# A CSEREARÁNYOK MÖGÖTT MEGBÚVÓ RENDEZŐELVEKRŐL[1]

BARANCSUK JÁNOS
*PTE Közgazdaságtudományi Kar*

Dolgozatunk célja a cserearányokat a *ráfordítások* oldaláról determináló összefüggések vizsgálata, közelebbről: *az iparág hosszú távú kínálati egyensúlyának* kritériumaihoz kapcsolódó „*árcentrum*" jellemzőinek feltárása. Különös figyelmet szentelünk az *átlag-* versus *határelv* relevanciáját alátámasztó vagy tagadó eszmefuttatásoknak, bemutatva e magyarázóelveknek —a szakmai köztudatban hozzájuk tapadó sztereotípiákkal nem mindenben egyező— valódi(bb) természetét. A hagyományos neoklasszikus és marxista modellek közötti átjárást biztosítva kitérünk arra, hogy miért jut eltérő eredményre e kétféle elmélet az árarányok magyarázata során. Hogyan függ össze a komparatív előnyök mérlegelése és a marginalista árcentrum? Miért nem az iparágak legkevésbé hatékony termelői az „ármeghatározók" a határelv képviselői szerint? Mik a feltételei az árak átlagelvű alakulásának? Milyen esélyei vannak e feltételek teljesülésének? Hogyan generálhatók a határ- és átlagelvet egyszerre kielégítő termelékenységi vektorok? Miért nem a kínálati, hanem a termelési rugalmasságok szintjével áll közvetlen kapcsolatban a járadék jelentkezése? Hogyan erodálódik a járadék?

## 1 Bevezetés

Az iparágak hosszú távú egyensúlyi helyzetének kritériumait, az ebben a helyzetben megfigyelhető árarányok sajátosságait szoros logikai kötelék fűzi a racionális gazdasági viselkedés, közelebbről az erőforrások optimális allokációjának neoklasszikus eszméihez. Az iparági egyensúly állapota ebből a szempontból mintegy „bekódolt" folyománya, egyértelmű következménye e vonatkoztatási rendszer premisszáinak. „Az árjelenség ilyen megközelítésben *optimalizálási kategória*" – jegyzi meg Mátyás Antal ([1979] 212. old.).

Tanulmányunk logikai vonalvezetése is nagyrészt a *neoklasszikus* doktrína „szokásos" feltételrendszerének, illetve módszertanának kereteihez igazodik. Mivel azonban a tárgyalásnak ez a kontextusa a témánk szempontjából ugyancsak megkerülhetetlen marxi(sta) modellek számára „idegen pályát" jelentene, igyekezni fogunk a logikai átjárhatóság, egymásra vonatkoztathatóság követelményének is eleget tenni. Tisztában vagyunk továbbá a neoklasszikus gondolati közeg plauzibilitásának széles körben ismert problémáival, ezek

[1]Beérkezett: 2003. január 19. e-mail: `indian@ktk.pte.hu`. Köszönetet mondok kollégámnak, Varga Józsefnek, aki katalizáló módon gondolta át velem a cikk matematikai vonatkozásait, illetve fiamnak, Ádámnak, aki számítástechnikai jártassága révén új összefüggéseket tett számomra láthatóvá az általam alkotott modellben.

tárgyalását, felülvizsgálatát viszont —tárgyunk szempontjából közömbösnek ítélve— nem soroljuk feladataink közé.

Az iparági egyensúly és az árarányok összefüggéseivel nem minden forrás/szerző foglalkozott *explicit* módon is; közülük kiemelhetjük Marxnak [1894] a profitráta kiegyenlítődése kapcsán írt —természetesen nem neoklasszikus ihletettségű— gondolatait, majd Sraffát [1926], Vinert [1931], Robinsont [1933] és Chamberlint [1933]. A hazai kutatók közül Hoch Róbert [1972], Erdős Péter [1976], Szabó Kálmán [1985] és Zalai Ernő [1988] műveire utalhatunk elsősorban.

Az „alapmodell" a *tiszta versenyző* iparág szokásos ábrázolásmódjának megfelelően nagyszámú, egyenként elenyésző piaci részesedéssel bíró, homogén terméket előállító, „anonim" vállalatot feltételez. További adottságként a be- és kilépés korlátainak és költségeinek hiányát, valamint a gazdasági szereplők árakkal, költségekkel, technológiákkal kapcsolatos *tökéletes informáltságát* szokásos említeni. „A tökéletes informáltság hipotézise [...] felfogható úgy is, hogy minden egyes termelő hozzáférhet bármelyik technológiához. A tökéletes mobilitás lehetősége és a mindenki számára azonos input árak mellett logikus, hogy *minden termelő költségfüggvénye azonos lesz*, továbbá, hogy a korlátlan számú 'potenciális' *új belépő is hasonló költséggörbével rendelkezik*, mert megveheti a legjobb technikát" – fogalmaz Kopányi Mihály ([1993] 224. old., B.J. kiemelései).

A vázolt körülmények folyományaként kialakuló iparági egyensúly az *optimális üzemnagyság* jól ismert paramétereivel képezhető le az egyes vállalatok szintjén: *a hosszú távú átlagköltség minimumának* megfelelő kibocsátás- és árnagysággal, valamint a *gazdasági profit hiányával*. Az egyensúlyi helyzet az erőforrások (ha úgy tetszik a tőke) iparágak közötti áramlásának (reallokációjának) következménye. Miként Viner ([1931] 206. old.) kifejti: „Hosszú távú egyensúlyban nemcsak a meglévő felszereléssel termelt termékmennyiség határköltségének kell egyenlőnek lennie az árral minden termelőnél, hanem az átlagköltségnek is. Ha ez nem valósul meg, akkor vagy abnormis profit jön létre, vagy veszteség, amely vagy tőkét vonz az iparágba, vagy arra ösztönöz, hogy belőle tőkét vonjanak ki..." Marx szerint pedig: „a tőke menekül az alacsony profitrátájú területről s oda tódul, ahol magasabb a profitráta. E folytonos ki- és bevándorlás révén [...] a kínálat és kereslet olyan viszonya alakul ki, hogy az átlagprofit a termelés különböző területein azonossá lesz..." ([1894] 232. old.).

Viner ([1931] 223. old.) azonban arra is rámutatott, hogy az iparágak uniformitása általában nem teljesül, mivel a statisztikai megfigyelések szerint az átlagköltség vállalatonként különbözik. Ez esetben pedig „felvetődik a kérdés, hogy ha egy iparág vállalatai különböző technikai feltételek között, különböző, egymástól eltérő hatékonyságú erőforrásokkal, eltérő mértékben rátermett vállalkozókkal termelnek, így termelési költségük különböző, akkor az árnak iparági egyensúly esetén melyik vállalat darabköltségeivel kell megegyeznie" (Mátyás [1979] 201. old.). A problémával Robinson asszony [1933], illetve Marx [1867], [1894] foglalkozott mélyrehatóan.

Gondolatmenetüket egy leegyszerűsített —de a lényeget remélhetően megragadó— modellben mutatjuk be. Eszerint —a könnyebb áttekinthetőség érdekében— sémáinkban csak *egyetlen, „általános”* termelési tényezőt szerepeltetünk, melynek egységeire esetenként a *vállalat* vagy *termelő* kifejezést alkalmazzuk. Annak révén, hogy nem különböztetjük meg az inputok *konkrét* megnyilvánulási formáit (pl. munka, tőkejavak, föld, pénztőke, szervezési készség stb.) —ebből adódóan pedig az *érték és termelési ár* kategóriákat sem—, egyúttal a polgári és marxista modellek közvetlenebb egymásra vonatkoztathatóságát is biztosítjuk. Ugyancsak didaktikai meggondolásokból nem fordítunk —kevés kivételtől eltekintve— figyelmet az erőforrás tulajdonosának illetve a vállalkozó személyének merev elkülönítésére vagy megkülönböztetésére; jelentős mértékben száműzve a *jövedelemelosztás* kérdéseit dolgozatunkból.

Feltételezéseink szerint az illető termelési tényező *adott nagyságban* áll rendelkezésre, és minden tényezőegység reálköltsége azonos. Ezek az erőforrásegységek azonban *különböző hatékonyságot* (minőséget) képviselnek, *más-más költségszintet* eredményezve egy bizonyos termékfajta előállítása során. Fogadjuk még el azt is, hogy termelési tényezőnk *alternatív felhasználási lehetőségekkel* rendelkezik, ahol ugyancsak nem zárjuk ki különböző szegmenseinek eltérő —bár nem szükségszerűen a többi allokációs célnál tapasztalható rangsor szerinti— hatékonyságát.

Vizsgálataink megkezdése előtt jegyezzük még meg: a neoklasszikus gyökerekből kisarjadó, és az általános egyensúly elméletében integrálódó mikroökonómiai elemzés számára nem az abszolút, hanem a *relatív* árak *(árarányok)* bírnak különös jelentőséggel, és ez a szemlélet a marxista felfogástól sem idegen. E kérdéskört az *árcentrum (árvonzáspont),* vagyis az árarányok mögött álló rendezőelv problémájaként —az ún. *határ-* és *átlagelvű* felfogás körül csoportosulva— tárgyalja a szakirodalom. Mint Oroszi Sándor írja, „Az árcentrum egy hosszabb időszak alatt az árak [felfogásunk szerint: *árarányok*] tényleges középpontja, [...] átlagára. Az árvonzáspont automatizmusokat indít meg a piaci ár[arány]ok önmagához történő közelítésének irányában ...” ([1982] 13. old., B.J. kiegészítései).

Az árcentrum *határelvű* alakulásának lényege úgy összegezhető, hogy az iparágak termékei között kialakuló árarányok a *határon lévő* vállalatok darabköltség minimum-arányainak felelnek meg, ahol a darabköltség a termékegységre jutó transzferjövedelmet (*opportunity cost*ot) jelenti. Belátható, hogy ez az arány a fajlagos *reál*költségek hányadosára egyszerűsíthető, lévén, hogy az iparágak között éppen „átlendülő”, vagyis a határon alkalmazásra kerülő tényezők mindkét allokációs területen ugyanakkora —az alternatív költségekhez tartozó— *tiszta* jövedelmet (profitot) képesek realizálni.

Az *átlagelv* szerint viszont, az árarányok az egyes iparágakban *átlagos hatékonyságot felmutató* (tehát átlagos hatékonyságú erőforrásokat használó) vállalatok fajlagos reálköltség (plusz „átlagprofit”) arányait követik. A marxista irodalom az átlagos ráfordításarányokkal kongruens árrendszert kialakító mechanizmust *értéktörvénynek* nevezi. Mivel tanulmányunk gondolatmenete szempontjából érdektelen az ilyen típusú "árcentrum" érték vagy termelési ár minősége, a továbbiakban ezeket határozottan nem különböztetjük meg, és egységesen az „*érték*” kifejezéssel jelöljük.

## 2 A határ- és átlagelv érvényesülésének mechanizmusa

A *határelvet* részletesebben bemutató Robinson szerint a tényező valamely szegmense egy bizonyos iparágban akkor kerül felhasználásra, ha a termékár legalább olyan mértékű, hogy fedezni tudja az illető erőforrástömeg *transzferjövedelmét*. Ez egyrészt a *reálköltségből* áll (aminek kifizetése a tényező *tartalékolási keresletét* szünteti meg), másrészt abból a jövedelemből adódik össze, amit a termelési input tulajdonosa valamely *más* allokációs területen maximálisan szerezhetett volna. A vállalkozó szempontjából ez utóbbi komponens is költséget jelent, amivel számolnia kell, az output árának pedig legalább e két összetevőből álló költség termékegységre jutó *minimális* szintjét kell elérnie, ha alkalmaznia kívánja az erőforrást.

A termékár növekedésével az illető tényező olyan további egységei is „átcsábíthatók” lesznek az iparágba, melyek esetében a transzferjövedelem összege magasabb volt, mint az előzőeknél. Az áremelkedés azonban újabb hatásokat is kivált. A már korábban is ebben az ágazatban működő vállalatoknál a darabköltség fölött *járadék* keletkezik, míg a tényező más iparágakban alkalmazott részecskéinél a transzferjövedelem —s ezáltal a tényezőköltség— szimultán növekedése megy végbe. A növekvő transzferjövedelem pedig —fokozatosan elnyelve a járadékot— egyre közelebb hozza az *iparágak közötti váltás* (reallokáció) ésszerűségét. „Ilyen cég költségei között nem lesz járadékelem” – állapítja meg Robinson. Mint írja, a termékfajta kínálati árát ekkor a határon lévő vállalat minimális darabköltségének megfelelő határköltség, „az *iparág költsége a határon*” szabályozza, a határon belüli —az iparág szempontjából hatékonyabb tényezőkkel dolgozó, járadékot realizáló— vállalatok ún. intenzív határköltsége pedig meghaladja átlagköltségük minimumát. „Minden határon belüli vállalat —szögezi le Robinson— az optimálisnál nagyobb terjedelmű” ([1933] 124. old.), ezért csökkenő skálahozadék mellett tevékenykedik.

Mivel a hatékonyabb tényezők alkalmazásával *extrajövedelem* realizálható, ugyanakkor e tényezők *korlátozott* mértékben állnak rendelkezésre (nem szaporíthatóak), a vállalkozók versenyezni fognak ezen erőforrásokért. E licitálás során pedig végül „minden költségmegtakarítást kifizetnek azoknak a hatékonyabb ráfordításoknak megszerzésére, amelyek lehetővé teszik e megtakarítást. Ezért, mivel ezeket a prémiumkifizetéseket a költségek között kell szerepeltetni, a hatékonyabb vállalatok költségei egyenlők lesznek a kevésbé hatékony vállalatok költségeivel” (Baumol [1961] 374. old.).

Idézzük most Marx talán legjellemzőbb mondatait is az értéktörvény (átlagelv) érvényesülésének mikéntjéről. Ne feledjük, az általa képviselt gondolatkörben a *munkaráfordítás* szerepel a reálköltség egyetlen elemeként. „Úgy tűnhetnék, hogy ha egy áru értékét a termelése alatt kifejtett munkamennyiség határozza meg, akkor minél lustább vagy ügyetlenebb valaki, annál értékesebb az áruja, mert annál több idő kell neki az elkészítésére. Az a munka azonban, amely az értékek szubsztanciáját alkotja, egyenlő emberi munka, ugyanannak az emberi munkaerőnek a kifejtése. A társadalom egész munkaereje, amely az áruvilág értékeiben testesül meg, itt egy és ugyanannak az emberi munkaerőnek számít, bár számtalan egyéni munkaerőből áll. Ezen egyéni munkaerők mindegyike ugyanolyan emberi munkaerő, mint a másik, amennyiben társadalmi *átlag*munkaerő jellege van, és mint ilyen társadalmi átlagmunkaerő hat, tehát egy áru termeléséhez is csak az *átlagosan* szükséges, vagyis társadalmilag szükséges munkaidőt kívánja meg. Társadalmilag szükséges munkaidő az a munkaidő, amelyre szükség van ahhoz, hogy valamely használati értéket a meglevő társadalmilag normális termelési feltételek között és a munka társadalmilag *átlagos* ügyességi és intenzitási foka mellett előállítsanak" ([1867] 44-45. old., B.J. kiemelései).

Mátyás Antal egy korábbi könyvében [1979] tesz kísérletet a határ- kontra átlagelvet tükröző árcentrum-modellek alapfeltevéseinek, és az általuk generált gondolati sémák explicit összevetésére. Mint írja, a neoklasszikus elmélet „rögzíti azt a körülményt, hogy *adott* a társadalom rendelkezésére álló tényezők mennyisége és minősége", valamint hogy „adott időpontban a társadalomnak *különböző hatékonyságú* tőkejavak, s mellettük *különböző termelékenységgel* dolgozó munkások állnak rendelkezésre". Ezért „olyan helyzet alakul ki minden termelési ágban, mint a mezőgazdaságban a gazdálkodás tárgyának monopóliuma következtében". Marx ugyanakkor, „bár hangoztatja, hogy az iparág egyes vállalatai különböző termelési feltételek közepette működnek, a hangsúlyt az élenjárókhoz való *felzárkózásra* helyezi" ([1979] 213-214. old., B.J. kiemelései). A lényeg itt az, hogy Marx *nem tekinti „véglegesnek"*, leküzdhetetlen fátumnak az erőforrásrészek (és így a termelőegységek) hatékonysági különbözeteit, mivel „önmagában semmi sem gátolja, hogy ugyanazon termelési területen minden tőkét *ugyanolyan* módon fektessenek be. Ellenkezőleg, a tőkék közötti konkurrencia arra törekszik, hogy ezeket a különbségeket mindinkább *kiegyenlítse*; az értéknek a társadalmilag szükséges [értsd: átlagos] munkaidő által való meghatározása az áruk olcsóbbodásán, és azon a kényszeren keresztül érvényesül, hogy az árukat egyenlően kedvező viszonyok között kell előállítani" (Marx [1894] 708. old., B.J. kiemelései és megjegyzése). Hasonló gondolatokra lelhetünk Schumpeter híres [1926] művében is az újítások által gerjesztett felzárkózási folyamat ábrázolásakor.

A marxi modellben tehát a hatékonysági/jövedelmezőségi hátrányok tulajdonképpen két okra vezethetők vissza. Egyrészt az illető iparág másokhoz viszonyított előnytelen keresleti- s ebből fakadóan árviszonyaira (mint a termelő szempontjából *kívülálló, „objektív"* tényezőre), másrészt az iparágon belül a fejlettebbektől való ideiglenes, *kiküszöbölhető* lemaradás bizonyos tekintetben *„szubjektív"* faktoraira. A két okcsoport közül értelemszerűen csak az első lesz az, ami az *iparág elhagyására* készteti a termelőt (erőforrást). A második —ami itt az iparágon belüli hatékonysági szóródásért felelős— nem idéz elő ilyen hatást, hiszen a termelők az ágazatváltás kényelmetlenségeit elkerülve is képesek e hátrány „ledolgozására".

Még mindig hátra van azonban annak magyarázata, milyen *hatásmechanizmus* gondoskodik róla —mielőtt a jobb vállalatokhoz való felzárkózás megkezdődne vagy végbemenne—, hogy éppen az iparági átlagot képviselő vállalat fajlagos ráfordításainak szintjén alakuljon ki az egyensúlyi ár. Azaz: mivel az értéktörvény a gazdasági szereplők —azok kalkulációit, motívumait tükröző— viselkedésén, magatartásán keresztül érvényesül, vajon miként észlelik a maguk *mikroszintjén* ezek a termelők, hogy az iparágak termékeinek áraaránya eltér az iparági átlagnak megfelelő darabköltségek arányaitól, ezért ésszerű lehet az ágazatváltás? És igaz-e, hogy a másik, iparági dimenzióban jövedelmezőbb tevékenység egy *konkrét vállalat* (erőforrás) *szemszögéből* is jövedelmezőbbnek bizonyul a réginél? Esetleg miért nem a legjobb vállalatok darabköltségeihez —mint a felzárkózás irányultságát meghatározó célhoz— igazodik az árvonzáspont? (Végül is —miként Marx vélekedett— ennek a felzárkózásnak nincs elvi akadálya...) Vagy miért nem a legrosszabbakéhoz, a felzárkózás befejezéséig kvázijáradékhoz juttatva az intramarginális cégeket? (V.ö. Marshall [1930].)

Úgy véljük, hogy a marxista szakirodalmi források legtöbbjére nem jellemző e problémakör kellő alapossággal vagy kellő irányból történő megközelítése. Engels például a következőképpen érvel: „A középkori emberek [...] elég pontosan *ki tudták számítani egymás termelési költségeit*... S az akkori emberek [...] bizonyára elég okosak voltak ahhoz, hogy a termékekre fordított munkaidejüket a csere folyamán oda ne ajándékozzák. Ellenkezőleg: [...] *a termékekre fordított munkaidejük teljes ellenértékét kicsikarják*" ([1894] 38-40. old., B.J. kiemelései).

Erdős Péter —némileg más irányból közelítve a problémát— az értéktörvény érvényesülését bemutató modelljében egyenesen premisszaként kezeli, hogy a tulajdonképpeni iparági egyensúlyt „értékarányos" árak jellemzik. Néhány kiragadott mondat fejtegetéseiből: „Ha az ár- és értékarányok egybeesésének *kell* lennie a végeredménynek, akkor a termelőknek a következőképpen *kell* gondolkodniuk." A termelői motivációk és az általuk kiváltott magatartás ezt követő bemutatása után nem is lepődünk meg, amikor a szerző levonja a konzekvenciát: „a modell vázolt működésének eredménye egyértelműen úgy fogalmazható meg, hogy itt az *átlagban pontosan egyenlő* mennyiségű munkát tartalmazó áruk cserélődnek el egymással, vagyis az egyes termékárak ingadozásának a középpontjai —úgy is mondhatjuk: az árak vonzáspontjai— pontosan arányosak a termékértékekkel." ([1976] 74-76. old., B.J. kiemelései).

Egy másik forrásmunkában hasonló gondolatmenettel találkozhatunk: „Jellemzően az áraknak a társadalmilag szükséges munkamennyiségektől, tehát az *értéktől való pillanatnyi eltérései gerjesztik* a gazdasági folyamatok változásait. Az áraknak az értéktől való eltérései eredményezik a költségek, illetve a jövedelmek különbségeit, amelyek hatására az egyes árutermelők —saját érdekeiket követve— változtatnak a termelési arányokon a kereslet-kínálat mechanizmusával összefüggésben." (Szabó [1984] 165. old., B.J. kiemelése).

Belátható, hogy a kiragadott —de ezzel együtt jellemző— idézetek olyan gondolatmeneteket tartalmaznak, melyek *idem per idem* jelleggel, mintegy a logikai vonalvezetés posztulátumai között szerepeltetik azt, amit bizonyítani szeretnének: az átlagos ráfordításarányok árarányokkal való egyezőségét. Álláspontunk szerint ugyanakkor az iparágakban átlagosnak számító költségarányok és az árarányok eltérései esetén még semmit sem mondhatunk arról, hogy a termelők motivációit ténylegesen is sérti-e eme inkongruencia. Az átlagelvtől eltérő árarányok tehát nem feltétlenül indítanak meg az egyensúly felé közelítő mozgásokat, hiszen lehet, hogy a gazdasági szereplők motivációit illetően a rendszer így is egyensúlyban van.

Más interpretációk nem posztulálják, hanem magyarázni igyekeznek az árcentrum átlagelvnek megfelelő alakulását. Mint például a Bertóti–Erdős szerzőpáros írja: „a legjobb és a legrosszabb termelési feltételeknek [...] az átlag körül való szóródása minden termelési ágban más és más. Ha tehát a piacon az áruk a legnagyobb [értsd: határon lévő] munkaráfordítás alapján cserélődnek, akkor azoknak a termelési ágaknak a termelői, amelyekben ez a szóródás erőteljesebb, *együttesen* jobban járnának, kifejtett munkájuknál a cserében többet realizálnának, mint a többi területen működő termelők." Mivel tehát „az egyes iparágak össztermékei nem a valóban rájuk fordított munkamennyiség arányában cserélődnek [...], akkor *egészében véve* az az iparág a jövedelmezőbb, amely a munkatartalomhoz képest kedvezőbb arányban tud cserélni" ([1975] 64-65. old., B.J. kiegészítése és kiemelései). Az árarányok tehát „hosszabb idő alatt nem alakulhatnak a Ricardo által meghatározott [határelvnek megfelelő] értéknagyság szerint, hiszen a *termelőerők átcsoportosulásának mindaddig fennáll az ösztönzése, ameddig a termelési ágak jövedelmezősége ki nem egyenlítődik*" (Bertóti–Erdős [1975] 88. old., B.J. kiegészítése).

Figyeljük meg: a fenti citátumok már nem beszélnek az iparágon belüli rangsor ideiglenes jellegéről, hanem azt —hallgatólagosan— *adottságnak* tételezik fel. Ez esetben viszont még inkább merésznek tartjuk következtetéseiket, miszerint a vállalatok „együttes", vagyis ágazati szintű jövedelmezőségének kiegyenlítődése, tehát az átlagelvet kifejező ár képezné az egyensúly kritériumait.

Mint már utaltunk rá: az ágazat szintjén számított, egységnyi ráfordítással (reálköltséggel) átlagosan szerezhető magasabb jövedelem csak akkor motiválhatja az erőforrások reallokációját, ha az ágazatváltás potenciális alanyai számára az új tevékenységkör *egyéni szinten is* rentábilisabbnak ígérkezik a réginél. Az árarányok és az átlagos ráfordításarányok inkongruenciája tehát csak abban az esetben váltja ki az iparágak közötti mozgást, ha az új ágazat *nem csak a jelenlegi, hanem a leendő* művelőinek szempontjából is jövedelmezőbbnek bizonyul. Ha a termelők egyéni képességei nem teszik lehetővé az *ex ante* kedvezőbbnek ítélt foglalkozási körben a ténylegesen hatékonyabb munkát, az ágazatváltás elmarad, az iparágak közötti *nemekvivalens csere állandósul.* Mivel pedig ténylegesen korántsem lehetünk biztosak abban, hogy az *en bloc* kevésbé rentábilis tevékenységi kör termelői az új területen nagyobb eredményességet érnek el, ezért azt sem állíthatjuk, hogy az ár- és értékarányok ágazatok közötti eltérései *önmagukban* hordoznák az ágazatváltás magyarázatát.

A tág értelemben vett termelői (vagy vállalkozói) képességek tevékenységek közötti eloszlásától, a tehetségek multipotenciáljának milyenségétől függ, hogy adott árarányok mellett mely iparágakat ítélik meg legkedvezőbbnek az egyes gazdasági szereplők (erőforrások). És ugyanettől függ a szóban forgó iparágak termékeit jellemző fajlagos ráfordítások alakulása is. Vajon létezik-e olyan automatizmus, amelynek létéből az ár- és értékarányok illeszkedése következik? E kérdés megválaszolását hagyjuk a későbbiekre.

## 3 A komparatív előnyök mérlegelésén nyugvó árcentrum

A határelvnek megfelelő árcentrum és allokáció összefüggésrendszerét már érintettük az előzőekben. Bár vizsgálatunk során azt is érzékeltettük, hogy az erőforrás(ok) optimális (egyensúlyi) allokációja az iparágak *szimultán* egyensúlyát feltételezi, az egyidejűséggel kapcsolatos —igen fontos— vonatkozások jobbára háttérben maradtak. Ennek okaként azt említjük, hogy az allokációs probléma —igazi természetét illetően— csak a *relatív* árak tükrében elemezhető, az eddigiekben viszont lényegében parciális módon, abszolút termékárak feltételezése mellett analizáltuk a kérdéskört.

