SAJÁTÉRTÉK-TÉTELEK A LINEÁRIS ÉS NEMLINEÁRIS NEUMANN-RENDSZEREKBEN[1]

MÓCZÁR JÓZSEF
BKÁE, Matematikai Közgazdaságtan és Gazdaságelemzés Tanszék

A tanulmány célkitűzése a sajátérték-tételek lineáris és nemlineáris Neumann-rendszerekre történő kiterjesztése. A szigorú egyensúlyt biztosító Neumann modell a $Cx = \lambda Bx$ és a $pC = \lambda pB$ általánosított sajátérték-feladattal definiálható. A probléma Perron-Frobenius tulajdonságait elsőként Mangasarian (1971) vizsgálta. A technológiailag és/vagy gazdaságilag (ir)reducibilis Neumann rendszerekre megfogalmazott Frobenius tételek bizonyításaihoz Mangasarian, valamint Erdélyi (1967) és Stewart (1972) eredményeit használom fel.

1 Bevezetés

Az utóbbi években reneszánszukat élik a Perron-Frobenius tételek alkalmazásai a különböző elméleti közgazdasági kutatásokban. Ezek az alkalmazások azonban csak a lineáris és legfeljebb nemlineáris Leontief-rendszerre kimondott tételeket foglalják magukban. A valóság pontosabb leírására illetve elemzésére egyre kiterjedtebben használják fel a Neumann típusú modelleket, amelyek feltevéseikben megengedik az ikertermelés szerepeltetését is, valamint a gazdaságot egy sajátos nem-négyzetes termék-tevékenység keresztmetszetben vizsgálják.

Tanulmányom alapvető célkitűzése a sajátérték-tételek lineáris és nemlineáris Neumann-rendszerekre történő kiterjesztése. Vizsgálódásaim keretéül olyan többszektoros gazdasági modell szolgál, amelyben az egyes tevékenységek input-output kapcsolatait megfelelő tulajdonságú nemlineáris függvényekkel, a ráfordítási, illetve kibocsátási struktúráját pedig Jacobi mátrixokkal írom le. Az idő kezelése szempontjából modellünk a diszkrét, illetve a stacionárius modellek családjába tartozik. A modell speciális eseteként értelmezhető mind az irodalomból jól ismert (nem)lineáris input-output modell, mind pedig a tanulmányban újonnan megfogalmazott nemlineáris Neumann modell.

A sajátérték-tételek megfogalmazása előtt értelmezem a sajátérték, a sajátvektor, a spektrum és a spektrál rádiusz fogalmát, bevezetem az (ir)reducibilitás különféle válfajait a (nem)lineáris Neumann-rendszerekben. A

[1]Tanulmányom a hasonló címmel megírt és Martos Béla professzor szerkesztésében megjelent Szigma matematikai közgazdasági folyóirat által közlésre elfogadott, de a külföldi tanulmányútjaim miatt meg nem jelent cikkem legújabb eredményekkel kiegészített változata. Ezúttal szeretnék, még ha kissé megkésve is, köszönetet mondani az akkori névtelen bírálóknak a hasznos tanácsaikért.

szigorú egyensúlyt biztosító lineáris Neumann modell a $Cx = \lambda Bx$, illetve $pC = \lambda pB$ általánosított sajátérték-feladattal definiálható, ahol a C a fogyasztási és a B a kibocsátási mátrixokat, az x a tevékenységek alkalmazási szintvektorát, p a termékek egységár-vektorát valamint a λ az expanziós (növekedési-, illetve kamat-)tényező reciprokát jelöli. A fenti problémának Perron-Frobenius tulajdonságait —tudomásom szerint— ez idáig csak Mangasarian vizsgálta. Tételeit tisztán matematikai szempontból, tetszőleges előjelű, azonos típusú és megfelelő feltételeket kielégítő C és B mátrixok mellett fogalmazta meg. Tanulmányomban a technológiailag és/vagy gazdaságilag (ir)reducibilis lineáris Neumann-rendszerre megfogalmazott Frobenius tétel bizonyításához Mangasarian tételeit használom fel. Megmutatom, hogy ezek a bizonyítások kiterjeszthetők a nemlineáris általánosított sajátérték-egyenletekre is.

Tanulmányomban valamennyi rendszer meghatározásában szerepet kapnak a ráfordítási, illetve a kibocsátási struktúrát leíró Jacobi mátrixok. A nemlineáris Leontief-rendszerre kimondott sajátérték-tételek bizonyításai abban térnek el a szokásos bizonyításoktól, hogy itt a ráfordítási struktúrát szerepeltetjük az egyes állításokban.

A nemlineáris Neumann-rendszerre kimondott sajátérték-tételek alapul szolgálhatnak a marxi értéknagyság kvantitatív meghatározásában, különös tekintettel az ikertermékek problémájára. (Lineáris esetre lásd pl. Zalai (1980).)

A tanulmányban a következő jelölések érvényesek. Vessző jelöli a mátrix transzponáltját. Két azonos méretű vektor összehasonlítására az: $x \geqq y$ jelenti, hogy minden i-re $x_i \geqq y_i$; $x \geq y$ jelenti, hogy minden i-re $x \geqq y$ de $x \neq y$, és az $x > y$ jelenti, hogy $x_i > y_i$ minden i-re. Ennek értelmében, ha x nemnegatív : $x \geqq 0$; ha x szemipozitív : $x \geq 0$; és ha x pozitív: $x > 0$.

2 Feltevések és definíciók

Tekintsünk egy olyan gazdaságot, amelyben $\{1, 2, \dots, m\}$ véges számú tevékenység (termelési eljárás) funkcionál, és ezek $\{1, 2, \dots, n\}$ véges számú terméket állítanak elő. Minden egyes tevékenység egy vagy több terméket termelhet (ikertermelés esete), és bármelyik termék többféleképpen (több eljárással) is előállítható. Az egyes tevékenységek általában az anyagi termelő szféra különböző szervezeteit, pl. szakigazgatási szerveket, termelő ágazatokat stb. jelölnek, de jelölhetnek fogyasztást, különféle szolgáltatásokat, sőt külföldi keresletet is. Olyan természetes termelési tényezők, mint a munka és a föld, korlátlan mennyiségben állnak rendelkezésre. Modellünk diszkrét időpontokban írja le a gazdasági jelenségeket, és abban az értelemben zárt, hogy a t-edik időpontban a tevékenységek funkcionálásához szükséges ráfordításokat az előző $(t-1)$-edik periódusban megtermelt outputok fedezik.

A technikai-technológiai összefüggéseket most a következőképpen fejezzük ki. Tegyük fel, hogy minden egyes tevékenység per definitionem egységnyi ideig funkcionál, s az $x^j(t)$, $(j = 1, 2, \dots, m)$ a j-edik tevékenység alkalmazási szintjét jelöli a t-edik periódusban. Gazdasági rendszerünkben az egyes termékekből történő felhasználásokat és kibocsátásokat egy-egy nemlineáris leképezés-halmazzal definiáljuk: az i-edik termék input-függvényét jelöljük a valós értékű $h_i[x^1(t),\ldots,x^m(t)]$ függvénnyel, amely az $x^1(t),\ldots,x^m(t)$ változók megfelelő nemlineáris függvénye, az output-függvényét az ugyancsak valós értékű és az $x^1(t),\ldots,x^m(t)$ változókban nemlineáris $g_i[x^1(t),\ldots,x^m(t)]$ függvénnyel jelöljük. Az egyszerűség kedvéért vezessük be az input-, illetve az output-függvények jelölésére a következő szimbólumokat:

$$\begin{bmatrix} h_1[x^1(t),\ldots,x^m(t)] \\ h_2[x^1(t),\ldots,x^m(t)] \\ \vdots \\ h_n[x^1(t),\ldots,x^m(t)] \end{bmatrix} = H[x(t)]\,,$$

és hasonlóképpen $g_i[x^1(t),\ldots,x^m(t)] = G[x(t)]$, ahol $i = 1,2,\ldots,n$.

A fentiek segítségével most már könnyen meghatározhatjuk a nemlineáris termelési rendszerünk technikai-technológiai fajlagosainak alakulását leíró függvényeket. Képezzük e célból az egyes függvények elsőrendű parciális deriváltjait, illetve az ezekből képezhető megfelelő $(n\times m)$-es Jacobi mátrixokat:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial h_1\,[x\,(t)]}{\partial x^1\,(t)} & \dfrac{\partial h_1\,[x\,(t)]}{\partial x^2\,(t)} & \cdots & \dfrac{\partial h_1\,[x\,(t)]}{\partial x^m\,(t)} \\ \dfrac{\partial h_2\,[x\,(t)]}{\partial x^1\,(t)} & \dfrac{\partial h_2\,[x\,(t)]}{\partial x^2\,(t)} & \cdots & \dfrac{\partial h_1\,[x\,(t)]}{\partial x^m\,(t)} \\ & \vdots & & \\ \dfrac{\partial h_n\,[x\,(t)]}{\partial x^1\,(t)} & \dfrac{\partial h_n\,[x\,(t)]}{\partial x^2\,(t)} & \cdots & \dfrac{\partial h_n\,[x\,(t)]}{\partial x^m\,(t)} \end{bmatrix}.$$

Az output-fajlagosokat leíró függvényhalmaz hasonlóképpen képezhető. Az egyszerűbb jelölés kedvéért vezessük be a Jacobi mátrixok jelölésére a $\partial H\,[x\,(t)]\ /\ \partial x\,(t)$, illetve a $\partial G\,[x\,(t)]\,/\partial x\,(t)$ szimbólumokat megfelelően.

A $H\,[x\,(t)]$ és a $G\,[x\,(t)]$ nemlineáris függvényhalmazokra a következő feltevéseket tesszük:

(1.F) *Folytonosság.* Mind a $h_i[x(t)] \in C^1$, mind a $g_i[x(t)] \in C^1$ minden $i = 1,2,\ldots,n$-re, azaz az R^m_+-ben minden változójuk szerint folytonosan differenciálhatók.

(2.F) *Homogenitás.* $H[\alpha x(t)] = \alpha H[x(t)]$ és $G[\alpha x(t-1)] = \alpha G[x(t-1)]$ bármely $\alpha \geqq 0$-ra.

(3.F) *Nemnegativitás.* $H[x(t)] \geqq 0$ és $G[x(t)] \geqq 0$ minden $x(t) \geqq 0$-ra.

(4.F) *Monotonitás.* $H[x(t)] \leqq H[x(t+1)]$ és $G[x(t)] \leqq G[x(t+1)]$, ha $x(t) \leqq x(t+1)$.

(5.F) *Speciális strukturális tulajdonság.* A nemlineáris rendszer technológiailag és/vagy gazdaságilag erősen nem reducibilis.

Nemlineáris rendszerünk ráfordítási, illetve kibocsátási szempontból történő strukturális jellemzését a $H\,[x\,(t)]$, illetve a $G\,[x\,(t-1)]$ nemlineáris leképezéshalmazból képezhető $\partial H\left[x\left(t\right)\right] / \partial x\left(t\right), \partial G\left[x\left(t-1\right)\right]/\partial x\left(t-1\right)$ Jacobi mátrixokkal adhatjuk meg, amelyeket a továbbiakban $C\left[x\left(t\right)\right]$, illetve $B\left[x\left(t\right)\right]$ szimbólumokkal jelölünk. Ezek a mátrixok az egyes tevékenységek egységnyi alkalmazási szintjei mellett történő termékfelhasználások, illetve kibocsátások nemlineáris változását írják le. Amennyiben kikötjük, hogy az egyes tevékenységek alkalmazási szintjei az egyes periódusokban arányaikban állandóak, vagyis áttérünk stacionárius modellre, úgy az időindex elhagyható.

Most néhány alapvető fogalmat definiálunk a fentiekben értelmezett nemlineáris és stacionárius gazdasági rendszerünk keretei között, majd megmutatjuk, hogy ezek a definíciók speciális esetekben valóban egybe esnek e fogalmak kevésbé általános rendszerekben megadott definícióival.

