \tau + b^*$. Behelyettesítve a képleteket, egyenlőtlenségünk a következő igaz egyenlőtlenségre egyszerűsödik: $D_H > \overline{D}$. ∎

Megjegyzés. Azt sejtjük, hogy hosszabb várható élettartamú típus esetén az újraelosztó második legjobb szolgálati idő is kisebb, mint a hagyományosé, de ezt csak szimulációval tudjuk igazolni.

Harmadszor, megmutatjuk, hogy ha a δ minmax-hányados elegendően közeli 1-hez, akkor az újraelosztó második legjobb dominálja a semlegest: $\hat{U}_H > \bar{U}_H$ és $\hat{U}_L > \bar{U}_L$. Az első egyenlőtlenség majdnem triviális: $\hat{b}_H = \bar{b}_H$ és $\hat{R}_H < \bar{R}_H$ miatt $\hat{U}_H > \bar{U}_H$.

Egy szükséges és elégséges feltételt adunk a dominanciára.

9. tétel. *Tegyük föl, hogy $\tau = 1-b^*$. Az újraelosztó második legjobb pontosan akkor Pareto-dominálja a semlegest, ha a δ minmax-hányados elegendően közeli 1-hez: $\delta = D_L/D_H > \delta_\circ$, ahol*

$$\delta_\circ = \frac{v^* - \varphi(b^*)}{v^* - \varphi(\bar{b})},$$

és $\bar{b}$ kielégíti az

$$v(\bar{b}) = f_L b^* u + (1 - f_L b^*)v^*, \qquad (\bar{b} < b^*)$$

egyenletet.

Megjegyzés. Ha a H-típus aránya eléggé kicsi, vagy a szereplők eléggé kockázatkerülők, akkor adott minmax-hányadosra a feltevés teljesül.

Bizonyítás. Először meghatározzuk, hogy mikor áll $\hat{U}_L > \bar{U}_L$. Tudjuk, hogy $\bar{U}_L = D_H[ub^* + v^*(1-b^*)] - v(\bar{b}_L)(D_H - D_L)$ és $\hat{U}_L = ub^*\overline{D} + v^*(D_L - b^*\overline{D})$. Újrarendezve, és felhasználva, hogy $D_H - \overline{D} = f_L(D_H - D_L)$, adódik a $v(\bar{b}_L) > f_L b^* u + (1 - f_L b^*)v^*$ feltétel.

Másodszor felhasználjuk, hogy legutóbbi egyenlőtlenségünk pontosan akkor teljesül, ha $\bar{b}_L > \bar{b}$. Mivel $\varphi(b)$ az u és a $v(b)$ átlaga, sőt $u < v(b)$, ezért $\varphi(b) < v(b)$. (3.8) jobb oldala D_L növekvő függvénye, ezért $\bar{b}_L$ szintén növekvő függvénye D_L-nek. ■

Szimulációsorozatunkban $D_L = 50$ és $D_H = 60$ esetén az újraelosztó második legjobb csak akkor dominálja a semleges társát, ha a társadalmi jóléti függvény erősen egyenlősítő, például Rawls-féle. Nagyobb minmax-hányad, például $D_L = 56$ és $D_H = 60$ esetén azonban a dominancia még az utilitarista függvényre is teljesül: $\bar{U}_L = 33{,}43 < 33{,}56 = \hat{U}_L$. Finomabb beosztás esetén, amikor 11 évjárat van, $\hat{U}_L > \bar{U}_L$ minden társadalmi jóléti függvényre igaz: a dominancia áll (vö. Simonovits, 2004).

6 Heterogén munkaáldozat

A következtetések levonása előtt egy tükörmodellt vizsgálunk, ahol a munkaáldozatok különböznek és a várható élettartamok egyeznek (vö. Diamond, 2003, 6. fejezet és Sheshinski, 2004). Mint a Bevezetésben már hangsúlyoztuk, ez az eset azért is nagyon fontos, mert ez bújik meg az eszmei számlarendszer gondolata mögött. Lemondunk az előző modellhez hasonló teljes kifejtésről, csupán az új pontokat érintjük. A semleges, illetve az újraelosztó rendszerekről szóló alpont rendre megfelel a 3. és a 4. pontnak.

Semleges rendszer

Legyen D a közös várható élettartam, és legyen a kétféle dolgozói pillanatnyi hasznosságfüggvény u_i, $i = H, L$, ahol $u_H > u_L$. (A szokásos szereposztást megtartva, nevével ellentétben, a H-típusnak kisebb a munkaáldozata, mint az L-nek.) Az i-típus életpálya-hasznosságfüggvénye

$$U_i = Ru_i + (D - R)v(b) \ . \tag{6.1}$$

Feltesszük majd, hogy

$$v(\infty) = 0 \quad \text{és} \quad u_H < v(1) - v'(1)(\tau + 1) \ . \tag{6.2}$$

Ebben az alpontban természetesen feltesszük az életpálya-járulék és -járadék egyenlőségét:

$$\tau R = b(D - R) \quad \text{vagy} \quad b = \frac{\tau R}{D - R} \quad \text{vagy} \quad R = \frac{b}{\tau + b} D \ . \tag{6.3}$$

Ismét hullámmal jelezzük a semleges megoldást. Behelyettesítve (6.3)-at (6.1)-be:

$$\tilde{U}_i = \varphi_i(b)D, \quad \text{ahol} \quad \varphi_i(b) = \frac{u_i b + v(b)\tau}{\tau + b} \ . \tag{6.4}$$

Először a semleges első legjobb megoldást jellemezzük.

10. tétel. *a) Létezik egyetlen egy semleges első legjobb megoldás:* $\{b_i^*, R_i^*\}_{i=L}^H$, *ahol* $b_L^* < b_H^*$ *és* b_i^* *kielégíti a következő egyenletet:*

$$u_i - v(b_i^*) + v'(b_i^*)(\tau + b_i^*) = 0, \qquad i = H, L \ . \tag{6.5}$$

b) Az L-típus hamarabb megy nyugdíjba, mint a H-típus: $R_L^* < R_H^*$, *a szolgálati idők a következők:*

$$R_i^* = \frac{b_i^*}{\tau + b_i^*} D, \qquad i = H, L \ . \tag{6.6}$$

Bizonyítás. A bizonyítás az analóg 3. tétel bizonyításához hasonlít, kivéve $b_L^* < b_H^*$-t, amely $u_L < u_H$ és (6.5) összefüggésből következik. ■

Második legjobb megoldásokra térve, most azt tesszük fel, hogy az egyének ismerik saját munkaáldozatukat, de a kormányzat csak azok eloszlását ismeri. Ekkor a járadékszabálynak ki kell elégítenie az érdekeltségi feltételt. Érdeke-e a H-típusnak úgy tennie, mintha L-típus lenne? Nem, mert fennáll az érdekeltségi feltétel: $b_H > b_L$-ből következik $\varphi_H(b_H) > \varphi_H(b_L)$. Méginkább fordítva.

6. következmény. *A semleges második legjobb megoldás egybeesik az első legjobbal.*

Összevetve ezt a helyzetet a 3. és 4. tétel kapcsolatával, a különbség nyilvánvaló: ott a hazug H-típus ingyen járadékot kapna a csalárd úton szerzett $D_H - D_L$ hosszúságú időszakra, most viszont a korai visszavonulást arányosan csökkentett járadék kíséri.

Újraelosztó rendszer

Az egyedüli változás az életpálya-egyenleget érinti: $z_i = \tau R_i - b_i(D - R_i)$, míg (4.2) egyszerűsödik:

$$\sum_{i=L}^{H} f_i[\tau R_i - b_i(D - R_i)] = 0 \; . \tag{6.7}$$

A tárgyalást egyszerűsítendő, az elemzést az utilitarista társadalmi jóléti függvényre szorítjuk:

$$V = f_H U_H + f_L U_L \; .$$

A Bevezetésben már említettük, hogy ebben az esetben nincs *belső* legjobb szolgálati időpár. Ha el akarjuk kerülni azt a rémes helyzetet, hogy a H-típus élete végéig dolgozik, míg az L-típus semmit sem dolgozik, akkor (i) vagy korfüggő munkaáldozatot teszünk föl; (ii) vagy előre meg kell határoznunk *minimális és maximális nyugdíjkorok*at: R_m és R_M, $0 < R_m < R_M < D$. Mi a (ii)-t választjuk.

Ekkor igaz a

11. tétel *a) Az újraelosztó első legjobb megoldásban az L-típus a lehető leghamarabb, a H-típus a lehető legkésőbb megy nyugdíjba:*

$$R_L^\circ = R_m \quad \text{és} \quad R_H^\circ = R_M \; . \tag{6.8}$$

b) Mindkét típus azonos járadékot kap:

$$b_L^\circ = b_H^\circ = b^\circ = \tau \frac{f_H R_M + f_L R_m}{D - f_H R_M - f_L R_m} \; . \tag{6.9}$$

c) A minimális és a maximális szolgálati időknek ki kelle elégíteniük a $b_m < b^\circ < b_M$ egyenlőtlenséget, ahol b_m és b_M (6.5)-ben van meghatározva.

Bizonyítás. Megint mérlegeljük a megfelelő Lagrange-függvényt:

$$\mathcal{L} = \sum_i f_i\{[u_i R_i + v(b_i)(D - R_i)] + \mu\tau R_i - \lambda b_i(D - R_i)\} \; .$$

Az $i = H, L$ esetén a parciális deriváltak

$$\mathcal{L}'_{R_i} = f_i\{[u_i - v(b_i)] + \mu\tau + \mu b_i \; ,$$

$$\mathcal{L}'_{b_i} = f_i\{v'(b_i)(D - R_i) - \mu(D - R_i)\} \; .$$

Mivel b_i nem lehet sarokmegoldás, $R_i < D$, tehát $\mathcal{L}'_{b_i} = 0$-ból következik $v'(b_i) = \mu$, ahonnan $b_H = b_L$. Behelyettesítve $\mathcal{L}'_{R_i}$-be, (6.5) következő, sarokmegoldásos általánosítását kapjuk:

$$u_L - v(b^\circ) + v'(b^\circ)(\tau + b^\circ) < 0 < u_H - v(b^\circ) + v'(b^\circ)(\tau + b^\circ) \; . \tag{6.5°}$$

Valóban, (6.8) sarokmegoldáshoz jutunk. Ekkor a költségvetési korlátból (6.9) adódik. ∎

Végül elérkeztünk az újraelosztó második legjobb rendszerhez. Ismét egy releváns érdekeltségi feltételünk van; a H-típusnak ne legyen érdeke úgy tennie, mintha L-típusú lenne:

$$u_H R_H + v(b_H)(D - R_H) \geq u_H R_L + v(b_L)(D - R_L)\ . \tag{6.10H}$$

Szabályos optimumban az egyenlőtlenség egyenlőséggé egyszerűsödik:

$$u_H R_H + v(b_H)(D - R_H) = u_H R_L + v(b_L)(D - R_L)\ . \tag{6.10H'}$$

12. tétel *a) Az újraelosztó második legjobb allokáció egy 4-változós, 2-korlátos maximalizálási feladat megoldása.*

b) A H-típus később megy nyugdíjba, mint az L-típus: $\hat{R}_L < \hat{R}_H$; és nagyobb, első legjobb járadékot kap: $\hat{b}_L < \hat{b}_H = b_H^*$.

Bizonyítás. Vegyük a kiegészített Lagrange-függvényt:

$$\hat{\mathcal{L}} = \mathcal{L} + \nu\{[u_H - v(b_H)]R_H + v(b_L)D - [u_H - v(b_L)]R_L - v(b_L)D\}\ .$$

Belső megoldást feltételezve, tegyük a parciális deriváltakat nullává:

$$\hat{\mathcal{L}}'_{R_H} = (f_H + \nu)[u_H - v(b_H)] + f_H\mu(\tau + b_H) = 0\ , \tag{6.11}$$

$$\hat{\mathcal{L}}'_{R_L} = (f_L - \nu)\{[u_L - v(b_L)] + f_L\mu\tau + \mu b_L\} - \nu(u_H - u_L) = 0\ , \tag{6.12}$$

$$\hat{\mathcal{L}}'_{b_H} \approx (f_H + \nu)v'(b_H) - f_H\mu = 0\ , \tag{6.13}$$

$$\hat{\mathcal{L}}'_{b_L} \approx (f_L - \nu)v'(b_L) - f_L\mu = 0\ . \tag{6.14}$$

(6.11) és (6.13) maga után vonja (6.5)-t: $\hat{b}_H = b_H^*$. (6.13)–(6.14)-ból következik

$$\frac{(f_H + \nu)v'(b_H)}{(f_L - \nu)v'(b_L)} = \frac{f_H}{f_L}\ ,$$

ahonnan $v'(b_L) > v'(b_H)$, azaz $\hat{b}_L < \hat{b}_H$. ■

Felhasználva a $\hat{b}_H = b_H^*$ egyenlőséget, fokozatos kiküszöböléssel a feltételes maximalizálási feladatunk a következő egyváltozós maximalizálási feladatra egyszerűsödik (vö. 8. tétel).

13. tétel. *Legyen $f_L = f_H = 1/2$, $\tau = 1 - b^*$ és legyen b_L egy pozitív skalár. Az újraelosztó második legjobb megoldást a $0 < b_L \leq b_H^*$ szakaszon értelmezett, következő skalár–skalár függvénye maximalizálása adja:*

$$V(b_L) = \frac{U_L(b_L) + U_H(b_L)}{2}\ ,$$

ahol

$$R_L(b_L) = \frac{[(v^* - u_H)(b^* + b_L) - v^* + v(b_L)]D}{(v^* - u_H)(\tau + b_L) - u + v(b_L)}\ , \tag{6.15}$$

$$U_L(b_L) = [u_L - v(b_L)]R_L(b_L) + v(b_L)D\ , \tag{6.1L}$$

$$R_H(b_L) = b^*D + b_LD - (\tau + b_L)R_L(b_L)\ , \tag{6.16}$$

$$U_H(b_L) = (u_H - v^*)R_H(b_L) + v^*D\ . \tag{6.1H}$$

■

Vegyük észre, hogy a szükséges helyettesítések után minden korlát csak b_L-től függ.

Megjegyzés. Vegyük észre a 3–4. pont és a mostani pont közti hasonlóságot, mégha csak az utilitarista esetre is szorítkozunk. Például mindkét modellben az újraelosztó második legjobb H-járadék megegyezik a semleges első legjobb H-járadékkal. Ugyanakkor fontos különbségek is mutatkoznak: belső optimum áll szemben sarokmegoldással, stb.

A *2. táblázatban* bemutatjuk a négy optimum számszerű értékét.

Szabály	Szolgálati idő		Járadék		Életpálya egyenleg	
	rövid R_L	hosszú R_H	kicsi b_L	nagy b_H	rövid z_L	hosszú z_H
Semleges 1. legjobb	40,7	44,0	0,57	0,80	0,0	0,0
Semleges 2. legjobb	40,7	44,0	0,57	0,80	0,0	0,0
Újraelosztó 1. legjobb	40,0	45,0	0,68	0,68	−2,2	2,2
Újraelosztó 2. legjobb	28,0	52,0	0,49	0,80	−7,6	7,6

2. táblázat. Nyugdíjszabályok összehasonlítása: eltérő munkaáldozat

Megjegyzés. 1. $D = 55$, $f_L = f_H = 0{,}5$; $\tau = 0{,}2$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 + 0{,}8$.

Egyszerűsítve a feladatot, tegyük föl, hogy a szolgálati idők, vagy ezzel egyenértékűen, a nyugdíjazási korok előre meghatározottak. Ekkor igaz a

7. következmény (Vö. Sheshinski, 2004). *Ha a nyugdíjazási korok előre meghatározottak, akkor az újraelosztó harmadik legjobb* $(\hat{b}_H, \hat{b}_L)$ *járadékokat* (6.7) *és* (6.10H') *határozza meg.*

7 Következtetések

Az optimális mechanizmustervezés elméletét alkalmazva nehézségi sorrendben végig mentünk néhány nyugdíjösztönzési feladaton. 1. Különböző várható élettartamú egyénekből álló népesség esetén elemi modellünkben tisztáztuk az autark, a hagyományos és a kiigazított hagyományos járadék kapcsolatát. 2. Bevezetve az egyéni hasznosság- és a társadalmi jóléti függvényt, sikerült meghatározni a társadalmilag optimális első és második legjobb optimális szolgálati időket és nyugdíjakat. 3. A legtöbb esetben azt tapasztaltuk, hogy a szimmetrikus információra vonatkozó első legjobb optimum (más néven: autarkia) nagyon eltér az aszimmetrikus információra vonatkozó második legjobb optimumtól. A feladat bonyolultsága miatt általában numerikus szimulációra kényszerültünk.

Elhanyagoltunk több nagyon fontos tényezőt: a keresetek és a munkaáldozatok korfüggését, a keresetalap szolgálatiidő-függését, a munkába lépési idők különbözőségét, végül de nem utolsósorban, az adórendszer hatását. Ebben a végletekig lecsupaszított modellcsaládban is érdekes eredményeket kaptunk. További kutatásnak kell tisztázni a kapott eredmények robusztusságát. Amit már ma is megtudtunk, hogy az ún. tisztességes járadékfüggvény biztosításmatematikailag nem tisztességes.

Irodalom

1. Aaron, H. (1982): *Economic Effects of Social Security, Washington D.C.*, The Brookings Institution.
2. Alács Péter (2004): Optimális loglineáris ösztönzés megoldása numerikus módszerekkel, *Közgazdasági Szemle, 51*, 1029–1047. o.
3. Augusztinovics Mária (2000a): Újraelosztás nyugdíjbiztosítási rendszerekben, *Augusztinovics, (szerk.)* 318–339. o.
4. Augusztinovics Mária (szerk.) (2000b): *Körkép reform után: Tanulmányok a nyugdíjrendszerről*, Budapest, Közgazdasági Szemle Alapítvány.
5. Augusztinovics Mária–Martos Béla (1995): Számítások és következtetések nyugdíjreformra, *Közgazdasági Szemle, 42*, 993–1023. o.
6. Börsch-Supan, A. (2001): The German Retirement Insurance System, *Börsch-Supan–Miegel, (szerk.)*, 13–38.
7. Börsch-Supan, A.–Miegel, M., (szerk.) (2001): *Pension Reform in Six Countries*, Berlin, Springer.
8. Diamond, P. A. (2003): *Taxation, Incomplete Markets and Social Security, Munich Lectures*, Cambridge, MA, MIT Press.
9. Diamond, P. A.–Mirrlees, J. (1978): A Model of Social Insurance with Variable Retirement, *Journal of Public Economics, 10*, 295–336. o.
10. Eső Péter–Simonovits András (2003): Optimális járadékfüggvény tervezése rugalmas nyugdíjrendszerre, *Közgazdasági Szemle, 50*, 99–111. o.
11. Fabel, O. (1994): *The Economics of Pensions and Variable Retirement Schemes*, New York, Wiley.
12. Gömöri András (2001): *Információ és interakció*, Bp. Typotex.
13. Gruber, J.–Wise, D. A., (szerk.) (1999): *Social Security and Retirement Program Around the World*, Chicago, Chicago University Press.
14. Kotlikoff, L. (1996): Hogyan privatizáljuk a tb-nyugdíjrendszert, *Közgazdasági Szemle, 43*, 1045–1071. o.
15. Lazear, E. P. (1979): Why is there Mandatory Retirement?, *Journal of Political Economy, 87*, 1261–1269. o.
16. Legros, F. (2003): Notional Defined Contribution: A Comparison of the French and the German Point Systems, *World Bank Conference on NDC*, Stockholm.
17. Mirrlees, J. A. (1971): An Exploration in the Theory of Optimum Income Taxation, *Review of Economic Studies 38*, 175–208. o.
18. Rothschild, M.–Stiglitz, J. E. (1976): Equilibrium in Competitive Insurance Markets: An Essay in the Economics of Imperfect Information, *Quarterly Journal of Economics, 80*, 629–649. o.
19. Sheshinski, E. (1978): A Model of Social Security and Reirement Decisions, *Journal of Public Economics 10*, 337–360. o.