Módszertani korrekciónkat egy modell keretei között végezzük el, melynek adottságai a következők:

- A „gazdaságot" csak *két* iparág alkotja, egyikük $X$, a másikuk $Y$ terméket állítja elő.
- Mindkét jószágféleség *egyetlen fajta* erőforrással hozható létre, aminek rendelkezésre álló mennyisége a gazdaságban —a vizsgálat időhorizontján— *rögzített.*
- Az erőforrás az egyes termékfajták termelésének szemszögéből *azonos reálköltségű*, de *eltérő minőségű* (hatékonyságú) részecskékből áll, melyek az egységnyi jószág előállításához szükséges mennyiségükkel, vagy ennek reciprokával jellemezhetőek. Ez utóbbi mutatót az $i$-edik erőforrásszegmens $Y$ vagy $X$ szerinti *termelékenységeinek* (hatékonyságainak) nevezzük, és —egyelőre— $QY_i$, $QX_i$ jelölésekkel látjuk el.
- Az erőforrás egységeit jellemző hatékonysági paraméterek a képességek multipotenciálját jellemzik. Ezek az adatok két dimenzióban mutatnak szóródást: a hatékonysági értékek $X$-re és $Y$-ra jellemző *arányait*, valamint ezen értékek *abszolút nagyságait* illetően. A szóródás mértéke határesetben nulla lehet.
- Az erőforrások szegmentumait a továbbiakban —a könnyebb kezelhetőség kedvéért— *termelőkkel* (esetleg vállalkozókkal vagy „vállalatokkal") azonosítjuk, akik személyenként azonos („egységnyi") mennyiségű, de egymáshoz viszonyítva nem feltétlenül azonos minőségű (hatékonyságú)

kapacitással (ami lehet munkavégző képesség, vagy akár pénztőke) rendelkeznek. (A pénztőke eltérő hatékonyságú alkalmazását ugyancsak a gazdasági szereplők —vállalkozói-szervezői— készségeiben mutatkozó különbségekre vezetjük vissza.)

- A termelőkről (vállalatokról) —az egyszerűség kedvéért— feltételezzük, hogy teljes kapacitásukat *állandó hozadék* (hatékonysági koefficiens) mellett használják fel. E meggondolás következtetéseink lényegét nem érinti.

- Az egyéni hatékonyságot mérő koefficienseket a gazdasági szereplők csak saját magukra vonatkozóan ismerik: *egyik termelő sem rendelkezik információkkal kollégái képességeiről.*

- Posztuláljuk, hogy minden termelő pénzben vagy termékekben kifejezhető *jövedelmének maximálásában* érdekelt. Mivel a termelők által birtokolt kapacitástömeg —s ezért költségszint— konstans, belátható, hogy ez a feltevés a vállalat esetén a profit maximálására vonatkozó törekvést fejezi ki.

- A gazdasági szereplők *árelfogadóak*, az iparág összkínálatának elenyésző töredékét viszik piacra.

Észrevehető, hogy modellünkben *rögzítettként* kezeljük a tényező egyes részecskéinek mennyiségét és azok minőségi (hatékonysági) differenciáit, vagyis hosszú távon sem tételezzük fel a tehetségek multipotenciáljának egyenletes eloszlását a különböző tevékenységi körök tekintetében. Mivel úgy véljük, hogy akár a termelői képességek, akár az alkalmazott eljárások dimenziójában meglévő különbségek egy része *mélyebb, kikerülhetetlen* („örökletes") adottságot (ha akarjuk: *monopolpozíciót*) jelent, Marxszal ellentétben tagadjuk, hogy a $QX$ (vagy $QY$) értékek a verseny ösztönző hatására kiegyenlítődhetnének modellünk szereplői között. Ezzel természetesen azt is felvállaljuk, hogy a következőkben bemutatandó modellünk elsősorban nem a marxista alapokon nyugvó átlagelvű árcentrum-koncepciók belső logikájával polemizál (fenntartásainkat már amúgy is jeleztük), hanem azoknak inkább egyfajta alternatívája kíván lenni.

Az előzőekben vázolt feltételezések mellett igaz, hogy ha a termékfajták áraránya —$PX : PY$— adott, akkor az iparágak kínálati egyensúlyi helyzetében mindazok a termelők, melyek termelékenységi arányaira érvényes, hogy

$$PX : PY > QY : QX \tag{1}$$

az $X$ termék előállítására szakosodnak, míg ellentétes reláció esetén az $Y$ jószág előállítása bizonyul racionálisnak. Ha az árarányok és a termelékenységek arányai megegyeznek, akkor a termelő az ágazatváltás határán van, számára a két ágazat közötti választás közömbös. Mivel pedig az egyes jószágfajták előállításában mutatkozó termelékenységek reciproka nem más, mint a fajlagos (darab-) költség, *az iparágak szimultán kínálati egyensúlya az* *árarányok és a határon lévő vállalat(ok) darabköltség-arányainak egyezőségével is jellemezhető.*

Az árarányok megváltozásának következménye természetesen az lesz, hogy a relatíve olcsóbbá vált termékek készítői közül azok, akiknek egyéni termelékenységi arányai az árváltozás előtt is viszonylag közel álltak az árarányokhoz, most —feltéve, hogy az (1) összefüggésben értelmezett relációk iránya számukra megváltozott— foglalkozást (ágazatot) váltanak, a kínálati egyensúlynak megfelelő outputszerkezet pedig elmozdul.

Két, eltérő hatékonysági arány mellett ténykedő termelő esetén modellünk a Ricardo révén klasszikussá vált kéttermékes-kétszereplős konstellációnak felel meg. Ez nem is véletlen, hiszen feltételeinkből következően a termelők specifikációja, iparágválasztása (az egyes erőforrás-szegmentumok allokációja) tulajdonképpen a *komparatív előnyök mérlegelésén* alapul. Oroszi Sándor megfogalmazásában: „A komparatív előnyök elve egyáltalán nem zárja ki az árutermelői racionalitás [...] érvényesülését, s a kijelentés fordítottja is igaz. Az elv *általános* érvényű [...] A komparatív előnyök [...] számbavétele, úgy vélem, egyaránt mozzanata lehet mind az árutermelői, mind a nem-árutermelői racionalitásnak" ([1984] 120–121. old.).

# 4 Az átlagelv teljesülésének feltételrendszere a komparatív előnyök alapján szerveződő iparágak modelljében

Láthattuk, hogy a komparatív előnyök mérlegelésén nyugvó ágazatválasztás esetén az iparág kínálati egyensúlya a *határ*elvnek megfelelő árarányokat implikál. Vajon milyen következményekkel jár ez a tény az *átlag*elv teljesülésére nézve? Hoch Róbert szerint „Speciális feltételekkel a határráfordítási arányok egybeeshetnek az átlagráfordítási arányokkal. Ebben az esetben a határráfordítási arányokról mondottak érvényesek az átlagráfordítás-arányokra is" ([1972] 312. old.). Az előzőekben Bertóti–Erdős [1975] révén már kiderült, hogy e speciális feltételeket az jelentené, ha a legjobb és legrosszabb hatékonyságot képviselő termelők teljesítményének átlag körül való szóródása minden iparágban megegyezne. Erdős Péter élvezetes előadásmódjában ugyancsak olvashatunk erről —az eredetileg Ricardo és Marx árcentrum-felfogásának konfrontációját jelentő— problémáról. „Tegyük fel, $A$ termék egy egysége cserélődik el $B$ termék egy egységével. Legyen mindkét fajta legrosszabb körülmények közt termelt példányának egyéni termelési ára 130, az átlagos körülmények között termelté 115, a legjobb körülmények között termelté 100. Ilyenkor vajon 115-öt cserélnek-e ki 115-tel, vagy 130-at 130-cal? Erre nyilván nincs válasz. [...] Ha különböző termelési ágakban más-más szélességű sávban helyezkednének el egyéni termelési áraik tekintetében a különböző vállalatok, és ha a határköltség lenne az ármeghatározó költség, akkor nem érvényesülhetne az átlagprofitráta törvénye. De ugyan mi akadályozhatná meg e törvény érvényesülését, amíg beáramolhatnak a tőkék a különböző iparágakba?" ([1976] 108-109. old.).

Úgy véljük, az előző fejezetekben már bizonyos szempontból megválaszoltuk Erdős Péter kérdésfeltevését: egy iparág másikhoz viszonyított átlagos jövedelmezőségi foka magasabb lehet, de mégsem jelent vonzerőt a potenciális befektetők számára, ha ezek, egyéni képességeik alapján az *alacsonyabb* átlagos jövedelmezőségű iparágban érhetik el a *maguk számára legkedvezőbb* eredményt.

Az átlagelv teljesülését illetően arra a kérdésre keresünk választ, hogy az iparágak szimultán egyensúlyában az ágazatokra jellemző, a termékek előállítására átlagosan szükséges ráfordítások megegyeznek-e az árarányokkal. Mivel pedig az átlagköltségek átlagtermelékenységekkel állnak reciprok kapcsolatban, ez a probléma *az ágazati átlagtermelékenységek hányadosának az érvényes csere- (ár-) arányokkal való összevetésével* is eldönthető. Az egyes iparágakban érvényes átlagtermelékenységek alatt azt a mutatószámot értjük, ami arról informál, hogy a vonatkozó ágazatokban *éppen* működő erőforrás-tömeg egységére vetítve mekkora kibocsátás jut. Ezeket az értékeket a továbbiakban $APY$ és $APX$ szimbólumokkal jelöljük. Kérdésfeltevésünk tehát:

$$PX : PY \overset{?}{\leftrightarrow} APY : APX \,, \tag{2}$$

ami átalakítható az alábbi relációra vonatkozó kérdéssé:

$$PX \cdot APX \overset{?}{\leftrightarrow} PY \cdot APY \,. \tag{3}$$

A szorzatok a termelési tényező $X$ és $Y$ iparágakban jellemző átlagtermék-*értékeit* ($VAPX$, $VAPY$) jelentik, melyek azt mutatják meg, hogy az egyes ágazatokban foglalkoztatott tényezőtömeg egységével fajlagosan mekkora árbevétel érhető el. E számok tehát az *„ágazatok átlagos jövedelmezőségi fokát"* mérik, egyenlőségük pedig az átlagelv teljesülésére utal. Mivel pedig az árarány a határon lévő erőforrásszegmens termelékenységi arányával, a $QY : QX$ hányadossal egyenlő, az átlagelv érvényességét a

$$(PX : PY =)\ QY : QX = APY : APX \tag{4}$$

formula is kifejezi.

Az iparági átlagtermelékenységek és átlagtermék-értékek meghatározásához azokra az adatpárokra van szükségünk, melyek az egyes termelők $Y$ és $X$ vonatkozásában felmutatott hatékonyságainak *arányáról* és az illető termelékenységek *abszolút* nagyságáról is tudósítanak. (Ne feledjük, hogy a termelékenység a ráfordítás-igényesség reciproka.) A szükséges információt az egyes erőforrás-részecskék $QY$ és $QX$ termelékenységi mutatói szolgáltatják, melyek a képességek multipotenciáljának eloszlását képezik le.

Rendezzük sorba ezeket az adatpárokat a $QY : QX$ arány monoton *csökkenő* értékeinek megfelelően, és $n$ számú, azonos ráfordítással dolgozó termelőt tételezzünk fel. Induljunk ki most abból, hogy az érvényes piaci cserearány éppen a $k$-adik ($1 < k < n$) termelő $QY_k : QX_k$ termelékenységi arányával egyenlő. Ebben az esetben —a komparatív előnyök mérlegelése alapján— az ennél nagyobb hatékonysági aránnyal rendelkező termelők $Y$, a többiek $X$ gyártására specializálódnak. Az iparágak szimultán kínálati egyensúlyában ekkor az $Y$ előállítására jellemző (ágazati) *átlagtermelékenység* ($APY$) a $QY_1$, $QY_2$, ..., $QY_k$; az $X$-re jellemző érték ($APX$) pedig $QX_k$, $QX_{k+1}$, ..., $QX_n$ nagyságok *számtani átlagaként* nyerhető. A $k$-adik termelő adatait határpozíciója miatt szerepeltetjük *mindkét* átlagtermelékenység kiszámításánál. Tehát:

$$APY_k = \frac{\sum_{i=1}^{k} QY_i}{k}\,, \tag{5}$$

$$APX_k = \frac{\sum_{i=k}^{n} QX_i}{n-k+1}\,. \tag{6}$$

Ha nem csak az egyes iparágakban ténylegesen, hanem a *virtuálisan* ott tevékenykedő tényezőegységek termelékenységi adatait is összegezzük, nyerjük az $SY$ és $SX$ aggregátumokat, melyek a *teljes* erőforrástömeg felhasználásával (összes termelő által) előállítható termékmennyiségeket jelentik. Azaz:

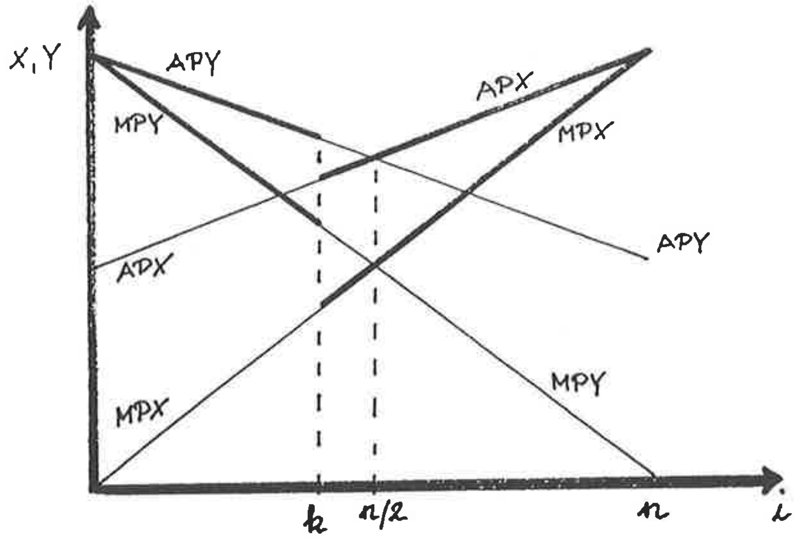
$$SY = \sum_{i=1}^{n} QY_i\,. \tag{7}$$

SX analóg módon értelmezhető.

Az *aggregált termelékenységek arányának* ($R_{Y/X}$) fogalma alatt az erőforrástömeg szélsőséges (kizárólag $Y$, vagy kizárólag $X$ termelésében való) felhasználása esetén előállítható termékmennyiségek arányát értjük, ami felfogható az *összes* termelőre számított $QY_i : QX_i$ arányok átlagaként is:

$$R_{Y/X} = SY : SX\,. \tag{8}$$

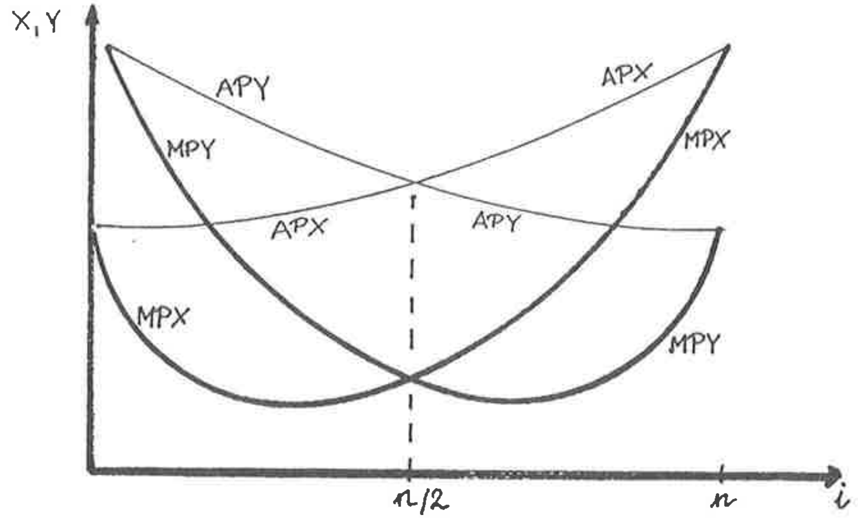
Ha az átlagelv érvényesülésének *kritériumai* után most az elv teljesülésének *feltételeit* kívánjuk kideríteni, akkor az e célhoz illeszkedő vizsgálati eljárást kell alkalmaznunk. Helyezzük tehát el a $QY$ és $QX$ értékek egy lehetséges, de nem feltétlenül tipikus sorozatát a koordinátarendszerben! Az illető termelékenységi adatok pontjait —a jobb áttekinthetőség kedvéért— vonalakkal kötöttük össze *(1. ábra)*. Ábránkon az adatpárok sorozatából kialakított két grafikon metszi egymást, ami azzal magyarázható, hogy $i$ növekedésével a termelékenységek kezdeti „áltört" arányai „valódi törtté" alakulnak át. Ez a metamorfózis egy többé-kevésbé szubjektív döntéstől függ: attól, hogy miként választjuk meg az $Y$ és $X$ jószágok természetes mértékegységeit. (E döntés azonban természetesen nem befolyásolja érdemben vizsgálódásunk eredményeit.) Ábráinkon —didaktikai okokból— törésektől mentes, folyamatos görbéket jelenítünk meg, megjegyezve, hogy „valódi" adatokat leképező $QY$ és $QX$ grafikonokra inkább a rendszertelen, „cikcakkos" viselkedés jellemző.




*1. ábra.* Az egyéni teljesítmények szimmetriája csökkenő iparági hozadék esetén

Az *1. ábra* által tartalmazott szimmetrikus grafikonok arra utalnak, hogy az iparágak kínálati változását a *csökkenő hozadék* jellemzi. Ez tehát egy olyan helyzet, amikor valamely tényezőnél „különbség áll fenn természetes egységeinek a szóban forgó iparágban mutatkozó relatív hatékonysága és ama iparágakban mutatkozó hatékonysága között, amelyekből ezeket az egységeket elvonták" (Robinson [1933] 113. old.). A $QY$ és $QX$ nagyságok —mint az ágazatváltás alkalmával határon lévő termelők hatékonysági mutatói— ezúttal az *iparági határtermelékenység* értékeiként foghatók fel. Erre az értelmezésre utalunk, amikor ábránkon —melyen az *átlagtermelékenység* görbéit is feltüntettük— a $QY$ és $QX$ jelölés helyett az $MPY$ és $MPX$ szimbólumokat használjuk. Mint látható, az $Y$ iparág határ- és átlagtermelékenység-grafikonja „normális" pozíciójú, az $X$ ágazat függvényeinek szokatlan helyzete viszont azzal magyarázható, hogy az éppen határon lévő $k$-adik termelő esetén a $QX_i$ (vagyis $MPX_i$) adatok közül az $i = k, \ldots, n$ tagok kerülnek —a fentebb említettek miatt— átlagolásra. Az egyes görbék vastag vonallal kiemelt szakaszai egy tetszőleges $k$ esetén szemléltetik az $Y$ és $X$ iparágban szereplő erőforrásegységek termelékenységi adatait.

Az ábra tanulmányozása révén igazolódik korábbi álláspontunk, miszerint az iparági egyensúly korántsem feltételezi az ágazatok jövedelmezőségeinek (átlagtermék-értékeinek) kiegyenlítődését. Az átlagelv érvényesüléséről ugyanis egyedül az $i = n/2$ indexszel ellátott adatok határra kerülésekor beszélhetünk, amikor az $Y$ és $X$ jószágfajták egységárainak, határ- és átlagtermelékenységeinek aránya 1 : 1. Triviálisan belátható, hogy *szimmetrikus* $QY$ és $QX$ (azaz $MPY$ és $MPX$) görbéket feltételezve ez az *aggregált termelékenységi aránynak* ($R_{Y/X}$) is megfelel.




*2. ábra.* Az egyéni teljesítmények szimmetriája a jó képességű termelők periférikus helyzete esetén

Semmi okunk azonban feltételezni, hogy az egyéni teljesítmények multipotenciáljának *tipikus* („valódi") eloszlását éppen az előbbiekben vizsgált ábra képezné le. A végtelen számú variációs lehetőség közül a *2. ábrán* egy olyan helyzetet szemléltetünk, amikor a szélsőséges hatékonysági arányokhoz mindkét ágazatban a *legjobb* kvalitású termelők tartoznak: a $QY$ ($MPY$) vektor legmagasabb értékeihez magas $QX$ ($MPX$) értékek társulnak, és viszont. Éppen szélsőséges helyzetük folyománya, hogy a piaci cserearányoknak csak hasonlóan perifériális szférában való mozgásakor lesznek hajlandóak ágazatváltásra. Hoch Róbertet idézve: „az iparágon belül az átlagosnál magasabb jövedelmezőségi sávba tartozó, általában erősebb tőkék rendszeresen extraprofitot realizálnak, tehát magasabb a jövedelmezőségük az ipari átlagnál. Következésképpen ezeknek a tőkéknek a mozgását sem a többi ágazatok átlagos profitja szabályozza, hanem a más ágazatok *felső mezőnyében* realizálható profitráta" ([1972] 211. old., B.J. kiemelése).

A 2. ábrát szemlélve szinte az első pillantásra felmérhető, hogy ezúttal biztosan van legalább három — $i = 1$, $i = n/2$, $i = n$ sorszámú— termelő, amelyek határra kerülésekor az átlagelv kritériumai is megvalósulnak. Igazolható, hogy azok a $QY$ és $QX$ (tehát $MPY$ és $MPX$) adatpár-sorozatok, amelyek *bármely* erőforrásszegmens határpozíciója esetén az árarányok határ- és egyúttal átlagelvű illeszkedését is kielégítik, az ábrán látható jelleggörbékkel rendelkeznek.

A bizonyítás előtt azonban tegyünk egy megjegyzést: az ábra alapján belátható, hogy *a határon lévő* („ármeghatározó") *tényezőegységek (vállalatok) korántsem azonosak törvényszerűen az iparágak éppen legalacsonyabb hatékonyságot felmutató szereplőivel.* Egy másik oldalról szemlélve: bár a határon lévő erőforrás-részecskék tevékenysége jellemezhető az iparágban a legmagasabb (fajlagos) költségszinttel, ez azonban gyakran nem a reálköltségek számlájára írható, hanem a transzferjövedelem *profitfedezeti* részének magas nívójával hozható összefüggésbe.

# 5 Az átlagelv kritériumait kielégítő termelékenységi sorozatok generálása

Azokban az esetekben, amikor a $QY$ és a $QX$ ($MPY$ és $MPX$) sorozat egyaránt *azonos* elemekből áll, vagyis mindkét iparágra az *állandó hozadék* jellemző, triviálisan igaz, hogy a határ- és átlagtermelékenységek aránya tetszőleges $i$ sorszámú termelőre mutat egyezőséget, vagyis az átlagelv *általánosan* teljesül. A következőkben azonban a *nem-triviális* sorozatok előállításával foglalkozunk.

Levezetésünk a 2. ábra jellemzőit kívánja algebrai eszközökkel rekonstruálni. E törekvéseink során alkalmas kiindulópontnak ígérkezik, ha a grafikonok *kölcsönös* helyzetét szemlélve észrevesszük, hogy a $QY$ és $QX$ sorozatok *első* és *utolsó* tagjai *egyszerre* tekinthetők határ- és átlagnagyságoknak is. Ekkor

$$MPY_1\ (=QY_1) = APY_1 \quad \text{és} \quad MPX_n\ (=QX_n) = APX_n\ , \tag{9}$$

ezért az átlagelv szellemében a (4) kritériumnak megfelelően teljesülnie kell, hogy

$$\frac{MPY_1}{MPX_1} = \frac{MPY_1 = APY_1}{\sum_{i=1}^{n} MPX_i/n} = \frac{APY_1}{APX_1}\ , \tag{10}$$

valamint

$$\frac{MPY_n}{MPX_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} MPY_i/n}{MPX_n = APX_n} = \frac{APY_n}{APX_n}\ , \tag{11}$$

A továbbiakban az alábbi jelöléseket vezetjük be:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} MPY_i}{n} = ASY \quad \text{és} \quad \frac{\sum_{i=1}^{n} MPX_i}{n} = ASX\ . \tag{12}$$

A (10) és (11) formulákból következik, hogy

$$MPX_1 = ASX \quad \text{valamint} \quad MPY_n = ASY\ . \tag{13}$$

Mivel az $MPX$ értékek sorozatára igaz, hogy az első tag magával az átlaggal egyenlő, ebből következően az is teljesül, hogy a teljes sorozat és az első tagjától megfosztott csonka sorozat átlaga megegyezik, azaz

$$APX_1 = APX_2 = ASX\ . \tag{14}$$

Ha az átlagelv az $i = 2$ tagoknál is teljesül, akkor a (4) formula által kifejezett egyenlőség a (14) formula figyelembe vételével a következőképpen írható fel:

$$\frac{MPY_2}{MPX_2} = \frac{APY_2}{ASX}\ . \tag{15}$$

A (15)-ből $MPX_2$-t kifejezve, $APY_2$-t pedig algoritmus formájában felírva kapjuk, hogy

$$MPX_2 = \frac{MPY_2}{\frac{1}{2}(MPY_1 + MPY_2)} ASX \,. \tag{16}$$

Ha belátjuk, hogy $(n-1)ASX$ nem más, mint az $MPX_2$, $MPX_3$, ... $MPX_n$ tagok értékösszege, tehát

$$(n-1)ASX = \sum_{i=2}^{n} MPX_i \,, \tag{17}$$

akkor ebből következően az $(n-1)ASX - MPX_2$ az $MPX_3$, $MPX_4$, ..., $MPX_n$ sorozat értékösszege lesz. Ez esetben pedig felírhatjuk, hogy

$$APX_3 = \frac{(n-1)ASX - MPX_2}{n-2} \,, \tag{18}$$

amit felhasználva, az átlagelv $i = 3$ tagoknál való teljesülésekor igaznak bizonyul az

$$\frac{MPY_3}{MPX_3} = \frac{APY_3}{[(n-1)ASX - MPX_2]/(n-2)} \tag{19}$$

összefüggés. $MPX_3$-at kifejezve:

$$MPX_3 = \frac{3MPY_3\big[(n-1)ASX - MPX_2\big]}{(n-2)(MPY_1 + MPY_2 + MPY_3)} \,. \tag{20}$$

Az előbbiek analógiájára

$$\frac{MPY_4}{MPX_4} = \frac{APY_4}{[(n-1)ASX - MPX_2 - MPX_3]/(n-3)} \tag{21}$$

amiből

$$MPX_4 = \frac{4MPY_4\big[(n-1)ASX - MPX_2 - MPX_3\big]}{(n-3)(MPY_1 + MPY_2 + MPY_3 + MPY_4)} \,. \tag{22}$$

A (13) és (16) formulák felhasználásával beláthatjuk, hogy

$$\begin{aligned} MPX_2 &= \frac{2MPY_2 \cdot ASX}{MPY_1 + MPY_2} = \\ &= \frac{2MPY_2(n-1)ASX}{(n-1)(MPY_1 + MPY_2)} = \frac{2MPY_2(n \cdot ASX - MPX_1)}{(n-1)(MPY_1 + MPY_2)} \,. \end{aligned} \tag{23}$$

Általánosítva felírható, hogy

$$MPX_k = \frac{kMPY_k(n \cdot ASX - \sum_{i=1}^{k-1} MPX_i)}{(n-1)\sum_{i=1}^{k} MPY_i} \,. \tag{24}$$

Az $MPY$ sorozat tagjaira vonatkozóan az $i = n$ értéktől visszafelé haladva szintén felismerhetünk ilyen *láncszabályt*. Általánosítva igaz, hogy

$$MPY_{n-k} = \frac{(k+1)MPX_{n-k}(n \cdot ASY - \sum_{i=n-k+1}^{n} MPY_i)}{(n-k)\sum_{i=n-k}^{n} MPX_i} . \quad (25)$$

Úgy tűnik, hogy az $MPY$ ($QY$) sorozat tagjainak akár *tetszőleges* kiválasztásával is, az $MPX_1 = ASX$, (13) összefüggés ismeretében elvileg előállítható az $MPX$ sorozat, mégpedig oly módon, hogy az átlagelvet kielégítő struktúrát kapjunk. Ez azonban csak látszat. Semmi sem garantálja például valójában azt, hogy egy teljesen véletlenszerűen megadott $MPY$ vektor $n$-edik eleme a tagok átlagával legyen egyenlő, holott ez is kritériuma lenne —amint a (10) és (11) összefüggések tükrözik— az átlagelvet kielégítő konstellációnak. Ha a (24) képlet alapján belátjuk, hogy az $MPX$ sorozat minden tagja (az első kivételével) a megelőzőeknek is függvénye, akkor a (25) alapján ugyanúgy elmondhatjuk, hogy az $MPY$ sorozat első tagjai az őket követők függvényei. Ebben az esetben viszont az $MPY$ egymás utáni elemeinek önkényes megválasztása problémásnak tűnik.