1. Definíció (sajátérték, sajátvektor, spektrum, spektrál rádiusz). *Egy (komplex) λ számot a $C(x)$ Jacobi mátrixnak a $B(x)$ Jacobi mátrix szerinti sajátértékének nevezzük akkor és csak akkor, ha van olyan nemzérus x vektor, amelyre teljesül a $C(x)x = \lambda B(x)x$ egyenlőség. Az x vektort a $C(x)$ Jacobi mátrixnak a $B(x)$ Jacobi mátrix szerinti sajátvektorának nevezzük. A sajátértékek halmazát a $C(x)$ Jacobi mátrixnak a $B(x)$ Jacobi mátrix szerinti spektrumának nevezzük és $sp[C(x)_{B(x)}]$-vel jelöljük; ezek közül a legnagyobb abszolút értékű a spektrál rádiusz:*

$$\rho[C(x)_{B(x)}] = \begin{cases} \sup_{\lambda \in sp[C(x)_{B(x)}]} |\lambda| & \text{ha } sp[C(x)_{B(x)}] \neq \emptyset\,; \\ -\infty & \text{ha } sp[C(x)_{B(x)}] = \emptyset\,. \end{cases}$$

Az 1. definíció speciális esetekben a következőképpen módosul:

(a) Lineáris Leontief-rendszer

Ha $m = n$ és $C(x) = A$ valamint $B(x) = E$, akkor a sajátérték és a sajátvektor az $Ax = \lambda x$, $x \neq 0$ sajátérték-feladat megoldásaként adódik. Ebben az esetben $sp(A_E) = sp(A)$ az A mátrix szokásos spektruma, amelyből a legnagyobb abszolút értékű az A mátrix spektrál rádiuszát, $\rho(A)$-t adja.

(b) Lineáris Neumann-rendszer

Ha a j-edik tevékenység x^j alkalmazási szinten az i-edik termékből felhasznált, illetve kibocsátott mennyisége ezen x^j lineáris függvénye, vagyis $h_i(x) = \sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_j$, illetve $g_i(x) = \sum_{j=1}^{m} b_{ij}x_j$, akkor az input és output koefficienseket meghatározó Jacobi mátrixoknak rendre a $C = [c_{ij}]$ és $B = [b_{ij}]$ mátrixok felelnek meg. A rendszerhez tartozó λ sajátértékeket most a $Cx = \lambda Bx$, $x \neq 0$ általánosított sajátérték-feladat megoldásaként határozhatjuk meg. Az ilyen tulajdonságú λ a C mátrix B mátrixra vonatkozó sajátértéke. Ezen összes λ-k halmazát a C mátrix B mátrix szerinti spektrumának nevezzük és $sp(C_B)$-vel jelöljük. A C mátrix B mátrix szerinti spektrál rádiuszáról könnyen belátható, ha

(*i*) $n > m$, akkor $sp\left(C_B\right) \supset (-\infty, \infty)$, következésképpen $\rho\left(C_B\right) = \infty$;
(*ii*) $n < m$, akkor $sp\left(C'_{B'}\right) \supset (-\infty, \infty)$, következésképpen $\rho\left(C'_{B'}\right) = \infty$;
(*iii*) $n = m$, akkor $sp\left(C_B\right) = sp\left(C'_{B'}\right) =$ legfeljebb n elemű halmaz, amely lehet üres is.

(c) Nemlineáris Leontief-rendszer

Ha $m = n$ és a j-edik tevékenység a j-edik termékből x^j alkalmazási szinten x^j mennyiséget bocsát ki, azaz $g_j(x) = x^j$, az $i \neq j$ termékből pedig nem állít elő, $g_i(x) = 0$ $(i \neq j)$, valamint az i-edik termékből történő felhasználás x nemlineáris függvénye, azaz $h_i(x)$, akkor a nemlineáris rendszerhez tartozó λ sajátértékre az $A(x)x = \lambda x$ egyenlőségnek kell teljesülnie nemzérus x mellett, ahol $A(x)$ a nemlineáris Leontief-rendszer technológiai koefficienseit meghatározó megfelelő Jacobi mátrix. Az összes sajátértékek halmaza, azaz az $A(x)$ Jacobi mátrixnak az egységmátrixra vonatkozó spektruma pedig $sp(A(x)_E)$ vagy röviden $sp[A(x)]$.

2. Definíció ((i) technológiai és (ii) gazdasági (ir)reducibilitás).

(i) *a $[C(x), B(x)]$ Jacobi mátrix-párral megadott nemlineáris rendszer technológiailag (ir)reducibilis akkor és csak akkor, ha $C(x)x \not> 0$ $(C(x)x > 0)$ valamely (minden) szemipozitív x vektorra, amely mellett $\alpha C(x)x \leqq B(x)x$, $\alpha > 0$;*

(ii) *a $[C(x), B(x)]$ Jacobi mátrix-párral megadott nemlineáris rendszer gazdaságilag (ir)reducibilis akkor és csak akkor, ha $p'B(x) \not> 0'$ $(p'B(x) > 0')$ valamely (minden) szemipozitív p vektorra, amely mellett $p'B(x) \leqq \beta p'C(x)$, $\beta > 0$.*

Definíciónk a szerző egy korábbi tanulmányaiban (Móczár (1980, 1995)) kifejtett (ir)reducibilitás definíciójának általánosított nemlineáris esetre történő kiterjesztése. Nemlineáris esetben is könnyen megmutatható, hogy a Neumann-reducibilitás tágabb fogalom, mint a Leontief-reducibilitás. (Részletesebb kifejtését lásd később!) A fenti definíció is implikálja a gyengén, illetve erősen reducibilis rendszereket, valamint ezek további finomításait, a csak gyengén és a csak erősen reducibiliseket. Általánosított esetben is megmutatható, hogy amíg egy nemlineáris Neumann-reducibilitás gyengén, addig mint nemlineáris Leontief-reducibilis rendszer csak erősen reducibilis. Tehát az általánosított Neumann-reducibilitás értelmezhető a Leontief-rendszerre is, és ha egy Leontief-rendszer Neumann-reducibilis, akkor nyilván mindig Leontief-reducibilis is. Az egyes speciális esetekben definíciónk a következőképpen módosul.

(a) Lineáris Leontief-rendszer

A rendszer (ir)reducibilitása, tekintettel a $C(x) = A$ azonosságra, a nemnegatív kvadratikus A mátrixtól függ. Megjegyzendő, hogy a lineáris Leontief-rendszer erősen nem reducibilis jellege feltételezi a rendszer gazdaságilag csak gyengén reducibilis jellegét. Az irreducibilis (unzerlegbar) mátrix definícióját a tudománytörténet Frobenius nevéhez fűzi, amit a szakirodalomban indekompozábilis, nemredukálható(unreduced) elnevezéssel is jelölnek. (Lásd erről részletesen Romanovsky (1936), Debreu és Herstein (1953) és Wielandt (1950) műveit!) Érdekességként, s nem utolsósorban a hazai kutatásunk kritikájaként megemlítem, hogy Schneider(1977) tanulmányában részletesen kifejti, hogy az irreducibilis mátrix fogalma először a világhírű magyar matematikus, König (1916) munkájában szerepelt.

A teljesség igénye nélkül most áttekintjük a leggyakrabban alkalmazott definíciókat:

($a1$) (*Frobenius*). $n \geqq 2$-re egy $n \times n$-es (komplex) A mátrix *reducibilis*, ha van olyan $n \times n$-es P permutáló mátrix, hogy

$$PAP' = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix},$$

ahol A_{11} egy $r \times r$-es részmátrix, és A_{22} egy $(n-r) \times (n-r)$ -es részmátrix, ahol $1 \leqq r < n$. Ha ilyen permutáló mátrix nem létezik, akkor az A *irreducibilis*. Amennyiben A egy 1×1-es (komplex) mátrix: irreducibilis, ha az egyetlen egy eleme zérustól különböző, egyébként reducibilis.

($a2$) (*König-Varga*). Egy $n \times n$-es (komplex) A mátrix *irreducibilis* akkor és csak akkor, ha a hozzárendelt $G(A)$ irányított gráf erősen összefüggő, ha bármely P_i és P_j rendezett csúcs-párra létezik egy irányított

$$\overrightarrow{P_iP_{l_1}}, \overrightarrow{P_{l_1}P_{l_2}}, \ldots, \overrightarrow{P_{l_{r-1}}P_{l_r=j}}$$

útvonal, amely összekapcsolja P_i-t és P_j-t.

($a3$) (*Geiringer*). Legyen $A = [a_{ij}]$ egy $n \times n$-es komplex mátrix, $n \geqq 2$ és legyen $W = \{1, 2, \ldots, n\}$ az első n természetes szám halmaza. A *irreducibilis* akkor és csak akkor, ha W-nek bármely két diszjunkt és nemüres S és T részhalmazára, $S \cup T = W$, létezik A-nak $a_{ij} \neq 0$ eleme, ahol $i \in S$ és $j \in T$.

($a4$) (*Nikaido*). Az $A = [a_{ij}] \geq 0$ *reducibilis* akkor és csak akkor, ha van olyan $\rho \geqq 0$ valós szám és szemipozitív x vektor (amelynek nem minden eleme zérus), amelyek kielégítik az $Ax \leqq \rho x$ relációt.

($a5$) (*Morishima*). Az $n \times n$-es A mátrix *irreducibilis* akkor és csak akkor, ha egy tetszőleges szemipozitív x vektorra (amelynek van néhány pozitív eleme) $[Ax]_i > 0$ legalább egy $i \in I_2$-re, ahol $I_2 = \{i \mid x_i = 0\}$ az $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ indexhalmaznak egy valódi nemüres részhalmaza.

($a6$) (*Arrow*). A *gazdaság irreducibilis* akkor és csak akkor, ha bármilyen módon is osztjuk a szektorokat két csoportba, az egyik csoport induló készleteiben bekövetkező növekedést fel lehet használni úgy, hogy lehetségessé váljék a termékek olyan elosztása, amely mellett senkinek sem romlik a helyzete, sőt a második csoport legalább egy tagja jobb helyzetbe kerül.

(b) Lineáris Neumann-rendszer

A rendszer technikai-technológiai összefüggéseit kifejező Jacobi mátrixnak most a $C = [c_{ij}] \geq 0$, illetve $B = [b_{ij}] \geq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, m)$ mátrixok feleltethetők meg. A lineáris Neumann-rendszer (ir)reducibilitását ezen (C, B) mátrixpár Neumann értelemben vett (ir)reducibilitása jelenti. Ennek egyes kritériumait következőképpen fogalmazhatjuk meg:

(*b*1) (*Gale*). Az $\{1, 2, \ldots, n\}$ sorindex-halmaz I valódi részhalmazát függetlennek nevezzük, ha az $\{1, 2, .., m\}$ oszlopindex-halmaznak van olyan nem üres J részhalmaza, hogy $c_{ij} = 0$ minden $i \in \overline{I}$, $j \in J$ index-párra, és $b_{ij} > 0$ minden $i \in I$-re valamely $j \in J$ mellett. A lineáris Neumann-rendszer irreducibilis, ha nem jelölhető ki benne független részhalmaz.

Ez a definíció tovább specifikálható, amint ezt a korábbi tanulmányaimban (ld. például, Móczár(1995)) megmutattam. Eszerint a reducibilis lineáris Neumann-rendszer adott független I részhalmaz mellett tovább osztályozható: *erősen* reducibilis, ha $b_{ij} = 0$ minden $i \in \overline{I}$, $j \in J$ index-párra; *gyengén* reducibilis, ha $b_{ij} > 0$ néhány $i \in \overline{I}$, $j \in J$ index-pár esetén.[2]

(*b*2) (*Gale-Robinson*). (*i*) A (C, B) Neumann-rendszer *technológiailag (ir)reducibilis* akkor és csak akkor, ha $Cx \not> 0$ $(Cx > 0)$ valamely (minden) szemipozitív x vektorra, amely mellett $\alpha Cx \leqq Bx$ és $\alpha > 0$.(A technológiailag irreducibilis struktúra tehát azt jelenti, hogy egy ilyen rendszer csak úgy képes működni $(x \neq 0)$, ha $Bx > 0$, azaz minden egyes termékből van kibocsátás.)