20. Sheshinski, E. (2004): Optimal Delayed Retirement Credit, Cesifo Conference on *Strategies for Reforming Pension Schemes*, 5–6 November, 2004, Munich.
21. Simonovits András (2001): Szolgálati idő, szabadidő és nyugdíj: ösztönzés korlátokkal, *Közgazdasági Szemle 48*, 291–306. o.
22. Simonovits András (2002): Rugalmas nyugdíjkorhatár és optimális lineáris járulék- és járadékfüggvény, *Közgazdasági Szemle, 49*, 713–724. o.
23. Simonovits András (2004): Optimális rugalmas nyugdíjrendszer tervezése: Biztosításmatematikai semlegesség és hatékonyság, *Közgazdasági Szemle, 51*, 1101–1112 o.
24. Smith, V. K.–Taylor, D. H.–Sloan, F. A. (2001): Longevity Expectations and Death, Can People Predict Their Own Demise? *American Economic Review, 91*, 1125–1134. o.
25. Spiezia, V. (2002): The Greying Population: A Wasted Human Capital or Just a Social Liability?, *International Labour Review, 141*, 71–113. o.
26. Valdés-Prieto, S. (2000): The Financial Stability of Notional Account Pensions, *Scandinavian Journal of Economics, 102*, 395–417. o.
27. Waldron, H. (2001): Links between Early Retirement and Mortality, *ORES Working Paper 93*, Division of Economic Research, SS Administration.

DESIGNING OPTIMAL RETIREMENT RULES: TWO TYPES

This paper considers the simplest case of optimal design of old-age pension rule with flexible retirement, namely when the population consists of two types: (expectedly) shorter- and longer-lived. 1. Under traditional fair rule, the government pays an annuity to each individual, equaling to the ratio of lifetime contributions to the average remaining life expectancy at retirement. Having private information on his own life expectancy, every individual chooses his retirement age. Because the shorter-lived work less than the longer-lived, this rule pays too high reward to the longer-lived and too little to the others, moreover, the average balance is also negative. 2. Because of asymmetric information, incentive compatible rules should be considered. Setting separate budget constraints for each type, we can derive the *neutral* second-best rule, which, however, yields too low benefits and retirement age for the shorter-lived. 3. Replacing the type-specific constraints by an aggregate one, but retaining the incentive compatibility constraints, the government chooses the socially optimal rule, which maximizes the social (cohort) welfare. The socially optimal pension rule dampens the traditional fair rule but still *redistributes* from the shorter-lived to the longer-lived. 4. The neutral rule is not only welfare inferior to but often dominated by the redistributive one. 5. Extending the analysis for populations with heterogeneous labor disutilities (but with homogeneous life expectancy), the neutral solution is acceptable.

KORRUPCIÓ ÉS ADÓSSÁGDINAMIKA[1]

BESSENYEI ISTVÁN
PTE Közgazdaságtudományi Kar

Cikkünk a korrupció adósságdinamikára gyakorolt hatását vizsgálja egy neoklasszikus növekedési modell keretei között. Megmutatjuk, hogy erősebb korrupció esetén nagyobb a kormányzat mozgástere a fiskális politika kialakítása során, mivel eredményesebbé válnak az államadósság stabilizálására irányuló törekvések. Mind a vállalatok, mind pedig a háztartások oldalán két elkülönült szektort különböztetünk meg. Modellünkben nem szerepel sem központi tervező, sem pedig társadalmi jóléti függvény. Ehelyett azt tesszük fel, hogy a megtakarítani képes háztartások igyekeznek jólétüket végtelen időhorizonton maximalizálni.

1 Modellfeltevések

Egy korábbi tanulmányomban (Bessenyei (2001)) bemutattam, miként érinti a korrupció bevezetése Ramsey (1928) modelljének stabilitási tulajdonságait, illetve mennyiben befolyásolja a korrupció erősségének megváltozása az e-gyensúlyi helyzet jellemzőit. Abban a cikkben kizárólag a kiegyensúlyozott kormányzati költségvetés esetének elemzésére szorítkoztam, így ott az adósságdinamika bekapcsolására nem volt lehetőség. Ebben a dolgozatban felteszem, hogy a kormányzat a bevételeit meghaladó kiadástöbbletet kötvénykibocsátással fedezi, és azt vizsgálom, miként befolyásolja a korrupció az államadósság alakulását.

Mind korábbi munkámban, mind e mostaniban azt a tranzakciót tekintem korruptnak, melynek során a közszféra látszólag vásárol valamit, valójában azonban semmit nem kap a kifizetett pénzért. Az ilyen kormányzati vásárlás célja közpénzek személyes jövedelemmé történő transzformálása. Mauro (1998) szerint az így meghatározott korrupt tranzakció a valóságban ugyan szinte soha nem fordul elő, azonban a kormányzat vásárlásainak jelentős része felbontható egy korrupció mentes és egy korrupt vásárlásra.

Az adósságdinamika témakörében ma már klasszikusnak számít Diamond (1965) cikke, ezért az alábbiakban bemutatásra kerülő modell premisszáit leghelyesebb annak feltevéseivel egybevetve tárgyalni.

---

[1] A dolgozat elkészítését az OTKA T037291 számú pályázata támogatta, melyért a szerző ezúton fejezi ki köszönetét. Beérkezett: 2003. október 2. e-mail: `essenyei@ktk.pte.hu`.

1.1 Háztartások

Diamond említett cikkében az adósságdinamika problémáját az együtt élő nemzedékek modelljének keretei között tárgyalja, ahol az egyének tervezési időhorizontja két periódus. Az első periódusban dolgoznak, és jövedelmük egy részét megtakarítják. A másodikban nem dolgoznak, és nem is takarítanak meg, fogyasztásukat korábban felhalmozott vagyonukból finanszírozzák. A korrupció modellezése során azonban célszerűbb végtelen időhorizontra tervező háztartásokat feltételezni, s ezen belül megkülönböztetni a megtakarítani képes és képtelen háztartásokat. Az elhatárolást a Káldor (1956) cikkében ismertetett alternatív jövedelemelosztási elmélet nyomán tesszük meg.

A bérből és fizetésből élő háztartások kizárólag bérjövedelemhez jutnak, illetve a nem bérjellegű jövedelmek mennyisége elhanyagolható. A kormányzat által fizetett jóléti transzferektől az egyszerűség érdekében eltekintünk, és feltesszük, hogy a háztartások ezen szektora sajátítja el a gazdaságban képződő összes bérjövedelmet. Hasonló feltevést alkalmaz pl. Káldor és Mirrlees (1962) növekedési modellje. A bérből és fizetésből élő háztartások nem takarítanak meg, így fogyasztásukat C_1-gyel jelölve:

$$C_1 = (1-\tau)wL \ , \tag{1}$$

ahol τ a valamennyi háztartásra egységesen alkalmazott lineáris adókulcs, és $0 < \tau < 1$, w a bérráta, L pedig a rendelkezésre álló és a termelésben felhasznált munka mennyisége. Feltesszük, hogy az adókat kizárólag a háztartások fizetik, a vállalatok nem adóznak. A háztartások másik szektorát az elit háztartások alkotják. Ezek sajátítják el a tőkejövedelmeket, az államkötvények után fizetett kamatokat és a korrupcióból származó jövedelmet is. Mivel e háztartások bérjövedelme javarészt szinekúrákból adódik, azt is a korrupciós összegek közt kell figyelembe venni. Az elit háztartások fogyasztásán kívül az itt képzett megtakarítás is számottevő. Jelölje a tőkejavak hozamát r, mely után a tulajdonos háztartás adót fizet. Nem kell viszont adót fizetni az állampapírok hozama után, ezért ennek nagysága: $(1-\tau)r$. Ezek szerint a megtakarítási függvény:

$$S = (1-\tau)(rA + Y_2) - C_2 \ , \tag{2}$$

ahol C_2 az elit háztartások fogyasztása, és $C = C_1 + C_2$. Az elit háztartások vagyonát A jelöli, ez a tőkeállomány és az államkötvények állományának az összegével egyenlő, azaz:

$$A = K + B \ . \tag{3}$$

Diamond együtt élő nemzedékek konstrukciójával szemben tehát modellünk a Ramsey (1928) cikkében alkalmazott megközelítést követi. A két megközelítés közti kapcsolatot Blanchard (1985) tanulmánya tárta fel, megmutatva, hogy amennyiben feltesszük, hogy a két periódusra tervező döntéshozó altruista módon viszonyul a fiatalabb generációhoz, s így hasznossága nem csupán saját fogyasztásától, hanem gyermekei jólététől is függ, akkor az együtt élő nemzedékek modelljének mozgásegyenletei megegyeznek a Ramsey-modell mozgásegyenleteinek diszkrét idejű változatával. Bevezetve tehát az együtt élő generációk közti transzfer lehetőségét az együtt élő nemzedékek modelljébe, az Ramsey konstrukciójával azonos eredményre vezet.

1.2 Vállalatok

A korrupció egyszerűbb modellezése céljából Diamond egyetlen termelő szektort feltételező megközelítésével szemben a vállalatokat is két szektorba osztjuk. Az elsőbe tartozik minden olyan termelő egység, mely fogyasztási cikkeket, beruházási javakat, illetve olyan közjavakat állít elő, amelyek határtermelékenysége nullánál nagyobb. A második szektorba tartozó vállalatok kizárólag azon közjavakat állítják elő, melyek határtermelékenysége zérus. E vállalatok funkciója a kormányzati kiadások egy részének közvetlen jövedelemmé történő átalakítása, tehát korrupciós csatornaként működnek.

Az egyes szektorok bevételeire az alábbi összefüggések érvényesek:

$$Y_1 = C + I + G_1 \quad \text{és} \quad Y_2 = G_2 \ , \tag{4}$$

ahol Y_i az egyes szektorok kibocsátását, I a bruttó beruházások nagyságát, G_i pedig az egyes vállalati szektoroktól történő kormányzati vásárlás nagyságát jelöli. Diamond modelljéhez hasonlóan feltesszük, hogy a skálahozadék konstans, így az első szektor vállalatai által fizetett jövedelmek kimerítik az itt képződő teljes árbevételt, azaz:

$$Y_1 = (r + \delta)K + wL \ , \tag{5}$$

ahol δ az amortizációs hányad.

A második szektor tevékenységéhez szükséges termelési tényezők mennyiségét az egyszerűség érdekében figyelmen kívül hagyjuk, így az ide tartozó vállalatok nem fizetnek tényezőjövedelmeket. Az elsődleges jövedelemelosztás során e vállalatok teljes bevétele a tulajdonos háztartásokhoz kerül.

1.3 Beruházások

Diamond modelljéhez hasonlóan élünk azzal a neoklasszikus feltevéssel, mely szerint minden megtakarítás automatikusan beruházássá válik. Mivel azonban az állampapírok kockázata lényegesen alacsonyabb a tőketulajdon kockázatánál, a megtakarításoknak csak az állampapírok felvásárlása után fennmaradó része kerül beruházásra, azaz:

$$\dot{K} = S - \dot{B} - \delta K \ . \tag{6}$$

1.4 Közjavak és korrupció

A korrupció modellezéséhez nélkülözhetetlen, hogy mind Ramsey, mind pedig Diamond konstrukciójával ellentétben figyelembe vegyük a közjavakat. Ezeket a kormányzat ingyenesen biztosítja a vállalatok számára. Feltesszük, hogy a kormányzati kiadások nagysága a nemzeti jövedelemmel egyenesen arányos, azaz: $G = gY$. Annak érdekében, hogy alaposabban megvizsgálhassuk, miként hat a költségvetés elsődleges egyenlege az államadósság alakulására, g értékét τ-hoz hasonlóan a kormányzat által meghatározott exogén konstansnak tekintjük. Nem tesszük fel tehát olyan automatizmus létezését, mely e paraméterek nagyságát közvetlenül az államháztartás hiányának függvényében határozná meg. Egy ilyen feltevés ugyanis az általánosság szükségtelen megszorítását eredményezné, hisz az adósság/GDP arány mérséklődését az elsődleges deficit növelése és csökkentése egyaránt kiválthatja: mind az adósságból kinőni, mind pedig az abból kifogyni igyekvő gazdaságpolitika eredményes lehet. Mivel nem kötjük ki a kormányzat kiadásainak és bevételeinek a megegyezését, az alábbiakat írhatjuk:

$$\tau(rK + wL + Y_2) \neq G_1 + G_2 = G = gY \quad \text{és} \quad G_2 = \mu G \,. \tag{7}$$

A μ korrupciós paraméter, megmutatja, hogy a kormányzati kiadások mekkora hányada „csurog vissza” az elit háztartásokhoz. g-hez hasonlóan feltesszük, hogy a korrupció erősségét kifejező μ paraméter is exogén konstans, továbbá $0 \leq \mu \leq 1$.

A (7) összefüggés felhasználásával $Y_2 = G_2 = \mu G = \mu g Y$ adódik, amiből $Y = Y_1 + Y_2$ miatt kapjuk, hogy az egyes szektorok kibocsátása között egyenes arányosság áll fenn:

$$Y_2 = \frac{\mu g}{1-\mu g} Y_1, \quad \text{továbbá } Y = Y_1 + Y_2 \text{ miatt} \quad Y = \frac{1}{1-\mu g} Y_1 \,. \tag{8}$$

1.5 Technológia

Barro (1990) a közjavak bevezetése során alkalmazott aggregált termelési függvényben a kormányzati kiadásokat termelési tényezőként szerepelteti. Jelen esetben azonban csak a kormányzati kiadások $(1-\mu)$-ed része tekinthető olyan erőforrásnak, mely az 1. szektorban folyó termelés során felhasználható. Mauro (1998) szerint a korrupció olyan, részben improduktív óriásberuházások indítására ösztönzi a döntéshozókat, melyek révén könnyen jutnak nagy összegű csúszópénzhez. Ebből viszont az következik, hogy a kormányzati kiadások improduktívnak tekinthető része sem közjavakká nem válik, sem az elit háztartásokhoz nem kerül, hanem egyszerűen eltűnik a rendszerből. Helyesebb lenne tehát az 1. szektor tevékenységét elősegítő közjavak mennyiségét a $G_1 = (1-\mu)^\alpha G$ formulával meghatározni, ahol az $\alpha > 1$ paraméter a kormányzati kiadások imént említett disszipációjának erősségét méri. Csakhogy a partikuláris érdekből indított improduktív beruházás elsősorban a piaci mechanizmusokat kikapcsoló szocialista gazdaság karakterisztikuma. Mivel a jelen konstrukciót élesen el kívánom határolni a tervgazdaság bármely modelljétől, ezt a jelenséget a továbbiakban figyelmen kívül hagyom, azaz felteszem, hogy $\alpha = 1$. Ennek megfelelően az első szektor termelési függvénye a következő:

$$Y_1 = F(K, \bar{L}, G_1) = F\left(K, \bar{L}, \frac{g-\mu g}{1-\mu g} Y_1\right) \,. \tag{9}$$

Az átalakítás során felhasználtam, hogy a (7) összefüggésből $G_1 = (1-\mu)gY$, továbbá a (8) egyenletet. Reális egyszerűsítő feltevés, hogy L növekedési rátája zérus, továbbá az egyszerűség érdekében nagyságát egységnyinek fogjuk tekinteni, tehát $L = 1$. A munkakímélő exogén technikai haladást a hatékony munkára bevezetett $\bar{L} = e^{mt}$ változó reprezentálja. A lineáris homogenitás miatt a (9) egyenlet mindkét oldalát elosztva $\bar{L}$-sal:

$$\bar{y} = \frac{Y_1}{\bar{L}} = F\left(\frac{K}{\bar{L}}, 1, \frac{g-\mu g}{1-\mu g}\frac{Y_1}{\bar{L}}\right) = \tilde{F}\left(\bar{k}, \frac{g-\mu g}{1-\mu g}\bar{y}\right) = \tilde{F}\left(\bar{k}, \frac{G_1}{\bar{L}}\right) ,$$

ahol $\bar{y}$ az egységnyi hatékony munkára eső kibocsátás nagyságát jelöli az első szektorban, $\bar{k}$ pedig ugyanott az egységnyi hatékony munkára eső tőke mennyiségét, a hatékony tőkeintenzitást. Az egyes szimbólumok fölött szereplő vonás az egységnyi hatékony munkára eső nagyságokat jelöli, a hullámjel pedig a termelési függvény kétváltozós felírási módjára értelmezett kategóriákat. Ha feltesszük, hogy F folytonosan differenciálható, akkor $\tilde{F}$ is az, továbbá az implicit függvény tétel szerint, felírható F intenzív formája:

$$\bar{y} = f(\bar{k}) . \tag{10}$$

Feltesszük, hogy a (10) függvény jól viselkedő, azaz kielégíti az Inada-feltételeket. Mivel a tényezőjövedelmek a határtermelékenységek alapján határozódnak meg, szükségünk lesz e függvény deriváltjára. Az implicit függvény tétel szerint:

$$f'(\bar{k}) = \frac{\tilde{F}_1}{1 - \frac{g-\mu g}{1-\mu g}\tilde{F}_2} ,$$

ahol az alsó indexek $\tilde{F}$ megfelelő változó szerinti parciális deriváltjait jelölik. $f'(\bar{k}) > 0$ teljesüléséhez fel kell tenni, hogy $\frac{g-\mu g}{1-\mu g}\tilde{F}_2 < 1$, ami nem jelenti az általánosság különösebb megszorítását, hisz $\frac{\bar{y}}{G_1} = \frac{1-\mu g}{g-\mu g}$ miatt ez a kifejezés az $\tilde{F}$ függvény második változójára vonatkozó parciális termelési rugalmassággal egyenlő. A $\frac{g-\mu g}{1-\mu g}\tilde{F}_2$ kifejezés tehát azt mutatja meg, hogy az egységnyi hatékony munkára eső közjavak mennyiségének egy százalékos növelése hány százalékkal növeli az egységnyi hatékony munkára eső kibocsátás nagyságát. Így a csökkenő hozadék elvéből következik, hogy e rugalmasság egynél kisebb. Bevezetve az $\tilde{F}$ függvény parciális termelési rugalmasságaira rendre az $\tilde{\epsilon}_1$ és $\tilde{\epsilon}_2$ jelöléseket, $\tilde{F}_1 = \tilde{\epsilon}_1\frac{f(\bar{k})}{\bar{k}}$, és így $f'(\bar{k}) = \frac{\tilde{\epsilon}_1}{1-\tilde{\epsilon}_2}\frac{f(\bar{k})}{\bar{k}}$. A jobb oldalon álló kifejezés második tényezője a tőke átlagtermelékenységével egyenlő, így a tőke parciális termelési rugalmassága:

$$\epsilon_K = \frac{\tilde{\epsilon}_1}{1-\tilde{\epsilon}_2} . \tag{11}$$

Megjegyzendő, hogy F lineáris homogenitása miatt

$$\tilde{\epsilon}_1 + \tilde{\epsilon}_2 < 1 . \tag{12}$$

Az egyenlőtlenség fennállása Cobb-Douglas típusú termelési függvényre egyszerű számolással ellenőrizhető.

1.6 Jövedelemelosztás

Diamond (1965) cikkéhez hasonlóan elfogadjuk a határtermelékenység jövedelemelosztási elméletét, figyelembe véve az amortizációt és az exogén technikai haladást. A kamatláb eszerint az alábbi formulával határozható meg:

$$r = f'(\bar{k}) - \delta = \frac{\tilde{\epsilon}_1}{1-\tilde{\epsilon}_2}\frac{f(\bar{k})}{\bar{k}} - \delta\,. \tag{13}$$

A konstans amortizációs ráta feltevése miatt a tőke határtermelékenységét kifejező $f'(\bar{k})$ görbe kulcsszerepet játszik a kamatláb meghatározásában. A korrupció hatásának vizsgálata során fontos tisztázni, miként hat μ értékének megváltozása az $f'(\bar{k})$ görbe helyzetére. A (9) összefüggés szerint $G_1 = \frac{g-\mu g}{1-\mu g}Y_1$. Egyszerű deriválással ellenőrizhető, hogy $\frac{\partial G_1}{\partial \mu} < 0$, azaz erősebb korrupció esetén csökken az 1. szektor kibocsátásának meghatározása során figyelembe vehető közjavak mennyisége, s ez a tőke határtermelékenységét csökkenti, ami az $f'(\bar{k})$ függvénygörbe lefelé történő elmozdulását eredményezi. Mindebből a kamatlábra:

$$\frac{\partial r}{\partial \mu} < 0 \tag{14}$$

következik. A bérből és fizetésből élők helyzetének megítélését az (1) egyenlet mellett a hatékony tőkeintenzitás és a bérráta közti alábbi összefüggés teszi lehetővé:

$$w = [f(\bar{k}) - \bar{k}f'(\bar{k})]e^{mt} = \frac{1-\tilde{\epsilon}_1-\tilde{\epsilon}_2}{1-\tilde{\epsilon}_2}f(\bar{k})e^{mt}\,. \tag{15}$$

A bérráta növekedési rátája a (15) egyenlet idő szerint történő deriválása révén adódik:

$$\hat{w} = \epsilon_K + \hat{\bar{k}} + m\,. \tag{16}$$

Ezek az összefüggések a korábbi cikkemben bemutatottak általánosításának is tekinthetők, amennyiben nem kötöm ki Cobb-Douglas típusú termelési függvény alkalmazását, és az amortizációt is figyelembe veszem.