Még érdekesebb összefüggést jelent, hogy az $MPY$ vektor első felének tagjai az $MPX$ *második* felének elemei segítségével számíthatók ki, holott az $MPX$ utolsó elemeinek generálását —az $MPY$ ezen tagjainak adottságai esetén— még csak most végezhetnénk el. Láthatjuk tehát, hogy az átlagelvet totálisan kielégítő $MPY$ és $MPX$ számsorok között matematikailag kölcsönös meghatározottság áll fenn. Ez a magyarázata annak, hogy ha például az $MPY$ elemeit *véletlenszerűen* választjuk meg, akkor az így származtatott $MPX$ vektor tagjaiból nem tudjuk „visszaszámolni" a kiinduló $MPY$ sorozatot.

A két vektor kölcsönös, „oda-vissza" determináltsága circulus vitiosusra emlékeztető viszonyt takar. Könnyen kiléphetünk ebből az ördögi körből, ha észrevesszük, hogy ez a kölcsönösség nem más, mint $MPY$ és $MPX$ *szimmetriájának* kifejezője. Ez azt jelenti, hogy amikor $MPY$ *első* tagjainak megadásával $MPX$ első elemeit generáljuk, tulajdonképpen $MPY$ *utolsó* elemeit is meghatározzuk, de azt is jelenti, hogy az átlagelvet minden $i$-re kielégítő alakzat csak szimmetrikus lehet. Az egyszerűség kedvéért csak egy hatelemű sorozat példáján keresztül mutatjuk be ennek módját. (A kapott számértékeket kerekítve közöljük.)

Az első három tagot egyelőre tetszés szerint választjuk meg: $MPY_1 = 15$, $MPY_2 = 10$, $MPY_3 = 6$. Az utolsó tagról tudjuk, hogy meg kell egyeznie az összes elem átlagával, tehát $MPY_6 = ASY$. Az utolsó előtti ($MPY_5$) elem képzési módja analóg $MPX_2$ számítási metódusával, így

$$MPY_5 = \frac{2MPY_2}{MPY_1 + MPY_2} \cdot ASY = \frac{2 \cdot 10}{15+10} = 0.8 \cdot ASY . \quad (26)$$

Végül a negyedik tag előállítása az $MPX_3$ számításának algoritmusával történik:

$$MPY_4 = \frac{3MPY_3\big[(n-1)ASY - MPY_5\big]}{(n-2)(MPY_1 + MPY_2 + MPY_3)} = \frac{3 \cdot 6(5ASY - 0.8ASY)}{4(15+10+6)} =$$
$$= 0.6097 \cdot ASY \; . \tag{27}$$

Általános alakban:

$$MPY_{n-k} = \frac{(k+1)MPY_{k+1}(n \cdot ASY - \sum_{i=n-k+1}^{n} MPY_i)}{(n-k)\sum_{i=1}^{k+1} MPY_i} . \tag{28}$$

Mivel a (25) és (28) formula egyaránt $MPY_{n-k}$ generálási módját adja meg, a két képlet ekvivalens. Az így fennálló egyenlőség rendezése után az

$$\frac{MPX_{n-k}}{\sum_{i=n-k}^{n} MPX_i} = \frac{MPY_{k+1}}{\sum_{i=1}^{k+1} MPY_i} \tag{29}$$

formulát nyerjük, ami ugyancsak $MPY$ és $MPX$ vektorok *szimmetriáját* támasztja alá. Mivel tudjuk, hogy

$$\frac{\sum_{i=1}^{5} MPY_i}{5} = \frac{15 + 10 + 6 + 0.6097ASY + 0.8ASY}{5} = ASY \tag{30}$$

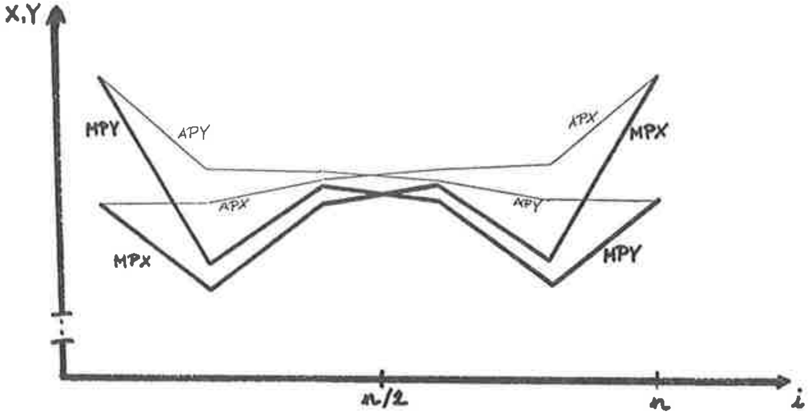
amiből az következik, hogy: $ASY = MPY_6 = 8.634$; $MPY_5 = 6.91$; $MPY_4 = 5.26$. $MPY$ és $MPX$ szimmetriáját feltételezve tehát:

$$MPY = (15;\ 10;\ 6;\ 5.26;\ 6.91;\ 8.634)$$
$$MPX = (8.634;\ 6.91;\ 5.26;\ 6;\ 10;\ 15) \; ,$$

melyekre az átlagelv minden $i$-nél teljesül. A két sorozat grafikonjait ábrázolva feltűnő hasonlóságot észlelnénk a 2. ábra görbéivel.

Az előzőhöz hasonló módszerrel generáltuk az alábbi számsorokat is:

$$MPY = (15;\ 10;\ 12;\ 11.89;\ 9.3;\ 11.64)$$
$$MPX = (11.64;\ 9.3;\ 11.89;\ 12;\ 10;\ 15) \; .$$

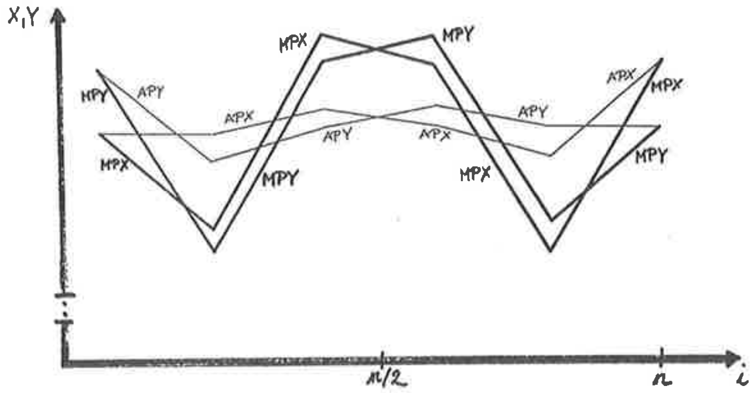



*3. ábra.* Az átlagelvet kielégítő, "W"-alakú $MPY$ és $MPX$ vektorok grafikonjai

Látható, hogy a görbék alakja ezúttal viszonylag nagy eltérést mutat a 2. ábra "etalonjához" képest. Vajon ez azt jelenti, hogy *tökéletes szabadsággal* rendelkezünk az $MPY$ számsor *első* felét kitevő elemek meghatározásában? Korántsem. Példaként tekintsük az alábbi vektorokat:

$$MPY = (15;\ 10;\ 15;\ 15.65;\ 10.6;\ 13.25)$$

$$MPX = (13.25;\ 10.6;\ 15.65;\ 15;\ 10;\ 15)\ .$$




*4. ábra.* "Hamis" $MPY$ és $MPX$ vektorok grafikonjai

A korábban bemutatott görbékhez képest itt az $MPY$ és $MPX$ grafikonjai *többször* is metszik egymást. Bár az átlagelv —számításokkal ellenőrizve— ezúttal is teljesül, a többszöri metszéspont azzal kapcsolatos, hogy az $MPY : MPX$ (eredetileg $QY : QX$ szimbólumokkal jelölt) arányok *nem alkotnak monoton* változó (csökkenő) sorozatot. Ez pedig ellentmond eredeti kikötéseinknek, amik mögött az a meggondolás húzódik meg, hogy a $PX : PY$ árarány monoton változásával (csökkenésével) az erőforrás-részecskék $X$ és $Y$ ágazatok közötti reallokációja az $MPY : MPX$ arányok monoton változó (csökkenő) sorozata szerint megy végbe. Állításunk igazolása és az összehasonlítás kedvéért az eredeti sorrendnek megfelelően közöljük az általunk generált számsorozatokra érvényes termelékenységi arányok hányadosait:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Eredeti: | 1.737 | 1.447 | 1.141 | 0.877 | 0.691 | 0.576 |
| "W"-alakú: | 1.289 | 1.075 | 1.009 | 0.991 | 0.930 | 0.776 |
| "Hamis": | 1.132 | 0.094 | 0.958 | 1.043 | 1.006 | 0.883 |

Kimondható, hogy az $MPY$ vektor *első* felét kitevő, „szabadon választható" tagok kiválasztásánál akkor járunk el helyesen, ha rájuk nézve teljesül, hogy

$$MPY_i \geq MPY_{i+1} \tag{31}$$

ami azt is biztosítja, hogy az $MPY : MPX$ termelékenységi arányok monoton csökkenő sorozatot képezzenek. Megjegyezzük még, hogy *nagy elem-*

*számú*, „valódi" sorozatok esetén —még a 3. ábrán látható "cikcakkok" előfordulása mellett is— a „trend" minden bizonnyal a 2. ábrán közölt alapesetre emlékeztető grafikonhoz közelít.

Az általunk bemutatott generálási elv természetére vonatkozóan könnyen belátható, hogy

- az így létrehozott számsorozatok közül akár $MPY$, akár $MPX$ értékeit $z$-szeresükre ($z > 0$) transzformálva az átlagelv továbbra is *érvényben marad*, a grafikonok szimmetriája azonban *látenssé* válik;
- a generálási elv *triviálisan* alkalmazható a fejezetünk elején említett *„állandó hozadékú"* iparágak esetére is.

# 6 Az átlagelv teljesülésének esélyeiről

Az előző két fejezetből kiderült, hogy a kínálati egyensúly átlagelvnek való megfelelése a képességek multipotenciál-eloszlására vonatkozóan szigorú feltételekhez kötött. Amikor tehát az átlagelv teljesülésének esélyeiről —bizonyos szempontból az *áralakulás marxi elméletének relevanciájáról*— beszélünk, mindenképpen meg kell vizsgálnunk, hogy

- Milyenek a *tipikus* (ilyen értelemben: *valószínű*) multipotenciál-eloszlás ismérvei, és ezek mennyire illeszkednek az érték-árcentrum kitermelődésének feltételeihez.
- Ha pedig a képességek irányultságának jellege *nem minden árarány mellett* vezet az értékarányokat érvényesítő tényezőallokációhoz, akkor azt is elemeznünk kell, hogy a *társadalom preferenciarendezésének* függvényében mekkora az esélye, hogy a relatív árak az átlagelv teljesülésének megfelelő erőforrásegységet juttatnak az ágazatváltás határára.

Az átlagelv teljesülése tehát mindent összegezve attól függ, hogy az *„erre alkalmas"* termelési szerkezetek milyen valószínűséggel jöhetnek szóba a kínálati és keresleti oldal számára *ugyanazon* árarány mellett egyensúlyt jelentő jószágkombinációként.

Az erőforrás(ok) alkalmazása során észlelt hatékonyság (multipotenciál) alakulásában az alábbi tényezők szerepét emeljük ki:

- a *tárgyi* erőforrások minőségi jellemzőit, valamint
- a gazdasági folyamatban részt vevő *ember* termelői és/vagy vállalkozói-szervezői képességeit.

A továbbiakban ez utóbbi faktorra koncentrálunk elsősorban. Az emberre jellemző kvantitatív tulajdonságok (készségek) *tényleges* eloszlásának feltérképezése során *antropometriai (biometriai)* és *populációgenetikai* kutatásokra támaszkodhatunk. A biometria első, témánk szempontjából lényeges közleményei Quetelet [1871] és Galton [1889] tollából származnak. Galton már az *öröklött* és *környezeti* hatások elkülönítésére is kísérletet tett, ami az általunk konstruált modell szempontjából szintén lényeges: Marx felfogásától eltérően ugyanis megközelítésünk a *nem megváltoztatható* (örökletes) képességbeli eltérésekre helyezi a hangsúlyt. A tulajdonságok eloszlására vonatkozó megfigyelések azonban a *genetikai* összefüggések tükrében értelmezhetők igazán. A géneken alapuló öröklődés általános szabályait Mendel [1866] fogalmazta meg, akinek eredményeit később a sejttani és a molekuláris genetikai felfedezések igazolták és pontosították. A genetika történetéről és/vagy ismeretanyagáról jó összefoglalót nyújtanak Czeizel [1983], Rédei [1987], valamint Vida [1997] munkái.

A genetika az ember *mennyiségileg jellemezhető* képességeinek eloszlását általában a *poligénes*, *intermedier* típusú öröklődés következményének tekinti. Ez azt jelenti, hogy

- az „egyed" valamely mérhető tulajdonságának nagyságrendjét több génhely (*lokusz*) együttesen alakítja ki,

- és az ezeken párosával (*diploid* séma szerint) elhelyezkedő génváltozatok (*allélek*) közül a *hatást kiváltó* gének számossága *additív* módon (tehát nem teljes dominanciával) határozza meg a vonatkozó jelleg erősségét. (Vida [1997] 142-156.old., Rédei [1987] 673-699.old.)

A poligénes öröklésmenet eredményeként létrejövő génkombinációk a *binomiális eloszlásnak* megfelelő gyakorisággal hoznak létre a „ható" *(domináns)* géneket adott számban tartalmazó (és a szóban forgó jelleget ennek megfelelő intenzitással felmutató) genotípus-változatokat. A legegyszerűbb modellben például a vizsgált tulajdonság kialakításában mindössze két lokusz ($\alpha$ és $\beta$) vesz részt, melyek az illető képesség (jelleg) szintjét erősítő ($A$ és $B$), illetve vele szemben passzív ($a$ és $b$) alléleket tartalmazhatnak. A két génhelyet a kétféle génváltozattal kombinálva a *binomiális együtthatók* (1, 4, 6, 4, 1) informálnak arról, hogy a két lokuszon összesen megjelenő domináns gén 0-tól 4-ig terjedő számossága hányféle kombinációban fordulhat elő. Ha az aktív és passzív génváltozatok populációban észlelhető aránya 50-50%, a sokaságra pedig a véletlenszerű párosodás (*pánmixis*) jellemző, akkor a binomiális együtthatók saját összegükhöz viszonyított aránya egyúttal az aktív gének gyakoriságára utaló valószínűséget is kifejezi. A vizsgált jelleg (képesség) kialakításában résztvevő génhelyek számának emelésével „a szélsőséges *fenotípusokat* [értsd: az egyedek megjelenésének típusait] szinte *folytonos* fenotípussor köti össze, melyek megoszlása egyre jobban közelíti a *normális* megoszlás 'haranggörbéjét'" (Vida [1997] 147. old., B.J. kiegészítése és kiemelései). A fenotípusok mennyiségi jellegeinek variabilitásában természetesen *környezeti tényezők* is szerepet játszanak, melyektől —mint a marxi „utolérési" effektus révén *kiküszöbölhető* faktoroktól— az általunk szerkesztett modellben eltekintünk.

Tegyük most fel, hogy az $Y$ és $X$ tevékenység végzése során felmutatott ügyességért kettő-kettő, egymástól *függetlenül* kombinálódó allélpár felelős, valamint a passzív gének kizárólagosságát jellemző „alapszinthez" (legyen ekkor $QY, QX = 1$) képest minden újabb domináns gén előfordulása egységnyivel növeli a gazdasági szereplő teljesítményét. Ebben az esetben egy 256 főből álló sokaság az *1. táblázatban* látható —elméletileg várható— gyakorisággal oszlik meg az $Y$ és $X$ területen felmutatott eredményessége szerint.

Mint észrevehető, a termelők megoszlása *két dimenzióban, egymástól független binomiális valószínűségi változók szerint* adható meg. Az $MPY : MPX$ arányok monoton csökkenő sorozata szerint alkotott teljesítményvektorokat a *2. táblázat* mutatja. Az *azonos* termelékenységi arányhoz tartozó, „holtversenyben” lévő adatokat zárójelben helyeztük el.

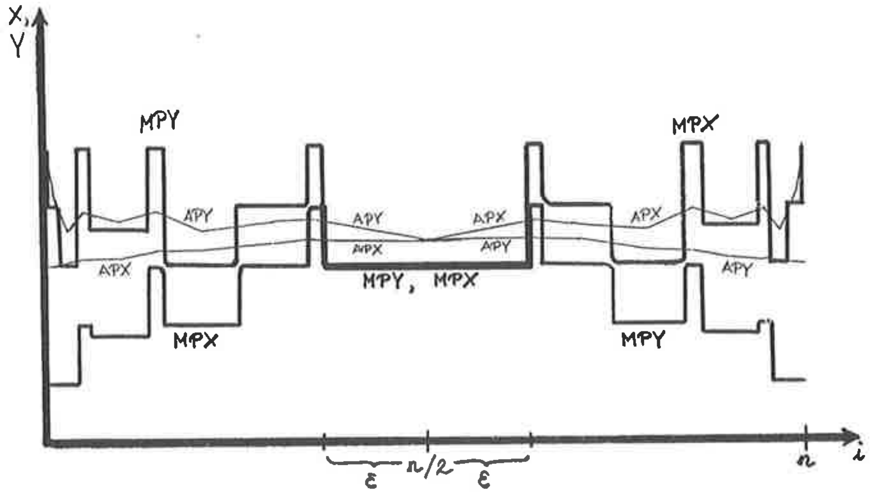
| $QY$ ($MPY$) | $QX$ ($MPX$) 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 |
| 2 | 4 | 16 | 24 | 16 | 4 |
| 3 | 6 | 24 | 36 | 24 | 6 |
| 4 | 4 | 16 | 24 | 16 | 4 |
| 5 | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 |

*1. táblázat.* A termelők megoszlása 256 fős minta esetén

| $\frac{MPY}{MPX}$ | $MPY$ | $MPX$ | Gyakoriság | $APY$ | $APX$ | $\frac{APY}{APX}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 5 | 1 | 1 | 5 | 3 | 1.66 |
| 4 | 4 | 1 | 4 | 4.20 | 3.01 | 1.40 |
| 3 | 3 | 1 | 6 | 3.55 | 3.04 | 1.17 |
| 2.5 | 5 | 2 | 4 | 3.93 | 3.09 | 1.27 |
| 2 | (2,4) | (1,2) | 4+16 | 3.74 | 3.11 | 1.20 |
| 1.66 | 5 | 3 | 6 | 3.93 | 3.23 | 1.22 |
| 1.5 | 3 | 2 | 24 | 3.58 | 3.23 | 1.11 |
| 1.33 | 4 | 3 | 24 | 3.70 | 3.39 | 1.09 |
| 1.25 | 5 | 4 | 4 | 3.75 | 3.44 | 1.09 |
| 1 | (1,2,3,4,5) | (1,2,3,4,5) | 1+16+36+16+1 | 3.43 | 3.43 | 1 |
| 0.8 | 4 | 5 | 4 | 3.44 | 3.75 | 0.93 |
| 0.75 | 3 | 4 | 24 | 3.39 | 3.70 | 0.92 |
| 0.66 | 2 | 3 | 24 | 3.23 | 3.58 | 0.90 |
| 0.6 | 3 | 5 | 6 | 3.23 | 3.93 | 0.82 |
| 0.5 | (1,2) | (2,4) | 4+16 | 3.11 | 3.74 | 0.83 |
| 0.4 | 2 | 5 | 4 | 3.09 | 3.93 | 0.76 |
| 0.33 | 1 | 3 | 6 | 3.04 | 3.55 | 0.86 |
| 0.25 | 1 | 4 | 4 | 3.01 | 4.20 | 0.72 |
| 0.2 | 1 | 5 | 1 | 3 | 5 | 0.6 |

*2. táblázat.* Az egyes termelékenységi arányokhoz tartozó teljesítményvektorok jellemzői

Adatainkat grafikus formában is megjeleníthetjük. Az azonos termelékenységi arányt produkáló termelők számosságát az $MPY$ és $MPX$ grafikonok vízszintes szakaszainak arányos hosszúsága jelzi.




*5. ábra.* Egyéni teljesítmények a képességek tipikus eloszlása esetén

Bár a fenti adatsor némileg önkényes, mégis alkalmas arra, hogy ez alapján összegezzük a termelői tehetségeket reprezentáló $QY$ és $QX$ (tehát $MPY$ és $MPX$) sorozat karakterének jellemző tulajdonságait. Ezek:

- Az $Y$ és $X$ természetes mértékegységének alkalmas megválasztása esetén érvényesülő *szimmetria*;
- Az osztandó és osztó abszolút nagyságától elvonatkoztató $QY : QX$ ($MPY : MPX$) *arányok* gyakorisága tekintetében mutatkozó (a vízszintes, "$i$"-tengely perspektívájából szemlélt) *binomiális (normális) eloszlás*; valamint
- A termelői képességeknek az *egyes* jószágfajták előállításában megnyilvánuló (a *függőleges* tengely felől szemlélt) *binomiális (normális) eloszlása*, vagyis a közepes ügyességű termelők dominanciája.

Az *első* jellemző azt jelenti, hogy körülbelül ugyanannyi termelő úgy gyakorlottabb az egyik, mint amennyi, és ahogy a másik termékfajta előállításában; vagyis az emberek összességére nem jellemző, hogy a tehetség irányultsága mereven egyoldalú legyen. A *másik* tulajdonság azt takarja, hogy a $QY : QX$ ($MPY : MPX$) termelékenységi arányok eloszlása nem csak szimmetrikus, hanem előfordulásuk ($n$ számú erőforrásegységet feltételezve) az $n/2$-ik termelőre érvényes értékek —mint *módusz* és egyúttal *medián*— *környezetében „sűrűsödik"*. (Ez a nagyság —más oldalról— az aggregált termelékenységi aránnyal egyenlő.) A *harmadik* tulajdonság pedig abban nyilvánul meg, hogy az előbb említett módusz a $QY$ és $QX$ (vagyis $MPY$ és $MPX$) értékek által elfoglalt függőleges sáv *középső* szintjén található.

E tulajdonságok együttese —mint az 5. ábrán látható— *az $n/2$ pont viszonylag tág környezete fölött „középmagasságban" vízszintesen egymást fedő (vagy az $APY$ és $APX$ vonatkozásában vízszinteshez közelítő, ellapuló) szimmetrikus grafikonokat* írnak le. Ezek szerint a *minden* árarány mellett az átlagelvnek is megfelelő csere feltételei *nem plauzibilisek,* ami az előzőekben közölt $MPY$ : $MPX$ és $APY$ : $APX$ arányok összevetéséből is kiderül. Az „átlagos" értékek nagy gyakorisága miatt az $i = n/2$ pont megjelölt, $\varepsilon$ sugarú környezete fölött ellaposodó $APY$- és $APX$-görbék közeledése miatt azonban mégis *elég terjedelmesnek* tekinthető az árarányok és átlagos ráfordításarányok ha nem is pontos, de „tűrhető" illeszkedését biztosító határtermelők tartománya.

E tartomány további bővülését eredményezi, ha az $Y$ és $X$ tevékenységek során megnyilvánuló képességekért felelős gének halmaza közös, ún. *pleiotróp* elemeket tartalmaz, vagy az illető gének azonos kromoszómán elhelyezkedve egymáshoz kapcsolódva (*linkage*-ben) öröklődnek (Rédei [1987] 127-128., 151-174. old.). Ez esetben ugyanis a két területen felmutatott képességek *korrelációja* figyelhető meg, a binomiális valószínűségi változók függetlensége elvész. Minden bizonnyal felbukkan —bár nem kifejezetten genetikai okokból— az $Y$ és $X$ területen felmutatott fajlagos teljesítmények kölcsönössége akkor is, ha modellünk főszereplői termelők helyett *vállalkozók*. E jelenség magyarázata, hogy a szervezési, irányítási funkciók kívánalmai minden iparágban igen hasonló emberi készségeket követelnek meg.

Ha feltételezhetnénk, hogy a társadalom preferenciarendezése is *szimmetrikus* $Y$ és $X$ jószágok vonatkozásában (ami alatt most azt értjük, hogy mindegyik —a $QY$ és $QX$ ($MPY$ és $MPX$) sorozatok természetes mértékegységében kifejezett— termék „*egyaránt fontos*" a fogyasztóknak, akkor még nagyobb valószínűséget tulajdoníthatnánk a csere és az átlagelv találkozásának. Meg kell azonban állapítanunk: nem állnak rendelkezésünkre olyan kutatási eredmények, melyek szerint minden termékfajta hasonló súllyal szerepelne a társadalom „ízlésvilágában". Ezzel együtt azonban kijelenthető, hogy habár az általános egyensúly állapotában értelmezett átlagelvű csere totális (*bármely* árarány melletti) érvényesülése „heroikus" feltételrendszerhez kötött, mégis *valószínűsíthető*, hogy „nagy átlagban" ún. értékarányos árak jönnek létre a gazdaságban. Mennyiben jelenti ez az értéktörvény érvényesülését?

Ha ez alatt egy olyan szabályozási mechanizmust értünk, amelynek középpontjában a kereslet és kínálat egyensúlyát szimultán kielégítő *termékszerkezet* áll, akkor gondolati rendszerünk szellemiségével nem összeférhetetlen az értéktörvény létezése. Ha viszont az *átlag*elvű áralakulás (jövedelmezőség) —mint *norma*— áll működésének középpontjában, akkor nem beszélhetünk egyértelműen értéktörvényről. A norma ugyanis —elfogadva Kornai [1976] meghatározását— „egy viselkedési változó [...] átlaga, de nem minden viselkedési változó átlaga norma. Normáról csak akkor beszélhetünk, ha működik egy szabályozási folyamat, amely a tényleges viselkedést a norma irányába tereli."

Az általunk vizsgált modellhez illeszthető ilyen —az árak játékán alapuló— szabályozó folyamat. Arra is rámutattunk, hogy a képességek multipotenciáljának eloszlásából *valószínűsíthető* a kínálati egyensúly értékarányos árakhoz való kapcsolódása, ezért ezek egyfajta *várható értékként* (a lehetséges árcentrumok *átlagaként*) is tételezhetők. Az árak ingadozásának *konkrét esetben* megfigyelhető középpontja, a szabályozás célja azonban *nem törvényszerűen egy átlagelvű nagyság,* hiszen a kínálati és keresleti szerkezet közeledését koordináló árarány „hintamozgása" nem csak a „valószínű", hanem elvileg *bármely* érték és az ennek megfelelő erőforrásszegmens mellett nyugvásra juthat. Nem igaz tehát, hogy az áringadozások tendenciája az értékhez közelít, az érvényesülő *árcentrum* azonban tendenciálisan egyenlő lehet az értékkel.