(*ii*) A (C, B) Neumann-rendszer *gazdaságilag (ir)reducibilis*, ha $p'B \not> 0$ $(p'B > 0)$ valamely (minden) szemipozitív p vektorra, amely mellett $p'B \leqq \beta p'C$ és $\beta > 0$. (A gazdaságilag irreducibilis rendszerben minden egyes termelési eljárás pozitív értéket eredményez, mégpedig úgy, hogy valamennyi lehetséges szemipozitív árrendszerhez található olyan pozitív kamattényező, hogy egyetlen termelési eljárás sem realizál a kamattényező által meghatározottnál nagyobb jövedelmet. Másként megfogalmazva, ez annyit jelent, hogy egy ilyen rendszerben csak úgy lehet az ún. non-profit feltételeket kielégítő pozitív kamattényezőt és szemipozitív árrendszert megadni, ha minden tevékenység pozitív értéket hoz létre, vagyis a rendszer gazdaságilag reducibilis, ha egy lehetséges értékelési rendszerben valamely tevékenység(ek) csak szabad javakat (termékeket) állítanak elő.)

(*b*3) (*Gale-Robinson-Móczár*). (*i*) A (C, B) strukturális mátrixokkal megadott Neumann rendszer *technológiailag erősen reducibilis* akkor és csak akkor, ha van olyan szemipozitív x vektor és pozitív α valós szám, amelyekre $\alpha Cx \leqq Bx$ és $Bx \not> 0$. (Egyébként irreducibilis vagy csak gyengén reducibilis.)

(*ii*) A (C, B) strukturális mátrixokkal megadott Neumann rendszer *gazdaságilag erősen reducibilis* akkor és csak akkor, ha van olyan szemipozitív p vektor és β valós szám, amelyekre $\beta p'C \geqq p'B$ és $p'C \not> 0$; (Egyébként irreducibilis vagy csak gyengén reducibilis.)

(c) Nemlineáris Leontief-rendszer

A nemlineáris Leontief-rendszerben technológiai koefficienseket meghatározó Jacobi mátrix $A(x)$, s maga a rendszer a nemlineáris Neumann-rendszer

[2] Megjegyzendő, hogy ez a specifikáció a Gale-féle irreducibilitási definíció közgazdasági szempontból történő pontosítását is jelenti. A Gale-féle definíció értelmében ugyanis a *csak gyengén reducibilis* Neumann gazdaságok irreducibilisnek tekinthetők.

speciális esetének tekinthető. Az (ir)reducibilitás definíciója most a következőképpen módosul.

($c1$) (*Morishima*). A nemlineáris Leontief-rendszer *irreducibilis* akkor és csak akkor, ha tetszőleges szemipozitív z vektornak, amelynek van néhány zérus eleme, legalább egy zérus elemét az $A(x)z$ transzformáció pozitívvá konvertálja.

($c2$) (*Nikaido*). Vegyünk két olyan nemnegatív n-elemű x és y vektort, amelyekre $x \geq y \geq 0$, és legyen $N(x,y) = \{j \mid x_j > y_j\}$ az $N = \{1,2,\ldots,n\}$ indexhalmaz részhalmaza. A Leontief-féle irreducibilitás nemlineáris kiterjesztése a következőképpen fogalmazható meg: a $H(x)$ nemlineáris leképezést *irreducibilis*nek nevezzük, ha az x, y fenti tulajdonságú vektor-párra azt kapjuk, hogy $h_i(x) \neq h_i(y)$ valamely $i \in N(x,y)$, ahol $N(x,y)$ az N-nek egy valódi nemüres részhalmaza.

3 Nemlineáris Neumann-modell

Ahhoz, hogy a fentiek figyelembevételével megfogalmazhassuk a *Neumann-modell Morishima-féle nemlineáris kiterjesztését*, képeznünk kell az adott tevékenységi szintvektor melletti input- és output-mátrixokat, amelyek az egységnyi alkalmazási szint melletti felhasználások és kibocsátások időbeni alakulását mutatják. Képezzük e célból a $H[x(t)]$, illetve a $G[x(t-1)]$ nemlineáris leképezés-halmazokból a

$$\left[\frac{\partial h_i\left[x(t)\right]}{\partial x^j(t)}\right] \text{ valamint a } \left[\frac{\partial g_i\left[x(t-1)\right]}{\partial x^j(t-1)}\right] \quad (i=1,2,\ldots,n;\ j=1,2,\ldots,m) \tag{1}$$

$n \times m$-es Jacobi mátrixokat, amelyeket a továbbiakban a $C[x(t)]$, illetve a $B[x(t-1)]$ szimbólumokkal jelölünk. A $H[x(t)]$, illetve a $G[x(t-1)]$ függvényhalmazokra tett ($2.F$) kikötés következtében alkalmazhatjuk az ismert *Euler tételt*, aminek eredményeként a Jacobi mátrixoknak a tevékenységi szintvektorral alkotott szorzata az összráfordítást, illetve az összkibocsátást adja termékenkénti bontásban. Ekkor a modell zártsága következtében:

$$C[x(t)]x(t) \leqq B[x(t-1)]x(t-1)\ , \tag{2}$$

azaz a t-edik periódusban, nemlineáris esetben is a termeléshez legfeljebb csak annyi terméket használhatunk fel, mint amennyi az előző periódus kibocsátása.

Előre meghatározott árak és kamatlábak mellett előfordulhat, hogy egyes tevékenységek nyereségesebbek, mint a többiek. Egyensúlyi állapotban azonban nem szerepelhet ilyen tevékenység. Ebben az esetben ugyanis egyetlen tevékenység sem realizálhat több nyereséget, mint amennyit a gazdaságra jellemző átlagos kamattényező megenged. Ellenkező esetben ugyanis a többletnyereséget eredményező tevékenység nagyobb mérvű alkalmazása lenne racionális, ami viszont a termelési tényezők áremelkedéséhez, s ezáltal az egyensúly megbomlásához vezetne. Az elmondottak alapján

$$p'(t+1)B[x(t)] \leqq \beta p'(t)C[x(t)]\ , \tag{3}$$

azaz nemlineáris esetben is minden egyes tevékenység legfeljebb csak annyi nyereséget realizálhat, mint amennyit a gazdaság egészére jellemző egységes kamattényező megenged.

Ha valamely termékből többet termelnek, mint amennyi a felhasználási igény, vagyis $b'_i[x(t-1)]x(t-1) > c'_i[x(t)]x(t)$, akkor ezek a termékek szabaddá válnak, ami abban jut kifejezésre, hogy zérus áron értékelődnek, azaz $p^i(t) = 0$. Ez viszont azt jelenti, hogy

$$p'(t)B[x(t-1)]x(t-1) = p'(t)C[x(t)]x(t)\ . \tag{4}$$

Ha viszont valamely tevékenység alkalmazása negatív nyereséget eredményez nemlineáris input, illetve output koefficiensek mellett, azaz $p'(t+1)b_j[x^j(t)] < \beta(t)p'(t)c_j[x^j(t)]$, akkor azt a tevékenységet értelemszerűen nem használják fel, így alkalmazási szintje nulla lesz, vagyis $x^j(t) = 0$. Ezt a következő egyenlőséggel fejezhetjük ki:

$$p'\left(t+1\right)B\left[x\left(t\right)\right]x\left(t\right) = \beta\left(t\right)p'\left(t\right)C\left[x\left(t\right)\right]x\left(t\right)\ . \tag{5}$$

Eddig az $x\,(t)$-vel jelölt tevékenység-alkalmazási szintek alakulásáról nem kötöttünk ki semmit. Neumann viszont az egyensúlyt mint az egyensúlyba hozott növekedés állapotát határozta meg, amelyben az árak és a kamatláb változatlansága mellett a tevékenységek intenzitása valamennyi tevékenységre ugyanazon hányados szerint mértani haladványban nő vagy csökken. A kiegyensúlyozott növekedés nemlineáris Neumann modelljét a fentieket kifejező $p\,(t) = p\,(t+1)\,,\ \beta\,(t) = \beta,\ \alpha x\,(t) = x\,(t+1)$ egyenletek figyelembe vételével a következőképpen fogalmazhatjuk meg:

$$\begin{array}{ll}
(i) & \alpha C\,(x)\,x \leqq B\,(x)\,x \\
(ii) & p'B\,(x) \leqq \beta p'C\,(x) \\
(iii) & p'B\,(x)\,x = \beta p'C\,(x)\,x \\
(iv) & p'B\,(x)\,x = \alpha p'C\,(x)\,x \\
(v) & x \geq 0,\ p \geq 0,\ \alpha, \beta > 0\ .
\end{array}$$

(Minthogy az intenzitás- és az árvektorok ugyanazon periódusra vonatkoznak, ezért az időváltozó elhagyható.) A modell megoldása a következőképpen értelmezhető: határozzuk meg az $L_\alpha = \{\alpha \mid (B\,(x) - \alpha C\,(x))\,x \geqq 0, x \geq 0\}$ és az $L_\beta = \{\beta \mid p'\,(B\,(x) - \beta C\,(x)) \leqq 0, p \geq 0\}$ halmazokat; az $(\alpha_0, x_{0;}\beta_0, p_0)$ egyensúlyi állapotokat az L_α és az L_β halmazok azon pontjainak kijelölésével kaphatjuk meg, amelyekhez tartozó x_0 és p_0 vektorok kielégítik a modell (iii) és (iv) feltételeit. A modell megoldásával kapcsolatban most is két probléma vethető fel: az egzisztencia és az unicitás bizonyítása. Az egyszerűség kedvéért tekintsük most a nemlineáris modellünket a következő alakban:

$$\begin{array}{ll} (i) & \lambda C(x)\,x \leqq B(x)\,x \\ (ii) & \lambda p' C(x) \geqq p' B(x) \\ (iii) & \lambda > 0\,,\ x \geq 0\,,\ p \geq 0\,. \end{array}$$

Könnyen belátható, hogy eme rendszer (λ, x_0, p_0) megoldásai az eredeti nemlineáris Neumann modell olyan egyensúlyi állapotait szolgáltatják, ahol $\alpha_0 = \beta_0 = \lambda_0$. Az egzisztencia bizonyításához elegendő ebben az esetben is a Kemeny-Morgenstern-Thompson feltételek megfelelő nemlineáris kiterjesztéseit szerepeltetni.

Amennyiben szigorú egyensúlyt írunk elő a nemlineáris rendszerünkben mind a használati érték, mind az érték oldalról, akkor az unicitás bizonyításához a legcélravezetőbb a Perron-Frobenius tételek általánosított nemlineáris rendszerekben történő kiterjesztésének felhasználása.

4 Perron-Frobenius tételek az általánosított nemlineáris rendszerekben

A Perron-Frobenius tételek nemlineáris kiterjesztésében az eddig követett kifejtési módszerrel szemben az induktív utat választjuk, vagyis először az egyes speciális eseteket tekintjük át, majd ezek általánosításaként jutunk el a tétel nemlineáris Neumann-rendszerben történő megfogalmazásához.

A nemnegatív kvadratikus mátrixokra kimondott Perron-Frobenius tételek kulcsfontosságú szerepet játszanak az input-output technikán alapuló lineáris modellek elemzésében. Többféle megfogalmazásuk ismert a szakirodalomban, amelyek mindegyike lényegében a következő állításokat fogalmazza meg a nemnegatív, $n \times n$-es irreducibilis A mátrixra.

(i) Az A mátrixnak van olyan valós és pozitív sajátértéke, amely megegyezik az A mátrix spektrál rádiuszával, $\rho(A)$-val;

(ii) $\rho(A)$-hoz hozzárendelhető egy $x > 0$ sajátvektor;

(iii) $\rho(A)$ az A mátrix monoton növekvő függvénye.

Tudománytörténeti szempontból érdemes megjegyezni, hogy Perron a fenti állításokat $A > 0$ feltevéssel bizonyította 1907-ben. Többek között megmutatta azt is, hogy csak egyetlen ilyen $\rho(A)$ létezik. Később, 1912-ben Frobenius enyhített az A mátrixra tett kikötésen és kiterjesztette Perron eredményeit a nemnegatív kvadratikus és irreducibilis mátrixok osztályára.