2 A modell mozgásegyenletei

Az elit háztartások dinamikus optimalizálási problémájából adódik ezek optimális fogyasztási pályája, amit a (38) transzverzalitási feltétellel együtt a (17) differenciálegyenlet határoz meg. A levezetés az A függelékben található. Ugyanitt követhető nyomon a hatékony tőkeintenzitás (18) és az adósság/GDP arány (41) mozgásegyenletének származtatása. Behelyettesítve az utóbbiba a (13) összefüggést, és a jobb oldalt átalakítva az alábbi dinamikus rendszerhez jutunk.

$$\hat{\bar{c}}_2 = \frac{1}{\theta}\left[\frac{1-\tau}{1-\mu g}\left(f'(\bar{k}) - (1-\mu g)\delta\right) - \rho\right] - m\,, \tag{17}$$

$$\dot{\bar{k}} = \left[\frac{(1-\tau)\tilde{\epsilon}_1}{1-\tilde{\epsilon}_2} + \frac{(1-\tau)\mu g - g + \tau}{1-\mu g} \right] f(\bar{k}) - (m + 2\delta - \delta\tau)\bar{k} - \bar{c}_2 , \tag{18}$$

$$\dot{b} = [g - \tau] + (1-\tau)(f'(\bar{k}) - \delta)b - \left(\frac{\epsilon_K}{\epsilon_K + \epsilon_{\bar{L}}} \hat{\bar{k}} + m \right) b . \tag{19}$$

A fenti szabályozási rendszer egyetlen állapotváltozója $b = B/Y$, az adósság/GDP hányados. A szabályozási vektor elemei: az elit háztartások egységnyi hatékony munkára eső fogyasztása: $\bar{c}_2$ és a hatékony tőkeintenzitás: $\bar{k}$. A (17) és (18) differenciálegyenletek a szabályozási vektor mozgásegyenletei. A szabályozási vektor alakulását leíró mozgásegyenleteket a továbbiakban versenyszférának, az állapotegyenletet költségvetési szférának nevezzük.

Modellünkben tehát a versenyszféra határozza meg a költségvetési szféra alakulását, azaz a $\bar{c}_2$ és $\bar{k}$ változók pályagörbéjétől függ az adósság/GDP hányados alakulása. Így a kormányzat a g és τ paraméterek értékeinek megváltoztatása révén módosíthatja mind a versenyszféra növekedési pályáját, mind pedig az adósság/GDP hányados alakulását meghatározó (19) állapotegyenletet. Továbbá a (14) egyenlőtlenség szerint az $r = f'(\bar{k}) - \delta$ kamatláb nagysága nem független a korrupció erősségétől, tehát μ értéke nem csak a versenyszférát, hanem a (19) mozgásegyenlet révén a költségvetési szféra állapotát is befolyásolja.

A következő szakaszban szemügyre vesszük, hogy milyen feltételek mellett tekinthetjük a szabályozási vektort egyensúlyinak, és legfeljebb mekkora költségvetési deficit mellett állhat fenn ez az egyensúly. Ezt követően kimutatjuk az egyensúlyi helyzet stabilitását. A 4. szakaszban az állapotváltozó alakulását vizsgáljuk egyensúlyi szabályozási vektor mellett, az 5-ben pedig a (17)-(19) rendszer szabályozhatóságával kapcsolatban teszünk néhány megjegyzést.

3 A versenyszféra egyensúlya

Az elit háztartások optimális fogyasztási pályáját a (17) és (18) mozgásegyenletek határozzák meg, kiegészítve a (38) transzverzalitási feltétellel. E rendszer fixpontját értelmezzük a versenyszféra egyensúlyaként. Mivel a (18) mozgásegyenlet szerint a hatékony tőkeintenzitás alakulását az elsődleges deficit is befolyásolja, lehetőség nyílik annak vizsgálatára, hogy $g-\tau$ mekkora nagysága teszi lehetővé a versenyszféra egyensúlyát. A versenyszféra egyensúlyi helyzetében $\hat{\bar{c}}_2 = 0$ és $\hat{\bar{k}} = 0$ teljesül. Ekkor $\hat{K} = \hat{C}_2 = m$, továbbá a (16) egyenlet szerint $\hat{w} = m$. Figyelembe véve, hogy $\dot{L} = 0$, az (1) összefüggés következménye, hogy a bérből és fizetésből élő háztartások egyensúlyi fogyasztása is m ráta szerint növekszik. Egyensúly esetén az elit háztartások fogyasztása is ugyanezen ráta szerint nő. A (13) egyenletből következően ekkor a kamatláb konstans, így az (5) összefüggés szerint $\hat{Y}_1 = m$ és a (8) egyenletből adódóan Y_2 is ugyanezen ráta szerint növekszik.

Dinamikus rendszerünk fixpontjában a (17) és (18) mozgásegyenletek bal oldalán zérus szerepel, ami lehetővé teszi $\bar{k}$ és $\bar{c}_2$ egyensúlyi értékeinek a meghatározását. Jelölje ezeket $\bar{k}^*$, illetve $\bar{c}_2^*$, az egyensúly feltétele ekkor:

$$f'(\bar{k}^*) = (1-\mu g)\left(\frac{\theta m+\rho}{1-\tau}+\delta\right) . \tag{20}$$

Mivel f jól viselkedő függvény, a hatékony tőkeintenzitás egyensúlyi értékének egzisztenciája és unicitása biztosított. Az államadósság kezelésére szolgáló különféle stratégiák megítélése érdekében célszerű tisztázni, hogy miként hat a kormányzati beavatkozás $\bar{k}^*$ értékére. A (10) függvény levezetése során láttuk, hogy az 1. szektor kibocsátása független τ nagyságától, tehát az adókulcs növelése helyben hagyja a negatív meredekségű $f'(\bar{k})$ görbét, növeli viszont a (20) egyenlet jobb oldalán álló kifejezés értékét. Így magasabb adókulcs alkalmazása a hatékony tőkeintenzitás egyensúlyi értékének csökkenését eredményezi. Nem ilyen egyszerű a helyzet a kormányzati kiadások GDP-hez viszonyított arányának, azaz a g paraméternek a növelése esetén. Ekkor ugyanis az $f'(\bar{k})$ görbe is elmozdul. Mivel azonban g növelése a közjavak rendelkezésre álló mennyiségének emelkedését eredményezi, ez a tőke határtermelékenységét is növeli. Ismert, hogy $f'(\bar{k})$ a tőke határtermelékenysége, ezért g növelése esetén az $f'(\bar{k})$ görbe fölfelé tolódik. Másrészt g növelésével a fenti egyenlet jobb oldalán álló kifejezés csökken, ami a hatékony tőkeintenzitás egyensúlyi értékének növekedéséhez vezet. A fiskális beavatkozás következményeit ezek szerint az alábbi egyenlőtlenségek foglalják össze:

$$\frac{\partial \bar{k}^*}{\partial g} > 0 \quad \text{valamint} \quad \frac{\partial \bar{k}^*}{\partial \tau} < 0 . \tag{21}$$

Behelyettesítve az egyensúly (20) feltételét a (21) egyenletbe, a kamatláb egyensúlyi nagyságára a következő kifejezést kapjuk:

$$r^* = \frac{(\theta m+\rho)(1-\mu g)}{1-\tau} - \mu g\delta , \tag{22}$$

amiből látható, hogy a (14) egyenlőtlenségnek megfelelően erősebb korrupció alacsonyabb egyensúlyi kamatlábat eredményez. A (38) transzverzalitási feltétel kielégítéséhez egyensúlyban ezek szerint

$$\frac{1-\tau}{1-\mu g}\left(\frac{(\theta m+\rho)(1-\mu g)}{1-\tau} - \mu g\delta + \mu g\delta\right) = \theta m+\rho > m \tag{23}$$

teljesülése szükséges. Ezzel ekvivalens transzverzalitási feltétel adódik Ramsey közjavakat és korrupciót mellőző modelljében (pl. Barro és Sala-i-Martin (1995)).

A versenyszféra dinamikáját leíró rendszer fixpontja természetesen csak abban az esetben tekinthető egyensúlyinak, ha ott az elit háztartások fogyasztása pozitív. A következőkben ennek szükséges feltételét vezetjük le. A

(18) differenciálegyenletből az elit háztartások egységnyi hatékony munkára eső egyensúlyi fogyasztása:

$$\bar{c}_2^* = \left[\frac{(1-\tau)\tilde{\epsilon}_1}{1-\tilde{\epsilon}_2} + \frac{(1-\tau)\mu g - g + \tau}{1-\mu g}\right] f(\bar{k}^*) - (m + 2\delta - \delta\tau)\bar{k}^* \ . \tag{24}$$

Jelölje a $\dot{\bar{k}} = 0$ teljesülése mellett a $\bar{c}_2$ maximális értékét eredményező hatékony tőkeintenzitást $\bar{k}_g$, a $\bar{c}_2 = 0$ egyenlet teljesülését biztosító nagyságot pedig $\bar{k}_0$. Amennyiben a (18) mozgásegyenlet bal oldalán álló szögletes zárójelben szereplő kifejezés pozitív, $\bar{k}_g$ és $\bar{k}_0$ egzisztenciája és unicitása biztosított. Ismert, hogy Ramsey (1928) modelljében $0 < \bar{k}^* < \bar{k}_g < \bar{k}_0$ teljesül. Bessenyei (2001) cikkemben megmutattam, hogy korrupció esetén, kiegyensúlyozott költségvetés mellett csak a $0 < \bar{k}^* < \bar{k}_0$ relációk állnak fenn. Az elit háztartások pozitív fogyasztása azonban ez esetben is biztosított. Megengedve a költségvetési deficitet azonban $\bar{c}_2^* < 0$ is előfordulhat. Ennek elkerüléséhez a (24) egyenlet jobb oldalán a szögletes zárójelben álló kifejezés pozitivitása szükséges. Ebből a költségvetési deficitre az alábbi egyenlőtlenség vezethető le:

$$(1-\tau)\left[(1-\mu g)\frac{\tilde{\epsilon}_1}{1-\tilde{\epsilon}_2} + \mu g\right] > g - \tau \ . \tag{25}$$

A bal oldalon álló kifejezés pozitivitása nem jelenti azt, hogy deficites költségvetés mellett is feltétlenül fenn áll a versenyszféra egyensúlya, hisz a fenti egyenlőtlenség $\bar{c}_2^*$ pozitivitásának csupán szükséges, de nem elegendő feltétele. A (12) relációból következik, hogy a bal oldali kifejezés értéke μ növekedésével nő. Ez azt jelenti, hogy minél erőteljesebben jelen van a korrupció a gazdaságban, annál magasabb elsődleges költségvetési deficit mellett lehet egyensúlyban a versenyszféra egyéb feltételek változatlansága esetén. Hasonló a helyzet a g paraméterrel, így a költségvetési kiadások GDP-hez viszonyított magasabb aránya esetén is nagyobb lehet az elsődleges deficit.

Az egyensúlyi helyzet stabilitásának vizsgálata során az alábbi linearizált rendszerhez jutunk:

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{k}} \\ \dot{\bar{c}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & -1 \\ \beta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\bar{k} - \bar{k}^*) \\ (\bar{c} - \bar{c}^*) \end{bmatrix} ,$$

ahol :

$$\alpha = (1-\tau)f''(\bar{k}^*)\bar{k}^* + \left[(1-\tau) + \frac{(1-\tau)\mu g - g + \tau}{1-\mu g}\right] f'(\bar{k}^*) - (m + 2\delta - \delta\tau) ,$$

$$\beta = \frac{1-\tau}{\theta(1-\mu g)}\bar{c}_2^* f''(\bar{k}^*) \ .$$

Nehéz lenne α értékéről közelebbi kijelentést tenni, szerencsére erre nincs is szükség. Mivel ugyanis a mátrix karakterisztikus polinomja: $\lambda^2 - \alpha\lambda + \beta$, a sajátértékek az $\frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2}$ formula szerint adódnak. Tekintve, hogy az f

függvény jól viselkedő, $\beta < 0$, és így a két sajátérték közül az egyik pozitív, a másik pedig negatív. Ezek szerint a (17) és (18) differenciálegyenletek által meghatározott dinamikus rendszert nyeregpont-stabilitás jellemzi. Az egyensúlyi helyzet stabilitását a (38) transzverzalitási feltétel biztosítja, rákényszerítve az elit háztartásokat $\bar{c}_2(0)$ értékének oly módon történő megválasztására, ami az egyik egyensúlyi pont felé haladó trajektóriára helyezi a rendszert.

4 A költségvetési szféra egyensúlya

A továbbiakban az adósság/GDP arány alakulását követjük nyomon, ebben a szakaszban egyensúlyi helyzetben, a következőben pedig disequilibriumban. A költségvetési szféra egyensúlyán az adósság/GDP hányados változatlanságát értjük, míg a költségvetés egyensúlya azt jelenti, hogy az elsődleges hiány nagysága éppen zérus. Az egyensúlyi helyzet a költségvetési szféra egyensúlyát jelenti.

Elvégezve a szögletes zárójelben álló kifejezés felbontását a (40) egyenletben, látható, hogy a (19) differenciálegyenlet jobb oldalán az utolsó tagban szereplő kerek zárójelben a kibocsátás növekedési rátája áll. Az előző szakaszban láttuk, hogy a versenyszféra egyensúlyi helyzetében ez az exogén technikai haladás rátájával egyenlő, így a következőt írhatjuk:

$$\dot{b} = (g - \tau) + [(1 - \tau)r^* - m]b \,, \tag{26}$$

ahol r^* a kamatláb (22) egyenlettel meghatározott egyensúlyi értéke. A (26) egyenlet egyébként ekvivalens Mellár (2002) adósságdinamikáról szóló tanulmányának alapegyenletével. Modellünk azonban a jobb oldalon szereplő változók endogenizálásának más lehetőségét kínálja.

A (26) differenciálegyenlet szerint deficites költségvetés esetén az adósság/GDP arány csakis akkor nem növekszik, ha az állampapírok hozama alacsonyabb a kibocsátás növekedési rátájánál, azaz $(1 - \tau)r^* < m$. Ez az egyenlőtlenség nem mond ellent a transzverzalitási feltétel teljesüléséhez szükséges (38) relációnak, így nem állítható, hogy modellünkben a deficites költségvetés feltétlenül az adósság/GDP arány növekedését eredményezné. Ehhez azonban az adókulcsnak az $\left(1 - \frac{m}{r^*}, 1 - \frac{(1-\mu g)m}{r^* + \mu g\delta}\right)$ intervallumba kell esnie. Ez az intervallum annál tágabb, minél magasabb μ értéke. Speciálisan korrupciómentes esetben ilyen τ nem is létezik. Ekkor $\tau = 1 - \frac{m}{r^*}$ esetén az adósság/GDP hányados növekedése éppen az elsődleges deficit nagyságával egyezik meg, és τ bármilyen csekély mértékű csökkentése elegendő lenne a (38) egyenlőtlenség kielégítéséhez. Kiegészítve a versenyszféra egyensúlyának előző szakaszban adott feltételeit a költségvetési szféra hosszú távú egyensúlyát meghatározó $\dot{b} = 0$ egyenlettel, így a következő megállapítást tehetjük: Minél erősebb a korrupció, annál magasabb lehet az adókulcs egyensúlyt biztosító értéke, tehát annál nagyobb a kormányzat mozgástere az adópolitika kialakítása során.

Iménti eredményünkhöz az egyensúlyi kamatláb exogén adottságként történő feltételezése mellett jutottunk. A kamatláb endogenizálásához helyettesítsük be a (22) összefüggést a (26) differenciálegyenletbe. Ekkor b mozgásegyenlete a következő:

$$\dot{b} = g - \tau + [(1-\mu g)(\theta m + \rho) - (1-\tau)\mu g\delta - m]b \,. \tag{27}$$

Mivel a jobb oldalon álló kifejezés μ növekedésével csökken, a korrupció erősödése mérsékli az adósság/GDP hányados növekedési ütemét, sőt, ha a szögletes zárójelben álló kifejezés negatív, akkor értéke akár elsődleges költségvetési deficit esetén is változatlan maradhat, vagy csökkenhet. A versenyszféra egyensúlya mellett a költségvetési szféra egyensúlyát fel nem borító elsődleges deficit tehát annál nagyobb lehet, minél erőteljesebb a korrupció. Itt is érdemes a korrupciómentes $\mu = 0$ esetet megvizsgálni. A (27) differenciálegyenletből következik, hogy $\dot{b} = 0$ akkor és csakis akkor teljesül, ha $\frac{g-\tau}{b} = m - (\theta m + \rho)$. Figyelembe véve a transzverzalitási feltételnek a versenyszféra egyensúlyi helyzetére levezetett (23) alakját, látható, hogy korrupció hiányában és pozitív államadósság mellett az adósság/GDP hányados értéke csakis elsődleges költségvetési többlet ($g < \tau$) mellett maradhat változatlan.

A (27) mozgásegyenletből az adósság/GDP hányados egyensúlyi értéke is egyszerűen levezethető:

$$b^* = \frac{g-\tau}{m + (1-\tau)\mu g\delta - (1-\mu g)(\theta m + \rho)} \,.$$

A nevező μ növekedésével nő, konstans elsődleges deficit mellett tehát annál nagyobb lehet b^* értéke, minél erősebb a korrupció.

A (27) differenciálegyenlet gyakorlatban történő alkalmazását jelentősen megnehezíti, hogy mind az elit háztartások időpreferencia rátáját, mind pedig az egyenletes fogyasztási pályához történő ragaszkodás erősségét mérő θ paramétereket tartalmazza. Mivel ezek számszerűsítése meglehetősen problematikus, célszerű a (23) transzverzalitási feltétel alkalmazásával az adósság/GDP hányados növekedési rátájának alsó korlátját levezetni. Beírva a (23) egyenlőtlenséget a (27) mozgásegyenletbe:

$$\dot{b} > g - \tau + [(1-\mu g)m - (1-\tau)\mu g\delta - m]b \,.$$

Elvégezve az egyszerűsítéseket a jobb oldalon, és átrendezve:

$$\hat{b} > \frac{g-\tau}{b} - \mu g[m + \delta(1-\tau)] \,.$$

Ezek szerint az adósság/GDP arány konstans szinten tartásának szükséges feltétele:

$$\frac{g-\tau}{b} < \mu g[m + \delta(1-\tau)] \,.$$

Ebből a kormányzati kiadásokra:

$$g < \frac{\tau}{1 - \mu b[m + \delta(1-\tau)]} \,.$$

Most is látható, hogy a korrupció erősödése lehetővé teszi a kormányzati kiadások növelését az adósság/GDP arány konstans szintje mellett, továbbá $\mu = 0$ esetben egyenlőtlenségünk az elsődleges költségvetési többletet előíró $g < \tau$ alakra egyszerűsödik.

Behelyettesítve a (27) egyenletbe a (25) egyenlőtlenséget, megkapjuk az adósság/GDP arány növekedésének azt a felső korlátját, amely mellett az elit háztartások fogyasztása még pozitív lehet:

$$\dot{b} < (1-\tau)\left[(1-\mu g)\frac{\tilde{\epsilon}_1}{1-\tilde{\epsilon}_2} + \mu g\right] + \left[(1-\mu g)(\theta m + \rho) - (1-\tau)\mu\rho\delta - m\right] b\,.$$

Alkalmazzuk a jobb oldalra a $\phi(\mu, b)$ jelölést az egyszerűbb írásmód érdekében. Ezek után felvethető a kérdés, hogy miként befolyásolja a korrupció $\dot{b}$ felső korlátját a versenyszféra egyensúlya mellett. A parciális derivált nem ad egyértelmű választ:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mu} = (1-\tau)g\frac{1-\tilde{\epsilon}_1-\tilde{\epsilon}_2}{1-\tilde{\epsilon}_2} - bg\left[\theta m + \rho + (1-\tau)\delta\right]\,.$$

A (12) egyenlőtlenség miatt az első tag pozitív, a második viszont negatív. Érdekes ugyanakkor, hogy míg az első tag nagysága b-től független, a másodiké azzal egyenesen arányos. Ez azt jelenti, hogy a versenyszféra egyensúlya mellett a korrupció erősödése az adósság/GDP hányados növekedésének felső korlátját csökkenti, ha b értéke meghaladja az $\frac{(1-\tau)(1-\tilde{\epsilon}_1-\tilde{\epsilon}_2)}{(1-\tilde{\epsilon}_2)[\theta m+\rho+(1-\tau)\delta]}$ küszöbértéket. Amennyiben elmarad attól, úgy a μ növekedésével $\dot{b}$ felső korlátja növekszik.