# 7 Járadék az iparágak közötti cserében

Marchal szerint „A [gazdasági] profit keletkezéséhez *a verseny szabad játékát akadályozó* tényezőknek kell jelen lenniük. Ez azt mutatja, hogy mély rokonság áll fenn a profit és a *monopólium* között. [...] Csak monopólium teszi lehetővé szabályos és tartós profit realizálását" ([1951] 552. old., B.J. kiegészítése és kiemelései).

Mint tanulmányunk 2. fejezetében Robinson nyomán bemutattuk, gazdasági profitot (*járadékot*) *nem-uniform* iparágakat feltételezve érnek el az egyes tényezőrészecskék, ami képességeik szóródásának, illetve e rangsorban elfoglalt helyük *monopolizáltságának* következménye. Ezek a kondíciók ugyanis az iparági kínálat *rugalmatlanságára (csökkenő hozadékára)* utalnak (hiszen az előbb említett monopolizáltság az inputegységekhez rendelhető hatékonysági szint *szűkösségét* jelenti), ami —megfelelő kereslettel találkozva— *magasabb árszínvonalat* (pontosabban, a *többi allokációs területhez képest kedvező* csereárányokat) generál. Az így kialakuló járadék nívója az erőforrásegységek hatékonyságának relatív szintjétől, valamint a jószágfajtákat és inputokat tartalmazó áruhalmazon belüli —a keresleti arányok által is meghatározott— árarányoktól függ.

Mivel a járadék ezek szerint a kínálat viszonylagos merevsége által kiváltott *árarány-torzulásként* fogható fel, logikusan adódik, hogy ez az anomália az *állandó iparági hozadékhoz képest* észlelt eltéréssel függ össze. (Az állandó hozadék a többi termék felé irányuló reallokáció szempontjából az „ellenállás" nem növekvő, hanem állandó szintjét képezi.)

Amint Hoch Róbert ([1972] 312. old.) és Erdős Péter ([1976] 108-109. old.) 4. fejezetben citált passzusaiból, és a $QY : QX$ sorozatok vizsgálatából kiderült, nem-uniform ágazatok között sem zárható ki az átlagelvű csere. Ez a jelenség az *összetétel hamisságának* elvével kapcsolatos: ha *mindegyik* iparág járadékot sajátít el, akkor termékeik cseréje során —*egymáshoz képest*— nem lesznek képesek (legalábbis az eredeti mértékben) járadékot realizálni. Samuelson szerint: „A magasabb árak *egy iparágban* előnyösek lehetnek az ott működő vállalatok számára, de ha az *összes* vásárolt és eladott árunak ugyanabban az arányban növekedne az ára, akkor *egyetlen vállalat sem* járna jól" ([1973] 73. old.).

A járadékok *tökéletes* kioltódása, a legjobb és legrosszabb feltételek átlagok körüli azonos szóródása azonban csak *esetleges* jelenség. Az iparágak közötti tranzakciók értékarányosságának *sérülése* tekinthető tipikusnak, ami az ágazatok átlagos profitjainak (fajlagos jövedelmeinek) eltéréseiben, vagy ami ugyanezt jelenti: az iparági átlagtermék-értékek differenciáiban nyilvánul meg. Ezek az eltérések arra utalnak, hogy a járadék-képződés egymással szembeni érvényesítése során vagy egyik, vagy másik terület lesz sikeresebb. Iménti hipotézisünk alapján ezt az iparági kínálatok relatív rugalmatlanságára, az állandó hozadéktól való nem azonos mértékű távolságaira vezethetjük vissza. A következőkben —egy, az Euler-tétellel rokon összefüggés révén— igazoljuk, hogy a termelési ágak átlagos jövedelmezőségének viszonya nem közvetlenül, csak *áttételesen* hozható kapcsolatba a kínálati (ár)„rugalmatlanságok" viszonyával. A jövedelmezőségi arányokat ugyanis direkt módon az *erőforrás termelési rugalmassága* (rugalmatlansága) határozza meg. A rugalmasságot az egyes iparágakra vonatkozóan $\mathcal{E}Y$ és $\mathcal{E}X$ szimbólumokkal jelöljük, mértékük pedig azt mutatja meg, hogy az ágazatban felhasznált tényezőmennyiség 1%-os változása hány %-kal módosítja a kibocsátást.

A bizonyítás során abból indulunk ki, hogy

$$\mathcal{E}X : \mathcal{E}Y = \frac{MPX}{APX} : \frac{MPY}{APY}, \tag{32}$$

ami átalakítható az

$$\mathcal{E}X : \mathcal{E}Y = \frac{MPX}{MPY} : \frac{APX}{APY} \tag{33}$$

formulává. Mivel a szimultán kínálati egyensúlyban igaz, hogy

$$PY : PX = MPX : MPY, \tag{34}$$

ezért a (11) formula felírható az alábbi módon:

$$\mathcal{E}X : \mathcal{E}Y = \frac{PX}{PY} : \frac{APX}{APY}, \tag{35}$$

amiből következik, hogy

$$\mathcal{E}X : \mathcal{E}Y = VAPY : VAPX, \tag{36}$$

s ezzel állításunkat igazoltuk. Vagyis minél *alacsonyabb* valamely iparágban a tényező termelési rugalmassága a másik iparágban mért szinthez képest, annál *magasabb* lesz az egységnyi erőforrásra jutó árbevétel a másik ágazathoz viszonyítva. Azaz annál erőteljesebben képes járadékot realizálni az *egymás közötti* cserében.

Ha most feltételezzük, hogy az iparág kínálati függvénye az *ágazati határköltség* görbéjének felel meg, akkor ennek a *termékár szerinti rugalmassága* (mint az *iparági kínálat árrugalmassága*) a Mátyás ([1979] 181. old.) által közölt formula megfelelő átalakításával (az $X$ ágazatban) az

$$\mathcal{E}XS = \frac{1}{1/\mathcal{E}X - 1 - \hat{E}X} \tag{37}$$

képlettel adható meg (ahol $\hat{E}X$ a tényező termelési rugalmasságának a kibocsátás szerinti rugalmassága). Észrevehető, hogy $\mathcal{E}X$ változása —ceteris paribus— $\mathcal{E}XS$ értékét azonos irányban módosítja, tehát az erőforrás termelési rugalmassága és a kínálat árrugalmassága valóban az említett kapcsolatban áll egymással.

# 8 Összegzés

Tanulmányunkban a cserearányok mögött álló rendezőelvek (*határ-* és *átlag-elvek*) relevanciáját vizsgáltuk a modellünkben szereplő iparágak uniformitásának feladása mellett. Ennek során az alábbi, általunk legfontosabbnak ítélt megállapításokat tettük:

- Az inputok allokációs irányának megválasztásánál nem az egyes iparágak *átlagos* jövedelmezősége az irányadó, hanem a tényezőegységek *egyéni* jövedelmezőségi kilátásainak, *komparatív előnyeinek* mérlegelése.
- Az előző tézisre támaszkodva kifejtettük, hogy az iparágak szimultán egyensúlyához vezető automatizmusoknak *nem is „célja”* az ágazati befektetések rentabilitásának kiegyenlítése, aminek következményeként a cserearányok és az iparági „darabköltségek” arányainak *átlagelvre* jellemző kongruenciája törvényszerűen nem is valósul meg.
- Arra is céloztunk, hogy habár az ún. árcentrum valójában a *határelvnek* megfelelően alakul, ez —a sztereotip elképzelésekkel szemben— egyáltalán *nem azt jelenti*, hogy a határon lévő („ármeghatározó”) erőforrásegység az ágazat *legkevésbé hatékony* teljesítményét képviselné.
- Megfogalmaztuk az átlagelvet kielégítő termelékenységi sorozatok generálásának elveit, majd a termelői képességek multipotenciáljára vonatkozó hipotéziseink alapján azt a következtetést vontuk le, hogy habár az ilyen sorozatok előfordulásának valószínűsége csekély, de a cserearányok viszonylag *nagy gyakorisággal* mégis megfelelhetnek az "érték" arányoknak.
- Rávilágítottunk, hogy nem-uniform ágazatok *egymás közötti* tranzakcióiban a járadék az *összetétel hamisságának* elve miatt *„erodálódhat”*.
- Végül kiderítettük, hogy az egymás közötti cserében a járadékot tartalmazó ár érvényesítésének képessége *közvetlenül nem* a kínálat (ár)rugalmatlanságainak, hanem az *erőforrás termelési „rugalmatlanságainak”* viszonyára vezethető vissza.

A vizsgálatunknak keretet adó modell további, ígéretes lehetőségeket biztosíthatna a profit egyéb megjelenési formáinak (*normál*, *átlag* és *átlagos* profit) és ezek egymásra vonatkoztathatóságának új szempontok szerint történő elemzésére. Eme összefüggések vizsgálatát azonban egy másik tanulmányunkban (Barancsuk [2003/b]) végeztük el.

## Irodalom


1. Barancsuk J.: A nem-uniform, kompetitív iparágak szimultán egyensúlya hosszú távon. In: *Emlékkötet Zinhober Ferenc professzor tiszteletére* PTE, 2003/b
2. Baumol, W. J.: *Közgazdaságtan és operációanalízis.* Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1961. [KJK, 1968][2]
3. Bertóti L.–Erdős T.: *A kapitalizmus politikai gazdaságtana.* Kossuth, 1975
4. Chamberlin, E. H.: *The Theory of Monopolistic Competition.* Cambridge of Mass., 1933
5. Czeizel E.: *Az emberi öröklődés.* Gondolat, 1983
6. Engels, F.: Pótlás. In Marx, K.: *A tőke III.* London, 1894. [Szikra, 1951]
7. Erdős P.: *Bér, profit, adóztatás. Tanulmányok a kapitalizmus politikai gazdaságtanának vitatott kérdéseiről.* KJK, 1976
8. Galton, F.: *Natural Inheritance.* Macmillan, London, 1889
9. Hoch R.: Fogyasztás és ár. KJK, 1972
10. Kopányi M. (szerk.): *Mikroökonómia.* Műszaki Könyvkiadó - AULA, 1993
11. Kornai J.: A gazdasági viselkedés normái és a norma szerinti szabályozás. *Közgazdasági Szemle*, 1976/1.
12. Marchal, J.: The Construction of a New Theory of Profit. *The American Economic Review*, 1951/9.
13. Marshall, A.: *Principles of Economics.* London, 1930
14. Marx, K.: *A tőke I.* London, 1867. [Kossuth, 1973]
15. Marx, K.: *A tőke III.* London, 1894. [Szikra, 1951]
16. Mátyás A.: *A polgári közgazdaságtan története az 1870-es évektől napjainkig.* KJK, 1979
17. Mendel, J. G.: *Versuche über Pflanzen-hybriden.* Verhandlungen des Naturforsdhenden Vereines in Brünn, 1866
18. Oroszi S.: A közömbösségi ár mint árcentrum-hipotézis. *Közgazdasági Szemle*, 1982/1.
19. Oroszi S.: *Árutermelési formák, árcentrumok, árvonzáspont.* Kézirat, PTE, 1984
20. Quetelet, L. A. J.: *Antropometrie.* 1871
21. Rédei P. Gy.: *Genetika.* Mezőgazdasági - Gondolat, 1987
22. Robinson, J.: *The Economics of Imperfect Competition.* London, 1933
23. Samuelson, P. A.: *Közgazdaságtan.* McGraw-Hill, Inc. New York, 1973 [KJK, 1976]
24. Schumpeter, J. A.: *A gazdasági fejlődés elmélete.* Verlag Duncker und Humblot, Berlin - München, 1926. [KJK, 1980]
25. Sraffa, P.: The Laws of Return under Competitive Conditions. *Economic Journal*, 1926/12.


[2] A hazai kiadók által forgalomba hozott művek címét magyarul közöljük. A magyar kiadót és az évszámot szögletes zárójelbe tettük. A hivatkozásoknál szereplő évszám ilyenkor az eredeti, míg az oldalszámok a magyar kiadásra vonatkoznak.

26. Szabó K. (szerk.): *Politikai gazdaságtan 1.* (Közgazdasági alapvetések) KJK, 1984
27. Vida G.: *Általános genetika.* Nemzeti Tankönyvkiadó, 1997
28. Viner, J.: *Cost Curves and Supply Curves.* Chicago, 1931 [In: Readings in Price Theory. Chicago, 1952]
29. Zalai E.: *Munkaérték és sajátérték.* Akadémiai, 1988

## THE ORGANIZING PRINCIPLES LYING BEHIND THE „PRICE CENTRE"

This essay engages to investigate the theoretical background of the phenomena of „price centre". A particular attention is given to the presentation of the theories that explain the forming of the prices according the average and marginal costs. It is also discussed why the two theories reach differing results and how the price and cost rates are co-ordinated according the concept of comparative advantages. Breaks with the belief that in the framework of the Neoclassical Theory the less effective companies of the branch of industry determine the prices. Examining the genetic background of the division of production potential proves that the Marxian concept of price determination by average cost needs correction.

# ÉRTÉKPAPÍROK HOZAMÁNAK ELOSZLÁSA ÉS A TŐZSDEI KAPITALIZÁCIÓ[1]

LUKÁCS PÉTER
*CIB Bank, Pécs*

A dolgozat középpontjában az a kérdés áll, hogy van-e kimutatható kapcsolat a tőzsdei részvények hozameloszlása és az adott értékpapírok tőzsdei kapitalizációja között. A vizsgálat a Budapesti Értéktőzsdén forgalmazott 21 részvény hozamaira terjed ki. A vizsgálat során a kiválasztott részvényeket sorba rendeztük a kapitalizációjuk szerint, majd a legfontosabb eloszlás jellemzők értékeinek alakulását elemeztük egyrészt grafikusan, másrészt rangkorreláció segítségével. A kapott eredmények alapján megállapítható, hogy van összefüggés a részvények kapitalizációja és a hozam eloszlásaik bizonyos jellemzői között.[2]

## 1 Bevezetés

A finanszírozás modellezés, azon belül az árfolyam-alakulások modellezésének egyik alapvető problémája annak a bizonytalanságnak a megközelítése, mely a különböző értékpapírok, indexek, derivatív eszközök áralakulását alapvetően meghatározza. Ez jelent egyrészt elméleti, másrészt gyakorlati, metodológiai megfontolásokat is. A bizonytalanság megközelítésének két, sokat vizsgált területe —a hozameloszlások, illetve a különböző autoregresszív volatilitásmodellek— közül jelen dolgozat az elsőre koncentrál.

A hozameloszlások első, alapvető fontosságú modellje a Bachelier (BACHELIER, [1900]) tanulmány alapján kialakított normális hozameloszlásra alapuló modell. Ebben a modellben —egyes fizikai rendszerek részecskéi véletlen bolyongásának analógiájának alapján— az értékpapírhozamok eloszlása normális.

A normalitással kapcsolatos problémák is viszonylag korán megjelentek a szakirodalomban. Ez elsősorban a hozameloszlások —normális eloszláshoz képest— kiugróan magas csúcsosságában és következésképpen vastagabb farokrészeiben nyilvánult meg. A vastag farokrészek modellezésének egyik alapvető lehetőségét kínálták a Pareto-Lévy (LÉVY, [1925]) eloszlások, melyek mind a mai napig meghatározóak az extrém hozamok vizsgálatánál. A Pareto-Lévy eloszlások tőkepiaci hozamokra való alkalmazásának - empirikus vizs-

[1] Beérkezett: 2002. december 4. e-mail: plukacs@cib.hu.

[2] Ezúton mondok köszönetet konzulensemnek, Varga Józsefnek a PTE professzorának a dolgozat elkészítéséhez nyújtott segítségéért, valamint azért, hogy a témában végzett kutatási eredményeit felhasználhattam a dolgozat elkészítéséhez. Köszönetemet fejezem ki a két ismeretlen opponensemnek is, akik értékes tanácsaikkal segítették munkámat.

gálatokkal is alátámasztott nagyon jó értékelését, kritikáját kapjuk Varga (VARGA, [1990], [2001]) tanulmányaiban.

A Pareto-Lévy eloszlások négy paramétere közül a kutatások középpontjában az $\alpha$ paraméter becslése áll. Ezen paraméter jellemzi az eloszlás centrum részének csúcsosságát, következésképpen a farokrészek vastagságát. A későbbiekben részletezésre kerülő Hill-eljárás ezen $\alpha$ paraméter reciprokának konzisztens —és a többi metódus közül a leghatékonyabb— becsléséhez vezet. Mindez lehetővé teszi, hogy a csúcsosság jelenségét az elméleti eloszlás normalitásának feltételezése nélkül modellezzük. A vastag farok probléma modellezésére tőbb eszköz is rendelkezésre áll, pl. a különböző szabadságfokú $t$-eloszlások illesztése, mixelt normális eloszlások stb. A farok-index becslésekkel kapcsolatos elemzések irodalma nem nyúlik vissza hosszú múltra. A teljesség igénye nélkül néhány dolgozat: (KOEDJIK et al., [1990], [1992]), (KAHLER, [1993]), és (KOEDJIK és KOOL, [1993]).

Jelen dolgozat a fenti problémákat egy sajátos rendszerben elemzi a BÉT-en forgalmazott részvények vonatkozásában. Arra a kérdésre keressük a választ, hogy vajon a tőzsdei kapitalizáció és a fentiekben vázolt csúcsosság-probléma között létezik-e kimutatható kapcsolat. Míg tőzsdei értékpapír és index hozamok esetében a csúcsosság jelenségének ténye egyértelműen elfogadott a szakirodalomban, addig az eloszlások aszimmetriájának létezése jobban megosztja a kutatókat. A dolgozatnak témája az aszimmetria és a kapitalizáció közötti összefüggés is. Kissé más összefüggés-rendszerbe helyezve a fenti problémákat a dolgozat vizsgálja azt a kérdést is, hogy a kockázatkerülő befektető szempontjából mit jelent portfóliójának kapitalizáció szerinti átrendezése a megváltozott szóródáson, szimmetrián és csúcsosságon keresztül. Ismereteink szerint ilyen szempontú kutatások nem lelhetők fel a releváns szakirodalomban.

## 2 Az elemzésben felhasznált adatok

A vizsgálat során a Budapesti Értéktőzsdén forgalmazott 21 részvény napi záróárfolyamai alapján számított hozamok kerültek elemzésre. A szakirodalomban elfogadott általános eljárás szerint:

$$r_t = \ln(P_t/P_{t-1}) = \ln P_t - \ln P_{t-1} \tag{1}$$

ahol

$r_t$ $t$ időpontbeli hozam,

$P_t$ a $t$ időpontbeli árfolyam érték.

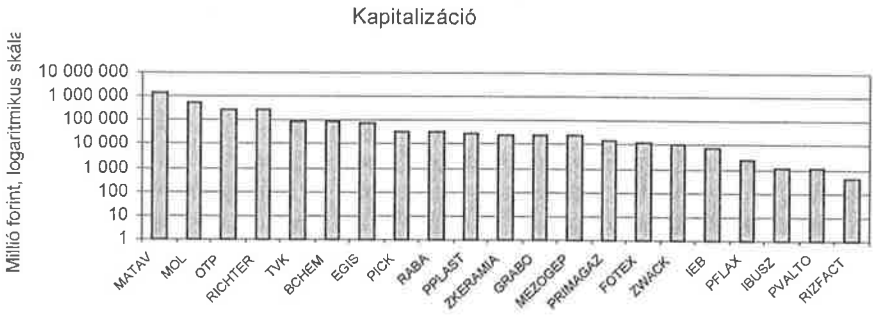
Az elemzésben a fentiek alapján kiszámításra kerültek a részvényenkénti napi hozamok (továbbiakban hozamok), melyek eloszlását összevetjük az adott értékpapír tőzsdei kapitalizációjával. Az első árfolyamadat megfigyelésének időpontja 1997. április 1. azon értékpapírok esetében, melyek már tőzsdei forgalomban voltak ekkor a Budapesti Értéktőzsdén. A később bevezetésre kerülő papírok esetében a forgalmazás első napjának árfolyamadatát vettük figyelembe kezdőértékként. A vizsgálatba bevont utolsó árfolyamadat megfigyelésének időpontja 2001. május 9. Így a maximális hozamszám 1023, a minimális pedig 843 (Rába).

A részvények kiválasztásának alapvető szempontja volt, hogy a forgalmuk alapján vezető helyet betöltő öt részvény (Matáv, MOL, OTP, Richter, TVK, Borsodchem) szerepeljen az elemzésben. A többi értékpapír kiválasztása véletlenszerűen történt, figyelembe véve azt a szempontot, hogy a választás jól átfogja a BÉT-en forgalmazott különböző kapitalizációjú értékpapírokat.

A tőzsdei kapitalizáció számításánál figyelembe vettük az adott papír átlagárfolyamát (egyszerű számtani átlag alapján), melyet beszorozva a 2001. május 9-én tőzsdei forgalomban lévő (bevezetett) mennyiséggel, előáll a számított tőzsdei kapitalizáció. Az *1. táblázat* összefoglalja a vizsgálatba bevont értékpapírokat a számított kapitalizáció szerint sorba rendezve:

| Értékpapír | Kapitalizáció (Ft) |
|---|---:|
| MATAV | 1 437 621 758 438 |
| MOL | 492 286 344 000 |
| OTP | 291 126 226 500 |
| RICHTER | 279 475 607 681 |
| TVK | 90 677 577 007 |
| BCHEM | 85 602 570 878 |
| EGIS | 72 675 600 953 |
| PICK | 35 439 942 545 |
| RABA | 33 003 309 913 |
| PPLAST | 27 227 522 892 |
| ZKERAMIA | 23 727 071 258 |
| GRABO | 23 114 041 039 |
| MEZOGEP | 22 988 926 080 |
| PRIMAGAZ | 13 931 460 000 |
| FOTEX | 13 326 457 370 |
| ZWACK | 11 339 800 000 |
| IEB | 7 199 055 825 |
| PFLAX | 2 406 904 923 |
| IBUSZ | 1 129 562 885 |
| PVALTO | 1 017 275 000 |
| RIZFACT | 392 411 244 |

*1. táblázat.* Értékpapírok a tőzsdei számított kapitalizáció sorrendjében

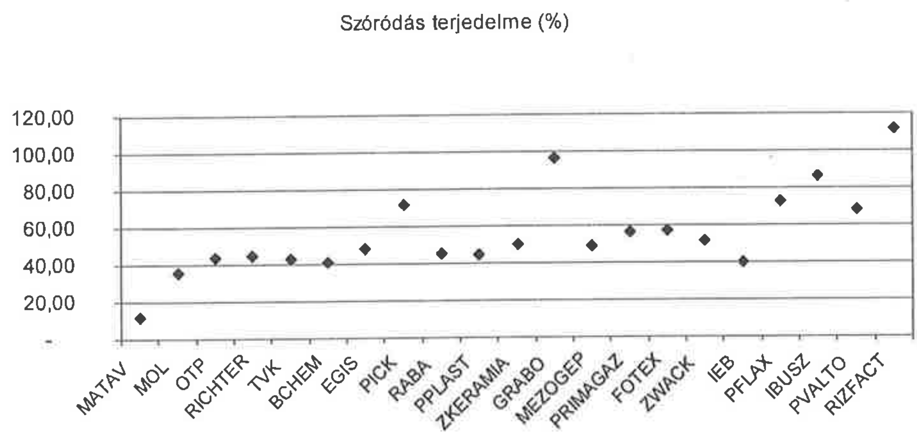



*1. ábra.* Értékpapírok a tőzsdei kapitalizáció sorrendjében

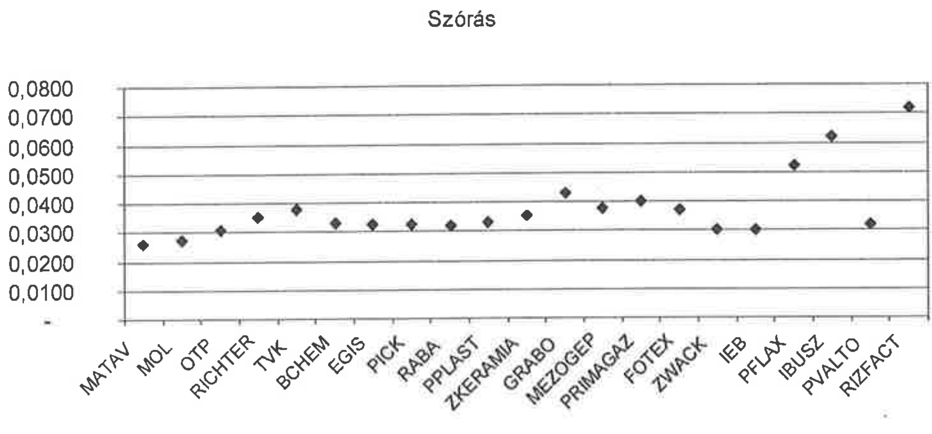
A fentiek alapján egyértelműen látható, hogy a vizsgálatban szereplő részvények esetében a kapiatizáció általában növekvő ütemben csökken, és az első részvény kapitalizációja meghaladja a következő tíz részvény kapitalizációjának összegét.

# 3 Kockázat és kapitalizáció

Az árfolyamokkal kapcsolatos elméletek általában a hozameloszlások második és annál magasabb rendű centrális momentumain keresztül ragadják meg a kockázat jelenségét (BODIE-KANE-MARCUS, [1996]). A páros momentumok esetében a növekvő értékek növekvő kockázatot jelentenek. Páratlan momentumok esetében az adott centrális momentum előjele határozza meg, hogy felmerül-e többletkockázat a kockázatelutasító befektető számára. A pozitív ferdeség —bal oldali aszimmetria— kedvező a kockázatelutasító befektető számára, hiszen ebben az esetben a nagy mértékű negatív hozamok bekövetkezési esélye kisebb. Amennyiben elfogadjuk a tőkepiacok hozamainak normális eloszlására vonatkozó nullhipotézist, a kockázat értelmezése a második momentumra, azaz a varianciára korlátozódik. A vizsgált részvényhozamok szóródási terjedelme, és a kapitalizáció, valamint szórásuk és a kapitalizáció közötti összefüggést szemlélteti a *2.* és a *3. ábra.*




*2. ábra.* A hozamok szóródási terjedelme a kapitalizáció függvényében




*3. ábra.* A hozamok szórása a kapitalizáció függvényében

A fenti eredmények azt mutatják, hogy a kapitalizáció csökkenésével mind a szóródás terjedelme, mind pedig a szórás általában növekszik. Az illesztett lineáris trend természetesen nem jelent lineáris kapcsolatot - tekintettel az 1. táblázat adatainak növekvő ütemű csökkenésére, csupán szemléltető jellegű.