A tétel egyfajta kiterjesztéseként egy tetszőleges nemnegatív kvadratikus A mátrixra a következő állításokat fogalmazhatjuk meg:

(i) Az A mátrixnak van olyan nemnegatív valós sajátértéke, amelyik megegyezik $\rho(A)$-val; továbbá ez a sajátérték pozitív hacsak A nem reducibilis és az A mátrix normál alakja[3] nem szigorúan felső trianguláris[4] mátrix.

(ii) $\rho(A)$-hoz hozzárendelhető egy $x \geq 0$ sajátvektor;

(iii) $\rho(A)$ az A mátrix nemcsökkenő függvénye.

(A tétel bizonyítását az olvasóra bízzuk.) Az irreducibilis esetre kimondott tételt Frobenius elemi úton bizonyította; később Wielandt (1950) valamivel egyszerűbben, a Brouwer-féle fixponttétel segítségével mutatta meg az állítások helyességét. Őket követően több bizonyítás is napvilágot látott, ezek közül Debreu és Herstein (1953), Karlin (1959), Bellmann (1970), Nikaido (1968), Arrow és Hahn (1972), Murata (1972) és Seneta (1973) bizonyításai érdemelnek említést.

A lineáris eset egy másik irányú kiterjesztésével Mangasarian (1971) foglalkozott. Nevezetesen, a $Cx = \lambda Bx$ általánosított sajátérték-feladat megoldását vizsgálta a $p'B \geq 0$, $p'C \geq 0$ feltevések mellett, ahol B és C $n \times m$-es valós mátrixokat jelölnek, p pedig egy megfelelő n-elemű vektort.

A tétel első nemlineáris kiterjesztését Solow és Samuelson végezték el, majd ezt követően Morishima (1964), Nikaido (1968), Morishima és Fujimoto (1974) foglalkoztak a tétel egy lehetséges nemlineáris esetével, vagyis a $H(x)\,x = \lambda x$ sajátérték-feladat megoldásával, ahol a $H(x)$ az adott dimenziójú euklideszi tér két pontja közötti nemlineáris megfeleltetést jelöli.

E rövid bevezető után nézzük meg az egyes speciális rendszerekben kimondható Perron-Frobenius tételek vizsgálatát. Elemzésünk abban tér el a fenti úttörő munkákban kifejtettektől, hogy közgazdaságilag értelmezhető, erősen nem reducibilis rendszerekben fogalmazzuk meg tételeinket és adunk bizonyításokat.

(a) Lineáris Leontief-rendszer

1. Tétel. *Legyen A egy $n \times n$-es valós és nemnegatív mátrix, azaz ha y egy tetszőleges nemnegatív vektor, akkor Ay szintén nemnegatív. Ekkor a következőket állítjuk:*

(i) *Létezik olyan szemipozitív vektor, $x \geq 0$, amely mellett $Ax = \lambda x$ valamilyen $\lambda \geqq 0$-ra és $\lambda = \rho(A)$.*

(ii) *Létezik olyan szemipozitív vektor, $p \geq 0$, amely mellett $p'A = \lambda p'$ valamilyen $\lambda \geqq 0$-ra és $\lambda = \rho(A)$.*

(iii) *Ha $\lambda \neq \rho(A)$ nincs olyan $p > 0$ vektor, amelyre $p'A = \lambda p'$ teljesülne.*

[3]Egy $n\times n$-es reducibilis A mátrix *normál alakján* a következő szimmetrikus partícionált hipermátrixot értjük:

$$PAP^{-1} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & \cdots & D_{1m} \\ 0 & D_{22} & \cdots & D_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & D_{mm} \end{bmatrix},$$

ahol P egy $n \times n$-es permutáló mátrix, és a D_{jj} $\left(1 \leqq j \leqq m\right)$ mátrixok mindegyike olyan kvadratikus mátrix, amely vagy irreducibils vagy egy 1×1-es nulla mátrix.

[4]Egy $n \times n$-es $T = [t_{ij}]$ mátrix *szigorúan felső trianguláris* mátrix, ha $t_{ij} = 0$ minden $i \geqq j$-re.

(*iv*) *Legyen* $\Gamma = \{\xi \mid p'A \geqq \xi p', p' > 0\}$ *és* $\Lambda = \{\xi \mid p'A \leqq \xi p', p' > 0\}$. *Akkor* $\rho(A) = \rho(A') = \sup\{\xi \mid \xi \in \Gamma\} = \inf\{\xi \mid \xi \in \Lambda\}$.

(*v*) *Legyen* D *egy* $n \times n$*-es valós és nemnegatív mátrix. Ha* $A \geqq D$, *akkor* $\rho(A) \geqq \rho(D)$.

A tétel bizonyítása közismert, ezért erre most itt nem térünk ki.

(b) Lineáris Neumann-rendszer

A tétel megfogalmazásához vezessük be a C és a B valós elemű $n \times m$ típusú mátrixokat. Amennyiben B maximális oszloprangú (illetve C maximális sorrangú) és megadható egy olyan $m \times m$-es X valós mátrix (illetve egy $n \times n$-es Z mátrix), amelyre $C = BX$ (illetve $ZC = B$), akkor $sp(X) \subseteq sp(C_B)$, illetve $sp(Z) \subseteq sp(B'_{C'})$. Ezt bizonyítjuk a következő segédtételben.

1. Segédtétel. *Legyen* X *egy olyan* $m \times m$*-es valós mátrix, amelyre* $C = BX$.

(1.1) $\lambda \in sp(C_B)$ *és* $Cx = \lambda Bx$ *akkor és csak akkor, ha az* $Xx = \lambda x$ *sajátérték-egyenletnek van* $x \neq 0$ *megoldása valamilyen valós* λ *mellett.*

(1.2) $\lambda \in sp(C'_{B'})$ *és* $p'C = \lambda p'B$ *akkor és csak akkor, ha a* $z'X = \lambda z'$ *sajátérték-egyenletnek van* $z' \neq 0'$ *megoldása valamilyen valós* λ *mellett.*

Bizonyítás. (1.1) (*i*) *Elégségesség.* Legyen $\lambda \in sp(X)$; ekkor $Xx = \lambda x$ és $x \neq 0$. Minthogy $BXx = \lambda Bx$, $x \neq 0$ és véve a $BX = C$ helyettesítést, kapjuk: $Cx = \lambda Bx$, $x \neq 0$ és így $\lambda \in sp(C_B)$.

(*ii*) *Szükségesség.* Legyen $\lambda \in sp(C_B)$; ekkor $Cx = \lambda Bx$ és $x \neq 0$. C helyébe BX-et írva és figyelembe véve $Xx = \lambda x$, $x \neq 0$, amiből kapjuk, hogy $\lambda \in sp(X)$.

(1.2) (*i*) *Elégségesség.* Legyen $\lambda \in sp(X)$; ekkor $z'X = \lambda z'$ és $z' \neq 0'$. Mivel $z' = p'B$, ezért behelyettesítve: $p'BX = \lambda p'B$, azaz $p'C = \lambda p'B$, amely szerint már $\lambda \in sp(C_B)$ és így $\lambda \in sp(C'_{B'})$ is.

(*ii*) *Szükségesség.* Legyen $\lambda \in sp(C'_{B'})$, ekkor $p'C = \lambda p'B$, $p' \neq 0'$. Minthogy $C = BX$, ezért $p'BX = \lambda p'B$ és $p' \neq 0'$. Figyelembe véve a $z' = p'B$ összefüggést, kapjuk a $z'X = \lambda z'$, $z' \neq 0'$, és így $\lambda \in sp(X)$.

A $Cx = \lambda Bx$ illetve a $C'p = \lambda B'p$ általánosított sajátérték-feladat Perron-Frobenius tulajdonságait —tudomásom szerint— ez idáig csak O. L. Mangasarian (1971) vizsgálta. A Perron-Frobenius tételek Neumann-rendszerben történő kiterjesztéséhez a C és B mátrixok duális jellemzőinek feltárásán keresztül kísérelt meg eljutni. E célból a lineáris Leontief-rendszerre kimondott Perron, illetve Frobenius tételeket megpróbálta az eredetivel ekvivalensen átfogalmazni, s ezek alapján levezetni azokat a lineáris Neumann-rendszerre. A Perron tételt a következőképpen alakította át: Legyen A egy $n \times n$-es valós mátrix; ha tetszőleges szemipozitív p vektor mellett $A'p > 0$, akkor az A spektrál rádiusza valós és pozitív, és a megfelelő sajátvektor pozitív.

A fentiekben transzformált tétel kikötése két esetet foglal magában: az egyik az eredeti feltétel, vagyis hogy az A pozitív mátrix, a másik pedig, megfelelő esetben A nemnegatív és irreducibilis. (Ennyiben tehát a Mangasarian tétel több, mint Perroné volt: együtt tartalmazza mind Perron, mind Frobenius tételét.) A lineáris Neumann-rendszerre a fenti transzformált állítását —lényegében az E mátrixot B' mátrixszal helyettesítve— a következőképpen vitte át: Legyen C és B két $n \times m$ típusú valós mátrix, és C vagy B maximális oszloprangú; ha $B'p \geq 0$ és $C'p > 0$ tetszőleges szemipozitív p vektorra, akkor a $Cx = \lambda Bx$ általánosított sajátérték problémának van egy diszkrét és véges spektruma, és a legnagyobb abszolút értékű sajátérték (spektrál rádiusz) valós és pozitív, valamint tartozik hozzá pozitív sajátvektor.

A Frobenius tételt a következőképpen transzformálta: ha $p \geqq 0$-ra $A'p \geqq 0$, akkor az A mátrixhoz tartozó spektrál rádiusz valós és nemnegatív, és a megfelelő sajátvektor pozitív. A lineáris Neumann rendszerre ezt így fogalmazta meg: Ha a fenti tulajdonságú C és B mátrixokra $B'p \geqq 0$ és $C'p \geqq 0$, akkor a $Cx = \lambda Bx$ általánosított sajátérték feladatnak van egy diszkrét és véges spektruma, és a legnagyobb abszolút értékű sajátérték valós és nemnegatív, valamint tartozik hozzá szemipozitív sajátvektor. A fentiek alapján világos, hogy Mangasariannak a Frobenius tételt nem sikerült ekvivalensen transzformálnia, hiszen kikötése csak A nemnegativitását biztosítja. Ugyanis, míg Perron a $\rho(A)$-ra vonatkozó tulajdonságokat $A > 0$ feltételezéssel bizonyította, addig Frobénius megmutatta, hogy mindezek a tulajdonságok érvényesek a nemnegatív és irreducibilis mátrixok spektrál rádiuszaira is. Jóllehet, hogy az irodalomban valóban létezik a Frobenius tételnek olyan általánosítása, ami a reducibilis esetet is magában foglalja, de ez a nemnegatív sajátértéket és a szemipozitív sajátvektort tovább specifikálja. Eszerint pl. a sajátérték pozitív, ha A irreducibilis, illetve, ha az A mátrix normál alakja nem szigorúan felső trianguláris mátrix. Ez utóbbi feltevések közül az irreducibilitást, ami éppen a Frobenius tétel lényege, Mangasarian figyelmen kívül hagyta. Ez egyébként csak azzal magyarázható, hogy a problémát pusztán matematikai szempontból vizsgálta. Valójában vizsgálódását nem is egy, a fentiekben bevezetett lineáris Neumann-rendszer keretei között végezte el, amit többek között az is bizonyít, hogy a C, B mátrixok előjelére semmilyen kikötést sem tett. Tanulmányomban megkísérelem most a közgazdasági oldalra helyezni a hangsúlyt, s egy erősen reducibilis (mind technológiailag, mind gazdaságilag) lineáris Neumann-rendszerre kimondott Perron-Frobenius tétel bizonyítását megadni.