A korrupció itt bemutatott hatása mögött az az elv húzódik meg, hogy a költségvetési hiányt megtakarításokból kell finanszírozni. Minél elterjedtebb a jelenség, annál magasabb az elit háztartások jövedelme, így annál többet takarítanak meg. A magas államadósság ezek szerint a lakossági jövedelmek nagyfokú szóródását teszi szükségessé modellünkben, ugyanis ezáltal nőnek a megtakarítások.

5 Stabilizációs stratégiák

Az előző szakaszban az egyensúlyi helyzetre koncentráltunk. Az ott levezetett eredmények azonban egyszerűen alkalmazhatók arra az esetre is, amikor a gazdaságpolitika célja az adósság/GDP hányados csökkentése a versenyszféra egyensúlya mellett. A továbbiakban azt az esetet vesszük szemügyre, amikor valamilyen exogén tényező a gazdaságot egyensúlyi helyzetéből kitéríti. Ez történik például, amikor a választások közeledtével a kormányzat megkísérli az adósság kinövését, s ennek érdekében „közérzetjavító” intézkedéseket hoz. Modellünkben ez mind a g paraméter növelése, mind pedig τ csökkentése révén megvalósulhat. A (21) egyenlőtlenségek szerint mindkét esetben a hatékony tőkeintenzitás egyensúlyi értékének növekedése következik be. A (16) egyenlet szerint ekkor az új egyensúlyi helyzet kialakulásáig a reálbér az exogén technikai haladás rátájánál gyorsabb ütemben növekszik. A bérből és fizetésből élők által érzékelhető különbség a két intézkedés között abban áll, hogy az (1) egyenlet szerint az adókulcs csökkentése azonnal emeli a fogyasztásukat, míg g növelése esetén a reálbérnövelő hatás csak később, a hatékony tőkeintenzitás növekedésével jelentkezik. A kormányzat fent említett beavatkozásának másik következménye a (19) egyenlet szerint $\dot{b}$ növekedése, ami az általános $b > 0$ esetben az adósság/GDP hányados növekedésével is együtt jár. A transzverzalitási feltétel az egyetlen, új egyensúlyi helyzetbe tartó pályagörbére kényszeríti a gazdaságot, az államadósság/GDP hányados alakulását pedig e növekedési pályán a (19) állapotegyenlet írja le. Ennek az egyenletnek a jobb oldalán három tag szerepel. Ezek rendre: az elsődleges költségvetési deficit, az államadósság kamatterhe és a GDP növekedésének adósság/GDP hányadost csökkentő hatása.

Tegyük fel, hogy a fent említett gazdaságélénkítő intézkedések elsődleges költségvetési deficitet eredményeznek. Ez a (19) egyenlet szerint önmagában b növekedésének irányába hat. Az államadósság kamatterhe szintén pozitív, de a hatékony tőkeintenzitás gazdaságélénkítő intézkedések által kiváltott növekedése a (13) egyenlet szerint a tőke csökkenő határtermelékenysége miatt mérsékli a kamatlábat, ami e tag értékét csökkenti. Másrészt $\hat{\hat{k}} > 0$, ami az utolsó tag révén az adósság/GDP hányados csökkentésének irányában hat. Ha ez a csökkentő hatás meghaladja az elsődleges deficit és a mérséklődő kamatteher összegét, akkor az említett „közérzetjavító" intézkedések révén a gazdaságnak sikerül kinőnie az adósságból. Ha nem, akkor az adósságcsökkentés másik útja marad, g csökkentése, illetve τ növelése. A sikert azonban e megszorító intézkedések sem garantálják. A két restriktív intézkedés bármelyike csökkenti ugyan az elsődleges költségvetési deficitet, a (21) parciális deriváltak szerint azonban a megszorító intézkedések hatására csökken a hatékony tőkeintenzitás egyensúlyi értéke is. Mivel a versenyszféra egyensúlyi helyzete stabil, ez a hatékony tőkeintenzitás visszaesését eredményezi, ami növeli a kamatlábat, és így az államadósság után fizetendő kamatterhet is. A hatékony tőkeintenzitás csökkenése esetén továbbá $\hat{\hat{k}} < 0$, így a (19) egyenlet utolsó tagjának előjele is bizonytalanná válik. Ez utóbbi hatásokat az elsődleges költségvetési deficit csökkenése nem feltétlenül képes kompenzálni, így semmi nem garantálja, hogy sikerül kifogyni az adósságból. Egészen biztosan nem sikerül kifogyni az adósságból elsődleges költségvetési deficit mellett, ha a megszorítások következtében a hatékony tőkeintenzitás túlságosan gyorsan csökken, azaz

$$\epsilon_K \hat{\hat{k}} < m(\epsilon_{\bar{L}} + \epsilon_K) \,. \tag{28}$$

Amennyiben a kormányzati kiadások csökkentésének illetve az adókulcs emelésének azt a mértékét nevezzük sokkterápiának, mely a GDP csökkenését, azaz a (28) egyenlőtlenség teljesülését előidézi, akkor azt mondhatjuk, hogy a sokkterápia eredményességének szükséges feltétele az elsődleges költségvetési többlet.

Mindezek után arról kell még szólni, hogy miként érinti a korrupció az adósságkezelés imént vizsgált két stratégiájának eredményességét. A (19) mozgásegyenlet jobb oldalán egyetlen olyan kifejezés szerepel, melynek értékét μ nagysága befolyásolja: az $r = f'(\bar{k}) - \delta$ kamatláb.

Minél magasabb a kamatláb, annál kisebb az esélye az adósság kinövését megkísérlő gazdaságpolitika sikerességének. A (14) reláció szerint erősebb korrupció esetén a kamatláb alacsonyabb, tehát könnyebben nőheti ki a gazdaság a felhalmozott államadósságot. A nagyobb mértékű korrupció azonban az adósságból kifogyni igyekvő gazdaságpolitikát is elősegíti, hisz az alacsonyabb kamatláb ebben az esetben is kedvező a (41) differenciálegyenlet jobb oldalán álló kifejezés negativitásának szempontjából. E differenciálegyenlet mindkét oldalát b-vel osztva látható, hogy a korrupció erősödése a kamatláb mérséklése révén annál nagyobb mértékben csökkenti az adósság/GDP hányados növekedési rátáját, minél alacsonyabb az adókulcs.

6 Következtetések

Dolgozatunkban a korrupció államadósságra gyakorolt hatását vizsgálva azt találtuk, hogy minél elterjedtebb a jelenség, annál sikeresebben tarthatja konstans szinten, vagy csökkentheti a kormányzat az adósság/GDP hányados értékét. Ez a következtetés a versenyszféra egyensúlyában éppúgy érvényes, mint a fiskális expanzió, illetve restrikció által megváltoztatott egyensúlyi helyzet felé tartó növekedési pályán. A korrupció államadósságot mérséklő hatását egyértelműen a (14) egyenlőtlenség biztosítja, mely szerint erősebb korrupció alacsonyabb kamatlábat, s így az államadósság után fizetendő alacsonyabb kamatterhet eredményez.

E kulcsszerepet játszó összefüggéssel szemben fölvethető, hogy azt egy mindeddig ki nem mondott feltevés mellett kaptuk. Eszerint a hatékony tőkeintenzitás profitmaximumot biztosító értékének meghatározása során a vállalatok figyelembe veszik, hogy magasabb adók a produktív közjavak nagyobb mennyiségét eredményezik, s így a tőke határtermelékenységét növelik. A (13) egyenlet egyébként a kamatláb Barro (1990) közjavakat tárgyaló cikkében alkalmazott egyenlettel is ellentétben áll. Megmutatható azonban, hogy a korrupció kamatlábat mérséklő hatása akkor is fennáll, ha Barro nyomán feltesszük, hogy a vállalatok nem érzékelik adófizetésük pozitív extern hatását.

Ezek után föl kell tenni a kérdést, valóban olyan kedvező-e a jelenség az adósságkezelés szempontjából, mint az a fentiekből következik, vagy vannak a modellnek olyan feltevései, melyek a korrupció itt levezetett előnyös tulajdonságaihoz vezetnek. Ebből a szempontból két feltevés tűnik különösen problematikusnak. Az egyik az, hogy a bérből és fizetésből élő háztartások nem takarítanak meg, a másik pedig a termelési függvény (9) egyenletben adott specifikációja. Ennek következménye ugyanis, hogy az egyensúlyi növekedési ráta a korrupciótól független nagyságként jelenik meg a modellben. A kibocsátás növekedési rátájára levezetett (40) összefüggés a (19) állapotegyenlet jobb oldalának utolsó tagjában jelenik meg kerek zárójelek közé írva. Látható, hogy ennek magasabb értéke az adósság/GDP arány csökkenését eredményezi.

A B függelékben egy olyan termelési függvényt vezetünk be a modellbe, melyre nem érvényes a tőke csökkenő hozadékának elve. Az ilyen, AK típusú termelési függvények esetében a munka határtermelékenysége zéró. Barro és Sala-i-Martin (1995) könyve e problémát olymódon oldja meg, hogy munkán a képzetlen munkát érti. Így a nyers munkára vonatkozó bérráta ugyan nulla, a képzett munka díjazása viszont az abban megtestesülő emberi tőke alapján, a tőkejövedelmekre vonatkozó díjazás szerint történik. E termelési függvény alkalmazása tehát lehetetlenné teszi két szektor elhatárolását a háztartások oldalán. Modellünk terminológiájával élve így azt mondhatjuk, hogy most valamennyi háztartás az elithez tartozik, tehát mindegyik megtakarít.

A B függelékben levezetett (42) egyenlőtlenség szerint a korrupció erősödése ebben az esetben is mérsékli a kamatláb nagyságát. Ugyanitt azt is megmutatjuk, hogy a tőke állandó hozadéka mellett a kibocsátás növekedési rátája nem független a korrupció erősségétől. Az összefüggés irányát a (44) derivált előjele határozza meg, ami a szögletes zárójelben álló kifejezéstől függ. Ezt átalakítva kapjuk, hogy $\mu > \frac{1}{\epsilon_K} - \frac{1-\epsilon_k}{g\epsilon_K}$ esetén a korrupció visszaszorulása növeli a kibocsátás növekedési rátáját, fordított reláció esetén csökkenti. Figyelembe véve a (19) állapotegyenletet, a korrupció hatása tehát kettős: egyrészt a kamatláb mérséklése révén csökkenti az államadósság után fizetendő kamatterhet, másrészt a gazdaság növekedési ütemét is befolyásolja. Az utóbbi hatás iránya azonban a korrupció erősségétől, a tőke parciális termelési rugalmasságától és a kormányzati kiadások GDP-hez viszonyított arányától függ.

Paldam (2002) empirikus kutatásai során erős negatív irányú összefüggést talált a korrupció erőssége és az egy főre eső reál GDP mértéke között, így valószínűsíthető, hogy az imént felsorolt paraméterekre általában teljesül a $\mu > \frac{1}{\epsilon_K} - \frac{1-\epsilon_k}{g\epsilon_K}$ reláció. Ennélfogva a korrupció adósság/GDP arányra gyakorolt hatása nem egyértelmű. Ha viszont μ értéke nem éri el a fenti küszöbértéket, akkor továbbra is azt mondhatjuk, hogy az erősebb korrupció egyértelműen előnyös az államadósság kezelése szempontjából.

A függelék

Az elit háztartások vagyonának megváltozása jövedelmük és fogyasztásuk különbségével, azaz megtakarításuk nagyságával egyenlő, tehát a (2) egyenletnek megfelelően:

$$\dot{A} = S = (1-\tau)(rA + Y_2) - C_2 \tag{29}$$

Figyelembe véve, hogy a (8) és (5) egyenletek szerint $Y_2 = \frac{\mu g}{1-\mu g}[(r+\delta)K + wL]$, továbbá a (3) egyenletből adódóan $K = A - B$, az elit háztartások vagyonának alakulását az alábbi mozgásegyenlet írja le:

$$\dot{A} = \frac{1-\tau}{1-\mu g} rA + \frac{(1-\tau)\mu g}{1-\mu g}\delta A - \frac{(1-\tau)\mu g}{1-\mu g}[(r+\delta)B - wL] - C_2\,. \tag{30}$$

Kiegyensúlyozott növekedés csakis abban az esetben lehetséges, ha az elit háztartások mindenkori hasznossága az alábbi CRRA (Constant Relative

Risk Aversion) hasznossági függvény szerint függ folyó fogyasztásuktól:

$$u = u(C_2) = \frac{C_2^{1-\theta} - 1}{1-\theta}\,. \tag{31}$$

Mivel az elit háztartások végtelen időhorizonton igyekeznek jólétüket maximalizálni, döntési problémájuk a következő:

$$\max W = \int_0^\infty e^{-\rho t} \frac{C_2^{1-\theta} - 1}{1-\theta}\, dt\,, \tag{32}$$

figyelembe véve a (30) egyenletet, valamint az államadósság és a vagyon induló nagyságát. $\rho > 0$ az időpreferencia rátáját jelöli. A problémához az alábbi Hamilton-függvény tartozik:

$$H(C_2, \lambda) = e^{-\rho t} \frac{C_2^{1-\theta}}{1-\theta} +$$
$$+ \lambda \left[\frac{1-\tau}{1-\mu g} r A + \frac{(1-\tau)\mu g}{1 \mu g} \delta A - \frac{(1-\tau)\mu g}{1-\mu g} [(r+\delta)B - wL] - C_2 \right]\,.$$

A kanonikus egyenletek:

$$\lambda = e^{-\rho t} C_2^{-\theta} \tag{33}$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{1-\tau}{1-\mu g}(r + \mu g \delta)\lambda\,. \tag{34}$$

Mivel a Hamilton-függvény A-ban és C_2-ben konkáv, a kanonikus egyenletek a $\lim\limits_{t\to\infty} \lambda A = 0$ transzverzalitási feltétellel együtt az elit háztartások optimális fogyasztási pályájának nem csak szükséges, hanem elegendő feltételeit is meghatározzák. A (33) egyenletből következik, hogy λ az elit háztartások fogyasztásból származó mindenkori határhasznának jelenre diszkontált értékeként értelmezhető. A (33) egyenletet az idő szerint differenciálva kapjuk, hogy

$$\dot{\lambda} = -e^{\rho t} C_2^{-\theta} (\rho + \theta \hat{C}_2) = -\lambda(\rho + \theta \hat{C}_2)\,.$$

Az átalakítás során a (33) egyenletet alkalmaztuk. $\hat{C}_2 = \frac{\dot{C}_2}{C_2}$ az elit háztartások fogyasztásának növekedési rátája. Iménti összefüggésünk és a (34) egyenlet felhasználásával

$$\hat{C}_2 = \frac{1}{\theta} \left[\frac{1-\tau}{1-\mu g}(r + \mu g \delta) - \rho \right]\,.$$

Bevezetve a $\bar{c}_2 = \frac{C_2}{L}$ jelölést, amiből $\hat{\bar{c}}_2 = \hat{C}_2 - m$, továbbá felhasználva a (13) összefüggést:

$$\hat{\bar{c}}_2 = \frac{1}{\theta} \left[\frac{1-\tau}{1-\mu g} \left(f'(\bar{k}) - (1-\mu g)\delta \right) - \rho \right] - m\,. \tag{35}$$

A hatékony tőkeintenzitás mozgásegyenletének levezetéséhez helyettesítsük be a (6) egyenletbe a (29) megtakarítási függvényt. Kapjuk, hogy $\dot{K} = (1-\tau)(rA + Y_2) - C_2 - \dot{B} - \delta K$, ahol $\dot{B}$ az államadósság változása. Ennek nagysága megegyezik az elsődleges költségvetési hiány és az államadósság után fizetendő kamatok összegével, tehát:

$$\dot{B} = (g-\tau)Y + (1-\tau)rB \; . \tag{36}$$

Figyelembe véve a (8) összefüggéseket, a következőket írhatjuk:

$$\dot{K} = (1-\tau)\left[rA + \frac{\mu g}{1-\mu g}Y_1\right] - C_2 - \frac{g-\tau}{1-\mu g}Y_1 - (1-\tau)rB - \delta K \; .$$

Alkalmazva a (3) egyenletet, az $(1-\tau)rB$ tag kiesik, és így:

$$\dot{K} = (1-\tau)rK + \frac{(1-\tau)\mu g - g + \tau}{1-\mu g}Y_1 - \delta K - C_2 \; .$$

A $\bar{c}_2$ változóhoz hasonlóan bevezetett hatékony tőkeintenzitást definiáló $\bar{k} = \frac{K}{\bar{L}}$ egyenlet mindkét oldalát az idő szerint deriválva: $\dot{\bar{k}} = \dot{K}e^{-mt} - m\bar{k}$, amiből:

$$\dot{\bar{k}} = (1-\tau)r\bar{k} + \frac{(1-\tau)\mu g - g + \tau}{1-\mu g}f(\bar{k}) - (m+\delta)\bar{k} - \bar{c}_2 \; .$$

Felhasználva a (10) és (13) egyenleteket, $\bar{k}$ alábbi mozgásegyenletét kapjuk:

$$\dot{\bar{k}} = \left[\frac{(1-\tau)\tilde{\epsilon}_1}{1-\tilde{\epsilon}_2} + \frac{(1-\tau)\mu g - g + \tau}{1-\mu g}\right]f(\bar{k}) - (m + 2\delta - \delta\tau)\bar{k} - \bar{c}_2 \; . \tag{37}$$

A $\lim_{t\to\infty} \lambda A = 0$ transzverzalitási feltétel azt fejezi ki, hogy az elit háztartások birtokában lévő befektetések jelenértékének végtelen időhorizonton nullához kell tartania. A λ változó kiküszöbölése érdekében alkalmazzuk a (34) differenciálegyenlet megoldása során a (33) egyenletet, majd behelyettesítve, a transzverzalitási feltétel az alábbi formában adódik:

$$\lim_{t\to\infty} A\left[C_2(0)\right]^{-\theta} e^{\int_0^t \frac{1-\tau}{1-\mu g}[r(v)+\mu g\delta]\,dv} = 0 \; ,$$

ahol $r(v)$ a kamatláb v időpontbeli nagyságát jelöli. Figyelembe véve, hogy $\bar{L} = e^{mt}$, e változóval szorozva és osztva a bal oldalon:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{A}{\bar{L}}\left[C_2(0)\right]^{\theta} e^{-\int_0^t \frac{1-\tau}{1-\mu g}[r(v)+\mu g\delta]-m\,dv} = 0 \; .$$

A fenti formában felírt transzverzalitási feltétel akkor és csakis akkor teljesül, ha fennáll az

$$\frac{1-\tau}{1-\mu g}[r + \mu g\delta] > m \tag{38}$$

egyenlőtlenség.