# 4 Hozameloszlás közelítése normális eloszlással

Amennyiben a hozamok eloszlását normális eloszlással közelítjük —feltételezve az elméleti eloszlás normalitását—, a megfelelő momentumok vizsgálatával nyerhetünk képet arról, hogy az adott instrumentum hozameloszlása mennyiben tér el az elméleti eloszlástól. Természetesen pontosabb képet nyerhetünk a normalitásról valamilyen illeszkedési (pl. $\chi^2$) próba elvégzésével, ám a megfelelő momentumok vizsgálata is statisztikailag megnyugtató választ ad a normalitás hipotézisének ellenőrzéséhez. A ferdeség vizsgálata a harmadik, a csúcsosságé pedig a normált negyedik momentum alapján történik. Ezeket a jellemzőket a következő összefüggések határozzák meg:

$$S = \frac{1}{n\sigma^3} \sum_{t=1}^{n} (r_t - \mu)^3 \tag{2}$$

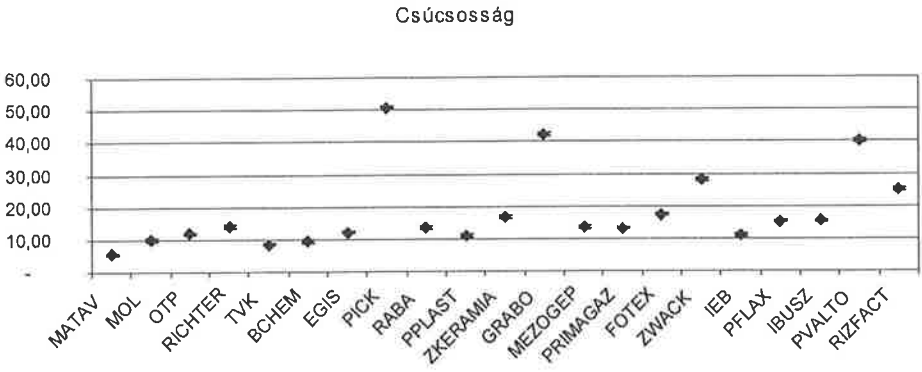
a ferdeségi együttható,

$$K = \frac{1}{n\sigma^4} \sum_{t=1}^{n} (r_t - \mu)^4 \tag{3}$$

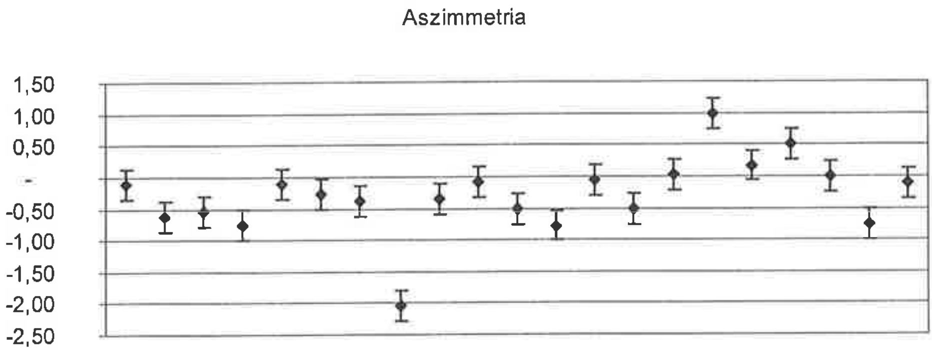
pedig az eloszlás kurtózisa, ahol

| | |
|---|---|
| $n$ | a vizsgált hozamok száma, |
| $t$ | az adott időpont, |
| $\mu$ | a hozam várható értéke, |
| $\sigma^2$ | a hozam varianciája. |

A normalitás nullhipotézise mellett a ferdeség és kurtózis becslések értékei köré konfidencia intervallumot lehet szerkeszteni; a ferdeség esetén a $\sqrt{6/n}$, csúcsosság esetén a $\sqrt{24/n}$ standard hiba figyelembe vételével. A standard hiba háromszorosát figyelembe véve mind pozitív mind pedig negatív irányban több mint 99%-os megbízhatósági szinten tudjuk becsülni a ferdeség, illetve a kurtózis értékeit. Megjegyezzük ugyanakkor, hogy a ferdeség és csúcsosság értékeihez történő konfidencia-intervallum szerkesztése meglehetősen szerteágazó módszertani problémákat vet fel (SHIANG et al.[1989]). Az eredményeket a *4.* és *5. ábra* szemlélteti.




*4. ábra.* A hozameloszlások csúcsossága a kapitalizáció függvényében




*5. ábra.* Aszimmetria a kapitalizáció függvényében

A hozamok normalitásának nullhipotézisét el kell utasítanunk a kurtózis becslések eredményei alapján, hiszen az eredmények egyértelműen azt mutatják, hogy az adott megbízhatósági szint mellett a becsült értékek szignifikánsan meghaladják az elméleti eloszlás 3-as kurtózis értékét. A 4. ábra alapján az is nyilvánvaló, hogy a kapitalizáció csökkenésével a hozameloszlások csúcsossága általában növekszik. Az ábrán látható illesztett regressziós egyenes természetesen nem implikál lineáris kapcsolatot a korábban már részletezett okok miatt.

Az aszimmetria vizsgálata esetén már árnyaltabb képet kapunk. A vizsgált 21 részvényből nyolc esetben elutasítható az aszimmetria nullhipotézise 99%-ot meghaladó szignifikancia szinten. Másik érdekessége az eredményeknek az, hogy a kapitalizáció csökkenésével a becsült negatív aszimmetria értékek csökkennek, az alacsonyabb kapitalizációjú részvények aszimmetriája pedig jellemzően pozitív. A kockázatelutasító befektető szempontjából ez azt jelenti, hogy a kapitalizáció fokának csökkenésével a ferdeségből eredő kockázata is csökken az egyre erősebb aszimmetria következtében.

Tekintettel arra, hogy a csúcsosság elemzése során a kurtózis becslések minden részvény esetében a normalitás elvetéséhez vezettek mind a csúcsosság, mind pedig a szimmetria teszteléséhez szükségesnek látszik finomabb elemzési eszközök alkalmazása.

## 5 Csúcsosság modellezése Hill eljárással

Az eloszlás magas csúcsossági értéke azt jelenti, hogy a várható érték közelébe és a farok részekbe nagyobb, a középső tartományokba pedig kisebb valószínűséggel esnek a lehetséges értékek mint a normális eloszlás esetében. Ebben az esetben tehát a normális eloszláshoz képest vastagabb farok részek jellemzik az eloszlást számottevő kurtózis érték mellett.

Ennek a problémának a kezelésére rendelkezésünkre állnak egyrészt a Pareto-Levy féle stabil eloszláscsaládok (PALÁGYI, [1999]), másrészt az eloszlás független módszerek, mint például a Hill eljárás (LUX, VARGA 1996, VARGA 1998, 1999).

A Hill eljárás (HILL, [1975]) lényege, hogy két indexszel lehet jellemezni egy adott eloszlás farok részeinek vastagságát. A vizsgálat alapvető kérdése, hogy mekkora farok méretet válasszunk a vizsgálatokhoz. Fontos, hogy a különböző farok méretek esetén az index stabilitást mutasson. A vizsgált részvények esetében a Hill index értékei kiszámításra kerültek 5, 10, 15 és 25%-os farok méret esetén mindkét farok részre. Az eredmények részletes elemzése nélkül is megállapítható, hogy a választott farok méret változása nem befolyásolja szignifikánsan az index értékeket, tehát azok stabilak a farok méret szempontjából.

A Hill-index kiszámítására a (4) és (5) formulákat alkalmaztuk.

$$\gamma_{H+} = 1/\alpha_{H+} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}[\log X(i) - \log X(m)] \;, \tag{4}$$

$X(1) \geq X(2) \geq \ldots \geq X(m)$,

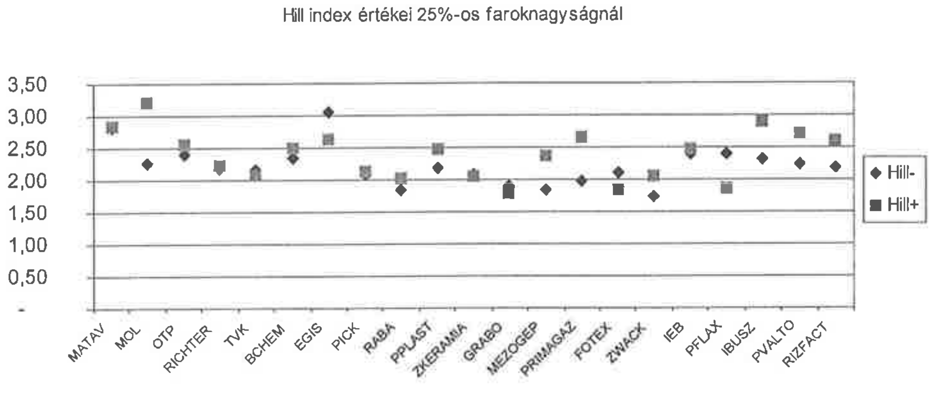
$$\gamma_{H-} = 1/\alpha_{H-} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}[\log |Y(j) - Y(n)|] \;, \tag{5}$$

$Y(1) \geq Y(2) \geq \ldots \geq Y(n)$,

ahol:

$\alpha_{H+}$ a pozitív farok index
$\alpha_{H-}$ a negatív farok index
$n$ a negatív farok részbe tartozó elemek száma
$m$ pozitív farok részbe tartozó elemek száma
$X(i)$ a pozitív farok részbe eső elemeket
$Y(j)$ a negatív farok részbe eső elemeket jelöli.

A fentiekből arra következtethetünk, hogy minél csúcsosabb egy eloszlás, annál vastagabb farok részekkel rendelkezik, a Hill-féle farok index értéke annál kisebb. A vizsgált részvények esetében a Hill értékeket a két oldalon együttesen tekintett 25%-os farok méret esetében a *6. ábra* mutatja.




*6. ábra.* A Hill-index értékei 25%-os farok méretnél

Az ábra azt mutatja, hogy a tőzsdei kapitalizáció csökkenésével nem változnak egyértelműen a Hill-index értékei. Tehát, amíg a normalitás feltételezése esetén a kapitalizáció csökkenésével a kurtózis kimutathatóan nőtt, addig a Hill módszerrel számított indexek alapján a kurtózis nem mutat jelentős változást. Annak ellenőrzésére, hogy valóban szignifikánsan eltérnek-e a vizsgált részvények Hill-index értékei, az alábbi próbastatisztika alkalmazható (VARGA, J., 1998)

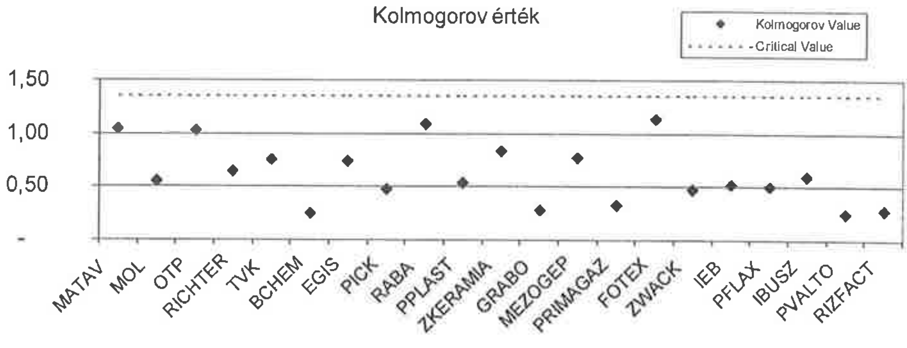
$$Q^{+} = \sum_{i=1}^{21} (\alpha^{+}/\alpha_i - 1)^2 \cdot m \;, \tag{6}$$

$$Q^{-} = \sum_{i=1}^{21} (\alpha^{-}/\alpha_i - 1)^2 \cdot n \;, \tag{7}$$

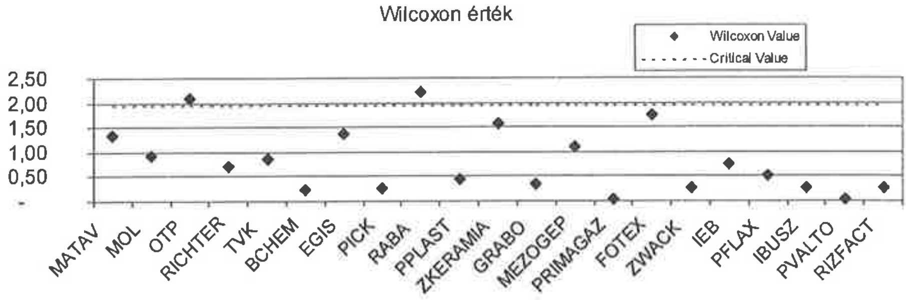
ahol $Q^+$ és $Q^-$ a megfelelő farok részekre számított próbastatisztikák, amelyek 21 szabadságfokú $\chi^2$ eloszlást követnek esetünkben. 5%-os szignifikanciaszint mellett a kritikus érték mindkét esetben 32.67, a próbastatisztika értéke a pozitív farok rész esetében 26.81, a negatív farok részben pedig 17.78. Ezek alapján elfogadható az a hipotézis, hogy a farok indexek statisztikailag azonosak a vizsgált részvények esetében, tehát a kapitalizáció mértékének változásával nem változnak.

# 6 Szimmetria ellenőrzése eloszlás-független próbákkal

Figyelembe véve, hogy az elemzés első szakaszában a normalitás nullhipotézise elvetésre került, a szimmetria modellezésénél az ún. robusztus, tehát eloszlás független próbák alkalmazása tűnik célravezetőnek. Az alkamazott két módszer —a Wilcoxon-féle rangösszeg próba és a Kolmogorov-Szmirnov féle kétmintás próba— eredetileg két eloszlás azonosságának vizsgálatára alkalmazható abban az esetben is, amikor az elméleti eloszlások nem feltétlenül ismertek. Esetünkben a negatív és pozitív hozamértékeket külön eloszlásként kezeljük a negatív értékek abszolút értékeit véve. A próbák során azt ellenőriztük, hogy a két —ily módon értelmezett— eloszlás egyezik-e. Ez az egyezőség a szimmetria nullhipotézisének elfogadásával, az ellenkező eset pedig az elutasításával jár. A Kolmogorov-Szmirnov próba eredményeit a *7. ábra*, a Wilcoxon próba eredményeit a *8. ábra* mutatja.




*7. ábra.* A Kolmogorov-Szmirnov próba eredménye




*8. ábra.* A Wilcoxon próba eredménye

A fentiekből látható, hogy a Kolmogorov-Szmirnov próba alkalmazása minden részvény esetében a szimmetria nullhipotézisének elfogadásával, a Wilcoxon próba esetén pedig két papír kivételével (OTP, Rába) a szimmetria elutasításával jár. Mindkét próba esetén 5%-os szignifikancia szintet vettünk alapul. Megállapítható továbbá az ábrák alapján, hogy a kapitalizáció mértékének csökkenésével a hozameloszlások szimmetriája általában nő.

A kapitalizáció csökkenésével tehát a hozamok varianciája, szórása nő, ezzel a kockázatelutasító befektető kockázata növekszik, ezt azonban csökkenti a hozameloszlások szimmetriájának —a befektető számára kedvező— megváltozása. Ez elméleti szempontból összhangban van azzal a modellel, mely a CAPM modellt kiterjeszti a szimmetria hatásának figyelembe vételével (GAMBA-ROSSI, [1998]).

# 7 A kapott eredmények értelmezése rangkorreláció segítségével

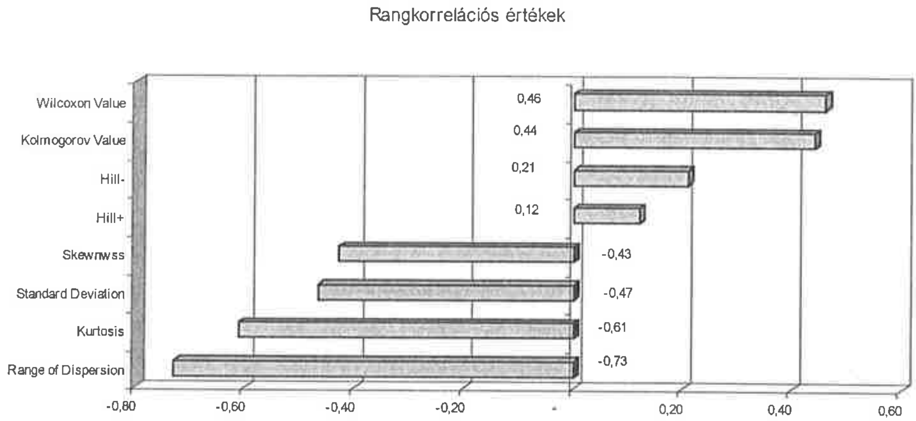
Ebben a szakaszban azt vizsgáljuk, hogy milyen korreláció van a kapitalizáció szerint rangsorolt részvények, illetve az adott eloszlás jellemző szerinti rangsor között. Az elemzésre a

$$\rho = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)}{n(n^2-1)} \tag{8}$$

Spearman-féle rangkorrelációt használjuk fel, ahol

$x_i$ az $i$ jelű papír rangszáma a kapitalizáció csökkenő mértéke szerint,
$y_i$ az $i$ jelű papír rangszáma az adott eloszlás jellemző szerint,
$n$ a vizsgálatban szereplő értékpapírok száma, esetünkben 21.

A kapott eredményeket a *9. ábra* foglalja össze.




*9. ábra.* A különböző eloszlás indikátorok korrelációja a csökkenő kapitalizációval

A fenti eredmények numerikus oldalról is megerősítik a korábban grafikus alapon megfogalmazott állításokat. A csúcsosságot mérő Hill-indexek kivételével közepesen erős, illetve erős korreláció tapasztalható a csökkenő kapitalizációs sorrend és a hozameloszlásokat leíró eloszlások között.

# 8 Az elemzések eredményeinek összefoglalása

Összegzésként megállapítható, hogy elméleti eloszlásként normális eloszlást feltételezve a kapitalizáció csökkenésével a csúcsosságot tekintve a részvények tapasztalati eloszlása általában egyre inkább eltér az elméleti normális eloszlástól, az aszimmetriát tekintve pedig általában közelít ahhoz. A kockázatelutasító befektető szempontjából a növekvő szórás és növekvő csúcsosság fokozott mértékű kockázat növekedést jelent, amint portfólióját átrendezi az alacsonyabb kapitalizációjú részvények irányában. Ezt a hatást csak némiképp ellensúlyozza a nagy kapitalizációjú papírok általában nagyobb —a kockázatelutasító befektető számára kedvezőtlen— negatív értékű jobb oldali aszimmetriája az alacsonyabb papírok kedvezőbb szimmetriája, illetve pozitív értékű bal oldali aszimmetriájához képest.

Elutasítva az elméleti normális eloszlást, a kép árnyaltabbá válik Kimutatható, hogy a különböző kapitalizációjú papírok eloszlásai farok részeinek vastagsága 95%-os megbízhatósági szinten megegyezik, tehát nem szignifikáns a kapitalizáció hatása. Eloszlás-független szimmetria teszteket alkalmazva pedig nagy biztonsággal állítható, hogy a vizsgált részvények hozamainak eloszlása szimmetrikus, bár az eredményekből az is látszik, hogy a kapitalizáció csökkenésével a szimmetria mértéke nő.

## Irodalom


1. BACHELIER, L., 1900, Theory of Speculation in Cootner, P. (ed) *The Random Character of Stock Market Prices*, Massachusetts Institute of Techology Press, Cambridge, MA, 1964; Reprint.
2. BODIE-KANE-MARCUS, 1996, *Befektetések*, Budapest, 111-161., 223–295.o
3. GAMBA, A.–F. A. ROSSI, 1998: A Three-moment Based Portfolio Selection Model, *Rivista di matematica per le science e sociali*, p. 25–48.
4. HILL, B. M., 1975, A Simple General Approach to Interference about the Tail of a Distribution, *Annals of Statistics* 3, 1163–1173.
5. HON- SHIANG LAU-J.R. WINGENDER-AMY HING-LING LAU, 1989, On Estimating Skewness in Stock Returns, *Management Science* 9, September 1989.
6. KAHLER, J., 1993, *On the Modelling of Speculative Prices by Stable Paretian Distributions and Regularly Varying Tails.* ZEW University of Mannheim:mimeo.
7. KOEDIJK, K. G., M. M. A. SCHAFGANS, C. G. de VRIES, 1990, The Tail Index of Exchange Rate Returns, *Journal of International Economics*, 29, 93–108.
8. KOEDIJK, K. G., P. A. STORK, C. G. de VRIES, 1992, Differences between Foreign Excahnge Regimes: The View from the Tails, *Journal of International Money & Finance*, 11, 462–473.
9. LÉVY, P., 1924, Théorie des Erreurs, La Loi de Gauss et Les Loi Exceptionelles, *Bull. Soc. Math.*, 52, 49–85.
10. LUX, T., VARGA, J., 1996, A Pareto hipotézis vizsgálata – Értékpapírpiaci hozamok és az extremális hozamok eloszlása, *Szigma*, (1996) 4. 1–23. o.
11. MARTON, R., 2001: A magyar tőkepiac hatékonyságának vizsgálata, *Bankszemle*, XLV. évf. 2001. ápr.-máj., 72–88.o.
12. PALÁGYI, Z, 1999: Árfolyamingadozások és kockázatbecslés a Budapesti Értéktőzsdén, Szigma (1999) 1-2. 27–32 o.
13. RAPPAI, G., J. VARGA, 1997: Applicability of the CAPM on the Hungarian Stock Market, in: *New Operational Approaches for Financial Modelling* (Contribution to Management Science), Physica Verlag Heidelberg-New York, pp. 139–151.
14. VARGA, J. 1998. On Distributions for Stock Returns: A Survey Of Empirical Investigations, in: *Managing in Uncertainty: Theory and Practice*, eds. P. Pardalos and C. Zopounidis, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp. 139–151.
15. VARGA, J., 1999, Stock Return Distribution: A Survey of Empirical Investigations, *Hungarian Statistical Review*, Volume 77, Special Number, 1999, pp. 23–34.
16. VARGA, J., 2001, Pénz-és tőkepiaci idősorok sztochasztikus volatilitás modelljei, *Szigma*, (2001) 1–2. 71–86. o.

## ON THE DISTRIBUTION OF STOCK RETURNS AND THE CAPITALIZATION OF STOCK MARKETS

In this paper we examine the relationship between the capitalisation of stocks and the risk to be approached by different risk indicators. The study focuses on the returns of 21 stocks listed on the Budapest Stock Exchange. Results point out that there is a significant relationship between the capitalisation and the risk factors implied by the distribution of the returns. Both graphical and rank correlation methods were applied to illustrate the results.

# AZ ÚJRAHASZNOSÍTÁS HATÁSA A GAZDASÁGI SOROZATNAGYSÁGRA[1]

KNUT RICHTER – DOBOS IMRE
*Europa-Universit t Viadrina – BKÁE Vállalatgazdaságtan Tanszék*

A dolgozat egy javítási és hulladékkezelési, reverz logisztikai problémát mutat be. Egy termék iránti keresletet termeléssel és visszaérkező, használt termékek javításával lehet kielégíteni. Arra a kérdésre keressük a választ, hogy a releváns költségek minimalizálása mellett hogyan ossza meg a vállalat erőforrásait a termelés és a javítás között. A megoldáshoz a szerzők a gazdasági sororzatnagyság modellt alkalmazzák.

*Kulcsszavak:* Gazdasági sorozatnagyság modell, Termelés, Újrafelhasználás, Hulladékkezelés, Költségminimalizálás

## 1 Bevezetés

Reverz logisztikán a logisztika azon ágát értjük, amely a termelési/fogyasztási folyamatból kivont, de újrahasználható anyagok kezelését és újrafeldolgozását öleli fel. Ilyen újrafelhasználás lehet pl. a recycling, vagy alkatrészek javítása. Az újrafelhasználással környezettudatos anyaggazdálkodás és/vagy logisztika érhető el. Nemzetgazdasági szempontból ez olyan előnyökkel jár, mint a környezeti terhelés csökkentése a termelési folyamatba történő visszavezetéssel, de ezzel az újrafelhasználással a természeti erőforrások kitermelése is csökkenthető, ami a következő nemzedékek rendelkezésére álló erőforrásokat kímélheti a túlzott fogyasztástól.

Jelen dolgozatban egy optimális sorozatnagyság modell keretében mutatjuk be, hogy a reverz logisztika hogyan képes a környezettel szembeni tudatosságot érvényre juttatni, ezzel az erőforráskímélés nemzetgazdasági célját a vállalati szintre leképezni. A vizsgálandó modell a termelési folyamatban egy terméket (konténerek, göngyölegek/sörös ládák stb.) elemez. A terméket (itt konténer) a vállalat egy műhelye állítja elő vagy a használtakat javítja, hogy abban pl. alkatrészeket szállítsanak egy termelési fázis (másik műhely) számára. Az üres konténereket a felhasználás helyen tárolják, majd a termelési periódus végén az összegyűjtött konténereket visszaszállítják a gyártó-javító üzembe. A termelő üzemben születik döntés arról, hogy a konténerek mennyi részét gyűjtik javításra és mekkora hányadát kezelik a vállalaton kívül hulladékként. (Ez a hulladékkezelés jelenthet újrafelhasználást egy másik vállalat számára. Pl. ha a konténer vasból készült, akkor egy kohóban azt beolvaszhatják.) A vizsgált szituációban felmerülő kérdések a

[1]Beérkezett: 2002. október 3. E-mail: richter@euv-frankfurt-o.de, imre.dobos@bkae.hu

következők lehetnek: A konténerek hány százalékát javítsák meg, valamint milyen tételnagyságokkal folyjon a konténerek előállítása és javítása, ha a döntéshozó célja a releváns költségek minimalizálása.

A felvetett problémát először Richter [7] vizsgálta. Modelljét két szinten oldotta meg. Az első szinten a minimális készletezési átlagköltségek melletti termelési és javítási sorozatnagyságok és a tételszámok megállapítása volt a cél. A második szinten lineáris termelési, javítási és hulladékkezelési költségek bevezetése esetén a készletezési és a lineáris "kezelési" költségek összegének minimalizálásával az optimális hulladékkezelési ráta meghatározása volt a cél. Az alapmodell megoldása során több matematikai szempontból érdekes probléma állt elő, amelyet a szerző(k) vizsgáltak. Ilyen probléma a készletezési költségfüggvény tulajdonságainak leírása [8], vagy a második szinten megjelenő feladat megoldása [9] és az egészértékű tételszám meghatározása volt [10, 2]. A [2] cikkben a szerzők egy meta-modellt vizsgáltak, amely hasonló reverz logisztikai problémák megoldásához nyújthat alapot.