Visszatérve Mangasarian Perron tételére, a duális tulajdonságot meghatározó feltételrendszere a lineáris Leontief-rendszer gazdaságilag erősen nem reducibilis jellegét biztosítja, ami ez esetben egyet jelent a technológiai irreducibilitással. Ez viszont már egy szükséges és elégséges feltétele annak, hogy az A mátrix spektrál rádiusza valós és elégséges feltétel legyen, és tartozzon hozzá pozitív sajátvektor. Tételében tehát valójában a Perron-Frobenius tételeket fogalmazza meg. Ennek egyenes következménye, hogy a lineáris Neumann-rendszer gazdaságilag erősen nem reducibilis jellegét biztosítják. Ilyen feltételek mellett tehát az általánosított Perron tétele a Perron-Frobenius tételek kiterjesztésének tekinthető.

Mangasarian nem tett kikötést az általánosított sajátérték-feladatban szereplő strukturális mátrixok előjelére az említett tanulmányában. (Ez egyébként a jelen tanulmányban kifejtett további tételekkel együtt lehetőséget ad a (nem)lineáris tevékenységelemzési modellek eddigieknél mélyebb strukturális tulajdonságinak feltárására, az ezeken alapuló további alkalmazásokra.) Tekintettel arra, hogy most a lineáris Neumann-rendszer keretei között végezzük vizsgálatainkat, ezért a továbbiakban kikötjük a C és a B mátrixok nemnegativitását és feltesszük, hogy eleget tesznek a Kemeny-Morgenstern-Thompson feltételeknek: nevezetesen $Cx \geq 0$ bármely $x \geq 0$-ra, $p'B \geq 0'$ bármely $p \geq 0$-ra. Mangasarian a strukturális mátrixok duális tulajdonságait olyan nagyságrendi relációk kikötése mellett vizsgálta, amelyek —közgazdasági szempontból tekintve— a lineáris Neumann-gazdaság keretei között a rendszernek csak a gazdasági (ir)reducibilitását biztosítják. A Perron-Frobenius tételek lineáris Neumann-rendszerre történő kiterjesztésében most figyelembe vesszük a technológiai (ir)reducibilitás különböző válfajait is.

Egyébként, ha a Mangasarian által megfogalmazott és a C, B struktúramátrixok duális tulajdonságait felölelő tételeket a lineáris Neumann-rendszer keretei között értelmezzük, néhány esetben meglepő, más irányú vizsgálatokból már ismert közgazdasági interpretációt kapunk.

Először vegyük sorba Mangasarian azon dualitási tételeit, amelyek a rendszer különféle gazdaságilag (ir)reducibilis jellegét kifejező matematikai feltételek mellett fogalmazzák meg állításaikat. (Érdekességként megemlítem, hogy ezen állítások jó részét, függetlenül az itt szereplő matematikai kritériumoktól, pusztán csak közgazdasági megfontolások alapján bebizonyítottam egy korábbi tanulmányomban.) Itt most még olyan feltételezéssel is élnünk kell, hogy $n \geqq m$, ami úgy biztosítható, hogy a speciális lineáris Neumann-rendszerünkben csak olyan tevékenységeket szerepeltetünk, amelyek ún. alaptevékenységek, és megengedjük az ikertermelés lehetőségét is. Ezzel biztosan teljesül C vagy B maximális oszloprangúsága, s az ikertermelés következtében a termékek száma meghaladja az alaptevékenységek számát. E feltételek bevezetése után tekintsük az egyes dualitási tételeket a speciális lineáris Neumann-rendszerünk keretei között elsősorban a matematikai kikötések közgazdasági értelmezése szempontjából (a bizonyításokat ld. Mangasarian (1971) tanulmányában):

(*i*) Ha van olyan szemipozitív p vektor, amelyre $p'B \geqq 0'$ és következésképpen $p'C \geqq 0'$, akkor és csak akkor van olyan $X \geqq 0$ mátrix, amelyre $C = BX$ egyenlőség teljesül. Világos, hogy a határeset, vagyis $X = 0$ csak az eredeti Neumann feltevés mellett teljesülhet, azaz ha megengedjük a $C = 0$ esetet is.

(*ii*) Ha van olyan szemipozitív p vektor, amelyre $p'B \geq 0'$ és $p'C \geqq 0'$, akkor és csak akkor van olyan $X \geqq 0$, amelyre teljesül a $C = BX$ egyenlőség. Amennyiben megpróbáljuk értelmezni közgazdaságilag a szükséges és elégséges matematikai kritérium határesetét, vagyis $p'B \not> 0'$ esetet, azt kapjuk, hogy lehetséges néhány ikerterméket kibocsátani anélkül, hogy akárcsak egyetlen egy termékértékből is felhasználtunk volna. A matematikai-közgazdasági szakirodalomból jól ismert, hogy ezt az esetet, az ún. „Eldorádó lehetőségét" (Koopmans) kizárjuk a termelési, illetve értékképző halmazból.

(*iii*) Ha van olyan szemipozitív p vektor, amelyre $p'B \geq 0'$ és $p'C \geq$

$0'$, akkor és csak akkor van olyan $X \geq 0$, amelynek néhány oszlopvektora pozitív és kielégíti a $C = BX$ mátrixegyenletet. A fenti kikötés megengedi a lineáris Neumann-rendszerre mind a gazdaságilag erősen, illetve gyengén reducibilis, mind a gazdaságilag csak gyengén reducibilis, illetve irreducibilis struktúrákat.

(iv) Ha van olyan szemipozitív p vektor, amelyre $p'B \geq 0'$ és $p'C > 0'$, akkor és csak akkor van olyan $X > 0$, amelyre $C = BX$. A tételben megfogalmazott szükséges és elégséges feltétel a lineáris Neumann-rendszer gazdaságilag erősen nem reducibilis jellegét biztosítja, ami viszont az X mátrix pozitivitását és ezzel az általánosított sajátérték-egyenlet egyértelmű megoldását adja.

Amennyiben olyan lineáris Neumann-rendszert vizsgálunk, amelyben $n < m$, azaz az egyes termékek előállítására több tevékenység is rendelkezésre áll, és C vagy B maximális sorrangú, akkor az 1. Segédtétel és a fenti dualitási tételek a lineáris Neumann-rendszer technológiai szempontból történő strukturális kikötései mellett a következőképpen módosulnak.

2. Segédtétel. *Legyen Z egy olyan $n \times n$-es mátrix, amelyre $B = ZC$.*

(2.1) *$\lambda \in sp(B'_{C'})$ és $\lambda p'C = p'B$, akkor és csak akkor, ha a $p'Z = \lambda p'$ sajátérték-egyenletnek van $p' \neq 0'$ megoldása valamilyen valós λ mellett.*

(2.2) *$\lambda \in sp(B_C)$ és $\lambda Cx = Bx$ akkor és csak akkor, ha a $Zq = \lambda q$ sajátérték-egyenletnek van $q \neq 0$ megoldása valamilyen valós λ mellett, ahol $q = Cx$.*

A 2. Segédtétel bizonyítása az 1. Segédtétel bizonyításához hasonlóan végezhető el.

Ismeretes, hogy a gazdaság lineáris modelljei adott technológiai összefüggések figyelembe vételével egyrészt a termelési szintek, másrészt az ár(érték)-szintek alakulását írják le. Ez jelenti e modellek duális jellegét, amely alkalmassá teszi e modelleket a dualitás problémakörének, azaz a használati érték és az érték vizsgálatára. Ennek értelmében a C, B struktúra-mátrixok duális tulajdonságait meghatározó tételeket megfogalmazhatjuk a lineáris Neumann-rendszer technológiai (ir)reducibilitásának függvényében is. Minthogy az (ii) állításnak nem adható megfelelő közgazdasági interpretáció, ezért itt már el is tekintünk tőle. A bizonyítások a rendszer gazdasági (ir)reducibilitására tett kikötések mellett megfogalmazott állítások bizonyításaihoz hasonlóan végezhetők el.

(i') Ha van olyan szemipozitív x vektor, amelyre $Cx \geqq 0$ és $Bx \geqq 0$, akkor és csak akkor van olyan $Z \geqq 0$ mátrix, amelyre a $B = ZC$ egyenlőség teljesül. A $Z = 0$ határeset itt is csak az eredeti Neumann feltevés mellett teljesülhet, azaz ha megengedjük a $B = 0$ esetet is.

(iii') Ha van olyan szemipozitív x vektor, amelyre $Cx \geq 0$ és $Bx \geq 0$, akkor és csak akkor van olyan $Z \geq 0$, amelynek néhány sorvektora pozitív és kielégíti a $B = ZC$ mátrix-egyenletet. A fenti kikötés most mind a technológiailag erősen, illetve gyengén reducibilis, mind a technológiailag csak gyengén reducibilis, illetve irreducibilis struktúrákat megengedi.

(iv') Ha van olyan szemipozitív x vektor, amelyre $Cx \geq 0$ és $Bx > 0$, akkor és csak akkor van olyan $Z > 0$, amelyre $B = ZC$. A tételben megfogalmazott szükséges és elégséges feltétel most a lineáris Neumann-rendszer technológiailag erősen nem reducibilis jellegét biztosítja, ami viszont a Z pozitivitását és ezzel az általánosított sajátérték-egyenlet egyértelmű megoldását adja.

Ezek után rátérhetünk a Perron-Frobenius tételek lineáris Neumann-rendszerben történő megfogalmazására, illetve bizonyítására. A félreértések elkerülése végett szükségesnek tartom kihangsúlyozni, hogy itt valóban a Frobenius tétel általánosítását fogalmazzuk meg; vagyis a lineáris Leontief-rendszer irreducibilis jellege egyfajta általánosításaként tekinthető technológiailag és/ vagy gazdaságilag erősen nem reducibilis lineáris Neumann-rendszer strukturális sajátossága biztosítja a Frobenius tétel feltételeit.

Az 1. Definíció lineáris Neumann-rendszerre történő értelmezése során rámutattunk: ha $n < m$, akkor a $Cx = \lambda Bx$ sajátérték-feladat; ha $n > m$, akkor pedig a $\lambda p'C = p'B$ sajátérték-feladat megoldása kap prioritást. Következésképpen az első esetben a rendszer gazdasági szempontból történő strukturális jellegére, a második esetben pedig a rendszer technológiai strukturális jellegére tett kikötések mellett fogalmazzuk meg a Perron-Frobenius tételeket.

2. Tétel. *Legyen C és B két $n \times m$ típusú nemnegatív valós mátrix, amelyek leírják a rendszer technikai-technológiai összefüggéseit. Tegyük fel továbbá, hogy eleget tesz a Kemeny-Morgenstern-Thompson kikötéseknek. Ekkor a következőket állíthatjuk:*

(2.1) ($n \leqq m$ eset):

(i) A $p'B = \lambda p'C$ sajátérték-egyenletnek van szemipozitív p megoldása valamilyen $\lambda \geqq 0$-ra; ha a rendszer technológiailag erősen nem reducibilis, akkor $p > 0$; sőt még ha emellett $r(C) = n$ is teljesül, akkor $\lambda = \rho(B'_{C'}) > 0$.

(ii) Ha B vagy C maximális sorrangú, akkor $\{x \mid Bx = \lambda Cx,\ x \geq 0\} \neq 0$ valamilyen $\lambda \geqq 0$-ra. Ha a rendszer technológiailag irreducibilis, akkor a szemipozitív x megoldásvektor $\lambda > 0$ mellett adódik. Ha még $m = n$ is teljesül, akkor $\lambda = \rho(B_C) = \rho(B'_{C'}) > 0$.

(iii) Ha B vagy C maximális sorrangú és a rendszer technológiailag erősen nem reducibilis, akkor teljesülnek az alábbi implikációk:

- *ha $Bx \leqq \nu Cx$, akkor $\rho(B'_{C'}) \leqq \nu$;*
- *ha $\mu Cx \leqq Bx$, akkor $\mu \leqq \rho(B'_{C'})$;*
- *ha $Bx = \lambda Cx$, akkor $\lambda = \rho(B'_{C'})$.*

Ha $m = n$ (azaz C és B kvadratikusak és ezért C vagy B nemszinguláris), akkor $\mu \leqq \rho(B'_{C'}) = \lambda = \rho(B_C) \leqq \nu$.