Az adósság/GDP hányados mozgásegyenleteinek levezetéséhez vegyük a $b = \frac{B}{Y}$ egyenlet mindkét oldalának idő szerinti deriváltját. Ekkor

$$\dot{b} = \frac{\dot{B}}{Y} - b\hat{Y} \ . \tag{39}$$

$\hat{Y}$ meghatározásához pedig képezzük a (9) termelési függvény totális deriváltját:

$$dY_1 = F_1 dK + F_2 d\bar{L} + F_3 dG_1 \ ,$$

ahol F_i a függvény i-edik változó szerint vett parciális deriváltja. Mindkét oldalt dt-vel osztva:

$$\dot{Y}_1 = F_1 \dot{K} + F_2 \dot{\bar{L}} + F_3 \dot{G}_1 \ .$$

Figyelembe véve, hogy $G_1 = \frac{g-\mu g}{1-\mu g} Y_1$, elvégezve az idő szerinti deriválást: $\dot{G}_1 = \frac{g-\mu g}{1-\mu g} \dot{Y}_1$. Behelyettesítve iménti egyenletünkbe, majd átrendezve:

$$\dot{Y}_1 = F_1 \dot{K} + F_2 \dot{\bar{L}} + F_3 \frac{g-\mu g}{1-\mu g} \dot{Y}_1 \ .$$

A közjavak parciális termelési rugalmassága

$$\epsilon_{G_1} = \frac{F_3 G_1}{Y_1} = F_3 \frac{g-\mu g}{1-\mu g} \ .$$

Figyelembe véve továbbá, hogy a tőke parciális termelési rugalmassága $\epsilon_K = F_1 K / Y_1$, a hatékony munka parciális termelési rugalmassága pedig $\epsilon_{\bar{L}} = F_2 \bar{L} / Y_1$, mindkét oldalt Y_1-gyel osztva a következő egyenlethez jutunk:

$$\hat{Y}_1 = \epsilon_K \hat{K} + \epsilon_{\bar{L}} \hat{\bar{L}} + \epsilon_{G_1} \hat{Y}_1 \ .$$

A (8) összefüggésből következik, hogy $\hat{Y}_1 = \hat{Y}$, másrészt feltevésünk szerint $\hat{\bar{L}} = m$. Figyelembe véve továbbá, hogy a lineáris homogenitás miatt $\epsilon_K + \epsilon_{\bar{L}} + \epsilon_{G_1} = 1$, a következőt írhatjuk:

$$\hat{Y} = \epsilon_K \hat{K} + \epsilon_{\bar{L}} m + (1 - \epsilon_K - \epsilon_{\bar{L}}) \hat{Y} \ .$$

Mivel $\hat{K} = \hat{\bar{k}} + m$, egyenletünket átrendezve Y következő növekedési rátáját kapjuk:

$$\hat{Y} = \frac{1}{\epsilon_K + \epsilon_{\bar{L}}} \left[\epsilon_K \hat{\bar{k}} + m(\epsilon_K + \epsilon_{\bar{L}}) \right] \ . \tag{40}$$

Behelyettesítve ezt a (39) egyenletbe és figyelembe véve a (36) összefüggést, b alábbi mozgásegyenlete adódik:

$$\dot{b} = [g - \tau] + (1 - \tau) r b - \frac{1}{\epsilon_K + \epsilon_{\bar{L}}} \left[\epsilon_K \hat{\bar{k}} + m(\epsilon_K + \epsilon_{\bar{L}}) \right] b \ . \tag{41}$$

B függelék

Tekintsük az $Y_1 = DK^{\alpha}G_1^{1-\alpha}$ termelési függvényt, ahol D technológiai paraméter, és $\epsilon_K = \alpha$. Mivel $m = 0$, a modell több, eddig különbözőnek tekintett változója egybeesik: $\bar{L} = L$, $\bar{k} = k = K$, továbbá minden jövedelem tőkejövedelem, melyet most a háztartások egyetlen szektora sajátít el. $L = 1$ esetén az egységnyi munkára eső fogyasztás $c = \bar{c}_2 = C_2$. A továbbiakban az egyszerűbb jelöléseket fogjuk használni, de az eddigi eredményekkel történő könnyebb egybevetés érdekében a szabályozási vektort a k és c változókra írjuk fel. Elvégezve az 1.5 pontban bemutatott átalakításokat, a (9) termelési függvény az alábbi formában írható fel:

$$Y_1 = A^{\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{g - \mu g}{1 - \mu g} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} K = \tilde{D} K \, .$$

A $\tilde{D}$ szimbólumot csupán az egyszerűbb jelölés érdekében vezettük be. Az intenzív termelési függvény: $f(k) = \tilde{D}K$, ahol $\tilde{D} > 0$. A kormányzati kiadások növelése ezúttal is élénkíti a gazdaságot: $\frac{\partial \tilde{D}}{\partial g} = \frac{1-\alpha}{(1-\mu g)\alpha g}\tilde{D} > 0$. Másrészt $\frac{\partial \tilde{D}}{\partial \mu} = -\frac{(1-g)(1-\alpha)}{(1-\mu g)(1-\mu)\alpha}\tilde{D} < 0$, és $r = \tilde{D} - \delta$ miatt továbbra is érvényes, hogy

$$\frac{\partial r}{\partial \mu} < 0 \, . \tag{42}$$

Az A függelékben követett gondolatmenet alapján a szabályozási vektor alábbi mozgásegyenletéhez jutunk:

$$\begin{bmatrix} \dot{k} \\ \dot{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u & -1 \\ 0 & v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ c \end{bmatrix} , \tag{43}$$

ahol

$$u = \frac{1-g}{1-\mu g}\tilde{D} - (2-\tau)\delta \quad \text{és} \quad v = \frac{1}{\theta}\left[\frac{1-\tau}{1-\mu g}\tilde{D} - (1-\tau)\delta - \rho \right] .$$

Feltesszük, hogy $\frac{1-\tau}{1-\mu g}\tilde{D} > (1-\tau)\delta + \rho$, ekkor $v > 0$ és $c = c(0)e^{vt}$. A (43) rendszer most a következő elsőrendű differenciálegyenlet formájában írható fel: $\dot{k} - uk = -c(0)e^{vt}$, melyet megoldva:

$$k = e^{ut}\left(Z - \int c(0)e^{(v-u)t}\, dt \right) = Ze^{ut} - \frac{1}{v-u}c_2(0)e^{vt} \, .$$

A Z konstans értéke a $t = 0$ helyettesítéssel határozható meg, amiből $Z = k(0) - \frac{c(0)}{v-u}$. Kiegyensúlyozott költségvetés esetén $\lim\limits_{t\to\infty} \lambda A = 0$ transzverzalitási feltételből $B, K > 0$ miatt $Z = 0$, és így $\hat{k} = \hat{c}$ következne. Most azonban $g \neq \tau$ következtében a helyzet valamivel bonyolultabb. Az általános $\theta > 1$ esetben feltehető, hogy $v < u$, ekkor a tőkeállomány növekedési pályáját két különböző konstans ráta szerint növekvő változó összegeként kapjuk. Bár e növekedési ráták eltérőek, a korrupció erőssége a $\frac{\tilde{D}}{1-\mu g}$ kifejezés révén mindkettőt befolyásolja. Ha tehát a jelenség gazdasági növekedésre gyakorolt hatását vizsgáljuk, a kérdés az, hogy miként változik e kifejezés értéke μ növekedésével. Elvégezve a parciális deriválást,

$$\frac{d}{d\mu}\left(\frac{\tilde{D}}{1-\mu g}\right) = \frac{\tilde{D}}{(1-\mu g)^2(1-\mu)\alpha}\Big[\alpha + g - 1 - \mu g\alpha\Big] \tag{44}$$

adódik.

Irodalom

1. Barro, Robert J. (1990): Government Spending in a Simple Model of Endogenous Growth, *Journal of Political Economy*, 98, pp. S103–125.
2. Barro, R. J. és Sala-i-Martin (1995): *Economic Growth*, McGraw-Hill, New York.
3. Bessenyei, István (2001): Közjavak és korrupció Ramsey modelljében, *Szigma*, 32, pp. 29–47.
4. Blanchard, Olivier, J. (1985): Debt, Deficits and Finite Horizons, *Journal of Political Economy*, 93, pp. 223–247.
5. Diamond, Peter (1965): National Debt in a Neoclassical Growth Model, *The American Economic Review*, 55, pp. 1126–1150.
6. Káldor, Nicholas (1956): Alternative Theories of Distribution, *Review of Economic Studies*, 23, pp. 83–100.
7. Káldor, Nicholas és Mirrlees, James, A. (1962): A New Model of Economic Growth, *The Review of Economic Studies*, 29, pp. 174-192.
8. Mauro, Paulo (1998): Corruption and the Composition of Government Expenditure *Journal of Public Economics*, 69, pp. 263-279.
9. Mellár, Tamás (2002): Néhány megjegyzés az adósságdinamikához, *Közgazdasági Szemle*, 49, pp. 725-740.
10. Paldam, Martin (2002): The Cross-Country Pattern of Corruption: Economics, Culture and the Seesaw Dynamics, *European Journal of Political Economy*, 18, pp. 215-240.
11. Ramsey, Frank (1928): A Mathematical Theory of Saving, *Economic Journal*, 38, pp. 543-559.

CORRUPTION AND DEBT DYNAMICS

This paper discusses the effect upon debt dynamics of corruption in the framework of a neoclassical growth model. It is shown that increasing corruption can extend the limits of the fiscal policy as making the debt-stabilization policy more successful. Firms and households are divided into two sectors. Instead of using an economic planner or social welfare function, we assume that the elite households wish to maximize their welfare on an infinite time horizon.

EKVIVALENS ÁRRENDSZEREK[1]

BRÓDY ANDRÁS
MTA, Közgazdaságtudományi Intézet

A Perron-Frobenius elmélet alapján alkotott lemma biztosítja a Leontief-inverzzel illetve a sajátvektorral kifejezett árrendszerek azonosságát. Ez arra a következtetésre vezet, hogy eltérőnek, sőt ellentétesnek és összeférhetetlennek tekintett árrendszerek azonos számszerű eredményt adnak.

1 Bevezetés

Az irodalom az egyensúlyi árrendszer több meghatározását ismeri. Smith már eredetileg is kétféleképpen határozta meg az áru értékét, azaz egyensúlyi árát. Egyrészt okára, a munka ráfordítására hivatkozott, másrészt céljára, a termék használati értékére. Ricardo is kétfajta módon határozta meg árait, a munka ráfordításával, illetve a tőkebefektetéssel arányosan. Ez Marx Tőkéjének első és harmadik kötete közti vélt ellentmondáshoz vezetett. Az általa adott megoldás érvényét mindmáig vitatják. A (legalább) kétféle értékelmélet, tehát a kauzális illetve teleologikus megközelítés ellentéte tehát igen régi.

A vita Neumann bővített újratermelést leíró modellje óta, mivel azt minden irányzat értelmezni tudta, némileg csillapodik. Több jeles közgazdász írása, bizonyos megszorításokkal és fenntartásokkal részlegesen összebékítette az elméleteket. Az alábbiakban a teljes ekvivalencia bizonyítását kísérlem meg.

A bizonyítás azon alapul, hogy a Leontief-inverz segítségével a mátrixosan leírt gazdasági rendszer sajátvektorait a rendszer *bármely* szektorának adataiból kiindulva meghatározni. Az ilyen árrendszer arányai *függetlenek* attól, hogy melyik szükségesnek mutatkozó ráfordítást tekintjük az érték ,,forrásának". Erre szolgál az első rész, amely a megfelelő *lemmát* ismerteti. Ennek kiterjesztését tárgyalja a második rész. A harmadik rész számpéldákon mutatja be több lehetséges árrendszer ekvivalenciáját.

Szándékomban áll a jövőben az értékelméleti vita fent felsorolt főbb állomásait és érveit részletes elmélettörténeti monográfiában összefoglalni. Ez azonban már nem a Szigma profilja. A szemlélet ,,matematikai csontvázát" azért foglalom itt össze, hogy logikai és matematikai hibái kiderülhessenek, és maguk az alapvető összefüggések, amelyekből más következetések is levonhatók, a közgazdászok rendelkezésére álljanak.

[1] Beérkezett: 2004. október 4.

2 A lemma

Tekintsünk egy $\mathbf{A} = \{a_{ik}\}$ n sorból és n oszlopból álló, négyzetes és pozitív mátrixot, amelynek minden oszlopösszege egységnyi. Ha most az n elemű összegező vektor $\mathbf{e}' = (1, 1, \ldots, 1)$, akkor az ilyen mátrixokra igaz az, hogy

$$\mathbf{e}'\mathbf{A} = \mathbf{e}' \,. \tag{1}$$

Perron és Frobenius vizsgálata szerint ez esetben az $\mathbf{A}$ mátrix legnagyobb és egyszerű sajátértéke 1. A mátrixnak ekkor van egy, és csak egy ennek megfelelő pozitív jobboldali sajátvektora is. Jelölje ezt $\mathbf{x}$. Erre felírható az, hogy

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x} \,. \tag{1*}$$

E mátrixnak, egységnyi sajátértéke következtében nincs Leontief inverze, mert az $(1 - \mathbf{A})$ mátrix szinguláris. Ha azonban a legnagyobb sajátértéke kisebb 1-nél, akkor már invertálható, és inverze szigorúan pozitív lesz. Ha például az utolsó sort és oszlopot leválasztva négy részre bontjuk a mátrixot, és az összegező vektort is ennek megfelelően tagoljuk, akkor:

$$\begin{pmatrix} e' & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} A & c \\ r' & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} e' & 1 \end{pmatrix} . \tag{2}$$

Az (1*) egyenletnek megfelelő összefüggés pedig

$$\begin{bmatrix} A & c \\ r' & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x_n \end{pmatrix} . \tag{2*}$$

Itt tehát A az $\mathbf{A}$ mátrix első $n-1$ sorából és oszlopából áll. Az $\mathbf{A}$ mátrix utolsó sorát r', utolsó oszlopát pedig c jelöli. Az $n-1$ elemű összegező vektort e, a jobboldali sajátvektor első $n-1$ elemét pedig x jelöli.

A részekre bontás következménye az, hogy felírhatjuk az alábbi egyenleteket:

$$e'A + r' = e' \,. \tag{3}$$

$$e'c + a_{nn} = 1 \,. \tag{4}$$

$$Ax + x_n c = x \,. \tag{3*}$$

$$r'x + a_{nn}x_n = x_n \,. \tag{4*}$$

A (3) egyenlet az $r'(1 - A)^{-1} = e'$ alakra hozható. Az A mátrixnak már biztosan van pozitív Leontief inverze. Ha ezt a lehasított r' sorral balról beszorozzuk, akkor az $\mathbf{A}$ mátrix saját sorvektorának első $n-1$ elemét kapjuk eredményül. A (3*) egyenlet szerint pedig ugyanez az inverz a lehasított c

oszloppal jobbról beszorozva a saját oszlopvektor első $n-1$ elemével arányos értékeket ad. Az arányossági tényező a sajátvektor utolsó eleme, azaz x_n. Az imént is volt ilyen „arányossági tényező”, csakhogy ez éppen 1 értékűnek adódott.

A Leontief inverz és a leválasztott sor (és oszlop) szorzata a feltételeknek megfelelő **A** *mátrix két sajátvektorának első $n-1$ elemét egyértelműen meghatározza.*

A kérdés most már csak az, mekkora e sajátvektorok utolsó eleme, ezt még nem határoztunk meg. Nyilvánvaló, hogy mindkét esetben ennek az utolsó elemnek egységnyi nagysága adja a helyes megoldást, de kérdéses, hogy ez összefér-e az eddig felírt egyenletekkel.

(4) egyenlet szerint $e'c + a_{nn} = 1$. Ez azt mondja ki, hogy az utolsó, leválasztott oszlop összege egységnyi. Ez a feltételezés szerint mindig teljesül. A (4*) egyenlet szerint $r'x + a_{nn}x_n = x_n$. Ez akkor engedi meg x_n egységnyi értékét, ha $r'x + a_{nn} = 1$. Ez is teljesül, mert éppen azt mondja ki, hogy a jobb oldali sajátvektor utolsó eleme (aminek kiszámítására e képlet bal oldala szolgál) egységnyi. A Leontief inverz tehát alkalmas eszköz az **A** mátrix mindkét oldali sajátvektorának kiszámítására.

3 Kiterjesztés

Az **A** mátrix egységnyi sajátértéke más módon is csökkenthető. Például egy mátrix formájában összefoglalt pozitív értékekkel. Ha a sajátérték csökken, akkor a maradékból mindig összeállítható a pozitív Leontief inverz.[2]

Ha például különválasztjuk a tőkeráfordításokat és azokat egy λB mátrixban foglaljuk össze, tehát ha

$$\mathbf{A} = A + \lambda B\,, \tag{5}$$

akkor az így létrejött általános sajátérték feladat megoldása az ismert

$$\lambda B(1 - A)^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{x} \tag{6}$$

alak. (Ilyenkor persze A és B egyaránt n-ed rendű négyzetes mátrix). Nincs tehát akadálya, hogy a zárt rendszer bővített újratermelésének Leontief féle egyenletét, s ennek árrendszerét is e formában és módon megoldjuk.

[2] Az **A** mátrixot a számítógép ugyan nagy pontossággal kezeli, de a számok csonkítása miatt Leontief inverze a gyakorlatban nem lesz szinguláris. Ezért megpróbálkozhatunk $1-\mathbf{A}$ számításával is. Ilyenkor a jobb programok jelzik ugyan a mátrix rosszul kondicionált voltát és az inverzió megbízhatatlanságát, de a zérushoz közeli sajátérték miatt igen nagy elemekkel bíró eredmény oszlopösszegeinek aránya, megbízhatatlansága ellenére általában jól közelíti a saját sorvektor, míg sorösszegei a saját oszlopvektor arányait.

4 Példák

Legyen a mátrix például a következő:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} .6 & .2 & .3 \\ .3 & .6 & .4 \\ .1 & .2 & .3 \end{bmatrix} .$$

A mátrix minden oszlopösszege 1. Ha utolsó sorát és oszlopát elhagyjuk, akkor

$$A = \begin{bmatrix} .6 & .2 \\ .3 & .6 \end{bmatrix} ,$$

tehát

$$(1 - A)^{-1} = \begin{bmatrix} .4 & -.2 \\ -.3 & .4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Ez az (.1 .2) vektorral balról szorozva valóban az (1 1) vektort eredményezi. A sajátvektor utolsó eleme $.7 + .3 = 1$ lesz.

Ugyanez az inverz jobbról a $(.3\ .4)'$ oszlopvektorral szorozva a $(2\ 2.5)'$ oszlopvektort adja, a sajátvektor utolsó eleme pedig ismét $.2 + .5 + .3 = 1$ értékű.

Ha a leválasztott sor és oszlop a munkaerő ráfordítása, akkor az árak a teljes munkaráfordítást adják meg. Ekkor értékáraknak tekinthetők. De lehet ez a sor az energia ráfordítása is, s akkor az energetikusok által kedvelt energia-alapú árrendszerrel van dolgunk. Ha az állami újraelosztásba bevont adókról volna szó, akkor a teljes adótartalmat tükröznék, míg ha a felhalmozott tőkékkel arányos költségeket tartalmazza, akkor a teljes ráfordított tőke arányait adja meg ugyanaz az árrendszer. Nyilvánvaló, hogy a termékek és szolgáltatások bármely részét vagy költségét elkülönítve kiszámítható az arányrendszer. Bármely szükséges ráfordítást ezért jogosan az érték „szubsztanciájának” tekinthetünk. Éppen ezért az a helyes, ha az értékarányokat semmilyen szubsztanciával nem azonosítva pusztán a gazdaság mérésére szolgáló, a struktúra egésze által adott mértékrendszernek tekintjük.

Ha például az első sorból leválasztjuk „a tőke” elképzelt ráfordítását, s a szükségesnek mutatkozó tőkét egy másik B mátrixban szerepeltetjük, akkor ennek egyensúlyi mennyiségét kiszámítva, s az A mátrixhoz hozzáadva ismét az $\mathbf{A}$ mátrixhoz jutunk az (5) egyenlet szerint, s ez még csak új értékeket, vagy formát sem ad a feladatnak. E feladat alapján azonban, ezt a ráfordítást külön szektorban szerepeltetve bemutatható, hogy részletezhető (dezaggregálható) az ilyen mátrix. E feladat, mint az összevonás (aggregálás) is csak a sajátvektorok értékeivel súlyozva végezhető el hibátlanul.

Legyen mondjuk a tőkemátrix az áttekintés kedvéért igen egyszerű:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Ehhez társuljon a következő folyó ráfordítási mátrix, ahol a tőkék költségét az eredeti mátrix első sorából vontuk le:

$$A = \begin{bmatrix} .5 & .1 & .2 \\ .3 & .6 & .4 \\ .1 & .2 & .3 \end{bmatrix} .$$

Ekkor nyilvánvalóan évi 5 százalékos egyensúlyi növekedés valósítható meg, és a most már 4 szektoros, tehát a tőke előállítását és elosztását külön, az utolsó sor és oszlop formájában tartalmazó mátrix alakja:

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} .5 & .1 & .2 & .5 \\ .3 & .6 & .4 & .3 \\ .1 & .2 & .3 & .1 \\ .1 & .1 & .1 & .1 \end{bmatrix} .$$

Itt feltettük, hogy a tőkék előállításának technológiája azonos az első szektorban található eljárással. (Persze ez történhet másképpen is, akkor a két elválasztott szektor ráfordításait az összevonáskor a megfelelő egyensúlyi termeléssel kell súlyozni). A bővített mátrix árrendszere azonos, termelési arányai természetesen szintén bővülnek egy új elemmel, amely a tőkék előállításának szükséges egyensúlyi arányát adja meg. Ekkor $\mathbf{x}' = (1.45\ 2\ 1\ 0.55)'$ lesz. Itt, az előbbi sajátvektorral való összehasonlíthatóság érdekében ismét a harmadik szektor értékével normáltuk. Mint látható, az össztermelés (a sajátárak egységnyi értékével összeadva változatlanul 5.5 és a kétfelé osztott első szektor összesen ismét az $1.45 + 0.55 = 2$ értéket veszi fel.