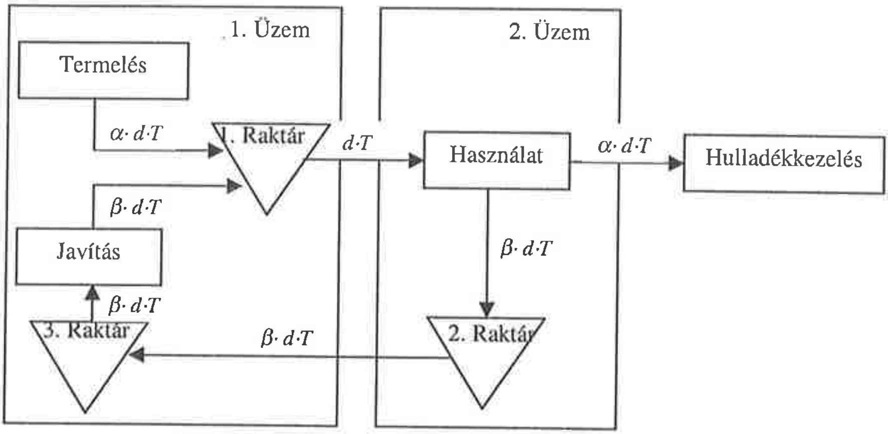
Reverz logisztikai (javítási/újrafeldolgozási/recycling) modellt gazdasági sorozatnagyság modell (EOQ) feltételek mellett először Schrady [11] vizsgált. A dolgozatban az amerikai haditengerészet nagyértékű alkatrészeinek javítását és a javítással elérhető költségcsökkenést analizálta, a beszerzéssel szemben. A feltételezése az volt, hogy egy beszerzési tétel mellett mekkora legyen a javítási és beszerzési tételnagyság, és egyáltalán a javítási tételek száma mekkora legyen. Ezt a modellt Nahmias és Rivera [6] általánosította arra az esetre, amikor a javítási ráta véges, tehát a javítás időigényét is bevonta a modellbe. Egy másik általánosítás Mabini, Pintelon és Gelders [5] szerzőhármastól származik, akik Schrady modelljét többtermék esetére vizsgálták, tőkekorlát mellett. Ezen modellek a sorozatnagyságokra adtak zárt formulát, de a hulladékkezelést nem építették be a modellbe, és az egészértékűséget, valamint a visszaérkezési rátától való függést is negligálták. Teunter [12] egy Schrady-éhoz hasonló modellt analizált, de néhány hibával. Ennek a modellnek az az alapfeltevése, hogy a javítás/újrafeldolgozás és a termelés között egy hulladékkezelésnek kell történnie, tehát a hulladékkezelés, mint tevékenység szerepel a modellben. Egy másik feltételezés az, hogy a termelt jószág készletezési költsége nagyobb, mint az újrafeldolgozotté, ugyanis valószínűleg a termelés fajlagos költség magasabb, mint az újrafeldolgozásé. Ez a dolgozat azt is megengedi, hogy a termelési tételek száma nagyobb legyen mint egy. E cikk szerzői a modell hiányosságait az [1] dolgozatban korrigálták, és a három alapmodellt (általánosított Schrady, Richter és Teunter) összehasonlították. Azt a következtetést vonták le, hogy a három modell jóllehet más-más tartalmú, de ugyanahhoz a matematikai struktúrához vezetnek, amelyet a szerzők meta-modellnek neveznek. A három modellben a termelési-készletezési stratégia egy előre megadott mintát követ, vagyis a termelési és javítási tételnagyságok azonosak, amit azt a [3] dolgozat is észreveszi. Az optimális stratégiák keresése lehet egy következő kutatási irány.

A dolgozat célja, hogy a [7] modell további vizsgálata. A [2] dolgozatban a szerzők említést tesznek arról, hogy a termelési és javítási sorozatnagyságok száma nagyobb lehet, de konkrét feladatot nem mutatnak be, amelyre ez a tulajdonság teljesül. Néhány ponton egyszerűbb bizonyításokat adunk a tételekre, lemmákra, amivel az értelmezést megkönnyítjük.

A cikk az alábbiak szerint szerveződik. A második részben a modell működését mutatjuk be a használt paraméterekkel és változókkal. Utána a készletezési és teljes költségfüggvényeket konstruáljuk meg. A negyedik részben folytonos és egészértékű tételszámok esetére adjuk meg a modell optimális paramétereit (1. modell). A következő fejezet az egészértékű feladat optimális megoldását mutatja be (2. modell). A hatodik, utolsó rész az eredményeket foglalja össze.

## 2 Paraméterek és a rendszer működése

Legyen adott egy termelő vállalat, amely az alkatrészek üzemek közötti továbbításához szükséges konténereket maga állítja elő és a régebben előállított használtakat ugyanott javítja. Az előállítás és javítás ugyanabban a műhelyben történik. A konténerek iránti kereslet, amelyet egy másik műhely jelenít meg, feltételezések szerint időben konstans. A konténerekben alkatrészeket szállítanak a második üzembe további feldolgozásra. A második üzemnek tehát alkatrészre van kereslete, de azt a konténerekben, egységesített darabszámban szállítanak oda. Így a műhelynek nem csak alkatrészekre, hanem konténerekre is szüksége van áttételesen. Egy ehhez hasonló problémát Kelle és Silver [4] is vizsgált sztochasztikus dinamikus sorozatnagyság modellben, de csak az előállító műhely szintjén. A második üzem az üres konténereket gyűjti, raktározza, majd onnan az első üzem termelési-javítási ciklusának kezdetére az első üzembe szállítják. Nem minden konténert tudnak a második üzemből az elsőbe visszaszállítani, mert azok egy része a második üzemet hulladékként hagyja el. A hulladék arányáról a második üzem dönt, de arra az első üzem is befolyással van. A modell anyagáramlási folyamatát az *1. ábra* mutatja. A termelt és javított konténerek közös raktárba kerülnek az első üzemben, ahonnan majd —egyenletes felhasználást feltételezve— alkatrészekkel megtelten kerülnek a második üzembe. A használt, de hulladékkezelésre át nem adott konténereket a második üzemben a második raktárban tárolják, ahonnan az egész állományt az első üzem harmadik raktárába szállítják a ciklus végén.




*1. ábra.* Anyagáramlás a modellben

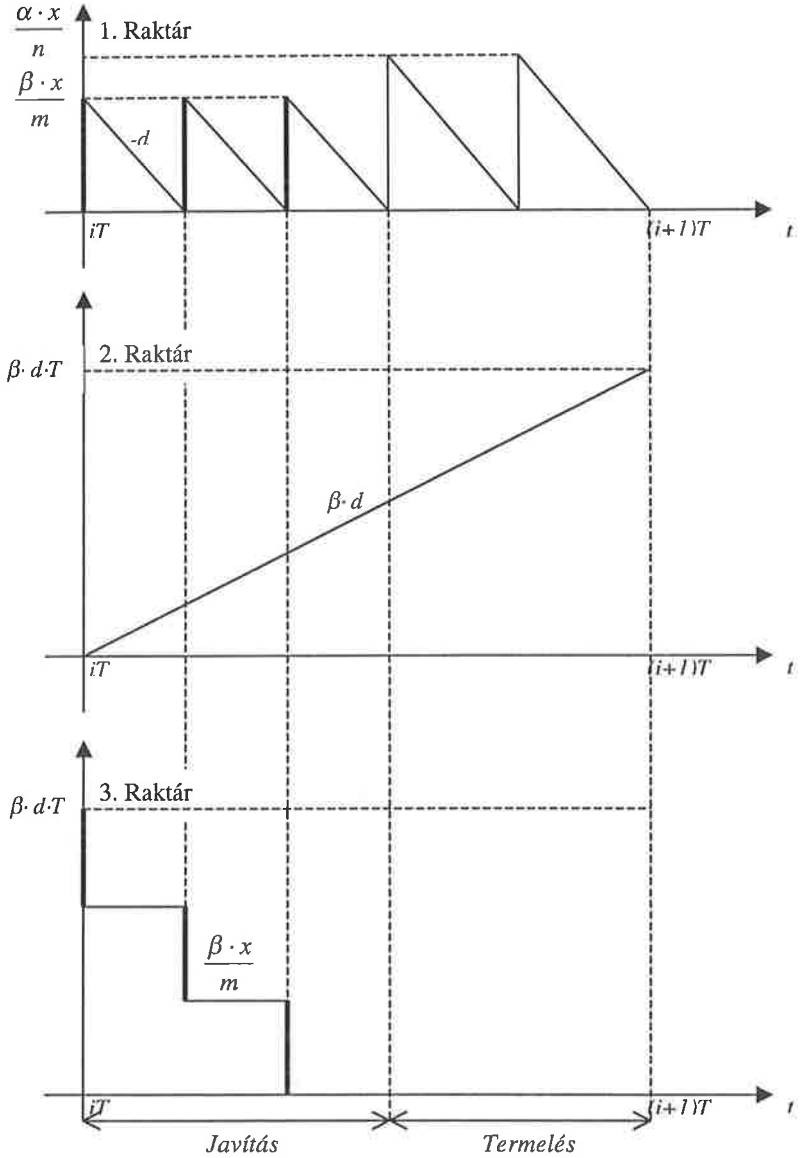
A modell paraméterei és változói következők lesznek.

A modell paraméterei:

| | |
|---|---|
| $d$ | keresleti ráta, időegységre eső darabszám, |
| $r$ | fix javítási sorozatkezdési költség, |
| $s$ | fix termelési sorozatkezdési költség, |
| $h$ | a végtermék készlettartási költsége (1. raktár), időegységre per darab, |
| $u$ | a javítandó termék készlettartási költsége (2. és 3. raktár), időegységre per darab, |
| $e$ | egységnyi hulladék kezelési költsége, |
| $b$ | egységnyi végtermék termelési költsége, |
| $k$ | egységnyi javítandó termék javítási költsége. |

A modell döntési változói:

| | |
|---|---|
| $T$ | hulladékgyűjtési időtartam, a termelési-javítási ciklus hossza, |
| $x$ | a teljes sorozatnagyság a termelési-javítási ciklusban, $x = d \cdot T$, |
| $m$ | a javítási tételek száma, $m \geq 1$, egész, |
| $n$ | a termelési tételek száma, $n \geq 1$, egész, |
| $\alpha$ | hulladékkezelési ráta, a $d$ keresleti ráta százalékában, $\beta = 1 - \alpha$ a javítási ráta. |




*2. ábra.* Készletszintek a raktárakban az $i$-edik ciklusban ($m = 3, n = 2, i \geq 1$)

A modell további feltételezése az, hogy mind a termelési, mind a javítási sorozatnagyságok azonosak. Az $x$ összes sorozatnagyság, vagyis a második üzem ciklusbeli kereslete alapján kiszámíthatóak a termelési és javítási sorozatnagyságok, amelyek a termelési sorozatnál $\alpha x/n$, míg a javítási sorozatnál $\beta x/m$. A készletszinteket a három raktárra a *2. ábra* mutatja egy ciklusra.

A modell megalkotásánál eltekintünk attól, hogy a termelés/javítás időt vesz igénybe. Az első raktárba pillanatnyi gyors beáramlás történik, míg a kereslet időegységre konstans, így itt a klasszikus fűrészfog modell áll elő azzal a különbséggel, hogy a termelési és javítási sorozatnagyság különbözik. Ebből a raktárból akkor van kivételezés, ha készletállomány nullára csökken. A második raktárban csak egyenletes növekedés történik, míg a harmadik raktárból csak javításra vesznek ki egy-egy javítási sorozatnyi mennyiséget, de úgy, hogy az első sorozatot a raktárba való beérkezés pillanatában azonnal javítani kezdik, tehát az nem kerül készletezésre. Mindezt a kivételezést addig folytatják, míg a harmadik raktár állománya nullára nem csökken. A folyamat ciklusonként ismétlődik.

Könnyen látható, hogy az $x$ keresletet az $m$ darab azonos javítási és $n$ darab azonos termelési tétellel elégítik ki. A modellt tehát az $x$ teljes sorozatnagysággal, az $m$ és $n$ tételszámmal, mint irányítható változókkal írhatjuk le.

# 3 A költségfüggvények megszerkesztése

A készletezési alrendszer összköltségét a görbe alatti terület fajlagos költségekkel súlyozott összegeként határozzuk meg, amiből —a ciklusidővel osztva— a szokásos átlagos költségfüggvényt számíthatjuk ki. A következő lemma a raktárak cikluson belüli készlettartási összköltséget adja.

**1. Lemma.** *Legyen a raktárak összes készlettartási költsége $H_1$, $H_2$ és $H_3$ az első, második és harmadik raktárra sorrendben. Ekkor*

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{h}{2d}\cdot\frac{\alpha^2x^2}{n}+\frac{h}{2d}\cdot\frac{\beta^2x^2}{m} \\ H_2 &= \frac{u}{2d}\cdot\beta\cdot x^2 \\ H_3 &= \frac{u}{2d}\cdot\frac{m-1}{m}\cdot\beta^2\cdot x^2 \end{aligned} \tag{1}$$

*Bizonyítás.* Csak a harmadik raktárra mutatjuk meg az összefüggést, mert az 1. ábra alapján a másik két egyenlőség hasonlóan belátható. A görbe alatti területet a harmadik esetben a következőképpen számolhatjuk ki:

$$H_3 = u\sum_{i=1}^{m-1}\left(\frac{1}{d}\cdot\frac{\beta x}{m}\right)\left(i\cdot\frac{\beta x}{m}\right)=\frac{u}{d}\cdot\frac{\beta^2x^2}{m^2}\sum_{i=1}^{m-1} i\,,$$

ahol $1/d\cdot\beta x/m$ az időtartam két javítási tétel között, míg $i\cdot\beta x/m$ a készletállomány az $(m-i)$-edik tétel után. A természetes számok összegzését felhasználva kapjuk az eredményt.

A sorozatkezdési költségek összege: $mr+ns$. Az készletezési összköltség $K_z$ így a sorozatkezdési és készlettartási költségek összegeként írható fel a következő formában:

$$K_z=(mr+ns)+\frac{x^2}{2d}\left[h\frac{\alpha^2}{n}+(h-u)\frac{\beta^2}{m}+u(\beta+\beta^2)\right].$$

A készletezési átlagköltséget ennek ismeretében könnyen meghatározhatjuk alkalmazva azt az összefüggést, hogy a teljes sorozatnagyság egyenlő a ciklusbeli kereslettel ($x = d \cdot T$):

$$K(x,m,n,\alpha) = \frac{K_z}{T} = (mr + ns)\frac{d}{x} + \frac{x}{2}\left[h\frac{\alpha^2}{n} + (h-u)\frac{\beta^2}{m} + u(\beta+\beta^2)\right]. \tag{2}$$

Az első feladattípus a készletezési átlagköltség minimalizásása lehet. Ekkor arra a kérdésre keressük a választ, hogy mely teljes sorozatnagyságra ($x$), javítási és termelési tételszámra ($m, n$) és hulladékkezelési rátára ($\alpha$) lesz a készletezési költség minimális, és milyen ajánlás fogalmazható meg ezek ismeretében a környezettudatos vállalati termelési-készletezési stratégiára.

Vonjuk most be a vizsgálatba a sorozatnagysághoz kapcsolódó költségeken kívül a lineáris termelési, újrafeldolgozási és hulladékkezelési költségeket. Jelöljük ezen költségeket az $R(\alpha)$ függvénnyel. E költségekre csak az átlagköltségeket írjuk fel, mert az az $x$ teljes tételnagyságtól nem függ, csak a hulladékkezelési rátától.

$$R(\alpha) = bd\alpha + kd\beta + ed\alpha = d\big[\alpha(b+e-k) + k\big].$$

A teljes (készletezési és lineáris) átlagköltségek így

$$G(x,m,n,\alpha) = K(x,m,n,\alpha) + R(\alpha).$$

Két problémát fogunk a cikk folyamán vizsgálni:

*1. Modell: A készletezési átlagköltségek minimalizálása*

$$\begin{gathered} K(x,m,n,\alpha) \to \min \\ x > 0, \quad m,n \in \{1,2,\dots\} \end{gathered}$$

*2. Modell: Az összes átlagköltségek minimalizálása*

$$\begin{gathered} G(x,m,n,\alpha) \to \min \\ x > 0, \quad m,n \in \{1,2,\dots\}, \quad \alpha \in [0,1] \end{gathered}$$

A következő részben az 1. modell megoldását adjuk meg.

# 4 Az 1. modell megoldása

Ebben a modellben feltételezzük, hogy az $\alpha$ hulladékkezelési ráta állandó. A modell paramétereit, vagyis a teljes tételnagyságot és a tételszámokat szekvenciálisan határozzuk meg. Célunk az $\alpha$-tól függő költségfüggvény meghatározása. A megoldásban először feltesszük, hogy a tételszámok folytonos változók, majd azután vizsgáljuk a szigorúbb egészértékűséget.

## 4.1 Az optimális teljes tételnagyság és a minimális költségek adott tételszámok mellett

A (2) költségfüggvény konvex és differenciálható $x$-ben. Ekkor a megoldás

$$x(m,n,\alpha)=\sqrt{2d(mr+ns)\left[h\frac{\alpha^2}{n}+(h-u)\frac{\beta^2}{m}+u(\beta+\beta^2)\right]^{-1}}\,. \qquad (3)$$

*1. példa.* Legyen $s=1450$, $r=200$, $h=650$, $u=5$, $\alpha=0.8$ ($\beta=0.2$), $d=1000$, $m=2$ és végül $n=3$. Ezen adatokra az optimális teljes sorozatnagyság a (3) összefüggést alkalmazva $x(2,3,0.8)=249$. A termelési sorozatnagyság $0.8\cdot x(2,3,0.8)/3=66.5$, míg a javítási sorozatnagyság értéke $0.2\cdot x(2,3,0.8)/2=25$ lesz. A készletezési költségek értéke $K(249,2,3,0.8)=$ 38 095.7 pénzegység.

A (3)-at (2)-be helyettesítve az egyszerűsített költségfüggvény

$$K(m,n,\alpha)=\sqrt{2d(mr+ns)\left[h\frac{\alpha^2}{n}+(h-u)\frac{\beta^2}{m}+u(\beta+\beta^2)\right]}\,.$$

A fenti függvényben végezzük el a műveleteket, amivel az alábbi probléma adódik:

$$K(m,n,\alpha)=\sqrt{2d\left[A(\alpha)\frac{m}{n}+B(\alpha)\frac{n}{m}+C(\alpha)m+D(\alpha)n+E(\alpha)\right]}\,,$$

ahol

$$A(\alpha)=rh\alpha^2\,,\quad B(\alpha)=s(h-u)\beta^2\,,\quad C(\alpha)=ru(\beta+\beta^2)\,,$$
$$D(\alpha)=su(\beta+\beta^2)\,,\quad E(\alpha)=sh\alpha^2+r(h-u)\beta^2\,.$$

Legyen továbbá

$$S(m,n,\alpha)=A(\alpha)\frac{m}{n}+B(\alpha)\frac{n}{m}+C(\alpha)m+D(\alpha)n+E(\alpha)\,. \qquad (4)$$

Mivel a gyökvonás egy monoton transzformáció, ezért elegendő az $S(m,n,\alpha)$ függvényt minimalizálni az $m$ és $n$ tételszámokban, amelyek pozitív egész számok.

*2. példa.* Legyen továbbra is $s=1450$, $r=200$, $h=650$, $u=5$, $\alpha=0.8$ ($\beta=0.2$), $d=1000$. Ekkor az együtthatók értéke: $A(0.8)=83\ 200$, $B(0.8)=37\ 410$, $C(0.8)=240$, $D(0.8)=17\ 400$ és $E(0.8)=608\ 360$. A (4) függvény ezen értékekre a következő alakot veszi fel:

$$S(m,n,0.8)=83\ 200\frac{m}{n}+37\ 410\frac{n}{m}+240m+17\ 400n+608\ 360\,.$$

## 4.2 Az optimális folytonos tételszámok meghatározása

A tételszámok meghatározásához a következő segédfeladatot vezetjük be:

$$S(m,n) = A\frac{m}{n} + B\frac{n}{m} + Cm + Dn + E \to \min \\ m,n \geq 1\,. \tag{5}$$

Itt feltehető, hogy az $A$, $C$, $D$ és $E$ paraméterek pozitívak, és a $B+D$ összeg is, amelyek teljesülnek a (4) függvény együtthatóira. Ez a segédfeladat az eredeti probléma egy relaxált feladata arra az esetre, amikor a tételszámok egynél nagyobb folytonos változók. A feladat matematikai analízisét a szerzők a [2] cikkben adták meg, ahol bizonyították pl., hogy a segédfeladat célfüggvénye kvázikonvex. A következő tétel a folytonos megoldást szolgáltatja.

**1. Tétel** [8]. *Az optimális folytonos $(m,n)$ értékek és a hozzájuk tartozó minimális költségek:*

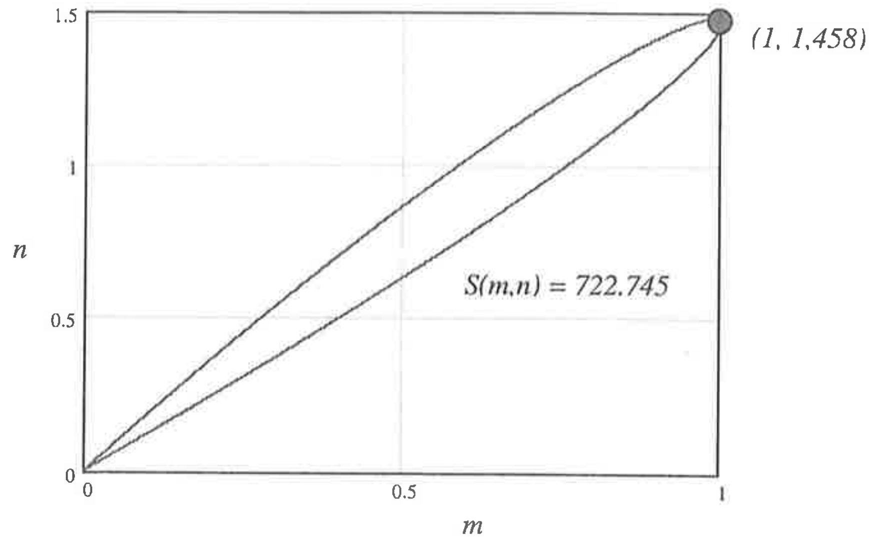
$$(i)\ B \geq A+C\,,\quad (m^o,n^o) = \left(\sqrt{\frac{B}{A+C}},1\right),\quad S = 2\sqrt{B(A+C)}+D+E\,,$$

$$(ii)\ A-D \leq B \leq A+C\,,\quad (m^o,n^o) = (1,1)\,,\quad S = A+B+C+D+E\,,$$

$$(iii)\ A \geq B+D\,,\ (m^o,n^o) = \left(1,\sqrt{\frac{A}{B+D}}\right),\ S = 2\sqrt{A(B+D)}+C+E\,.$$

Ezt a tételt nem bizonyítjuk be. Számos újrafelhasználási modell is az (5) problémához, és annak az 1. tételben megadott megoldásához vezet [1]. Ezért ezt a feladatot e cikk szerzői meta-modellnek nevezik [2].

*3. példa.* Legyen most $A = 83\ 200$, $B = 37\ 410$, $C = 240$, $D = 17\ 400$ és $E = 608\ 360$. Ekkor $A > B + D = 39\ 150$, ami azt jelenti, hogy $m^o = 1$ és $n^o = 1.458$. A célfüggvény értéke ebben a pontban $S(1, 1.458) = 722\ 745$ lesz. A feladat egyenlőköltség-görbéjét a *3. ábra* szemlélteti.




*3. ábra.* A feladat $S(m,n)$ egyenlőköltség-görbéje

Az 1. tétel segítségével (4) feladat megoldása folytonos tételszámok mellett:

**2. Tétel** [8]. *A (2) feladat és ezzel az 1. modell optimális folytonos megoldása a teljes tételnagyságra $x^o(\alpha)$ és a tételszámokra $(m^o(\alpha), n^o(\alpha))$, valamint a hozzájuk tartozó $K(\alpha)$ költségfüggvény:*

*(i)* $h > u \wedge \alpha = 0$

$$m^o = 1\,, \quad n^o = 0\,, \quad x^o(0) = \sqrt{\frac{2dr}{h+u}}\,, \quad K(0) = \sqrt{2d(h+u)}$$

*(ii)* $s(h-u)\beta^2 > rh\alpha^2 + ru(\beta+\beta^2) \wedge h > u \Rightarrow \alpha \in (0, \alpha_1)$

$$m^o(\alpha) = \beta\sqrt{\frac{s(h-u)}{r[h\alpha^2 + u(\beta+\beta^2)]}}\,, \quad n^o(\alpha) = 1\,, \quad x^o(\alpha) = \sqrt{\frac{2ds}{h\alpha^2 + u(\beta+\beta^2)}}\,,$$

$$K(\alpha) = \sqrt{2d}\left(\beta\sqrt{r(h-u)} + \sqrt{s[h\alpha^2 + u(\beta+\beta^2)]}\right]$$

*(iii)* $s(h-u)\beta^2 \le rh\alpha^2 + ru(\beta+\beta^2) \wedge rh\alpha^2 \le s(h\beta^2 + u\beta) \Rightarrow \alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$

$$m^o(\alpha) = 1\,, \quad n^o(\alpha) = 1\,, \quad x^o(\alpha) = \sqrt{\frac{2d(r+s)}{h\alpha^2 + h\beta^2 + u\beta}}\,,$$

$$K(\alpha) = \sqrt{2d(r+s)(h\alpha^2 + h\beta^2 + u\beta)}$$

*(iv)* $rh\alpha^2 > s(h\beta^2 + u\beta) \Rightarrow \alpha \in (\alpha_2, 1)$

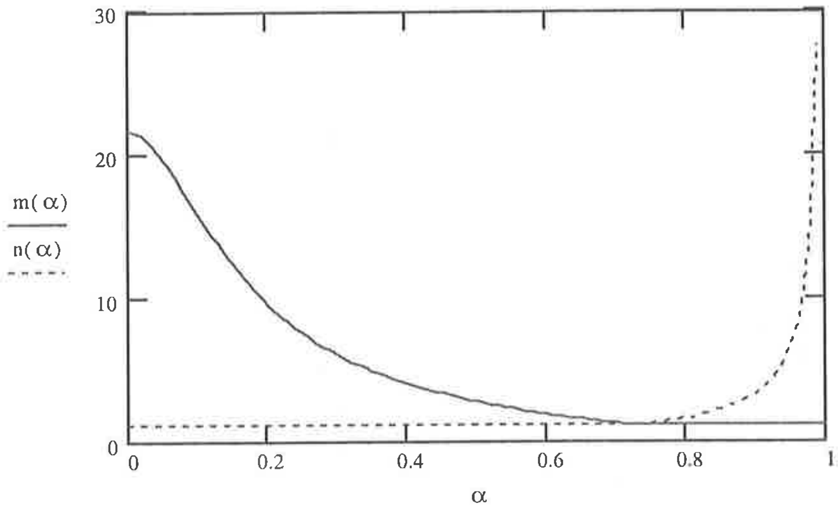
$$m^o(\alpha) = 1\,, \quad n^o(\alpha) = \alpha\sqrt{\frac{rh}{s(h\beta^2 + u\beta)}}\,, \quad x^o(\alpha) = \sqrt{\frac{2dr}{h\beta^2 + u\beta}}\,,$$

$$K(\alpha) = \sqrt{2d}\left[\alpha\sqrt{sh} + \sqrt{r(h\beta^2 + u\beta)}\right]$$

*(v)* $\alpha = 1$

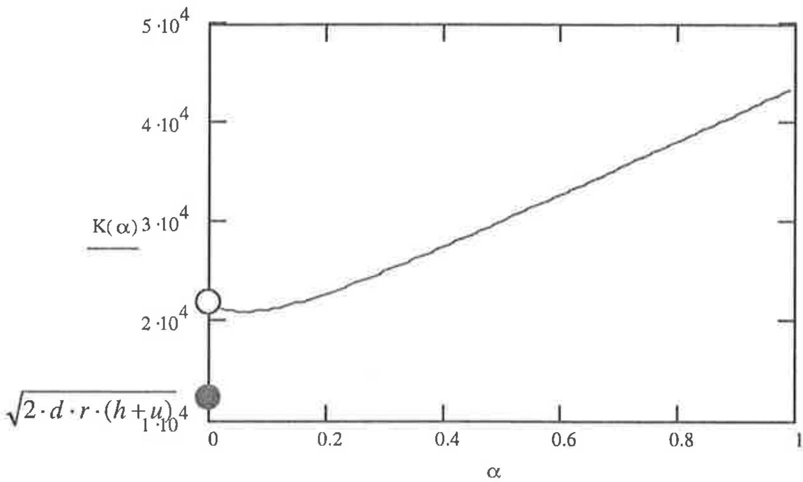
$$m^o(1) = 0\,, \quad n^o(1) = 1\,, \quad x^o(1) = \sqrt{2ds/h}\,, \quad K(1) = \sqrt{2dsh}$$

Ezt a tételt sem bizonyítjuk, mert egyszerű behelyettesítéssel és nagy türelemmel az eredmények adódnak. Ha $h < u$ teljesülne, akkor az (i) és (ii) feltételek melletti megoldás nem létezik, így ebben az esetben $m(\alpha)$ értéke minden egyes $\alpha$-ra egy. A továbbiakban tekintsünk el ettől az esettől. Az $\alpha_1$ és $\alpha_2$ ($0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1$) létezésének bizonyításától is eltekintünk most. A [8] dolgozatban megtalálhatóak a részletek. Arra hívjuk még fel az olvasó figyelmét, hogy a szélső értékekben, vagyis amikor a hulladékkezelési ráta nulla, vagy egy, az eredmények értelmezhetőek, amit a tétel magában foglal. Ha a hulladékkezelési rára nulla, akkor az összes konténer visszatér javításra, így termelésre nincs szükség. Ebben a pontban a kiszámított költségfüggvény nem folytonos jobbról, tehát ott szakadása van. Amennyiben a hulladékkezelési ráta egy, akkor minden második műhelybe beérkező konténert hulladékként kezelnek, ezért nem kerül sor javításra. Egyszerű behelyettesítéssel meggyőződhet az olvasó arról, hogy ebben a pontban a költségfüggvény folytonos balról, tehát elvileg az $\alpha = 1$ helyettesítéssel a költségfüggvényből kiszámolható a minimális költség. E két esetben a minimális költség melletti a feladat a tételszámokra az optimális egészértékű megoldást nyújtja. Ezenkívül bizonyos $\alpha$ értékekre is egészértékű lesz a folytonos megoldás a triviális $[\alpha_1, \alpha_2]$ szakaszon kívül, amikor a javítási és termelési tételszám is egyenlő eggyel.