(iv) Legyen a rendszer technológiai értelemben irreducibilis, $m = n$ és B vagy C nemszinguláris mátrix, továbbá $\Gamma = \{\xi \mid Bx \geqq \xi Cx,\ x \geq 0\}$, $\Lambda = \{\zeta \mid Bx \leqq \zeta Cx,\ x \geq 0\}$. Ekkor

$$\rho(B'_{C'}) = \rho(B_C) = \max_{\xi \in \Gamma} \xi = \min_{\zeta \in \Lambda} \zeta\,.$$

(v) Legyen $m = n$, D egy $n \times n$-es nemnegatív mátrix és C nemszinguláris mátrix. Ha $\{x \mid Dx \geqq 0$ és $(B - D)x \geqq 0,\ x \geq 0\} \neq \emptyset$, akkor $\rho(D_C) \leqq \rho(B_C)$, illetve, ha $\{x \mid Dx \geqq 0$ és $(D - B)x \geqq 0,\ x \geq 0\} \neq \emptyset$, akkor $\rho(D_C) \geqq \rho(B_C)$.

Amennyiben a rendszer technológiailag erősen nem reducibilis, ahhoz, hogy a fenti állítások teljesüljenek, D mátrixnak irreducibilisnek kell lennie (azaz $Dx > 0$ minden $x \geq 0$-ra), és szemiegyenlőtlenségnek kell fennállnia. Ha még C szimmetrikus is, vagy ha $(B - D)$ vagy $(D - B)$ irreducibilis, akkor a $\rho(D_C)$ és $\rho(B_C)$ között szigorú egyenlőtlenség áll fenn.

(2.2) ($n \geqq m$ eset):

(i) A $Cx = \lambda Bx$ sajátérték-egyenletnek van szemipozitív x megoldása valamilyen $\lambda \geqq 0$-ra; ha a rendszer gazdaságilag erősen nem reducibilis, akkor $x > 0$, sőt még ha B maximális oszloprangú, akkor $\lambda = \rho(C_B) > 0$.

(ii) Ha $r(C)$ vagy $r(B) = m$, akkor az $\{y \mid C'y = \lambda B'y,\, y \geq 0\} \neq \emptyset$ valamilyen $\lambda \geqq 0$-ra. Ha a rendszer gazdaságilag irreducibilis, akkor a szemipozitív y megoldásvektor $\lambda > 0$ mellett adódik. Ha még $m = n$ is teljesül, akkor $\lambda = \rho(C'_{B'}) = \rho(C_B) > 0$.

(iii) Ha C vagy B maximális oszloprangú és a rendszer gazdaságilag erősen nem dekompozábilis, akkor teljesülnek az alábbi implikációk:

- *ha $C'y \leqq \nu B'y$, akkor $\rho(C_B) \leqq \nu$;*
- *ha $\mu B'y \leqq C'y$, akkor $\mu \leqq \rho(C_B)$;*
- *ha $C'y = \lambda B'y$, akkor $\lambda = \rho(C_B)$.*

Ha $m = n$ (azaz C és B kvadratikus mátrixok, következésképpen C vagy B nemszinguláris), akkor $\mu \leqq \rho(C_B) = \lambda = \rho(C'_{B'}) \leqq \nu$.

(iv) Legyen a rendszer gazdasági értelemben irreducibilis, $m = n$ és B vagy C nemszinguláris mátrix, továbbá $\Gamma = \{\xi \mid C'y \geqq B'y,\, y \geq 0\}$ és $\Lambda = \{\zeta \mid C'y \leqq \zeta B'y, y \geq 0\}$. Ekkor $\rho(C_B) = \rho(C'_{B'}) = \max_{\xi\in\Gamma}\xi = \min_{\zeta\in\Lambda}\zeta$.

(v) Legyen $m = n$, D egy $n \times n$-es nemnegatív mátrix és B nemszinguláris mátrix. Ha $\{y \mid D'y \geqq 0$ és $(C' - D')y \geqq 0,\, y \geq 0\} \neq \emptyset$, akkor $\rho(D_B) = \rho(D'_{B'}) \leqq \rho(C'_{B'}) = \rho(C_B)$, ill., ha $\{y \mid D'y \geqq 0$ és $(D' - C')y \geqq 0,\, y \geq 0\} \neq \emptyset$, akkor $\rho(D_B) = \rho(D'_{B'}) \geqq \rho(C'_{B'}) = \rho(C_B)$.

Amennyiben a rendszer gazdaságilag erősen nem reducibilis, ahhoz, hogy a fenti állítások teljesüljenek, a D mátrixnak irreducibilisnek kell lennie (azaz $D'y > 0$ minden $y \geq 0$-ra), szemiegyenlőtlenségnek kell fennállnia. Ha még B szimmetrikus is, vagy ha $(C' - D')$ vagy $(D' - C')$ irreducibilis, akkor $\rho(D_B)$ és $\rho(C_B)$ között szigorú egyenlőtlenségnek kell fennállnia.

Bizonyítás.

(2.1) ($n \leqq m$ eset):

(*i*) A C, B struktúramátrixok duális tulajdonságait meghatározó (i'-iv') tételek értelmében létezik olyan $n \times n$-es Z mátrix, amelyre $ZC = B$ és $Z \geqq 0$. Frobenius tétel általánosításából következik, hogy létezik a Z mátrixhoz tartozó olyan valós és nemnegatív λ sajátérték, amely egyenlő a mátrix spektrál rádiuszával, $\rho(Z)$-vel és ezen λ-hoz tartozik valós és szemipozitív sajátvektor, azaz

$$Zq = \lambda q, \quad q \geq 0, \quad \lambda = \rho(Z) \geqq 0 \tag{6}$$

és

$$p'Z = \lambda p', \quad p' \geq 0\,. \tag{7}$$

A (2.1) segédtétel és a fenti (6) és (7) összefüggések szerint azt kapjuk a $\lambda = \rho(Z)$-re, hogy $p'B = \lambda p'C$, $p' \geq 0'$, $\lambda \geqq 0$, és innen $\lambda \in sp(B'_{C'})$. Ha a rendszer technológiailag erősen nem reducibilis, azaz $\{x \mid Cx \geq 0,\ x \geq 0\} \neq \emptyset$ és $Cx \geq 0$ mellett $Bx > 0$ teljesül, akkor a (iv') tétel értelmében $Z > 0$, amelyhez tartozik pozitív sajátérték és egyértelműen meghatározott pozitív sajátvektor. Ha még $r(C) = n$ is teljesül, akkor $\lambda = \rho(B'_{C'})$ mivel a (2.1) segédtétel szerint $sp(Z)$ tartalmazza $sp(B'_{C'})$-t és a $\lambda = \rho(Z)$ szintén benne van $sp(B'_{C'})$-ben.

(ii) A (2.2) segédtétel és az (6) és (7) összefüggések alapján azt kapjuk, hogy $\lambda = \rho(Z)$, $Bx = \lambda Cx$, $Cx \geq 0$, $\lambda \geqq 0$ és innen $\lambda \in sp(B'_{C'})$. Ha a rendszer technológiailag irreducibilis, azaz $Cx > 0$ minden szemipozitív x vektorra, akkor a (iv') tétel értelmében $Z > 0$, amelyhez az 1. Tétel értelmében $\lambda > 0$ sajátérték tartozik. Ha még $m = n$ is teljesül, akkor $\lambda = \rho(B_C)$ minthogy a (2.2) segédtétel szerint $sp(Z)$ tartalmazza $sp(B_C)$-t és $\lambda = \rho(Z)$ szintén benne van $sp(B_C)$-ben. Ezek alapján már könnyen belátható, hogy $\lambda = \rho(B'_{C'}) = \rho(B_C)$.

(iii) A strukturális feltételek értelmében $Cx \geq 0$ és $Bx > 0$ minden szemipozitív x vektorra. A fenti (i) szerint $\{p \mid p'B = \lambda p'C,\ p > 0,\ \lambda \geqq 0\} \neq \emptyset$ és így $\lambda = \rho(B'_{C'})$. Ebből következően $\nu p'Cx \geqq p'Bx = \lambda p'Cx$, ami azt jelenti, hogy $\nu \geqq \lambda$, mivel $p'Cx > 0$. Legyen most $\mu Cx \leqq Bx$ és $Cx \geq 0$. Ismételten kihasználva a fenti (i)-t, kapjuk $\mu p'Cx \leqq p'Bx = \lambda p'Cx$ és ebből $\mu \leqq \lambda$, mert $p'Cx > 0$. Amennyiben $Bx = \lambda Cx$ és $Cx \geq 0$, akkor a fenti két implikáció egyidejűleg teljesül, ami azt jelenti, hogy $\rho(B'_{C'}) \leqq \lambda \leqq \rho(B'_{C'})$, amiből viszont a $\lambda = \rho(B'_{C'})$következik. Ha mind a B, mind a C kvadratikus mátrix, akkor az előzőek alapján könnyen belátható, hogy $\mu \leqq \rho(B_C) = \lambda = \rho(B'_{C'}) \leqq \nu$.

(iv) Mind a diszkrét, mind a folytonos esetben e fenti (iii) szerint azt kapjuk, hogy ha $\xi \in \Gamma$, akkor $\xi \leqq \rho(B_C) = \rho(B'_{C'})$, valamint ha $\zeta \in \Lambda$, akkor $\zeta \geqq \rho(B_C) = \rho(B'_{C'})$. Az előzőekben bebizonyított (ii) állítás szerint azonban a $\lambda = \rho(B_C)$ kielégíti a $Bx = \lambda Cx$, $Cx \geq 0$ rendszert $x \geq 0$ mellett és így $\lambda = \rho(B_C)$ egy pont a Γ és Λ halmazok metszetében. Ebből már következik állításunk helyessége.

(v) Legyen $\Gamma' = \{\xi \mid Dx \geqq \xi Cx,\ Cx > 0\}$ és $\Lambda' = \{\zeta \mid Dx \leqq \zeta Cx,\ Cx > 0\}$, továbbá $Cx \geqq 0$ valamilyen szemipozitív x vektorra, amiből következik, hogy $Dx \geqq 0$, $(B - D)x \geqq 0$. A fenti (iv) szerint azt kapjuk, hogy $\rho(B_C) = \rho(B'_{C'}) = \sup_{\xi\in\Gamma}\xi$ és $\rho(D_C) = \rho(D'_{C'}) = \sup_{\xi\in\Gamma'}\xi$. Minthogy $Cx > 0$ és $Bx \geqq Dx$, kapjuk $\Gamma' \subset \Gamma$ és innen

$$\rho(D_C) = \rho(D'_{C'}) = \sup_{\xi\in\Gamma'} \xi \leqq \sup_{\xi\in\Gamma} \xi = \rho(B'_{C'}) = \rho(B_C)\ .$$

Hasonlóan, legyen $Cx \geqq 0$ valamilyen szemipozitív x vektorra, következésképpen $Dx \geqq 0$ és $(D - B)x \geqq 0$. A fenti (iv) szerint most azt kapjuk, hogy $\rho(B_C) = \rho(B'_{C'}) = \inf_{\zeta\in\Lambda}\zeta$, és $\rho(D_C) = \rho(D'_{C'}) = \inf_{\zeta\in\Lambda'}\zeta$. Mivel $Cx > 0$ és $Dx \geqq Bx$, kapjuk $\Lambda' \subset \Lambda$, és innen

$$\rho(D_C) = \rho(D'_{C'}) = \inf_{\zeta\in\Lambda'} \zeta \geqq \inf_{\zeta\in\Lambda} \zeta = \rho(B'_{C'}) = \rho(B_C)\ .$$

A fentiek alapján most már könnyen belátható, hogy ha a rendszer gazdaságilag erősen nem reducibilis, ahhoz, hogy az állítások teljesüljenek, a D

mátrixnak irreducibilisnek kell lennie (azaz $Dx > 0$ minden szemipozitív x vektorra). A bizonyítás során értelemszerűen —a folytonosság következtében— $\max \xi$, illetve $\min \zeta$ szerepel.