Az árrendszerek ekvivalenciája végső soron abból ered, hogy az áruk költségét zárt rendben elszámolva, az így kiszámítható árrendszer, vagyis mértékrendszer az összes költségtényezőt, tehát bármely költségtényező teljes ráfordítását tükrözi. Az elszámolás teljessége esetén a mátrix legnagyobb sajátértéke egységnyi, és ezért mindig transzformálható a fenti alakra. Tehát a termelés szokásos mértékegységeinek megváltoztatásával mindig a fenti alakra hozható, amelyet szokás úgynevezett „sztochasztikus mátrixnak” is nevezni. Ezért a fenti állítások minden rendben és szabatosan elszámolt zárt gazdasági rendszerre fennállanak.

A tanulmányt két mű idézésével zárom, ezek adták meg a lemma alapgondolatát és formáját. Az első Sraffa (1960) úttörő kritikája a tőke áruformában való mérésének szükségességéről. A második Zalai (2000) összefoglaló műve, amely a modellkör kialakulását és tulajdonságait tárgyalja. E két mű tartalmazza mindazt, ami a fentiek kimondásához szükséges és elégséges.

Irodalom

1. Sraffa, P., *Áruk termelése áruk révén.* KJK, Budapest, 1975. (Angol kiadása 1960-ban jelent meg).
2. Zalai, E., *Matematikai közgazdaságtan.* KJK. KERSZÖV. Budapest, 2000.

EGY HELYETTESÍTŐ TERMÉKEKET GYÁRTÓ KÉT ORSZÁGBAN GYÁRTÓKAPACITÁSSAL RENDELKEZŐ VÁLLALAT OPTIMÁLIS ERŐFORRÁS ALLOKÁCIÓJÁNAK VIZSGÁLATA A DEVIZAÁRFOLYAMOK ÉS A KERESLET FÜGGVÉNYÉBEN STATIKUS VÁRAKOZÁSOK MELLETT[1]

VIZVÁRI BÉLA – DEME ROLAND
ELTE Operációkutatási Tanszék

1 Bevezetés

Manapság egyre több vezető vállalat követi azon módszert, mely arra irányul, hogy a világ minél több országában ott legyen, és ez alatt nem csak termékeik globális jelenlétét értik, hanem azt, hogy maga a termelés is lehetségessé váljon az adott országban. Azért, hogy a piaci versenyben lépést tartsanak egymással, hatalmas nemzetközi gyár-rendszereket alakítanak ki, melyek megfelelő allokációt követően segítséget nyújthatnak a rugalmas termelésre. A másik ok, amiért érdemes a cégeknek az adott országban, esetleg régióban termelniük, az a piacszerzés. A gyártás struktúrája a geográfiailag különböző régiókban hatalmas rugalmasságot ad a cégnek, hogy a devizaárfolyamok jövőbeli változására, a versenytársak stratégiai mozgására, és a kormányzati elgondolásokra reagálhasson. Ezt a rugalmasságot, mint versenyelőnyt használhatja a cég a piaci részesedésének növelésére.

Már a 80-as években foglalkoztak a témával, és Kogut, ill. Kulatilaka [1] eredményei igen meggyőzőek: két országot vizsgálva kiderítették, hogy az egyéni optimalizálás negatív, a csapatmunka pozitív jelenértékhez vezet. Ez utóbbi annak az extra tulajdonságnak köszönhető, hogy a termelést át lehet csoportosítani egyik országból a másikba. Ehhez azonban szükséges a gyárak összehangolása. E témakör sem új terület a SCM-ben, mivel a lánc vertikális összehangolása a gyártó, a terjesztő, a nagy-, és a kiskereskedő között már igen régóta a szakemberek kutatásainak egyik fő iránya, habár a globális láncokra vonatkozó ilyen irányú szakirodalom eléggé gyér.

A fent említett globális vállalatok gyakran alkalmazzák a következő eljárást: néhány termékük gyártását az egyik országból egy másikba telepítik. Példaként gondoljunk csak a hazánkban egy-két éve lezajlott eltelepítési hullámra. Számos tényező játszhat ebben szerepet: a termelés költséghatékonyságának növelése; adózási kedvezmények; esetleg piacszerzés. A jelen dolgozat azt vizsgálja, hogy az országok közti árfolyamok változtatása ceteris

[1] Beérkezett: 2004. április 7. e-mail: roland.deme@eon-hungaria.com.

paribus hogyan befolyásolja az optimális termelési allokációt, vagyis arra szeretne rávilágítani, hogy a kereslet és a devizaárfolyamok függvényében hol optimális termeltetnie a szóban forgó vállalatnak.

A dolgozat első része egy rövid kereslet-vizsgálattal kezdődik, melyre a később bemutatásra kerülő modellben szereplő fogyasztási igény miatt tértek ki a szerzők. E fejezetben azt vizsgálták, hogy egy globális piacon két helyettesítő termék iránti kereslet hogyan határozható meg a minőség és ár, mint paraméterek függvényében.

Fontos megemlíteni, hogy a most bemutatásra kerülő modell az abszolút vásárlóerő paritás (PPP) érvényességéből kiindulva —vagyis a $\frac{p_I^A}{p_{II}^A} = \frac{p_I^B}{p_{II}^B} = v$ feltevéssel— definiálja a két ország devizájának átváltási arányát. A modell egy lineáris program, melyben az egyszerűbb elemezhetősége miatt eltekintünk a szállítási, átállási költségektől, továbbá a termékek szállítási idejétől, vagyis nincs csúszásidő sem.

Mivel a devizaárfolyam változások hatásainak a vizsgálata a cél, ezért a modellben nem szerepelnek olyan, egyébként fontos faktorok, mint az adók, vámok, ill. kvóták. A szakirodalom az effajta feltevést a súrlódásmentes külkereskedelem névvel illeti.

A bemutatásra kerülő modell feladata, hogy segítségével betekintést nyerjünk egy helyettesítő termékeket gyártó globális vállalat átütemezési/áttelepítési döntéseire. Ezen döntéseket a devizaárfolyamok változásának tulajdonítjuk, ami persze egy bizonyos fokú elhanyagolás, mivel számos egyéb, a fentieken kívüli tényező is kihat a döntésekre.

A dolgozat során kimondott tételek bizonyításait az appendix tartalmazza. Ezzel azt szerettük volna elérni, hogy azon olvasók is könnyen eligazodhassanak, akik nem annyira jártasak az operációkutatásban, így nem a kimondott tételek igazolása, sokkal inkább a tartalmuk fogja meg őket. Természetesen azon kedves olvasók, akik mélyebben szeretnék magukat beleásni a tételek gondolatainak valódiságába, a bizonyítások segítségével könnyedén megtehetik ezt.

A dolgozat alapötletét a készletezési témakörben már néhány éve előtérbe kerülő kérdés adta. Több cikk is a globális vállatok készletezési lehetőségeit vizsgálja a devizaárfolyamok tükrében. Ide tartozik Lode Li, Evan L. Porteus, és Hongtao Zhang műve [2], melyben a többországos sztochasztikus gyártó rendszerek optimális irányítási elveit vizsgálják változó feltételek mellett.

Jelen dolgozat újdonságtartalmát az adja, hogy a kérdést a termelés vonatkozásában vizsgálja.

2 Fogyasztói igény

Az alábbiakban a fogyasztók minőség és ár szerinti preferenciája alapján próbáljuk a termékeket vertikálisan megkülönböztetni. Az erre vonatkozó elemzéseket [3, 95–97. oldal] alapján végeztük.

Tegyük fel, hogy egy transznacionális vállalat a vizsgálódásunk tárgya, mely az egyszerűség kedvéért két országban van jelen abban az értelemben, hogy képes termékeit előállítani mindkét államban. Ezt a két országot **I**-gyel és **II**-vel jelöljük. Mindkét ország szabad kereskedelmet folytató kis ország, tehát számukra a termékek ára külső adottság. A vállalat által előállított termékekről a következőket tudjuk: a vállalat kétféle terméket képes előállítani, melyeket jelölje **A** és **B**. Az **A** világpiaci ára az **I.** ország valutájában p^A, a **B** pedig p^B-be kerül. Feltesszük továbbá, hogy **A** minősége egységnyi, **B** minősége pedig $\sigma > 1$. Ez a két termék egymást helyettesítő, ami közgazdaságilag azt jelenti, hogy a fogyasztó azt vásárolja, amelyik számára nagyobb hasznosságérzetet okoz. Ezzel kapcsolatban tegyük fel, hogy mindkét ország fogyasztói a $\Theta * s - p$ hasznosság alapján döntenek: akkor vásárolnak egy darabot az adott termékből, amenyiben ennek hasznossága nemnegatív, és nagyobb minden más potenciális termék hasznosságánál. Itt Θ az adott fogyasztóra jellemző állandó, s jelölje a termék minőségét, p pedig az árát.

1. tétel. *A fenti feltételek mellett két eset lehetséges:*

Első eset: $p^A \leq \frac{p^B}{\sigma} \leq \frac{p^B - p^A}{\sigma - 1}$*:*

- p^A *és* $\frac{p^B - p^A}{\sigma - 1}$ *közötti* Θ*-k esetén csak* **A***-ra van igény;*
- $\frac{p^B - p^A}{\sigma - 1}$*-nél nagyobb* Θ*-kra pedig* **B***-re.*

Második eset: $\frac{p^B - p^A}{\sigma - 1} \leq \frac{p^B}{\sigma} \leq p^A$*:*

Ekkor csupán **B** *után van igény, az is* $\frac{p^B}{\sigma}$ *felett.*

Bizonyítás. A tétel két esetének bizonyítása igen hasonló, így itt csak az elsőt látjuk be. Tegyük fel először, hogy

$$p^A \leq \frac{p^B}{\sigma} \; . \tag{1}$$

Ebből ekvivalens átalakításokkal adódik, hogy:

$$p^B * \sigma - p^B \leq p^B * \sigma - p^A * \sigma \; .$$

Mivel $\sigma > 1$, így $\sigma * (\sigma - 1)$-gyel leosztható a fenti egyenlőtlenség, és máris megkapjuk, hogy:

$$\frac{p^B}{\sigma} \leq \frac{p^B - p^A}{\sigma - 1} \; .$$

A fogyasztó akkor vásárolja az **A** terméket, ha ennek hasznossága nemnegatív és magasabb, mint **B**-é, azaz

$$\Theta * 1 - p^A \geq 0 \quad \text{és} \quad \Theta * 1 - p^A > \Theta * \sigma - p^B \; ,$$

ahonnan

$$\Theta \geq p^A \quad \text{és} \quad \Theta < \frac{p^B - p^A}{\sigma - 1} \; ,$$

mivel $\sigma > 1$.

A p^A-nál kisebb Θ értékekkel rendelkező fogyasztók nem vesznek semmit, mivel számukra mindkét termék hasznossága negatív. Az ennél nagyobb, de $\frac{p^B-p^A}{\sigma-1}$-nál kisebb értékek esetén **A**-ra van igény, mivel itt a **B** hasznossága negatív. Végül az e fölötti Θ-val rendelkező fogyasztók számára a **B** a hasznosabb termék, így ezt vásárolják. Ezzel bebizonyítottuk a tétel első esetét.

Másfelől, amikor is (1) ellentéte áll fenn, hasonló gondolkodással kaphatjuk a tétel második esetét. ■

1. megjegyzés. *A második esetben, azaz amikor* $\frac{p^B-p^A}{\sigma-1} \leq \frac{p^B}{\sigma} \leq p^A$, *az* **A** *utáni kereslet zérus, a* **B** *utáni pedig* $N * \left(1 - F(\frac{p^B}{\sigma})\right)$, *ahol* $F(\cdot)$ *a* Θ *eloszlásfüggvénye, és* N *a piacon a potenciális vásárlók száma.*

E megjegyzés szerint kéttermékes modellünk a második esetben egytermékessé fajul, így a továbbiakban feltételezzük, hogy a fenti tétel első esete áll fenn, azaz $p^A \leq \frac{p^B}{\sigma} \leq \frac{p^B-p^A}{\sigma-1}$. Ekkor az alábbi tétel egyszerűen adódik az előző tételből az eloszlásfüggvények definíciójának segítségével.

2. tétel. *Legyen a* Θ *eloszlásfüggvénye* $F(\cdot)$, *a piacon a potenciális vásárlók száma pedig* N. *Ekkor a piacon a termékek iránti kereslet:*

- $D^{\mathbf{A}} = N * \left(F(\frac{p^B-p^A}{\sigma-1}) - F(p^A)\right)$,
- $D^{\mathbf{B}} = N * \left(1 - F(\frac{p^B-p^A}{\sigma-1})\right)$.

A fenti tétel egy általános piacra vonatkozott, viszont a mi modellünk országokat vizsgál. Ezen ok miatt két lépésben átalakítottuk a tételt, először egy, majd két országot vizsgálva.

Először jelölje N egy bizonyos ország lakosainak számát. Akkor lesz az ország összes állampolgára potenciális vásárló, ha a piac teljesen lefedi ezen országot. Amennyiben ez a feltétel teljesül, akkor az $F(\cdot)$ eloszlásfüggvény az ország lakosainak preferenciáját írja le.

Tegyük most fel, hogy ismét a két országot vizsgáljuk. Az **I**-ben N, a **II**-ban M lakos él. Mindkét országot teljes mértékben lefedi a piac, vagyis az összes lakos potenciális vásárló.

Amennyiben nincs eltérés a két ország lakosaira jellemző Θ-k eloszlásfüggvényében, akkor a 2. tétel szerint a termékek iránti globális kereslet:

$$D^A = (N+M) * \left(F\left(\frac{p^B - p^A}{\sigma - 1}\right) - F(p^A)\right)$$
$$D^B = (N+M) * \left(1 - F\left(\frac{p^B - p^A}{\sigma - 1}\right)\right)$$

Itt $F(\cdot)$ a közös eloszlásfüggvény. A fenti feltételezés —miszerint nincs eltérés az országok preferenciái között— azonban igen ritkán igaz, mivel az eltérő életszínvonal, és a kulturális különbségek miatt a szóban forgó eloszlásfüggvények igen eltérőek lehetnek.

2. megjegyzés. *Jelölje az* **I.** *ország lakosainak hasznosságérzetét meghatározó paraméter eloszlásfüggvényét* $F_I(\cdot)$, *a* **II.** *országbeliekét pedig* $F_{II}(\cdot)$. *Ekkor a termékek iránti globális kereslet:*

$$D^A = N * \left(F_I(\frac{p^B - p^A}{\sigma - 1}) - F_I(p^A) \right) + M * \left(F_{II}(\frac{p^B - p^A}{\sigma - 1}) - F_{II}(p^A) \right)$$

$$D^B = N * \left(1 - F_I(\frac{p^B - p^A}{\sigma - 1}) \right) + M * \left(1 - F_{II}(\frac{p^B - p^A}{\sigma - 1}) \right)$$

3 Gyártás

Most azt fogjuk vizsgálni, hogy milyen stratégiát kell a vállalatnak követnie, ha figyelembe vesszük a két ország közötti devizaárfolyamot. Célunk ezen paraméter optimális termelési szintekre gyakorolt hatásának vizsgálata. Jelölje tehát v az **I.** és a **II.** ország valutáinak átváltási arányát. A most bemutatott modell e paraméter függvényében határozza meg a maximális profitot.

A cég termeléséről a következőket tudjuk: a cég mindkét országban képes előállítani mindkét termékét. Az **I.** és a **II.** országban az **A** ill. a **B** előállításának költsége az adott ország valutájában kifejezve: $p_I^A, p_I^B, p_{II}^A, p_{II}^B$, egy termék előállításához $c_I^A, c_I^B, c_{II}^A, c_{II}^B$ kapacitásra van szükség. Tudjuk, hogy az országokban a gyáraknak kapacitáskorlátai a következők: C_I, C_{II}. A termékek eladási ára az **I.** ország valutájában: p^A ill. p^B. Tegyük fel, hogy a vállalat célja a profitmaximalizálás. Meg kell határozni, hogy mennyit termeljen a vállalat az egyes gyárakban a termékekből. Jelölje ezeket: x_I^A, x_I^B, x_{II}^A, x_{II}^B.

Tehát az alábbi paraméteres lineáris programot kell megoldani:

$$\begin{array}{ccccccccc}
x_I^A & + & x_{II}^A & & & & & = D^A \\
 & & & & x_I^B & + & x_{II}^B & = D^B \\
c_I^A * x_I^A & + & & & c_I^B * x_I^B & & & \leq C_I \\
 & & c_{II}^A * x_{II}^A & + & & & c_{II}^B * x_{II}^B & \leq C_{II}
\end{array}$$

$$x_I^A, x_I^B, x_{II}^A, x_{II}^B \geq 0$$

$$\max \left[(p^A - p_I^A) * x_I^A + (p^A - v * p_{II}^A) * x_{II}^A + \right.$$
$$\left. + (p^B - p_I^B) * x_I^B + (p^B - v * p_{II}^B) * x_{II}^B \right]$$

Jelölje ezen feladatot (LP). A feltételek felhasználásával a célfüggvény az alábbi alakba transzformálható:

$$p^A * D^A + p^B * D^B - \min \left[p_I^A * x_I^A + p_I^B * x_I^B + v * p_{II}^A * x_{II}^A + v * p_{II}^B * x_{II}^B \right]$$

A feladatot megoldhatóság szempontjából három fő részre bonthatjuk, aszerint, hogy az (LP) feltételei között szereplő két egyenlőtlenség az optimális megoldásban éles-e vagy sem:

1. Mindkét egyenlőtlenség élesen teljesül, vagyis mindkét országban túl nagy a termelőképesség.

2. Egyik egyenlőtlenség egyenlőséggel teljesül, a másik nem, ez pedig azt jelenti, hogy az egyik ország teljes kapacitáson termel, a másik pedig nem használja ki termelő lehetőségeit.

3. Mindkét egyenlőtlenség egyenlőséggel teljesül, azaz mindkét gyár teljes kapacitáson működik.

Az elkövetkező tételek bizonyításait együtt közöljük a dolgozat végi mellékletben.

3.1 Mindkét országban túl nagy a kapacitás

Most azzal a feltételezéssel élünk, hogy optimális esetben mindkét gyárnak marad ki nem használt kapacitása. Ebben az esetben a kapacitáskorlátokat egyik gyárban sem éri el a termelés. Az (LP) ekkor az alábbi alakú:

$$\begin{array}{ccccccccc}
x_I^A & + & x_{II}^A & & & & & = & D^A \\
& & & & x_I^B & + & x_{II}^B & = & D^B \\
c_I^A * x_I^A & + & & & c_I^B * x_I^B & & & < & C_I \\
& & c_{II}^A * x_{II}^A & + & & & c_{II}^B * x_{II}^B & < & C_{II}
\end{array}$$

$$x_I^A, x_I^B, x_{II}^A, x_{II}^B \geq 0$$

$$p^A * D^A + p^B * D^B - \min\left[p_I^A * x_I^A + p_I^B * x_I^B + v * p_{II}^A * x_{II}^A + v * p_{II}^B * x_{II}^B\right]$$

Ekkor az optimális megoldása mindig a paramétertől függ, mint ahogy a következőkből ki is derül. Fontos megjegyezni, hogy ekkor, az elegendő rendelkezésre álló kapacitás miatt, az optimális megoldások attól függnek, hogy hol éri meg jobban termelni az egyes terméket.

Nyilvánvaló tény, hogy adott a és b valós szám esetén fennáll a trihotómia, vagyis: $a = b$, vagy $a < b$, vagy $a > b$. Az első esetben a számok a számegyenest két, a második és hamadik esetben pedig három részre bontják.

Legyen most $a = \frac{p_I^A}{p_{II}^A}$, és $b = \frac{p_I^B}{p_{II}^B}$. A fenti gondolatmenetet figyelembe véve az (LP) optimális megoldásairól a következő tételsorozat mondható ki.

A tételek lefedik azon eseteket, melyek a fenti rendszer megoldásai lehetnek. Azt mutatják be, hogy éppen hol éri meg a termékeket gyártani. Az alábbi négy eset közül egy adott feladatnál a következők alapján lehet a megfelelőt kiválasztani:

Amennyiben a devizaárfolyam nem kisebb $\frac{p_I^A}{p_{II}^A}$ és $\frac{p_I^B}{p_{II}^B}$ maximumánál, ill. nem nagyobb a minimumuknál, akkor egyszerűen kiválasztható a megfelelő tétel (3. ill. 6.). Viszont, amikor az árfolyam az egyiknél kisebb, de a másiknál nagyobb, akkor meg kell vizsgálni, hogy $\frac{p_I^A}{p_{II}^A} > \frac{p_I^B}{p_{II}^B}$, vagy $\frac{p_I^A}{p_{II}^A} < \frac{p_I^B}{p_{II}^B}$.