*4. ábra.* A tételszámok a hulladékkezelési ráta függvényében, $\alpha \in (0, 1)$

*4. példa.* Tekintsük újra a 2. példa adatait: $s = 1450$, $r = 200$, $h = 650$, $u = 5$, $d = 1000$. Ebben az esetben $h > u$, így a 2. tételben megadott öt eset mindegyike előfordul. Ekkor $\alpha_1 = 0.728$ és hulladékkezelési ráta között a tételszámok egyenlőek eggyel, vagyis $m(\alpha) = n(\alpha) = 1$. A tételszámokat a hulladékkezelési ráta függvényében a *4. ábra* mutatja. A $K(\alpha)$ költségfüggvényt a *5. ábrán* mutatjuk be. Az $\alpha = 0$ pontban ez a függvény nem folytonos, a $K(0)$ értéke 161 864.




*5. ábra.* A $K(\alpha)$ költségfüggvény a [0,1] intervallumon

Jellemezzük most a $K(\alpha)$ költségfüggvényt. Ezt a következő lemma mondja ki.

**2. Lemma** [8]. *A $K(\alpha)$ költségfüggvény (i) konvex a $(0,1)$ intervallumon ($h > u$), (ii) pontosan akkor konvex az $[\alpha_1, \alpha_2]$ intervallumon, ha $4h(h+u) \geq u^2$, (iii) konkáv az $(\alpha_2, 1)$ intervallumon és folytonosan differenciálható a $(0,1)$ minden pontjában.*

A lemma bizonyítását az olvasóra hagyjuk, azt némi számolással egyszerűen megkaphatjuk. A lemmából is látható, hogy ha a $h > u$ összefüggés tartható, vagyis a termelt konténerek készlettartási költsége nagyobb, mint a javított konténereké, akkor a költségfüggvény két részből áll a $(0,1)$ intervallumon: a $(0, \alpha_2)$ intervallumban konvex, míg az $(\alpha_2, 1)$ szakaszon konkáv.

A költségfüggvényre is adhatunk alsó határt.

**3. Lemma.** *A következő összefüggés minden $\alpha \in (0,1)$ hulladékkezelési rátára teljesül:*

$$K(\alpha) \geq \sqrt{2d}\left[\alpha\sqrt{sh} + \sqrt{r(h\beta^2 + u\beta)}\right].$$

*Bizonyítás.* Induljunk ki abból, hogy

$$K^2(\alpha) = K^2(m^o(\alpha), n^o(\alpha), \alpha) =$$

$$= 2d\left[\left(\sqrt{A(\alpha)\frac{m^o(\alpha)}{n^o(\alpha)}} - \sqrt{n^o(\alpha)\frac{B(\alpha)}{m^o(\alpha)} + D(\alpha)}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + 2\sqrt{A(\alpha)\big(B(\alpha) + D(\alpha)m^o(\alpha)\big)} + C(\alpha)m^o(\alpha) + E(\alpha)\right] \geq$$

$$\geq 2d\left[2\sqrt{A(\alpha)\big(B(\alpha) + D(\alpha)\big)} + C(\alpha) + E(\alpha)\right]$$

Az egyenlőtlenséget azért írhatjuk, mert a négyzetes kifejezés nemnegatív, így a jobb oldali kifejezést azzal csökkenthetjük, és a fennmaradó rész monoton növekvő függvénye az $m(\alpha)$ változónak, így az egy értéket véve egy alsó becslést kapunk a költségfüggvényre. A kapott becslés független az $\alpha$ megválasztásától. Az átalakításokat elvégezve, a lemma állítását nyerhetjük. Ez teljesül az intervallumunk szélső értékeire is, vagyis a nulla és egy pontokra is, amit egyszerű behelyettesítéssel ellenőrízhetünk.

A lemma következménye az, hogy a költségfüggvényt alulról közelíthetjük egy konkáv függvénnyel, amit viszont egy lineáris függvénnyel közelíthetünk alulról:

$$K(\alpha) \geq \sqrt{2d}\big(\alpha\sqrt{sh} + \sqrt{r(h\beta^2 + u\beta)}\big) \geq \sqrt{2d}\big(\alpha\sqrt{sh} + \beta\sqrt{r(h+u)}\big)\ .$$

Mindez azt mutatja, hogy a készletezési költségfüggvényre teljesül az alábbi összefüggés:

$$K(\alpha) \geq \min\{\sqrt{2dsh}, \sqrt{2dr(h+u)}\}\ ,$$

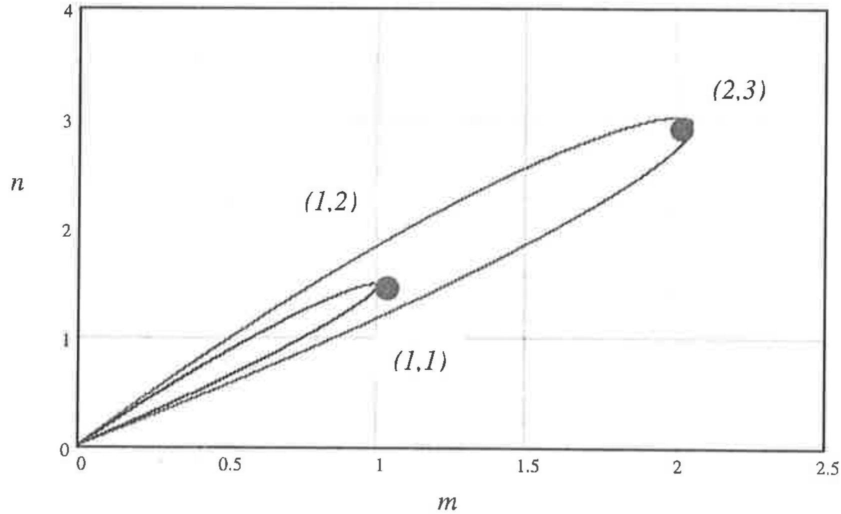
amiből az következik, hogy a költségfüggvény alsó korlátja a tiszta stratégiák közül az egyik, vagyis a kereslet kielégítése csak termelésből javítás nélkül, vagy a keresletkielégítés hulladékkezelés és termelés nélkül csak javítással. Nem tűztük ki célul a készletezési költségek minimalizálását, így ezt a becslést nem tekintjük egy optimalizálási feladat megoldásának. Erre a becslésre a teljes költségek minimalizálásakor lesz szükségünk.

*5. példa.* A 4. példa esetén $K(\alpha) \geq \min\{161\ 864, 434\ 166\}$, vagyis a készletezési költségek minimális értékénél minden használt konténer javításra visszakerül javításra.

## 4.3 Az optimális egészértékű tételszámok meghatározása

Tekintsük most mindazon $\alpha$ hulladékkezelési rátákat, amelyekre a folytonos megoldás nem szolgáltat egészértékű tételszámokat. A kérdés most úgy hangzik, hogy az optimális egészértékű megoldás a határvonalon fekszik-e ($n^I(\alpha) = 1$ vagy $m^I(\alpha) = 1$), vagy a megengedett tartomány belsejében ($n^I(\alpha) > 1$ és $m^I(\alpha) > 1$). A következő példa rámutat arra, hogy az optimális egészértékű megoldás a megengedett taromány belsejébe eshet.

*6. példa.* Legyen ismét $s = 1450$, $r = 200$, $h = 650$, $u = 5$, $\alpha = 0.8$ ($\beta = 0.2$), $d = 1000$. Erre az esetre a folytonos megoldást a 3. példában állítottuk elő. A folytonos tételszámok $m(0.8) = 1$ és $n(0.8) = 1.458$, amire $K(m(0.8), n(0.8), 0.8) = 38\ 019.6$. A határvonalon fekvő megoldások $m_1^I(0.8) = 1$, $n_1^I(0.8) = 1$ és $m_2^I(0.8) = 1$, $n_2^I(0.8) = 2$. A költségfüggvény-értékei: $K(m_1^I(0.8), n_1^I(0.8), 0.8) = 38\ 234.8$ és $K(m_2^I(0.8), n_2^I(0.8), 0.8) = 38\ 170.7$. Ugyanakkor, ha $m^o = 2$ és $n^o = 3$, akkor $K(2.3, 0.8) = 38\ 095.7$. Mivel $K(2.3, 0.8) < K(m_2^I(0.8), n_2^I(0.8), 0.8) < K(m_1^I(0.8), n_1^I(0.8), 0.8)$, ezért az optimális egészértékű megoldás a megengedett tartomány belsejébe esik. A tartomány belsejébe eső megoldás költsége 0.197 százalékkal alacsonyabb, mint a határvonalon fekvő megoldások közül az alacsonyabb, vagyis $m_2^I(0.8) = 1$, $n_2^I(0.8) = 2$. Az egyenlőköltség-görbékkel előállított megoldást a *6. ábra* szemlélteti.




*6. ábra.* Egészértékű megoldás a tartomány belsejében

Nevezzük *határmegoldásnak* az optimális egészértékű megoldásnak azt a becslését, amelyre a tételszámok a folytonos megoldáshoz legközelebb eső egészértékek. Jelöljük ezeket a becsléseket $(m^b(\alpha), n^b(\alpha))$-val. A határmegoldásokat formálisan a következőképpen határozhatjuk meg:

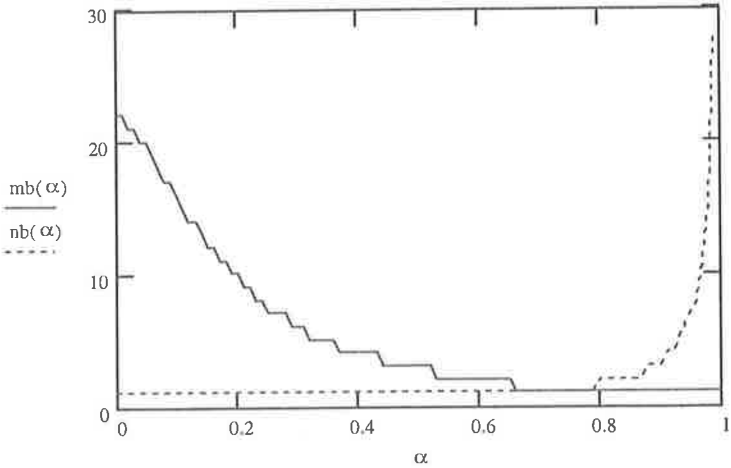
**3. Tétel [2].** *A javítási és hulladékkezelési modell határmegoldásai*

$$(i) \qquad (0, \alpha_1) \Rightarrow m^b(\alpha) = \left\lfloor \sqrt{\frac{A(\alpha)}{B(\alpha) + D(\alpha)} + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} \right\rfloor, \quad n^b(\alpha) = 1,$$

$$(iii) \qquad (\alpha_2, 1) \Rightarrow m^b(\alpha) = 1, \quad n^b(\alpha) = \left\lfloor \sqrt{\frac{B(\alpha)}{A(\alpha) + C(\alpha)} + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} \right\rfloor,$$

*ahol $\lfloor x \rfloor$ a legnagyobb $x$-nél kisebb egész számot jelöli.*

Ez a tétel azt mondja ki, hogy ha a folytonos megoldásban az egyik tételszám egy, akkor azt hagyjuk, mert egy egész számhoz „az van a legközelebb", de ha nem egész a másik, akkor azt "kerekítsük" lefelé, vagy felfelé, annak a függvényében, hogy melyik egész számhoz esik közelebb. Könnyen bebizonyítható (lásd [2]), hogy pl., ha egy $S(1, 4.4, \alpha)$ esetén az $n$-re a négy kisebb függvényértéket ad, mint az öt, így a $K(1, 4.4, \alpha)$ költségértékre is. A *7. ábrán* szemléltetjük a határmegoldásokat a 6. példa paramétereivel.




*7. ábra.* A határmegoldások a hulladékkezelési ráta függvényében

A következő lemma szükséges feltételt mond ki arra vonatkozólag, hogy az egészértékű optimum mikor lesz automatikusan határmegoldás.

**4. Lemma** [2]. *Tegyük fel, hogy a folytonos* $(m^o(\alpha), n^o(\alpha))$ *megoldás nem egészértékű. Ekkor az* $(m^b(\alpha), n^b(\alpha))$ *határmegoldás egyben optimális is* $((m^b(\alpha), n^b(\alpha)) = (m^I(\alpha), n^I(\alpha)))$*, ha (i)* $\alpha \in (0, \alpha_1)$ *esetén* $49A(\alpha) \leq 527C(\alpha)$ *vagy ha (iii)* $\alpha \in (\alpha_2, 1)$ *esetén* $49B(\alpha) \leq 527D(\alpha)$.

A bizonyítást itt is elhagyjuk, csak a bizonyításban adott felső határt adjuk meg az (i) esetre, vagyis amikor a termelési tételszám nagyobb, mint egy. (Hasonló szimmetrikus becslést adhatunk a másik oldalra is.) Ekkor

$$S(1, n^b(\alpha), \alpha) \leq \frac{13}{6}\sqrt{A(\alpha)\big(B(\alpha) + D(\alpha)\big)} + C(\alpha) + E(\alpha)\,. \tag{6}$$

Jelölje most $S(m^I(\alpha), n^I(\alpha), \alpha)$ az optimális egészértékű megoldást, amely a megengedett tartomány belsejében feküdhet, és $S(m^b(\alpha), n^b(\alpha), \alpha)$ a határmegoldást. A kérdésünk úgy hangzik, hogy mennyi a relatív hibája a két megoldásnak.

**4. Tétel.** *A határmegoldás relatív hibája a következő:*

$$dS_I = \frac{S(m^b(\alpha), n^b(\alpha), \alpha) - S(m^I(\alpha), n^I(\alpha), \alpha)}{S(m^I(\alpha), n^I(\alpha), \alpha)} \leq \frac{1}{24}\,.$$

*Bizonyítás.* Tegyük fel, hogy $\alpha \in (\alpha_2, 1)$, vagyis $n^b(\alpha) > 1$. Ekkor

$$S(m^b(\alpha), n^b(\alpha), \alpha) - S(m^I(\alpha), n^I(\alpha), \alpha) \leq$$
$$\leq S(m^b(\alpha), n^b(\alpha), \alpha) - S(m^o(\alpha), n^o(\alpha), \alpha) \,,$$

és így

$$\frac{S(m^b(\alpha), n^b(\alpha), \alpha) - S(m^I(\alpha), n^I(\alpha), \alpha)}{S(m^I(\alpha), n^I(\alpha), \alpha)} \leq$$
$$\leq \frac{S(m^b(\alpha), n^b(\alpha), \alpha) - \left(2\sqrt{A(\alpha)\big(B(\alpha)+D(\alpha)\big)} + C(\alpha) + E(\alpha)\right)}{2\sqrt{A(\alpha)\big(B(\alpha)+D(\alpha)\big)} + C(\alpha) + E(\alpha)} \,,$$

ahol

$$S(m^o(\alpha), n^o(\alpha), \alpha) = 2\sqrt{A(\alpha)\big(B(\alpha)+D(\alpha)\big)} + C(\alpha) + E(\alpha) =$$
$$= \left(\alpha\sqrt{sh} + \sqrt{r(h\beta^2 + u\beta)}\right)^2 .$$

A (6) becslés ismeretében:

$$dS_I \leq \frac{1}{12} \frac{2\alpha\sqrt{sh} \cdot \sqrt{r(h\beta^2 + u\beta)}}{\left(\alpha\sqrt{sh} + \sqrt{r(h\beta^2 + u\beta)}\right)^2} .$$

Azonban egyszerű közelítéssel

$$\frac{2\alpha\sqrt{sh} \cdot \sqrt{r(h\beta^2 + u\beta)}}{\left(\alpha\sqrt{sh} + \sqrt{r(h\beta^2 + u\beta)}\right)^2} \leq \frac{1}{2} \,,$$

amivel a tételt bizonyítottuk. Szimmetrikus érveléssel bizonyítható az állítás az $\alpha \in (0, \alpha_1)$, vagyis $m^b(\alpha) > 1$ esetre is.

A [2] dolgozatban azt láttuk be, hogy a relatív hiba kisebb 1/24-nél. A következő tételben a költségfüggvényre adunk egy becslést.

**5. Tétel.** *A határmegoldás készletezési költségének relatív hibája a következő:*

$$dK_I = \frac{K(m^b(\alpha), n^b(\alpha), \alpha) - K(m^I(\alpha), n^I(\alpha), \alpha)}{K(m^I(\alpha), n^I(\alpha), \alpha)} \leq \frac{1}{48} .$$

*Bizonyítás.* Vizsgáljuk a $dK_I$ különbséget. Mivel

$$K(m(\alpha), n(\alpha), \alpha) = \sqrt{2dS(m(\alpha), n(\alpha), \alpha)} \,,$$

ezért

$$dK_I = \frac{\sqrt{2dS(m^b(\alpha), n^b(\alpha), \alpha)} - \sqrt{2dS(m^I(\alpha), n^I(\alpha), \alpha)}}{\sqrt{2dS(m^I(\alpha), n^I(\alpha), \alpha)}} =$$

$$= \frac{S(m^b(\alpha), n^b(\alpha), \alpha) - S(m^I(\alpha), n^I(\alpha), \alpha)}{\sqrt{S(m^I(\alpha), n^I(\alpha), \alpha)}\left(\sqrt{S(m^b(\alpha), n^b(\alpha), \alpha)} + \sqrt{S(m^I(\alpha), n^I(\alpha), \alpha)}\right)} \leq$$

$$\leq \frac{S(m^b(\alpha), n^b(\alpha), \alpha) - S(m^I(\alpha), n^I(\alpha), \alpha)}{2S(m^I(\alpha), n^I(\alpha), \alpha)} \leq \frac{1}{48},$$

ami bizonyítja az állítást.

Amint a bizonyítás menetéből kiderült, nem csak az láttuk be, hogy a határ- és az optimális egészértékű megoldás relatív hibája 1/48, hanem azt is, hogy a határ megoldás és a folytonos megoldás különbsége is ennyi. A tétel azt mondja ki, hogy a határmegoldásnak és az optimális egészértékű megoldásnak a költségkülönbözete nem haladja meg az 2.1 százalékot. Ezzel kapcsolatban felmerülhet a kérdés, hogy ne álljon-e meg az optimum keresése a határmegoldásnál, amelynél az egyik tételszám egyenlő eggyel. Ezzel az eredménnyel áttérhetünk a 2. modell vizsgálatára.

Ha az optimális tételszámokat meghatároztuk, akkor a hulladékkezelési ráta ismeretében a $K(\alpha)$ függvényt meghatározhatjuk:

$$K^I(\alpha) =$$

$$= \sqrt{2d\left(A(\alpha)\frac{m^I(\alpha)}{n^I(\alpha)} + B(\alpha)\frac{n^I(\alpha)}{m^I(\alpha)} + C(\alpha)m^I(\alpha) + D(\alpha)n^I(\alpha) + E(\alpha)\right)}.$$

# 5 A 2. modell megoldása

A 2. modellnél feltételezzük, hogy az $\alpha$ hulladékkezelési ráták ismeretében adottak a tételnagysághoz tapadó változók értékei, így az egészértékű tételszámok is. A problémát ekkor a

$$G(\alpha) = K^I(\alpha) + R(\alpha) \to \min$$
$$\alpha \in [0,1]$$

formában írhatjuk fel. Mivel az egészértékű megoldás magasabb költséget eredményez, mint a folytonos megoldás, ezért a $G(\alpha)$ függvényre a következő becslést tehetjük:

$$G(\alpha) = K^I(\alpha) + R(\alpha) \geq K(\alpha) + R(\alpha)$$

A 3. lemma alapján a $K(\alpha)$ költségfüggvényre becslést végezhetünk, és az $R(\alpha)$ tételnagyságtól nem függő lineáris költségfüggvényt ismerjük. Így

$$K(\alpha) + R(\alpha) \geq \sqrt{2d}\left\lfloor \alpha\sqrt{sh} + \sqrt{r(h\beta^2 + u\beta)} \right\rfloor + bd\alpha + kd\beta + ed\alpha,$$

ami konkáv függvény az értelmezési tartományában. További becsléssel

$$G(\alpha) \geq \alpha d\left(\sqrt{2sh/d}+b+e\right)+\beta d\left(\sqrt{2r(h+u)/d}+k\right) \geq$$
$$\geq \min\left\{d\left(\sqrt{2sh/d}+b+e\right);\, d\left(\sqrt{2r(h+u)/d}+k\right)\right\},$$

amivel bebizonyítottuk a

**6. Tételt [9, 10].** *Az optimumban a döntéshozó két stratégia közül választhat: $\alpha^o = 0$, vagy $\alpha^o = 1$. Ez azt jelenti, hogy a tiszta stratégiák egyike mellett (az összes termék javítása, hulladékkezelés nélkül; vagy az összes konténer letermelése javítás nélkül) lesznek a releváns költségek a legalacsonyabbak.*

A hulladékkezelés e költségtényezője változtatásával lehet a vállalatok tevékenységét a környezettudatos anyaggazdálkodás irányába terelni.

*7. példa.* Legyen újra $s = 1450$, $r = 200$, $h = 650$, $u = 5$, $e = 100$, $b = 250$, $k = 150$, $d = 1000$. Ekkor $G(0) = d(\sqrt{2r(h+u)/d}+k) = 166\ 186$ és $G(1) = d(\sqrt{2sh/d}+b+e) = 393\ 417$, vagyis optimális minden használt konténert újrafeldolgozni, $\alpha^o = 0$. A gazdasági sorozatnagyság értéke 25 darab.

# 6 Összefoglalás

A dolgozatban egy javítási és hulladékkezelési modellt mutattunk be. A probléma optimális készletezési paramétereit határoztuk meg először adott hulladékkezelési ráta mellett, majd a hulladékkezelési rátát is döntési változónak tekintve egy lineáris költségekkel kiterjesztett modellben beláttuk, hogy költségszempontból a tiszta stratégiák dominánsak. Ennek az lehet a praktikus következménye, hogy a költségek változásával lehet a tisztán gazdasági racionalitás alapján álló vállalatokat környezettudatosabb gazdálkodásra (újrafelhasználás) bírni.

## Irodalom

1. Dobos, I., Richter, K. (1999): Comparison of Deterministic One-Product Reverse Logistics Models, in: Hill, R., Smith, D. (Eds.): *Inventory Modelling: A Selection of Research Papers Presented at the Fourth ISIR Summer School* (1999), Exeter 1999, 69–78
2. Dobos, I., Richter, K. (2000): The integer EOQ repair and waste disposal model – further analysis. *Central European Journal of Operations Research* 8, 173–194
3. Fleischmann, M., Bloemhof-Ruwaard, J. M., Dekker, R., van der Laan, E. van Nunen, J. A. E. E., van der Wassenhove, L. N. (1997): Quantitative models for reverse logistics: a review. *European Journal of Operational Research* 103, 1–17
4. Kelle, P., Silver, E. A. (1989): Purchasing policy of new containers considering the random returns of previously issued containers, *IIE Transactions* 21(4): 349–354

5. Mabini, M. C., Pintelon, L. M., Gelders, L. F. (1998): EOQ type formulation for controlling repairable inventories. *International Journal of Production Economics* 54, 173–192
6. Nahmias, N., Rivera, H: (1979): A deterministic model for repairable item inventory system with a finite repair rate. *International Journal of Production Research* 17(3), 215–221
7. Richter, K. (1996): The EOQ repair and waste disposal model with variable setup numbers, *European Journal of Operational Research* 96, 313–324
8. Richter, K. (1996): The extended EOQ repair and waste disposal model, *International Journal of Production Economics* 45, 443–447
9. Richter, K. (1997): Pure and mixed strategies for the EOQ repair and waste disposal problem, *OR Spektrum* 19, 123–129
10. Richter, K., Dobos, I. (1999): Analysis of the EOQ repair and waste disposal model with integer setup numbers, *International Journal of Production Economics* 59, 463–467
11. Schrady, D. A. (1967): A deterministic inventory model for repairable items. *Naval Research Logistic Quarterly* 14, 391–398
12. Teunter, R. H. (1998): *Economic ordering quantities for repairable/manufacturable item inventory systems*, Preprint No. 31, Faculty of Economics and Management, Otto-von-Guericke University of Magdeburg, Germany

## RECYCLING IN AN EOQ MODEL

The aim of the paper is to investigate a reverse logistics model. The demand can be satisfied by production of new items and/or by repair of used returned items. The decision-maker minimizes all relevant costs, i.e. the sum of EOQ- and non-EOQ-related costs. It is asked whether pure or mixed strategies minimize the total costs.