Amennyiben C szimmetrikus, tegyük fel az állításunkkal szemben, hogy $\rho(D_C) = \rho(B_C) = \lambda$. Meg fogjuk mutatni, hogy ez ellentmondáshoz vezet. Jelen tétel (i) és (ii) állításaiból kapjuk, hogy $\lambda > 0$ és $p'D = \lambda p'C$, $p' > 0'$, és $Bx = \lambda Cx$, $Cx > 0$. Minthogy $Cx > 0$, következésképpen $Bx \geq Dx$ (vagy $Bx \leq Dx$), ezért $p'Bx > p'Cx$ (vagy $p'Bx < p'Cx$), ami ellentmond annak a ténynek, hogy $p'Bx = \lambda p'Cx = \lambda p'C'x = p'Dx$. Ezért $\rho(D_C) \neq \rho(B_C)$. Ha C nem szimmetrikus, de $Cx \geq 0$ és $(B - D)x > 0$, akkor $\rho(B_C) = \rho(B'_{C'}) = \max_\xi \{\xi \mid Bx \geqq \xi Cx,\ Cx > 0\}$, amely viszont az (iv) alapján nagyobb, mint $\max_\xi \{\xi \mid Dx \geqq \xi Cx,\ Cx > 0\}$. Mivel a $Cx > 0$ összefüggésből következik $Bx > Dx$, ezért $\max_\xi \{\xi \mid Dx \geq \xi Cx,\ Cx > 0\} = \rho(D_C) = \rho(D'_{C'})$. Ebből viszont már következik állításunk helyessége. Hasonlóan mutatható meg, ha $Cx \geq 0$ és $(D - B)x > 0$, akkor $\rho(B_C) = \rho(B'_{C'}) < \rho(D_C) = \rho(D'_{C'})$.

A (2.2) ($n > m$ eset) bizonyítása hasonlóképpen végezhető el.

(c) Nemlineáris Leontief-rendszer

A szakirodalomban a nemlineáris Leontief-rendszerben megfogalmazható Perron-Frobenius tételeket a $H(x) = \lambda x$ nemlineáris sajátérték egyenlet $x \neq 0$ megoldásaként vizsgálják (ld. például, Nikaido (1968), Morishima és Fujimoto (1974), és Fujimoto (1979) műveit). Itt most ezektől eltérően, megőrizve elemzésünk eddigi logikáját, a nemlineáris rendszer struktúráját meghatározó $A(x)$ Jacobi mátrix felhasználásával fogalmazzuk meg a tételeket. A $H(x)$-re tett lineáris homogenitás kikötésből következően könnyen belátható, hogy az egyes szektorok kibocsátás-szintjeinek arányos változására invariáns a nemlineáris rendszer ráfordítási struktúrája, azaz $A(\theta x) = A(x)$, ahol θ tetszőleges pozitív valós szám. Az egyszerűség kedvéért jelöljük a rendszer spektrál rádiuszát λ^*-val, vagyis $\rho[A(x)] = \lambda^*$.

3. Tétel. *Legyen $A(x) \geq 0$ minden szemipozitív x vektorra és irreducibilis Morishima értelemben. Ekkor a következőket állítjuk:*

(i) Az $A(x)x = \lambda x$ nemlineáris sajátérték-egyenletnek létezik $\lambda^* > 0$ és $x^* > 0$ megoldása.

(ii) A λ^*-hoz csak egyetlen egy pozitív sajátvektor tartozik és $\lambda^* \geqq |\lambda_i|$, ahol λ_i az $A(x)$-hez tartozó tetszőleges sajátérték.

(iii) x^* az egyetlen $A(x)$-hez tartozó szemipozitív sajátvektor.

Bizonyítás. (i) Az általánosság megsértése nélkül a bizonyítást elegendő elvégezni a (2.F) alapján a következő halmazon: $S = \{x \geq 0 \mid \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$. Tekintsük az $f : S \to R_+^n$ függvényt az alábbiak szerint definiálva:

$$f_i(x) = \frac{\sum_{j=1}^n a_{ij}(x)\, x_j}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(x)\, x_j}$$

minden $i = 1, 2, \ldots, n$-re. A feltevések értelmében néhány $f_i(x)$ pozitív értéket vesz fel, és $\sum_{i=1}^n f_i(x) = 1$. Minthogy f egy folytonos leképezést jelöl S-ből S-be, a Brouwer-féle fixponttétel szerint létezik olyan $x^* \in S$ pont, amelyre $f(x^*) = x^*$, vagyis $A(x^*)x^* = [1'A(x^*)x^*]x^*$. A rendszer irreducibilitásából következően $A(x^*)x^* \geq 0$ és így $1'A(x^*)x^* > 0$, azaz $1'A(x^*)x^*$-t λ^*-nak véve, $\lambda^* > 0$ kapjuk.

Állításunk második részének bizonyításához tegyük fel, hogy $x^* \not> 0$. Partícionáljuk az x^* vektort megfelelő átrendezéssel a következőképpen: $x^{*\prime} = [x_1^{*\prime}, 0']$, ahol $x_1^* > 0$, és ennek megfelelően szimmetrikus átrendezéssel partícionáljuk $A(x)$-et is. Ekkor

$$\begin{pmatrix} A_{11}(x^*) & A_{12}(x^*) \\ A_{21}(x^*) & A_{22}(x^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^* \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1^* \\ 0 \end{pmatrix},$$

amely egyenlőség viszont csak úgy teljesülhet, ha $A_{21}(x^*)x_1^* = 0$. Tekintettel $x_1^* > 0$, ezért $A_{21}(x^*)x_1^* = 0$, ami ellentmond a rendszer irreducibilitásának, vagyis $x^* > 0$.

(ii) Tegyük fel, hogy $A(\widehat{x})\widehat{x} = \lambda^*\widehat{x}$, $\widehat{x} \neq x^*$ és $\widehat{x} \geq 0$. Az (i) szerint $\widehat{x} > 0$. Legyen $\theta = \max_i(\widehat{x}_i/x_i^*) = \widehat{x}_r/x_r^* > 0$. Ekkor $\theta x^* \geq \widehat{x}$. Figyelembe véve, hogy $\lambda^*\theta x_r^* = \lambda^*\widehat{x}_r = \sum_{j=1}^n a_{rj}(\widehat{x})\widehat{x}_j$ és az (5.F), (6.F), valamint a (3.F) szerint kapjuk:

$$\sum_{j=1}^n a_{rj}(\widehat{x})\widehat{x}_j < \theta \sum_{j=1}^n a_{rj}(\theta x^*)x_j^* = \theta \sum_{j=1}^n a_{rj}(x^*)x_j^* = \lambda^*\theta x_r^*,$$

azaz $\lambda^*\theta x_r^* < \lambda^*\theta x_r^*$. A kapott ellentmondásból következik, hogy λ^*-hoz nem tartozhat másik szemipozitív sajátvektor.

A $\lambda^* \geqq |\lambda_i|$ bizonyításához tegyük fel, hogy van egy olyan $\lambda_i = \widehat{\lambda}$ sajátérték, amelyre $|\widehat{\lambda}| > \lambda^*$ és így $A(x)x = \widehat{\lambda}x$, $x \neq 0$ per definitionem. Legyen $y_i = |x_i|$ és $y = [y_i]$, valamint $I = \{i \mid x_i \neq 0\}$ és $\gamma = \min_{i \in I}(x_i^*/|x_i|) = x_r^*/y_r > 0$. Jelölje $z = x^* - \gamma y \geqq 0$. Az (5.$F$) alapján ismét felírhatjuk: $A(y)y \geqq A(x)x = |\widehat{\lambda}x| = |\widehat{\lambda}|y > \lambda^* y$; továbbá $A(z+\gamma y)(z+\gamma y) = A(x^*)x^* = \lambda^* x^* = \lambda^*(z+\gamma y) < \lambda^* z + \gamma|\widehat{\lambda}|y \leqq \lambda^* z + \gamma A(y)y$. Így

$$A(z+\gamma y)(z+\gamma y) - \gamma A(y)y < \lambda^* z\,.$$

Ha $z_r = 0$, a monotonitás és a nemlineáris rendszer irreducibilitása miatt ismét azt kapjuk, hogy $\sum_{j=1}^n a_{rj}(z+\gamma y)(z_j+\gamma y_j) > \gamma \sum_{j=1}^n a_{rj}(y)y_j$. Az utolsó két egyenlőtlenség most is ellentmondáshoz vezet, ezért $\lambda^* \geqq |\lambda_i|$.

(iii) Tegyük fel, hogy van olyan $\lambda_i = \lambda$ és szemipozitív x vektor, amelyekre $A(x)x = \lambda x$. A rendszer irreducibilitásából következően $\lambda > 0$. Tegyük fel továbbá, hogy $x \not> 0$. Ekkor az (i) bizonyításával megegyezően azt kapjuk, hogy $x > 0$. Definiáljuk θ-t az (ii)-belihez hasonlóan. Ekkor ismét kihasználva az 5.F, 6.F feltevéseket, kapjuk: $\lambda\theta x_r^* = \lambda x_r = \sum_{j=1}^n a_{rj}(x)x_j < \theta \sum_{j=1}^n a_{rj}(\theta x^*)x_j^* = \theta \sum_{j=1}^n a_{rj}(x^*)x_j^* = \lambda^*\theta x_r^*$. Ezért $\lambda < \lambda^*$. Definiáljuk a $\rho = \max_i(x_i^*/x_i) = x_k^*/x_k > 0$; $\rho x \geqq x^*$. Ezek alapján most a $\lambda^*\rho x_k < \lambda\rho x_k$ összefüggéshez juthatunk, ami viszont a $\lambda^* < \lambda$ relációt tartalmazza. Az ellentmondásból következik, hogy x^* valóban az egyetlen $A(x)$-hez tartozó szemipozitív sajátvektor.

A nemlineáris Leontief-rendszerhez tartozó $\rho[A(x)] = \lambda^*$ spektrál rádiuszra is hasonló tulajdonságok fogalmazhatók meg, mint a lineáris esetben.

(d) Nemlineáris Neumann-rendszer

Jelölje $C(x)$, illetve $B(x)$ a nemlineáris rendszerhez tartozó Jacobi mátrixokat, amelyek az egyes tevékenységek egységnyi alkalmazási szintjei mellett történő termékfelhasználások, illetve kibocsátások nemlineáris változását írják le a megfelelő x vektorra vonatkozóan. Legyen K_1 egy olyan konvex kónusz az R^m_+-ben, amelyre a $B(x)$ és/vagy $C(x)$ maximális sorrangú, ahol $x \in K_1$. Hasonlóképpen jelöljön K_2 egy olyan konvex kónuszt az R^m_+-ben, amelynek x pontjaiban a $B(x)$ és/vagy $C(x)$ maximális oszloprangú. Ekkor a lineáris esetben megfogalmazott tételek kiterjesztései a következők.

4. Tétel.

(4.1) *($n \leqq m$ eset):*

(i) A $\{p \mid p'B(x) = \lambda p'C(x),\, p \geq 0,\, x \in K_1\} \neq \emptyset$ *valamilyen* $\lambda \geqq 0$*-ra; ha a rendszer technológiailag erősen nem reducibilis, akkor* $p > 0$*; sőt még ha emellett* $r[C(x)] = n$ *az* $x \in K_1$*-re teljesül, akkor* $\lambda = \rho\left[B'(x)_{C''(x)}\right] > 0$.

(ii) Az $\{x \mid B(x)x = \lambda C(x)x,\, x \geq 0,\, x \in K_1\} \neq \emptyset$ *valamilyen* $\lambda \geqq 0$*-ra. Ha a rendszer technológiailag irreducibilis, akkor a szemipozitív* x *megoldásvektor* $\lambda > 0$ *mellett adódik. Ha* $m = n$ *is teljesül, akkor* $\lambda = \rho\left[B(x)_{C(x)}\right] = \rho\left[B'(x)_{C'(x)}\right] > 0$.