Miután ezt eldöntöttük, már meg is van, hogy melyik esetet kell alkalmazni (4. ill. 5.).

3. tétel. *Ha* $v \geq \max\left(\frac{p_I^A}{p_{II}^A}; \frac{p_I^B}{p_{II}^B}\right)$ *és* $C_I > D^A * c_I^A + D^B * c_I^B$, *akkor*

$$x_I^A = D^A\,, \quad x_{II}^A = 0\,, \quad x_I^B = D^B\,, \quad x_{II}^B = 0\,.$$

A fenti első feltétel szerint a deviza átváltási aránya nagyobb mind az **A**, mind a **B** termék előállításának relatív költséghányadánál. Ez annyit tesz, hogy olcsóbb mindkét terméket az első országban legyártani, és a szükséges mennyiséget a másik országba átszállítani. A második feltétel azt garantálja, hogy a gyártást a kapacitások lehetővé tegyék.

4. tétel. $\frac{p_I^A}{p_{II}^A} \geq v \geq \frac{p_I^B}{p_{II}^B}$, $C_I > D^B * c_I^B$ *és* $C_{II} > D^A * c_{II}^A$*:*

$$x_I^A = 0\,, \quad x_{II}^A = D^A\,, \quad x_I^B = D^B\,, \quad x_{II}^B = 0\,.$$

Az **A** terméket a **II.** országban, a **B** terméket az **I.** országban lehet gazdaságosabban termelni, feltéve, hogy a kapacitások megfelelőek.

5. tétel. $\frac{p_I^B}{p_{II}^B} \geq v \geq \frac{p_I^A}{p_{II}^A}$, $C_I > D^A * c_I^A$ *és* $C_{II} > D^B * c_{II}^B$*:*

$$x_I^A = D^A\,, \quad x_{II}^A = 0\,, \quad x_I^B = 0\,, \quad x_{II}^B = D^B\,.$$

A **B** terméket a **II.** országban, az **A** terméket az **I.** országban termeli, feltéve, hogy a kapacitások megfelelőek.

6. tétel. $v \leq \min\left(\frac{p_I^A}{p_{II}^A}; \frac{p_I^B}{p_{II}^B}\right)$ *és* $C_{II} > D^A * c_{II}^A + D^B * c_{II}^B$*:*

$$x_I^A = 0\,, \quad x_{II}^A = D^A\,, \quad x_I^B = 0\,, \quad x_{II}^B = D^B\,.$$

Ez annyit tesz, hogy amennyiben a devizaárfolyam rosszabb, mint a termékek relatív termelési önköltségei az egyes országokban, akkor a jobb feltételekkel rendelkező **II.** országban termeli meg az összes termékét, amennyiben ezt a kapacitások megengedik.

3.2 Egyik országban teljes kapacitáson folyik a termelés, a másikban nem

Mivel a feladatban nincs kitüntetett szerepe egyik országnak sem, így elég azt az esetet vizsgálni, amikor az **I.** ország nem termel teljes kapacitáson, de a **II.** igen. Most szét kell választani a fejezetet, mivel itt elképzelhető degenerált eset is.

3.2.1 Normál eset

Ebben az esetben a paramétertől függően az alábbi négy tétel egyike áll fenn:

7. tétel. *Ha* $\left(\frac{c_{II}^B}{c_{II}^A} * p_I^A - p_I^B\right) \le v * \left(\frac{c_{II}^B}{c_{II}^A} * p_{II}^A - p_{II}^B\right)$, $\frac{p_I^B}{p_{II}^B} \ge v$, *és* $C_I + \frac{c_I^A}{c_{II}^A} * C_{II} > c_I^A * D^A + c_I^B * D^B$:

$$x_I^A = D^A\,, \qquad x_I^B = D^B - \frac{C_{II}}{c_{II}^B} \ge 0\,,$$
$$x_{II}^A = 0\,, \qquad x_{II}^B = \frac{C_{II}}{c_{II}^B}\,.$$

A második feltétel azt jelenti, hogy a **B**-t jobban megéri a **II.** országban előállítani. Az első feltétel igen bonyolultnak tűnhet. A lényege az, hogy a **II.** országnak komparatív előnye van a **B** termék előállításában. A cég itteni gyára tehát teljes mértékben a **B** gyártására specializálódik. Itt viszont a kapacitáskorlát miatt nem lehet elegendő mennyiséget előállítani. A maradékot az **I.** országban készítik el. Világos, hogy ebben az esetben az **A** termék iránti keresletet teljes egészében az **I.** országbeli gyár elégíti ki. A harmadik feltétel azt biztosítja hogy az **I.** ország nem termel teljes kapacitáson.

8. tétel. *Ha* $\left(\frac{c_{II}^B}{c_{II}^A} * p_I^A - p_I^B\right) \ge v * \left(\frac{c_{II}^B}{c_{II}^A} * p_{II}^A - p_{II}^B\right)$, $\frac{p_I^B}{p_{II}^B} \ge v$, *és* $C_I + \frac{c_I^B}{c_{II}^B} * C_{II} > c_I^B * \frac{c_{II}^A}{c_{II}^B} * D^A + c_I^B * D^B$:

$$x_I^A = 0\,, \qquad x_I^B = D^B - \frac{C_{II} - D^A * c_{II}^A}{c_{II}^B} \ge 0\,,$$
$$x_{II}^A = D^A\,, \qquad x_{II}^B = \frac{C_{II} - D^A * c_{II}^A}{c_{II}^B} \ge 0\,.$$

Az előző tétel alapján könnyen kitalálható a két feltétel lényege: az **II.** országnak komparatív előnye van a **A** termék előállításában. Tehát itt termelik a teljes **A** mennyiséget, és a megmaradó kapacitás erejéig **B**-t is, mivel a **B**-t is jobban megéri a **II.** országban előállítani. A megmaradó **B** terméket az **I.** gyárban készítik el.

9. tétel. *Ha* $\left(\frac{c_{II}^B}{c_{II}^A} * p_I^A - p_I^B\right) \le v * \left(\frac{c_{II}^B}{c_{II}^A} * p_{II}^A - p_{II}^B\right)$, $\frac{p_I^A}{p_{II}^A} \ge v$, *és* $C_I + \frac{c_I^A}{c_{II}^A} * C_{II} > c_I^A * D^A + c_I^A * \frac{c_{II}^B}{c_{II}^A} * D^B$:

$$x_I^A = D^A - \frac{C_{II} - D^B * c_{II}^B}{c_{II}^A} \ge 0\,, \qquad x_I^B = 0\,,$$
$$x_{II}^A = \frac{C_{II} - D^B * c_{II}^B}{c_{II}^A} \ge 0\,, \qquad x_{II}^B = D^B\,.$$

Itt egy az egyben lehet alkalmazni a 7. tételben elmondottakat, csak az **A** termék helyett **B**-t, az **I.** ország helyett **II.**-at kell venni, és fordítva.

10. tétel. *Ha* $\left(\frac{c_{II}^B}{c_{II}^A} * p_I^A - p_I^B\right) \geq v * \left(\frac{c_{II}^B}{c_{II}^A} * p_{II}^A - p_{II}^B\right)$, $\frac{p_I^A}{p_{II}^A} \geq v$, *és* $C_I + \frac{c_I^A}{c_{II}^A} * C_{II} > c_I^A * D^A + c_I^B * D^B$:

$$x_I^A = D^A - \frac{C_{II}}{c_{II}^A} \geq 0\,, \qquad x_I^B = D^B\,,$$
$$x_{II}^A = \frac{C_{II}}{c_{II}^A}\,, \qquad x_{II}^B = 0\,.$$

Ez az eset pedig a 8. tétel hasonmása. (A termékek és az országok megcserélése itt is elengedhetetlen.)

3. megjegyzés. *A fenti tételeknél persze elengedhetetlen, hogy megköveteljük a megoldások nemnegativitását a megengedettséghez. A tételek elején a két feltétel a megoldások optimalitási feltétele.*

3.2.2 Degenerált eset

Ebben az esetben az (LP) feltételrendszere speciális alakú (lásd Appendix), és ennek következtében az optimális megoldások módosulnak. Mivel most az **I.** ország nem termel teljes kapacitáson, így az optimális esetekről a 2.1 pont azon tételeinek hasonmásait lehet kimondani, amelyekben szerepel a C_{II} kapacitáskorlátra vonatkozó feltétel. A tételek úgy módosulnak, hogy az ottani C_{II} kapacitáskorlátra vonatkozó feltételek itt egyenlőséggel kell, hogy teljesüljenek, a tételek többi része változatlan.

Természetesen, ha a szimmetrikus eset áll fenn, vagyis **I.** ország termel teljes kapacitáson, és a **II.** ország nem, akkor a 2.1 pont tételeiben a C_I kapacitáskorláthoz tartozó feltételek teljesülnek egyenlőséggel.

3.3 Teljes kapacitáskihasználás mindkét országban

Ebben az alfejezetben végig azzal a feltételezéssel élünk, hogy mindkét gyár teljes kapacitáson működik optimálisan. Ekkor az eredeti paraméteres lineáris program feltételei az optimális megoldásban az alábbi egyenletrendszerbe mennek át:

$$\begin{array}{ccccccccl}
x_I^A & + & x_{II}^A & & & & & & = D^A \\
 & & & & x_I^B & + & x_{II}^B & & = D^B \\
c_I^A * x_I^A & + & & & c_I^B * x_I^B & & & & = C_I \\
 & & c_{II}^A * x_{II}^A & + & & & c_{II}^B * x_{II}^B & & = C_{II}
\end{array}$$

Az alábbi tételből jól látható, hogy az egyenletrendszer igen sokféleképpen viselkedhet.

11. tétel. *A fenti egyenletrendszer megoldhatóságáról az alábbiakat mondhatjuk:*

1. *Mindig egyértelmű a megoldása, ha* $\frac{c_I^A}{c_{II}^A} \neq \frac{c_I^B}{c_{II}^B}$.

2. *Amennyiben* $\frac{c_I^A}{c_{II}^A} = \frac{c_I^B}{c_{II}^B}$ *áll fenn, akkor két eset lehetséges:*

   a) *Végtelen sok megoldás van, ha fennáll a* $\frac{C_I}{c_I^B} + \frac{C_{II}}{c_{II}^B} = D^B + \frac{c_I^A}{c_I^B} * D^A$ *azonosság;*

   b) *Amennyiben a* $\frac{C_I}{c_I^B} + \frac{C_{II}}{c_{II}^B} = D^B + \frac{c_I^A}{c_I^B} * D^A$ *feltétel nem teljesül, akkor nincs megoldás.*

3.3.1 Egyértelmű megoldhatóság esete

Most egy rövid időre vizsgáljuk meg a fenti tétel 1. esetét, vagyis amikor $\frac{c_I^A}{c_{II}^A} \neq \frac{c_I^B}{c_{II}^B}$. Ez a feltétel a komparatív előnyök létezését biztosítja. Ekkor a fenti tétel szerint egyértelmű az egyenletrendszer megoldása.

12. tétel. *Az egyenletrendszer egyértelmű megoldhatósága esetén a megoldások a következő alakúak:*

$$x_I^A = \frac{c_{II}^A * c_I^B * D^A + c_I^B * c_{II}^B * D^B - C_I * c_{II}^B - C_{II} * c_I^B}{c_{II}^A * c_I^B - c_I^A * c_{II}^B}$$

$$x_{II}^A = \frac{C_I * c_{II}^B + C_{II} * c_I^B - c_I^A * c_{II}^B * D^A - c_I^B * c_{II}^B * D^B}{c_{II}^A * c_I^B - c_I^A * c_{II}^B}$$

$$x_I^B = \frac{c_{II}^A * C_I + c_I^A * C_{II} - c_I^A * c_{II}^A * D^A - c_I^A * c_{II}^B * D^B}{c_{II}^A * c_I^B - c_I^A * c_{II}^B}$$

$$x_{II}^B = \frac{c_I^A * c_{II}^A * D^A + c_{II}^A * c_I^B * D^B - c_{II}^A * C_I - c_I^A * C_{II}}{c_{II}^A * c_I^B - c_I^A * c_{II}^B} .$$

Az eredeti (LP) megoldásairól az előző tétel segítségével az alábbiak mondhatók:

13. tétel. *Az előző tétel egyértelmű megoldásainak megengedettségéhez az* $x_{II}^A, x_{II}^A, x_I^B, x_{II}^B \geq 0$ *feltételek szükségesek. A megengedett megoldások optimalitásához pedig a paraméterre kell fennállnia az alábbi egyenlőtlenségeknek:*

$$\frac{\left(\frac{p_I^A}{c_{II}^A} - \frac{p_I^B}{c_{II}^B}\right) - v * \left(\frac{p_{II}^A}{c_{II}^A} - \frac{p_{II}^B}{c_{II}^B}\right)}{c_{II}^A * c_I^B - c_I^A * c_{II}^B} \geq 0 ,$$

$$\frac{\left(\frac{p_I^A}{c_I^A} - \frac{p_I^B}{c_I^B}\right) - v * \left(\frac{p_{II}^A}{c_I^A} - \frac{p_{II}^B}{c_I^B}\right)}{c_{II}^A * c_I^B - c_I^A * c_{II}^B} \geq 0 .$$

4. megjegyzés. *A megoldások nemnegativitása garantálja a megengedettséget. A paraméterre vonatkozó feltételek a lineáris programoknál szokásos optimalitási feltételeknek felelnek meg.*

3.3.2 A nem egyértelmű megoldhatóság esete

Amennyiben a 11. tétel 2. esete áll fenn, akkor biztos, hogy az egyenletrendszernek nincs egyértelmű gyöke. Ennek ellenére még ebben az esetben is lehet megoldás, de ehhez további feltételre ($\frac{C_I}{c_I^B}+\frac{C_{II}}{c_{II}^B} = D^B+\frac{c_I^A}{c_I^B}*D^A$) van szükség. E feltétel teljesülése esetén a két termék országonkénti alternatív költségei azonosak, azaz egyik országbeli gyárnak sincs komparatív előnye egyik termék termelésében sem. Vagyis akárhogyan eloszthatják a termelést, az mindig jó megoldás lesz, de nem feltétlenül optimális. A megoldhatóság egyetlen követelménye tehát, hogy pontosan akkora kapacitás álljon rendelkezésre a termékek gyártásához, amekkora a keresletük. Ennek magyarázata az, hogy mivel a két termék alternatív költsége azonos, ezért elég a **B** terméket használni: egy **A** legyártásával egyenértékű $\frac{c_I^A}{c_I^B}$ darab **B** készítése. Ebből következik, hogy az összkereslet $D^B + \frac{c_I^A}{c_I^B} * D^A$ a **B** termékben számolva. A termék kínálata pedig a két gyár maximális kapacitásösszege a **B** termékből, azaz: $\frac{C_I}{c_I^B} + \frac{C_{II}}{c_{II}^B}$.

Ami az (LP) optimális megoldásait illeti, már kicsit bonyolultabb a helyzet, mivel ekkor a paraméter függvényében több eset is fennállhat.

Érdekességként vizsgáljuk meg két speciális esetet.

Elsőként, amikor a $\frac{C_I}{c_I^B} + \frac{C_{II}}{c_{II}^B} = D^B + \frac{c_I^A}{c_I^B} * D^A$ feltétel a $\frac{C_I}{c_I^B} = D^B$, és a $\frac{C_{II}}{c_{II}^A} = D^A$ együttes fennálltával teljesül.

Másodsorban, amikor a $\frac{C_I}{c_I^B} + \frac{C_{II}}{c_{II}^B} = D^B + \frac{c_I^A}{c_I^B} * D^A$ feltétel a $\frac{C_I}{c_I^A} = D^A$, és a $\frac{C_{II}}{c_{II}^B} = D^B$ együttes fennálltával teljesül.

Végezetül vizsgáljuk meg a $\frac{C_I}{c_I^B} + \frac{C_{II}}{c_{II}^B} \neq D^B + \frac{c_I^A}{c_I^B} * D^A$ esetet. Mivel a termékek alternatív költségei továbbra is azonosak, így itt sem lehet megkülönböztetni őket, ekkor a teljes kapacitáskihasználás feltétele pontosan megszabja a termelendő mennyiséget, ami a fenti feltétel miatt nem egyezik meg az összkereslettel. Most tehát nem állhat fenn a kereslet és a kínálat egyensúlya, mivel, ha az összkereslet kevesebb a rendelkezésre álló összkapacitásnál, akkor az optimális megoldás a 2.1 ill. a 2.2 pontok valamelyikében található meg; amennyiben viszont az összkereslet meghaladja a vállalat kapacitását, akkor a feladatnak nincs megoldása.

4 Összefoglalás

A dolgozat egy globális, többtermékes vállalat termelés-allokációs döntéseinek bemutatását szerette volna megvilágítani. A felvázolt modell egy két országban termelőkapacitással rendelkező, és két helyettesítő terméket gyártó céget vizsgált. A vizsgálat alapja a rendelkezésre álló kapacitások kihasználtságán alapult. Külön-külön elemezte a mindkét országbeli teljes kihasználtságot, megvizsgálta azt az esetet, amikor csak az egyik ország kapacitásait használják ki maximálisan, és kitért arra amikor mindkét országban csupán a teljes kapacitások egy részét kötik le.

A modell, ami az elemzés alapját szolgáltatta egyszerűsége miatt egyfelől pontosan megfelelt a szerzők elvárásainak, mivel segítségével könnyen bepillantást lehetett nyerni az optimális termelés összetételébe. Másfelől a modell egyszerűsége mutathat irányt a további kutatásoknak. Számos irányban el lehet indulni a modell bővítését megcélozva. Az első —talán legkézenfekvőbb út— az országok, a termékek, ill. az egy országban található gyárak számának növelése. Természetesen ekkor az eredmények, bár továbbra is a lineáris programozás elméletén alapulnak, formailag sokkal bonyolultabbak lennének. Egy másik lehetőség lehet a modell feltételei közül néhány relaxálása. Az így kapott módosult feltételrendszer vizsgálata szintén elképzelhető kutatási terület lehet. Végezetül megemlíthető az a terület, ami talán a legérdekesebb. Az egyszerre több faktorral operáló modell vizsgálata, vagyis amikor az árfolyamon kívül még néhány befolyásoló tényezőt (adók, bérek stb.) építünk bele a modellbe. Ezen lehetőség azért is érdekes, mivel így a több tényező együttes hatását lehetne vizsgálni, ami jobban közelítené a valós helyzetet.

5 Appendix

Most az (LP) szimplex algoritmus szerinti optimális megoldásainak vizsgálata segítségével bebizonyítjuk a második fejezet összes tételét. Emlékeztetőül álljon itt az eredeti feladat:

$$\begin{array}{ccccccccc} x_I^A & + & x_{II}^A & & & & & = D^A & (2) \\ & & & & x_I^B & + & x_{II}^B & = D^B & (3) \\ c_I^A * x_I^A & + & & & c_I^B * x_I^B & & & \le C_I & (4) \\ & & c_{II}^A * x_{II}^A & + & & & c_{II}^B * x_{II}^B & \le C_{II} & (5) \end{array}$$

$$x_I^A, x_I^B, x_{II}^A, x_{II}^B \ge 0$$

$$p^A * D^A + p^B * D^B - \min\left[p_I^A * x_I^A + p_I^B * x_I^B + v * p_{II}^A * x_{II}^A + v * p_{II}^B * x_{II}^B\right]$$

Legyenek $u_1$és u_2 segédváltozók. Előbbi a (4), míg utóbbi az (5) feltételt egészíti ki egyenlőséggé. A két módosított feltétel tehát:

$$c_I^A * x_I^A + c_I^B * x_I^B + u_1 = C_I \tag{4'}$$

$$c_{II}^A * x_{II}^A + c_{II}^B * x_{II}^B + u_2 = C_{II} \tag{5'}$$

Mivel négy feltétel és hat változó van, és mivel a feltételek lineárisan függetlenek, így az optimális bázis négy változós lesz. Az egyes változókhoz tartozó vektorokat jelölje: $\mathbf{x}_I^A$, $\mathbf{x}_{II}^A$, $\mathbf{x}_I^B$, $\mathbf{x}_{II}^B$, $\mathbf{u}_1$, és $\mathbf{u}_2$.

b	x_I^A	x_{II}^A	x_I^B	x_{II}^B	u_1	u_2
D^A	1	1	0	0	0	0
D^B	0	0	1	1	0	0
C_I	c_I^A	0	c_I^B	0	1	0
C_{II}	0	c_{II}^A	0	c_{II}^B	0	1

Kezdjük vizsgálatunkat a 2.1 ponttal. Ekkor egyik gyár sem termel teljes kapacitáson, vagyis mind (4), mind (5) szigorú egyenlőtlenséggel teljesül. Ez azt jelenti, hogy mindkét segédváltozó értéke pozitív. Egy változónak a megoldásban viszont csak akkor lehet pozitív értéke, ha benne van a bázisban. Ebben az esetben tehát mind $\mathbf{u}_1$-nek, mind $\mathbf{u}_2$-nek szerepelnie kell a bázisban.

A változókat vizsgálva az alábbi bázisok jöhetnek szóba:

$$\mathbf{B}_1 = \{\, \mathbf{x}_I^A,\ \mathbf{x}_I^B,\ \mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2 \,\}, \qquad \mathbf{B}_2 = \{\, \mathbf{x}_I^A,\ \mathbf{x}_{II}^B,\ \mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2 \,\},$$

$$\mathbf{B}_3 = \{\, \mathbf{x}_{II}^A,\ \mathbf{x}_I^B,\ \mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2 \,\}, \qquad \mathbf{B}_4 = \{\, \mathbf{x}_{II}^A,\ \mathbf{x}_{II}^B,\ \mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2 \,\}.$$

Mivel mind a négy bázisra ugyanúgy megy a számolás, így most csak $\mathbf{B}_1$-re nézzük végig a módszert, a többi vizsgálata hasonlóan adódik. Szükségünk van a $\mathbf{B}_1^{-1} * \mathbf{b}$ szorzatra, mivel ez adja vissza a bázisbeli változók értékét. A $\mathbf{b}$ már ismert, a $\mathbf{B}_1^{-1}$ pedig a következő:

$$\mathbf{B}_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -c_I^A & -c_I^B & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ezek alapján a megoldás:

$$x_I^A = D^A, \qquad x_{II}^A = 0, \qquad x_I^B = D^B, \qquad x_{II}^B = 0,$$

$$u_1 = C_I - D^A * c_I^A - D^B * c_I^B, \qquad u_2 = C_{II}.$$

Mivel a változók nemnegatívak, sőt a segédváltozók pozitívak, így szükséges a $C_I - D^A * c_I^A - D^B * c_I^B > 0$ feltétel.

Ez a megoldás akkor lesz optimális, ha a bázison kívüli változókra teljesül, hogy a bázisbeli koordinátáikat ($\mathbf{d}_{II}^A = \mathbf{B}_1^{-1} * \mathbf{x}_{II}^A$, $\mathbf{d}_{II}^B = \mathbf{B}_1^{-1} * \mathbf{x}_{II}^B$) skalárisan szorozva a bázisváltozók célfüggvénybeli együtthatóikkal ($\mathbf{c}^{B_1}$), nem kisebb értéket kapunk, mint az adott változók célfüggvénybeli együtthatói ($\mathbf{c}^{\mathbf{x}_{II}^A}$, ill. $\mathbf{c}^{\mathbf{x}_{II}^B}$):

$$\mathbf{d}_{II}^{A\,T} * \mathbf{c}^{B_1} = -p_I^A \geq \mathbf{c}^{x_{II}^A} = -v * p_{II}^A,$$

$$\mathbf{d}_{II}^{B\,T} * \mathbf{c}^{B_1} = -p_I^B \geq \mathbf{c}^{x_{II}^B} = -v * p_{II}^B.$$

A v paramétert kifejezve e két egyenlőtlenségből, a $v \geq \max\left(\frac{p_I^A}{p_{II}^A}; \frac{p_I^B}{p_{II}^B}\right)$ feltételhez jutunk. Ezzel igazoltuk a *3. tételt.* Amint azt fent elmondtuk a *4.*, *5.*, és *6. tételek* bizonyítása ez alapján könnyen elvégezhető.

A 2.2 pontban szimmetriai okok miatt azt az esetet vizsgáltuk, amikor az **I.** országban nem termelnek teljes kapacitáson, a **II.**-ban viszont igen. Ez a változók szempontjából azt jelenti, hogy $\mathbf{u}_1$ biztosan pozitív értékkel szerepel a bázisban, ezzel szemben $\mathbf{u}_2$-ről csak azt tudjuk, hogy értéke nulla.

Először nézzük végig azt az esetet, amikor az $\{\,\mathbf{x}_I^A,\ \mathbf{x}_{II}^A,\ \mathbf{x}_I^B,\ \mathbf{x}_{II}^B,\ \mathbf{u}_1\,\}$ vektorrendszer rangja négy, azaz e rendszerből egy vektort elhagyva bázist kapunk. Ekkor tehát $\mathbf{u}_2$ bázison kívüli. Az $\mathbf{u}_1$ értéke pozitív a 2.2 pontban, így mindegyik bázisban benne van. Négy lehetséges bázis van:

$$\mathbf{B}_5 = \{\,\mathbf{x}_I^A,\ \mathbf{x}_{II}^A,\ \mathbf{x}_I^B,\ \mathbf{u}_1\,\}\,, \qquad \mathbf{B}_6 = \{\,\mathbf{x}_I^A,\ \mathbf{x}_{II}^A,\ \mathbf{x}_{II}^B,\ \mathbf{u}_1\,\}\,,$$

$$\mathbf{B}_7 = \{\,\mathbf{x}_I^A,\ \mathbf{x}_I^B,\ \mathbf{x}_{II}^B,\ \mathbf{u}_1\,\}\,, \qquad \mathbf{B}_8 = \{\,\mathbf{x}_{II}^A,\ \mathbf{x}_I^B,\ \mathbf{x}_{II}^B,\ \mathbf{u}_1\,\}\,.$$

Most csak $\mathbf{B}_5$-re nézzük végig a módszert, a többi vizsgálata hasonlóan adódik. Szükségünk van a $\mathbf{B}_5^{-1} * \mathbf{b}$ szorzatra, mivel ez adja vissza a bázisbeli változók értékét. A $\mathbf{b}$ már ismert, a $\mathbf{B}_5^{-1}$ pedig a következő:

$$\mathbf{B}_5^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{c_{II}^A} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{c_{II}^A} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -c_I^A & -c_I^B & 1 & \frac{c_I^A}{c_{II}^A} \end{pmatrix}$$

Ezek alapján a megoldás:

$$x_I^A = D^A - \frac{C_{II}}{c_{II}^A} \geq 0, \qquad x_{II}^A = \frac{C_{II}}{c_{II}^A}, \qquad x_I^B = D^B, \qquad x_{II}^B = 0\,.$$

$$u_1 = C_I + \frac{c_I^A}{c_{II}^A} * C_{II} - D^A * c_I^A - D^B * c_I^B, \qquad u_2 = 0\,.$$

A kapott eredmények megfelelnek a *10. tételben* kimondottaknak. Az ottani, paramétert tartalmazó feltételek a bázison kívüli $\mathbf{x}_{II}^B$ és az $\mathbf{u}_2$ vektorokra vonatkozó szokásos feltételek, vagyis:

$$(\mathbf{B}_5^{-1} * \mathbf{x}_{II}^B)^T * \mathbf{c}^{B_5} = \frac{c_{II}^B}{c_I^A} * p_I^A - p_I^B - \frac{c_{II}^B}{c_I^A} * v * p_{II}^A \geq \mathbf{c}^{x_{II}^B} = -v * p_{II}^B$$

$$(\mathbf{B}_5^{-1} * \mathbf{u}_2)^T * \mathbf{c}^{B_5} = p_I^A - v * p_{II}^A \geq \mathbf{c}^{u_2} = 0$$

A harmadik feltétel az $\mathbf{u}_1$ változó pozitivitását biztosítja. Hasonló módszerrel bizonyíthatók a *7.*, *8.*, ill. *9. tételek* a $\mathbf{B}_7$, $\mathbf{B}_8$, ill. a $\mathbf{B}_6$ bázisokat használva.

Vizsgáljuk most a 2.2.2 pontot. Itt az esetet áll fenn, amikor a vizsgált vektorrendszer, vagyis az $\{\,\mathbf{x}_I^A,\ \mathbf{x}_{II}^A,\ \mathbf{x}_I^B,\ \mathbf{x}_{II}^B,\ \mathbf{u}_1\,\}$ rangja három. Ekkor minden bázisba e rendszerből maximum 3 vektort lehet kiválasztani, melyek közül az egyik mindig az $\mathbf{u}_1$ kell, hogy legyen. E feltételek három bázisra teljesülnek, ezek pedig a korábban már bevezetett: $\mathbf{B}_2$, $\mathbf{B}_3$, $\mathbf{B}_4$ bázisok. Ezekben a bázisokban $\mathbf{u}_2$ benne van, de feltétel szerint 0 értéken. Ez azt jelenti, hogy a bázis degenerált.

Ekkor a 4., 5., 6. tételek módosítása szolgáltatja a megoldást, mivel a bázisok pontosan megegyeznek az ottani bázisokkal, csak a megoldások értékei mások. Mindhárom tételben a C_{II} kapacitáskorlátra vonatkozó szigorú egyenlőtlenséget kell átírni egyenlőséggé.

A szimmetrikus esetben értelemszerűen a 3., 4., 5. tételek használhatók fel, mivel ezekben szerepel a C_I kapacitáskorlátra vonatkozó feltétel. Itt e feltételeknek egyenlőséggel kell teljesülniük.

A 2.3.1 pont annak az esetnek felel meg, amikor az optimális bázisban nincs segédváltozó, tehát a $\mathbf{B}_0 = \{\mathbf{x}_I^A, \mathbf{x}_{II}^A, \mathbf{x}_I^B, \mathbf{x}_{II}^B\}$ vektorrendszer bázis, így lineárisan független rendszer kell, hogy legyen. Ez azt jelenti, hogy ezen vektorok semmilyen triviálistól eltérő lineáris kombinációja nem lehet a nulla vektor.

Amennyiben $\frac{c_I^A}{c_{II}^A} = \frac{c_I^B}{c_{II}^B}$, akkor $c_{II}^B * \mathbf{x}_I^A - c_{II}^B * \mathbf{x}_{II}^A - c_{II}^A * \mathbf{x}_I^B + c_{II}^A * \mathbf{x}_{II}^B = \mathbf{0}$. Tehát amennyiben $\frac{c_I^A}{c_{II}^A} \neq \frac{c_I^B}{c_{II}^B}$, akkor a $\mathbf{B}_0$ bázis, tehát ekkor egyértelmű a megoldás. Tehát beláttuk a *11. tétel* 1. esetét.

A fenti $\mathbf{B}_0$ bázis inverze a következő:

$$\mathbf{B}_0^{-1} = \begin{pmatrix} c_{II}^A * c_I^B & c_I^B * c_{II}^B & -c_{II}^B & -c_I^B \\ -c_I^A * c_{II}^B & -c_I^B * c_{II}^B & c_{II}^B & c_I^B \\ -c_I^A * c_{II}^A & -c_I^A * c_{II}^B & c_{II}^A & c_I^A \\ c_I^A * c_{II}^A & c_{II}^A * c_I^B & -c_{II}^A & -c_I^A \end{pmatrix}$$

Az egyenletrendszer megoldását a $\mathbf{B}_0^{-1} * \mathbf{b}$ mátrixszorzat szolgáltatja, melynek eredménye megegyezik a *12. tételben* kimondott megoldással.

Az egyenletrendszer egyértelmű megoldása akkor lesz optimális az (LP)-re nézve, ha egyrészt nemnegatív (megengedettség), másrészt, ha a másik két, bázison kívüli vektorra teljesül, hogy sem a $\mathbf{d}_1^T * \mathbf{c}$ skalárszorzat nem kisebb az $\mathbf{u}_1$ segédváltozó célfüggvénybeli együtthatójánál, sem a $\mathbf{d}_2^T * \mathbf{c}$ skalárszorzat nem kisebb az $\mathbf{u}_2$ segédváltozó célfüggvénybeli együtthatójánál, melyek nullák, hiszen a segédváltozók nem szerepelnek a célfüggvényben. Itt a $\mathbf{d}_1$, és a $\mathbf{d}_2$ vektorok az $\mathbf{u}_1$, és a $\mathbf{u}_2$ segédváltozók $\mathbf{B}_0$ bázisbeli koordinátáikból álló vektorok.

A fenti $\mathbf{d}_1$, $\mathbf{d}_2$, $\mathbf{c}$ vektorok —bevezetve az $f = \frac{1}{c_I^B * c_{II}^A - c_{II}^B * c_I^A}$ helyettesítést— az alábbi alakúak:

$$\mathbf{z}_1^T = \left(-c_{II}^B * f, c_{II}^B * f, c_{II}^A * f, -c_{II}^A * f\right)$$

$$\mathbf{z}_2^T = \left(-c_I^B * f, c_I^B * f, c_I^A * f, -c_I^A * f\right)$$

$$\mathbf{c}^T = \left(-p_I^A, -p_{II}^A * v, -p_I^B, -p_{II}^B * v\right) .$$

Képezve a $\mathbf{zd}_1^T * \mathbf{c}$, és a $\mathbf{d}_2^T * \mathbf{c}$ skalárszorzatokat, a következőhöz jutunk:

$$c_{II}^B * f * p_I^A - c_{II}^B * f * p_{II}^A * v - c_{II}^A * f * p_I^B + c_{II}^A * f * p_{II}^B * v \geq 0 \, , \qquad (6)$$

$$c_I^B * f * p_I^A - c_I^B * f * p_{II}^A * v - c_I^A * f * p_I^B + c_I^A * f * p_{II}^B * v \geq 0 \, . \qquad (7)$$

Ezek pedig a *13. tételnek* megfelelő feltételek, amennyiben (6)-ot $c_{II}^B * c_{II}^A$-vel, (7)-et pedig $c_I^B * c_I^A$-gyel osztjuk.

A 2.3.2 pont szerint —amikor $\frac{c_I^A}{c_{II}^A} = \frac{c_I^B}{c_{II}^B}$— csakis abban az esetben oldható meg az egyenletrendszer, ha

$$\frac{C_I}{c_I^B} + \frac{C_{II}}{c_{II}^B} = D^B + \frac{c_I^A}{c_I^B} * D^A \, .$$

Ez azért van, mivel a $\mathbf{B}_0$ vektorrendszer a $\frac{c_I^A}{c_{II}^A} = \frac{c_I^B}{c_{II}^B}$ feltétel esetén lineárisan összefüggő, így nem lehet bázis. Ekkor minden bázisban van legalább egy segédváltozó. Amennyiben felhasználjuk a $\frac{c_I^A}{c_{II}^A} = \frac{c_I^B}{c_{II}^B}$ feltételt, az egyenletrendszer Gauss-elimináció szerinti megoldása a $\frac{C_I}{c_I^B} + \frac{C_{II}}{c_{II}^B} = D^B + \frac{c_I^A}{c_I^B} * D^A$ egyenlethez vezet. Amennyiben ez teljesül, akkor azonosságot kapunk legalább egy szabadsági fokkal, ha viszont nem áll fenn, akkor ellentmondásra jutunk, nincs megoldás. Ezzel a *11. tétel* 2. esetét is beláttuk.

Egy rövid vizsgálat erejéig időzzünk el ennél a pontnál. Triviális, hogy a $c_I^A = c_I^B$ és a $c_{II}^A = c_{II}^B$ egyenlőségek egyszerre teljesülnek, vagy egyszerre nem állnak fönn. Utóbbi esetben a $\mathbf{B}_0$ vektorrendszer rangja három, vagyis ekkor a lehetséges bázisok e rendszerből 3 vektort, és vagy az $\mathbf{u_1}$, vagy az $\mathbf{u_2}$ segédváltozót tartalmazzák.

Amennyiben teljesül a $c_I^A = c_I^B$ és a $c_{II}^A = c_{II}^B$ egyenlőség, akkor a $\mathbf{B}_0$ vektorrendszer rangja kettő, azaz ekkor minden bázisban e vektorok közül legfeljebb kettő szerepelhet. Mivel a bázis négy elemű, és a fenti vektorokon kívül a feladatban csupán két segédváltozó szerepel, így tehát kétféle ilyen bázis jöhet szóba: $\{\, \mathbf{x}_I^A, \mathbf{x}_{II}^B, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \,\}$, és az $\{\, \mathbf{x}_{II}^A, \mathbf{x}_I^B, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \,\}$.

Ezen bázisok úgynevezett *degenerált* bázisok, ami azt jelenti, hogy négynél kevesebb bázisvektor is elő tudja állítani az egyenletrendszer jobb oldalát, azaz van nulla értékű bázisváltozó. Degenerált bázis esetén végtelen sok megoldás van. Ez a feladat is azonossággá válik, egy, illetve két szabadsági fokkal.

Magától értetődik, hogy amennyiben

$$\frac{C_I}{c_I^B} + \frac{C_{II}}{c_{II}^B} = D^B + \frac{c_I^A}{c_I^B} * D^A$$

nem teljesül, akkor nincs megoldás.

Irodalom

1. Bruce Kogut, Nalin Kulatilaka: *Foreign Direct Investment and Exchange Rate Volatility*, Working Paper, University of Pennsylvania, Philadelphia, PA, 1988.
2. Lode Li, Evan L. Porteus, Hongtao Zhang: Optimal Operating Policies for Multiplant Stochastic Manufacturing Systems in a Changing Environment, *Management Science*, Vol. 47, No. 11, November 2001 pp. 1539–51.
3. Jean Tirole: *The Theory of Industrial Organization*, The MIT Press Cambridge, Massachusetts; London, England; 1997.

ON OPTIMAL RESOURCE ALLOCATION POLICIES

The theory of the multinational corporation has traditionally sought to explain why a firm can successfully invest in overseas operations. Some think a foreign company

operates at a disadvantage relative to local ones: it must control the operations over longer distances and it is at a handicap in a foreign culture. In spite of these a lot of the leading companies are establishing multi-facility international production networks in response to intensified global competition in manufacturing and internalization of the marketplace. This multi-facility structure with production units in different geographical regions gives a firm the flexibility to exploit the uncertainty over future changes in exchange rates, competitive moves, or government policies. Much research has been carried out on coordination of the supply chain. These papers mainly cope with vertical coordination between manufacturing, marketing, and distribution in the face of demand fluctuation. In comparison, there is a much smaller literature on how factors that are unique to the global context affect design and control decisions in a global supply chain. In particular, relatively little has been done to address the horizontal coordination between production units in different countries to serve uncertain demand in a changing economic and political environment. The multinational corporation is a network of activities located in different countries. The value of this network derives from the opportunity to benefit from uncertainty through the coordination of subsidiaries which are geographically dispersed. We model this coordination as the operating flexibility to shift production between two manufacturing plants located in different countries. A parametric linear programming model treats explicitly this flexibility. We study the optimal policies for a firm operating plants in two countries, and making two different products which can substitute one another. If a global company has factories in several countries, it can select the place and the quantity of the production according to the global demand and the exchange rate of the currencies. The optimal decision is modeled by a parametric linear programming problem in case of products which substitute each other. The structure of the possible optimal solutions was analyzed with the help of simplex algorithm. In the first chapter we try to find the proper structure of consumer demand for the two products in the specified countries according to a well known utility function based on price and quality. After that we start to build up our model and tried to solve it. As we have the optimal solutions for the scenarios, we examine their structure and find some very exiting connections between the mathematical and economic meanings of the results.

CONTENTS

TASNÁDI, ATTILA: Deterministic and Probabilistic Rationing Methods 1

SIMONOVITS, ANDRÁS: Designing Optimal Retirement Rules: Two Types 13

BESSENYEI, ISTVÁN: Corruption and Debt Dynamics 41

BRÓDY, ANDRÁS: Equivalent Price Systems 61

VIZVÁRI, BÉLA – DEME, ROLAND: On Optimal Resource Allocation Policies ... 67

TARTALOM

TASNÁDI ATTILA: Determinisztikus és valószínűségi elosztási eljárások 1

SIMONOVITS ANDRÁS: Rugalmas öregkori nyugdíjszabály optimális tervezése két típus esetén 13

BESSENYEI ISTVÁN: Korrupció és adósságdinamika 41

BRÓDY ANDRÁS: Ekvivalens árrendszerek 61

VIZVÁRI BÉLA – DEME ROLAND: Egy helyettesítő termékeket gyártó két országban gyártókapacitással rendelkező vállalat optimális erőforrás allokációjának vizsgálata a devizaárfolyamok és a kereslet függvényében statikus várakozások mellett 67

SZIGMA
Matematikai-közgazdasági folyóirat

A Gazdaságmodellezési Társaság lapja

Terjeszti a Gazdaságmodellezési Társaság

ISSN 0039-8128