(iii) Ha a rendszer technológiailag erősen nem reducibilis, akkor teljesülnek az alábbi implikációk az $x \in K_1$*-re:*

– *ha* $B(x)x \leqq \nu C(x)x$*, akkor* $\rho\left[B'(x)_{C'(x)}\right] \leqq \nu$;

– *ha* $\mu C(x)x \leqq B(x)x$*, akkor* $\mu \leqq \rho\left[B'(x)_{C'(x)}\right]$;

– *ha* $B(x)x = \lambda C(x)x$*, akkor* $\lambda = \rho\left[B(x)_{C(x)}\right]$.

Ha $m = n$*, akkor* $\mu \leqq \rho\left[{}'(x)_{C'(x)}\right] = \lambda = \rho\left[B(x)_{C(x)}\right] \leqq \nu$.

(iv) Legyen a rendszer technológiai értelemben reducibilis, $m = n$*, továbbá* $\Gamma = \{\xi \mid B(x)x \geqq \xi C(x)x,\, x \geq 0,\, x \in K_1\}$, $\Lambda = \{\zeta \mid B(x)x \leqq \zeta C(x)x,\, x \geq 0,\, x \in K_1\}$*. Ekkor*

$$\rho\left[B'(x)_{C'(x)}\right] = \rho\left[B(x)_{C(x)}\right] = \max_{\xi\in\Gamma} \xi = \min_{\zeta\in\Lambda} \zeta\,.$$

(4.2) *($n \geqq m$ eset):*

(i) Az $\{x \mid C(x)x = \lambda B(x)x,\, x \geq 0,\, x \in K_2\} \neq \emptyset$ *valamilyen* $\lambda \geqq 0$*-ra; ha a rendszer gazdaságilag erősen nem reducibilis, akkor* $x > 0$*, sőt még ha* $r[B(x)] = m$ *az* $x \in K_2$*-re is teljesül, akkor* $\lambda = \rho\left[C(x)_{B(x)}\right] > 0$.

(ii) Az $\{y \mid C'(x)y = \lambda B'(x)y,\, y \geq 0,\, x \in K_2\} \neq \emptyset$ *valamilyen* $\lambda \geqq 0$*-ra. Ha a rendszer gazdaságilag erősen reducibilis, akkor a szemipozitív* y

megoldásvektor $\lambda > 0$ *mellett adódik. Ha még* $n = m$ *is teljesül, akkor* $\lambda = \rho\left[C'(x)_{B'(x)}\right] = \rho\left[C(x)_{B(x)}\right] > 0$.

(*iii*) *Ha a rendszer gazdaságilag erősen nem reducibilis, akkor* $x \in K_2$ *mellett teljesülnek az alábbi implikációk:*

– *ha* $C'(x)y \leqq \nu B'(x)y$, *akkor* $\rho\left[C(x)_{B(x)}\right] \leqq \nu$;

– *ha* $\mu B'(x)y \leqq C'(x)y$, *akkor* $\mu \leqq \rho\left[C(x)_{B(x)}\right]$;

– *ha* $C'(x)y = \lambda B'(x)y$, *akkor* $\lambda = \rho\left[C(x)_{B(x)}\right]$.

Ha $m = n$, *akkor* $\mu \leqq \rho\left[C(x)_{B(x)}\right] = \lambda = \rho\left[C'(x)_{B'(x)}\right] \leqq \nu$.

(*iv*) *Legyen a rendszer gazdasági értelemben irreducibilis,* $m = n$, *valamint* $\Gamma = \{\xi \mid C'(x)y \geqq \xi B'(x)y,\ y \geq 0,\ x \in K_2\}$, $\Lambda = \{\zeta \mid C'(x)y \leqq \zeta B'(x)y,\ y \geq 0,\ x \in K_2\}$. *Ekkor*

$$\rho\left[C(x)_{B(x)}\right] = \rho\left[C'(x)_{B'(x)}\right] = \max_{\xi\in\Gamma}\xi = \min_{\zeta\in\Lambda}\zeta\,.$$

Az állítások a 2. Tételhez hasonlóan bizonyíthatók be. Ebben az esetben is a nemlineáris Neumann-rendszerhez tartozó $\rho\left[B(x)_{C(x)}\right]$, illetve $\rho\left[C(x)_{B(x)}\right]$ spetrál rádiuszokra különböző tulajdonságokat fogalmazhatunk meg.

5 Nemlineáris Neumann modell megoldása

A modell megoldásával kapcsolatban két probléma vetődik fel: az egzisztencia és az unicitás bizonyítása. Az egzisztencia bizonyítása nyomban adódik a nemlineáris rendszerre az előző pontban megfogalmazott Perron-Frobenius tételből. Az unicitásra a következő tételt fogalmazhatjuk meg:

5. Tétel (unicitás). *Ha a* $[C(x), B(x)]$ *Jacobi mátrixokkal megadott nemlineáris Neumann gazdaság technológiailag és/vagy gazdaságilag erősen nem reducibilis, akkor csak egyetlen* $\alpha_0 = \beta_0$ *mellett létezik megoldása a nemlineáris Neumann modellnek.*

A bizonyítás könnyen elvégezhető; a lineáris esetre adott bizonyítást lásd in Móczár (1995). Amennyiben a Neumann gazdaság erősen reducibilis, több egyensúlyi állapot létezik (lásd in Móczár (1997)). Minél nagyobb növekedési ütemet kívánunk elérni, annál több termékcsoport kibocsátásáról kell lemondanunk, illetve, fordítva, minél több terméket kívánunk kibocsátani, annál kisebb növekedési ütemmel fejlődhetünk.

Matematikai szempontból különösen érdekes az az eset, amikor a $C(x)$ fajlagos inputfüggvény-halmaz csupa konvex függvényekből, a $B(x)$ fajlagos outputfüggvény-halmaz pedig csupa konkáv függvényekből áll. Ilyen speciális esetben a rendszer egyensúlyi állapotaira a konvex analízis segítségével végezhetünk elemzéseket. A függvényekre tett specifikáció a közgazdasági elméletben megfeleltethető az U-alakú költséggörbéknek, illetve a csökkenő hozadék elvének.

Irodalom

1. Arrow, K. J. (1979): *Egyensúly és döntés (Válogatott tanulmányok)*, Budapest, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó
2. Arrow, K. J. and F. N. Hahn (1972): *General competitive analysis*, Edinburgh, Holden-Day Co.
3. Bellman, R. (1970): *Introduction to Matrix Analysis*, McGraw-Hill Co.
4. Debreu, G. and I. N. Herstein (1953): Nonnegative Square Matrices, *Econometrica*, 21. pp. 597-607.
5. Erdélyi, I. (1967): On the matrix equation $Ax = \lambda Bx$, *Journal of Mathematical Analysis and Application*, 17. pp. 119-132.
6. Frobenius, G. (1908): Über Matrizen aus positiven Elementem, *Sitzungsberichte der Königlich preussischen Akademie der Wissenschaften*, 9.
7. Fujimoto, T. (1979): Nonlinear generalization of the Frobenius theorem (A Symmetric Approach), *Journal of Mathematical Economics*, pp. 17-21.
8. Gale, D. (1956): The Closed Linear Model of Production, in *Linear Inequalities and Related Systems*, ed.
9. H. W. Kuhn and A. W. Tucker. *Annals of Mathematics Study*, 38. Princeton, Princeton University Press
10. Karlin, S. (1959): *Mathematical methods and theory in games, Programming and economics*, Vol. 1. New York, Pergamon Press
11. Kemeny, J. G., O. Morgenstern, G. L. Thompson (1956): A generalization of the von Neumann model of an expanding economy, *Econometrica*, 24. pp. 115-135.
12. Lahiri, S. (1976): Input-output analysis with scale-dependent coefficients, *Econometrica*, pp. 947-962.
13. Mangasarian, O. L. (1971): Perron-Frobenius Properties of $Ax - \lambda Bx$, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 36, pp. 86-102.
14. Móczár, J. (1997): Non-Uniqueness Through Duality in the von Neumann Growth Models, *Metroeconomica*, Vol. 48, pp. 280-299.
15. Móczár, J. (1997): Growth Paths in the Leontief-type Dynamic Reducible Models (With a Case Study for Japan in the 60's), *Japan and the World Economy*, Vol. 9, pp. 17-36.
16. Móczár, J. (1995): Reducible von Neumann Models and Uniqueness, *Metroeconomica*, Vol. 46, pp. 1-15.
17. Móczár, J. (1993): Cyclical or Turnpike Growth: Capital Accumulation Choices in Some Reducible von Neumann Models (Ph.D. Dissertation, Osaka University), published in *Society and Economy* 1995. no. 4, pp. 33-191.
18. Móczár, J. (1992): Balanced and Unbalanced Growth Paths in a Decomposable Economy: Contributions to the Theory of Multiple Turnpikes, *Economic System Research*, Vol. 3, pp. 211-222 (Co-author: J. Tsukui).
19. Móczár, J. (1991): Irreducible Balanced and Unbalanced Growth Paths (Business Cycles and Structural Change), *Structural Changes and Economic Dynamics*, Vol. 2, pp. 159-176.
20. Móczár, J. (1991): Structural Properties of von Neumann Models, *Pure Mathematics and Applications*, Ser.C. Vol. 2, pp. 301-311.
21. Móczár, J. (1983): Sajátérték-tételek a lineáris és nemlineáris Neumann-rendszerekben (Kézirat)

22. Móczár, J. (1980): A dekompozábilitás kiterjesztése a gazdaság lineáris modelljeiben, *Szigma,* 23-45 o.

23. Móczár, J. (1980): A Neumann-gazdaság egyensúlyi állapotainak meghatározása, *Egyetemi Szemle,* 41-56 o.

24. Morgenstern, O. and G. L. Thompson (1976) : *Mathematical Theory of Expanding and Contracting Economies,* Lexington, Massechusetts, Toronto, London, Lexington Books, D.C. Heath and Co.

25. Morishima, M. (1964): *Equilibrium, Stability and Growth,* Oxford, Oxford University Press

26. Morishima, M., T. Fujimoto (1974): The Frobenius theorem, its Solow-Samuelson extensions and the Kuhn-Tucker theorem, *Journal of Mathematical Economics,* 1. pp. 199-205.

27. Murata, Y. (1972): An alternative proof of the Frobenius theorem, *Journal of Economic Theory,* 5. pp. 285-291.

28. Neumann, J.(1965): *Válogatott előadások és tanulmányok,* Budapest, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó

29. Nikaido, H. (1968): *Convex Structures and Economic Theories,* New York, London, Academic Press

30. Romanovsky, V. (1936): Recherches sur les chains de Markoff, *Acta Mathematica,* 66. 147-251.

31. Sandberg, I. W. (1973): A nonlinear input-output model of a multisectored economy, *Econometrica,* pp. 1167-1182.

32. Schneider, H. (1977): The concepts of irreducibility and full indecomposability of a matrix in the works of Frobenius, König and Markov, *Linear Algebra and its Applications,* 18, pp. 139-162.

33. Seneta, E. (1973): *Non-Negative Matrices,* New York, Wiley.

34. Solow, R. M., P. A. Samuelson (1953): Balanced growth under constant returns to scale, *Econometrica,* 21. pp. 412-424.

35. Stewart, G. W. (1972): On the sensitivity of the eigenvalue problem $Ax = \lambda Bx$, $SIAM$, *Journal of Numerical Analysis,* 9. pp. 669-686.

36. Varga, R. S. (1962): *Matrix iterative analysis,* Englewood Cliffs, Prentice Hall

37. Wielandt, H. (1950): Unzerlegbare, nicht-negative matrizen, *Mathematishe Zeitschrift,* 52. 642-648.

38. Zalai, E. (1980): *Adalékok az értéknagyság elemzéséhez,* Budapest, Kandidátusi értekezés.

SPECTRAL THEOREMS IN LINEAR AND NONLINEAR VON NEUMANN MODELS

In this paper we study some spectral theorems extended on linear and nonlinear von Neumann models. The strict equilibria in von Neumann models can be defined by the generalized eigenvalue problems $Cx = \lambda Bx$ and $pC = \lambda pB$. The Perron-Frobenius properties of these problems were first scrutinized by Mangasarian (1971). Here, for proving the Frobenius theorems in technologically or economically (ir)reducible von Neumann systems are used the results of Mangasarian (1971) as well as Erdélyi (1967) and Stewart (1972).