# SZOFTVERFEJLESZTÉSI TEVÉKENYSÉGEK EGZAKT ÜTEMEZÉSE ERŐS ÉS GYENGE ERŐFORRÁS KORLÁTOK MELLETT[1]

KRUZSLICZ FERENC
*PTE Közgazdaságtudományi Kar*

Jelen dolgozat során egy olyan új erőforrás ütemezési modellt mutatunk be, mely alkalmas valódi többprojektes környezetben egymástól jelentősen eltérő jellegzetességekkel bíró, korlátos erőforrástípusok kezelésére. Olyan kétfázisú, többkritériumos erőforrás hozzárendelő és kiegyenlítő algoritmuson alapszik, mely kis és közepes feladatok esetén is képes az egzakt megoldások előállítására. A modell életképességét egy szoftverfejlesztési példán keresztül mutatjuk be.

## 1 Bevezetés

A projektmenedzsmenthez kapcsolódó kutatásokban egyre több olyan alkalmazási terület került előtérbe, ahol párhuzamosan több projekt ütemezését kell megoldani. A projekt egymással kapcsolatban álló tevékenységek halmaza, ahol a tevékenységek közötti kapcsolatokat elsőbbségi feltételek írják le, a tevékenységeket pedig végrehajtásuk időszükségletével és erőforrásigényével jellemezzük. A projektekhez kapcsolódó tervezési és ütemezési feladatok elméleti alapját szolgáltató hálótechnikai módszerek a gráfelmélet egyik legfontosabb és legnehezebb területét jelentik [9]. Az említett problémakör a kombinatorikai optimalizálás "NP-hard" feladatai közé tartozik. Ez a projektmenedzsment szempontjából azt jelenti, hogy még egy kisméretű, könnyen átlátható és könnyűnek tűnő feladat megoldása is rendkívül számításigényes és nehéz lehet.

A projektek tevékenységeinek végrehajtásához különféle erőforrásokra (idő-, emberi-, tárgyi- és pénzügyi stb.) van szükség. Ezek az erőforrások alapvetően két kategóriába sorolhatóak aszerint, hogy azok újrafelhasználhatóak-e (megújuló erőforrások) vagy sem [3]. Mindeddig főleg olyan területek vizsgálatára került sor, ahol ugyan valóban több —egymástól jól elhatárolható— projektet kell kezelni, ám ezek a projektek mindig egy adott projekt időben eltolt példányai voltak. Egyazon standardizált termék különböző megrendelői igény szerint történő előállításának ütemezési problémáival gyakran találkozhatunk az autóiparban [5], valamint a házgyártásban [1] is. Az így adódó projektek párhuzamosan kerülnek végrehajtásra, és az egyes mun-

[1]Beérkezett: 2003. február 11. A szerző a Pécsi Tudományegyetem Közgazdaságtudományi Kar Gazdálkodástani Doktori Iskolájának hallgatója. Témavezető: Csébfalvi György.

kafázisokhoz rendelt emberi erőforrások esetében a munkaerő tetszőlegesen helyettesíthető. A sorozatgyártás során felmerült problémák szempontjából a tárgyi-, míg az egyedi (főleg szellemi) termékek esetében az emberi erőforrás játszik középponti szerepet. Az eddig használt modellekben tehát a munkaerő, mint korlátos, megújuló erőforrás ugyan megjelent, de mindig mint szabadon helyettesíthető elemekből álló tényező [8]. Az itt ismertetett modell kialakítását sugalmazó szoftverfejlesztési tevékenység is egy tipikus multiprojekt környezet. A szoftverfejlesztésben előforduló feladatok legfőbb jellegzetessége, hogy nemcsak merőben különböző projektekből állnak, hanem a felhasznált emberi erőforrások jellemzői is jelentősen eltérnek, egymást nem helyettesíthető erőforrás osztályokba sorolhatóak.

A következőkben bemutatandó modell és algoritmus a hagyományos projekt modellezési eljárásokhoz képest több szempontból is új elemeket tartalmaz. Egyrészt az egymástól minőségileg eltérő erőforrásokhoz olyan újszerű célfüggvényeket rendel, amelyek az erőforrások hatékony kihasználásának globális jellemzői. Másrészt nem elégszik meg egy hatékony ütemezés előállításával, hanem egzakt módszer lévén az összes hatékony megoldást előállítja. Ez a döntéshozók számára lehetőséget ad a különböző Pareto optimális megoldások további mérlegelésére. Harmadrészt sikeresen ötvözi az erőforrás felhasználással kapcsolatos ütemezési problémák két fő fajtáját, a hozzárendelési és a kiegyenlítési problémák jellegzetességeit azzal, hogy minden erőforrást a rá legjobban jellemző probléma szerint kezel.

## 2 Modell

A bevezetőben leírt projektek modellezésére és a tevékenységek ütemezésének optimalizálására egy olyan modellt állítottunk fel, mely egyaránt képes kezelni az egymástól lényegesen eltérő jellegzetességű projekteket és korlátos erőforrásokat is.

Jelölje $P = \{P_1, P_2, \dots P_n\}$ az adott időszak alatt elvégzendő projektek halmazát. Minden $P_i = \{T_{i,j} : j = 1 \dots n_i\}$ projekt $n_i$ féle tevékenységet tartalmaz, melyek között adott a közvetlen megelőzési relációk $H_i = \cup\{T_{i,j_1} \to T_{i,j_2}\}$ halmaza. A $T_{i,j_1} \to T_{i,j_2}$ jelölés azt jelenti, hogy a $T_{i,j_1}$ tevékenységnek még a $T_{i,j_2}$ tevékenység megkezdése előtt be kell fejeződnie.

A rendelkezésünkre álló $k$ darab erősen korlátos erőforrásból álló halmazt jelölje $RH = \{RH^1, RH^2, \dots RH^k\}$. Az $l$ féle gyengén korlátos erőforrás halmaza pedig legyen $RS = \{RS^1, RS^2, \dots RS^l\}$. Minden $R \in RH \bigcup RS$ erőforráshoz adott az $R(t)$ függvény, mely a $t$-edik időpontban az $R$ erőforrásból rendelkezésre álló mennyiséget adja meg.

**Definíció:** Az $R$ erőforrást *erősen korlátos erőforrásnak* nevezzük, ha egyetlen $t$ időpontban sem használhatunk fel az $R(t)$ értéknél több erőforrásegységet.

Erősen korlátos erőforrások esetében pótlólagos erőforrások bevonása még ideiglenesen sem lehetséges. Erőforrás hiányból származó konfliktusok feloldására kizárólag a tevékenységek átütemezése, vagy a projektek legkorábbi befejezési határidejének meghosszabbítása jöhet számításba.

**Definíció:** Az $R$ erőforrást *gyengén korlátos erőforrásnak* nevezzük, ha bármely $t$ időpontban az $R(t)$ értéknél nagyobb erőforrás igényt is ki lehet elégíteni, pótlólagos erőforrások igénybevétele révén.

A gyengén korlátos erőforrások esetében jelentkező erőforrás hiányok áthidalásához igénybe vett pótlólagos erőforrásokra semmiféle megkötés nincsen azon kívül, hogy az adott tevékenységeket képesek legyenek ellátni. A pótlólagos erőforrás tehát származhat a rendelkezésünkre álló éppen szabad erősen vagy gyengén korlátos más erőforrásokból éppúgy, mint külső erőforrások beszerzéséből.

Az eddig bevezetett jelölések segítségével minden tevékenységet egy $T_{i,j} = (D_{i,j}, RH^1_{i,j}, RH^2_{i,j}, ...RH^k_{i,j}, RS^1_{i,j}, RS^2_{i,j}, ...RS^l_{i,j},)$ vektorral jellemezhetünk, ahol $D_{i,j}$ jelöli az $i$-edik projekt $j$-edik tevékenységének hosszát időegységekben, $R_{i,j}$ pedig az adott tevékenység erőforrás igényét az $R \in RH \bigcup RS$ erőforrásra vonatkozóan.

A projektek egy $S$ ütemezését a $T_{i,j}$ tevékenységek kezdési időpontjainak halmazával adhatjuk meg $S = \{S_{i,j} \ : \ i = 1 \dots n, \ j = 1 \dots n_i\}$. Az egységes jelölésrendszer érdekében bevezethetünk egy $T_0$ nyitó, valamint egy $T_1$ záró, üres (idő- és erőforrás igény nélküli) tevékenységet. A nyitó és záró tevékenységekhez tartozó közvetlen megelőzési relációk halmazát jelölje

$$H = \{T_0 \to T_{i,j}, \ T_{i,j} \to T_1 \ : \ i = 1 \dots n, \ j = 1 \dots n_i\}.$$

Ennek segítségével a $T_0$-hoz tartozó $S_0$ ütemezési érték a projektek végrehajtásának kezdetét, míg a $T_1$-hez tartozó $S_1$ érték a legkorábbi befejezési időpontot jelöli. Nem jelent megszorítást, ha feltételezzük, hogy az ütemezések mindig az első időpontban kezdődnek, azaz $S_0 = 0$. Ezen feltételezés mellet az $S$ ütemezés végrehajtásához szükséges idő $E(S) = S_1$. A számos ütemezési lehetőség közül csak a lehetséges ütemezéseket vesszük figyelembe, vagyis azokat, melyek megtartják a közvetlen megelőzési relációkat.

**Definíció:** $S$ egy *lehetséges* ütemezés, ha minden $T_{i,j_1} \to T_{i,j_2}$ esetén teljesül az $S_{i,j_1} + D_{i,j_1} \le S_{i,j_2}$ egyenlőtlenség. A lehetséges ütemezések halmazát jelölje $\Re = \Re(H \bigcup H_1 \bigcup ... \bigcup H_n)$.

A lehetséges ütemezések körét tovább kell szűkítenünk az erőforrás korlátok figyelembevételével. Jelölje $U^R_S(t)$ az $R$ erőforrás $t$-edik időpontbeli kihasználtságát az $S$ ütemezés mellett. Az $U^R_S(t)$ erőforrás felhasználási hisztogram értékeit az alábbi képlet alapján számíthatjuk ki:

$$U^R_S(t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_i} S_{i,j}(t) \cdot R_{i,j} \text{ , ahol}$$

$$S_{i,j}(t) = \begin{cases} 1, & \text{ha } S_{i,j} \le t < S_{i,j} + D_{i,j} \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

Az $S_{i,j}(t)$ függvény segítségével könnyen leírhatjuk a $t$-edik időpontban folyamatban lévő (aktív) tevékenységek halmazát $A(t) = \{T_{i,j} : S_{i,j}(t) = 1\}$.

Ha a szűkítést az erőforrásoknak egy $C$ halmazára vonatkoztatjuk, akkor csak olyan lehetséges ütemezéseket fogadhatunk el, amelyek minimális idő alatt hajthatók végre úgy, hogy az erőforrás kihasználtság egyetlen $R \in C$ erőforrás esetében sem lépi túl a hozzá tartozó $R(t)$ korlátot.

**Definíció:** Az $S$ ütemezés a $C$ erőforrás halmazra nézve *elfogadható*, ha $S \in \Re$, továbbá minden $R \in C$ és $0 < t \leq E(S)$ esetén $U_S^R(t) \leq R(t)$, valamint $E(S) = \min\{E(S') : S' \in \Re\}$. A $C$ erőforrás halmazra nézve elfogadható ütemezések halmazát $\Re^C$-vel jelöljük.

Az előbbieknek megfelelő $\Re^{RH}$ halmaz tehát az erősen korlátos erőforrásokra nézve elfogadható ütemezések halmaza, melyet egy hozzárendelési probléma megoldásával állíthatunk elő. Ebben a halmazban kell megkeresnünk a gyengén korlátos $RS$ erőforrásokra vonatkozó hatékony megoldásokat. Az ütemezések hatékonyságának definiálására és mérésére többféle módszer is használható. Modellünkben minden gyengén korlátos erőforráshoz kétféle globális mértéket rendelünk hozzá, és az így kapott mértékek szerinti Pareto optimális megoldások jelölik ki a hatékony megoldásokat.

Az $R \in RS$ gyengén korlátos erőforrás kihasználtsága az $S$ elfogadható ütemezés mellett egyrészt akkor optimális, ha az a lehető legkevesebb erőforrás bővítés mellett valósítható meg. Az $R$ erőforráshoz tartozó célfüggvény ebben az esetben az erőforrás felhasználás maximális szintjét minimalizálja:

$$MU^R = \min_S\{MU^R(S)\},\ \textit{ahol}\ MU^R(S) = \max_t\{U_S^R(t)\}\}$$

Az $R \in RS$ gyengén korlátos erőforrás kihasználtsága az $S$ elfogadható ütemezés mellett másrészt akkor optimális, ha az erőforrás kihasználtság szintje a legkevésbé ingadozó. Másképpen a globális üresjárat (idle time) szintje a legalacsonyabb. Legyen $\overline{U_S^R}(t)$ az $R$ erőforrás $U_S^R$ felhasználási hisztogramjának konkáv burka, melyet az alábbi módon definiálhatunk.

**Definíció:** A $\overline{h}(t)$ hisztogram a $h(t)$ hisztogram konkáv burka, ha

1. konkáv, azaz minden $t_1 < t_2 < t_3$ esetén $\overline{h}(t_2) \geq \min\{\overline{h}(t_1), \overline{h}(t_3)\}$,
2. és burok, vagyis minden $t$ értékre $\overline{h}(t) \geq h(t)$,
3. valamint minimális abban az értelemben, miszerint a $C(\overline{h}) = \sum_t \overline{h}(t) - h(t)$ érték a lehető legkisebb.

A legkisebb $C(\overline{h})$ értéket a $h$ erőforrás kihasználtsági hisztogram konkávitási mértékének nevezzük [10]. Ez egy olyan globális mérőszám, amely nagyon jól jellemzi a folyamatosan egyenletes terhelést. Ennek segítségével már minden $R \in RS$ erőforrás célfüggvénye könnyen megadható:

$$IT^R = \min_S \{IT^R(S)\}, \; ahol \; IT^R(S) = \min_{\overline{U_S^R}} \{C(\overline{U_S^R})\}\}$$

A modell végső és egyben hatékony ütemezéseit az $MU^R$ és az $IT^R$ kritériumok szerinti Pareto optimális megoldások szolgáltatják. Ez a feladat az erőforrás kiegyenlítési problémák közé tartozik. Egy $S$ ütemezést akkor nevezünk több célfüggvény szerint Pareto optimálisnak, ha bármelyik célfüggvény szerinti értéke csak egy másik rovására javítható. A jelen modellre vonatkozó pontos definíció a következőképpen adható meg.

**Definíció:** Az $S \in \Re^{RH}$ erősen korlátos erőforrásokra elfogadható ütemezés az $RS$ erőforrásokhoz rendelt $MU^R$ és $IT^R$ célfüggvényekre nézve Pareto optimum, ha nem létezik olyan $S' \in \Re^{RH}$ elfogadható ütemezés, amelynél minden $R \in RS$ erőforrásra az $MU^R(S) > MU^R(S')$ és $IT^R(S) > IT^R(S')$ egyenlőtlenségek mindegyike egyszerre teljesül.

# 3 Algoritmus

A fent ismertetett modellnek egy kétfázisú, implicit leszámláláson alapuló algoritmust lehet megfeleltetni. Az első fázisban az összes ütemezések terét szűkítjük le az $RH$ erőforrásokra nézve elfogadható ütemezések körére. A második fázis során az így meghatározott térben keressük meg az $RS$ erőforrásokra vonatkozó Pareto optimális megoldásokat.

(i) Az első fázisban előállítjuk az $\Re^{RH}$ halmazt. Az $RH$- beli erőforrásokra nézve elfogadható ütemezések megkeresése egy olyan hozzárendelési probléma megoldását jelenti, amelynél az $RS$ erőforrásokat figyelmen kívül hagyjuk. A lehetséges ütemezések $\Re$ terének erőforrás felhasználási konfliktusait a *minimális összeférhetetlenségi halmazok* segítségével írjuk le, melynek pontos definíciója a [4]-es cikkben olvasható. A minimális összeférhetetlenségi halmazokkal kapcsolatban itt csak annyit jegyzünk meg, hogy egy adott halmazba tartozó tevékenységek egyidejű ütemezése erőforrás felhasználási konfliktussal jár, de a „minimális" jelzőnek megfelelően, a halmaz bármely valódi részhalmazába tartozó tevékenységek egyidejű ütemezését erőforrás kihasználási korlátok már nem akadályozzák. Az $\Re^{RH}$ halmaz elemeit a minimális összeférhetetlenségi halmazok feloldásai szerinti reprezentáns ütemezésekkel írhatjuk le.

Ha a rendelkezésre álló $R \in RH$ erőforrások valamelyikének korlátozottsága miatt a kritikus út módszerével kapott legkorábbi ütemterv nem valósítható meg, akkor az adott erőforrások felhasználási konfliktusainak feloldásával (vagyis bizonyos tevékenységek ütemezésének késleltetésével) olyan ütemtervet kell keresnünk, amely az összes erőforrás korlátot kielégíti, és amely a kritikus út módszerével adódó globális befejezési időpontot minimális mértékben növeli.

(ii) A második fázisban az első fázis eredményeként kapott $\Re^{RH}$-beli ütemezéseket vesszük sorra. Valójában elegendő az első fázisban kapott keresési fa leveleinek megfelelő reprezentáns ütemezések vizsgálata. Minden ilyen ütemezés esetében az eredeti feladat $H$ illetve $H_i$ közvetlen megelőzési halmazait kibővítjük a keresési fa csomópontjának megfelelő erőforrás felhasználási konfliktusok feloldását leíró relációkkal. Az így módosított feladatokban az erősen korlátos erőforrásokat már figyelmen kívül hagyhatjuk, hiszen a módosított feladat bármely lehetséges megoldása egyben az eredeti feladat $RH$ elemeire nézve elfogadható megoldása is lesz. Ez annak a következménye, hogy az első fázisban az ütemezéseket a *minimális összeférhetetlenségi halmazok* segítségével írtuk le. Az állítás részletes bizonyítása megtalálható a modell alapját képező értekezésben [14]. A kapott kiegyenlítési probléma hatékony megoldásait ugyanazzal az implicit leszámlálási módszerrel állíthatjuk elő, amit az első fázisban alkalmaztunk [12]. Az $RS$ erőforrások gyengén korlátosak, ezért itt nem lesznek erőforrás felhasználási konfliktusok, ami miatt a keresési fák mérete is jelentősen nagyobb lehet. A Pareto optimális megoldások az $R \in RS$ erőforrásokhoz rendelt $MU^R$ és $IT^R$ célfüggvények szerinti minimumok lesznek.

A második fázis végrehajtása után kapott Pareto optimumok egyben az eredeti feladat egzakt megoldásai lesznek.

A modell numerikus kezeléséhez többféle implicit leszámláláson alapuló eljárás közül választhatunk [13,6]. A megvalósítás során ezek közül azt az algoritmust alkalmaztuk, amelynek hatékony metszési szabályai lehetővé teszik nagyobb méretű feladatok megoldását is [7].

## 4 Alkalmazási példa

A szoftverfejlesztési stratégiákat alapvetően két csoportba lehet sorolni: egyedi megrendeléseknek megfelelő speciális rendszerek készítése, illetve speciális saját termékek gyártása. A legtöbb esetben a két stratégia jól kiegészíti egymást. Például pangó megrendelések mellett önálló termékek fejlesztésével lehet a munkaerő kihasználást egyenletesebbé tenni. Jelen cikk során a szoftverfejlesztés alatt kizárólag azt a folyamatot értjük, amely a technikai specifikáció elkészítésétől a kódoláson keresztül egészen a tesztelésig tart. A hagyományos elméletek szerint a felhasználói igény specifikációjának elkészítését és a rendszertervezést nem lehet szigorúan elválasztani. Most mégis kénytelenek vagyunk ezt megtenni, hiszen a programozói feladatokat és azok időszükségletét csak a technikai specifikáció ismeretében lehet megfelelő pontossággal megbecsülni. Másrészről a technikai specifikáció elkészítése előtti tevékenységeket általában még nem kötik szerződésben rögzített határidők.

A vizsgálat során felmerült projektek legtöbbje három jól elkülöníthető részből állt.

1. Technikai specifikáció készítés. Ez általában egy vezető programozó feladata.

2. Kódolás. A programozók a rendszerterv alapján elkészítik a kódot (valamint az adatbázist, dokumentációt).

3. Ellenőrzés. Az elkészült alkalmazás illetve funkció minőségét és hibamentességét tesztelők vizsgálják meg.

| | Erőforrás igény (nap / fő) | | |
|---|---|---|---|
| Projekt | $D/RH^1$ | $D/RS^1$ | $D/RS^2$ |
| Funkció bővítés | | | |
| P1 | 2 / 2 | 3 / 2 | 4 / 2 |
| P2 | 5 / 3 | 3 / 3 | 4 / 4 |
| P3 | 3 / 2 | 3 / 2 | 4 / 1 |
| Hibajavítás | | | |
| P4 | 0 / 0 | 2 / 1 | 2 / 2 |
| P5 | 0 / 0 | 4 / 3 | 2 / 3 |
| Átfogó ellenőrzés | | | |
| P6 | 0 / 0 | 0 / 0 | 2 / 3 |
| P7 | 0 / 0 | 0 / 0 | 3 / 3 |

Rendelkezésre álló erőforrások

| | | |
|---|---|---|
| $RH^1(t) \equiv 5$ | $RS^1(t) \equiv 5$ | $RS^2(t) \equiv 5$ |

*1. táblázat.* Projektek erőforrás igényei

A fenti feladatok a valóságban —egymással folyamatos visszacsatolásban állva— fejlesztési ciklusokat alkotnak. Hogy a szoftverfejlesztési problémára a modellünket mégis alkalmazhassuk, ki kell használni a problémakör két fontos jellegzetességét. A feladat mérete kicsi, kivitelezése rövidtávú. Nem nagy rendszerek fejlesztését kell modellezni, hanem pár lépésből álló, kisebb feladatokat. Ebben az esetben a fejlesztési ciklusokat szükség esetén külön tevékenységek sorozatává fejthetjük ki. Rövidtávú feladatok révén pedig olyan egyszerűsítő feltételezéseket vezethetünk be, miszerint az időszak alatt rendelkezésre álló erőforrások mennyisége konstans.

Az egyes munkafolyamatokat ellátó személyzet a szaktudásának megfelelően az alábbi kategóriákba sorolható:

$RH^1$ **erőforrás:** A *vezető programozók* —akik általában az egyes projektek gazdái is— a technikai specifikáció kivitelezésében vesznek részt, majd a kritikus kódrészek elkészítésében és a többi programozó munkájának felügyeletében is tevékenykednek. A vezető programozók olyan magas kvalitású lojális alkalmazottak, akik átlátják a teljes rendszert és ellátják a verzió- és release-menedzsmentet is. Ebből következően ez az erőforrás erősen korlátos, hiszen ilyen munkaerőből általában kevesebb van, valamint szak- és rendszerismerete miatt nehezen helyettesíthető és bővíthető. Szükség esetén programozói minőségben is hadrafogható, melyet a projektek tervezése során vehetünk figyelembe. A vezető programozók terhelése ennek következtében erősen ingadozó.

$RS^1$ **erőforrás:** A *programozók* általában egy-egy adott programnyelv szakértői, akik a specifikáció alapján már önállóan elkészítik és javítják a programkódot. Újabb programozók bevetésének ugyan van egy elég magas induló költsége, révén meg kell ismerkedniük a projekttel illetve a projektben résztvevőkkel, valamint az alkalmazott technológiákkal.

Ezek után azonban a többi programozóval egyenértékű munkát végezhetnek. Ez az erőforrás tehát gyengén korlátos, hiszen magas költségek árán, de bővíthető. Szükség esetén segítik a tesztelők munkáját. A programozói munkaerő csökkentése kevésbé jellemző, hiszen kihasználatlanság esetén a felszabaduló idő kitűnő alkalom a szakmai ismeretek frissítésére és bővítésére.

$RS^2$ **erőforrás:** A minőségellenőrzés részint a folyamatok szervezése révén, részint az alkalmazott eszközök és technológia révén biztosított, mégis kiemelkedően fontos az utólagos és folyamatos tesztelés. A tesztkörnyezetek és tesztsorozatok ezt a tevékenységet nagy mértékben képesek automatizálni. Kész tesztelési forgatókönyvek esetén ezt a munkát „bárki" el tudja végezni. Ami egyben azt jelenti, hogy ez az erőforrás egyáltalán nem jelent erős korlátot. A *tesztelők* optimális esetben folyamatos és egyenletes terhelés alatt állnak.

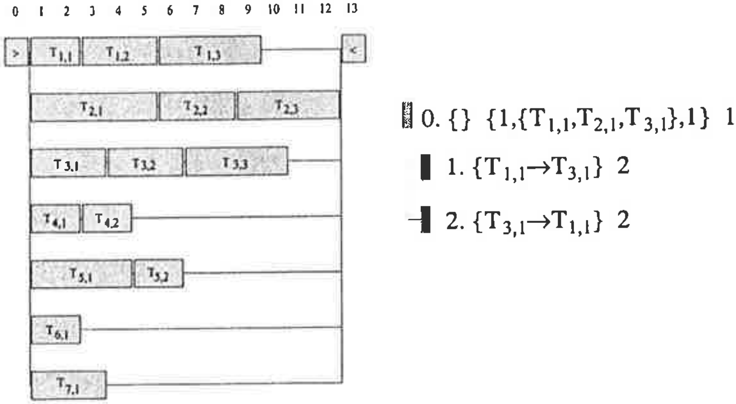
A modellt egy ilyen valós szoftverfejlesztési környezetből származó példán mutatjuk be. A megvizsgált fejlesztési időszak alatt 15 különféle tevékenység ütemezését kell megoldani úgy, hogy mindenfajta erőforrásból egyformán 5-5 fő állt rendelkezésre. A feladat pontos paramétereit az 1. táblázat tartalmazza.

A példa további jellegzetessége, hogy az egyes projektek mind lineáris szerkezetűek, vagyis a tervezési, a kivitelezési és az ellenőrzési fázisok ebben az időrendben követik egymást. Bár a modell egy-egy tevékenységhez több erőforrást is megenged hozzárendelni, az alkalmazási példában ezt a lehetőséget nem használtuk ki. Ez jelentősen leegyszerűsíti a tevékenységek leírását, hiszen az 1. táblázatban az $RH^1$ értékek a tervezési fázishoz, az $RS^1$ értékek a kivitelezéshez, az $RS^2$ értékek pedig az ellenőrzéshez tartoznak. Ebből az is következik, hogy minden egyes tevékenységhez pontosan egyféle erőforrást kell hozzárendelni. A példában szereplő egyes projektek is három fő típusba sorolhatóak, bár általában az adott problémák méretétől és a bonyolultsági fokától függően jelentős átfedések fordulhatnak elő:

1. *Funkció bővítés.* Az ilyen projektekre alapos tervezés a jellemző, hiszen egy meglévő rendszert kell új funkcionalitással ellátni. A programozói munka általában közepes időigényű, ami azzal magyarázható, hogy már meglévő eszközökkel dolgozhatnak tovább. A tesztelési fázis viszonylag hosszabb. A specifikációnak való megfelelésen túl a rendszer többi részének zavartalan működését is ellenőrizni kell.

2. *Hibajavítás.* Itt a tervezési fázis kimarad. A programozói feladatok kevesebb ráfordítást és nagyobb gyorsaságot igényelnek. Az ellenőrzés mindössze a hiba kijavítására terjed ki.

3. *Átfogó ellenőrzés.* Ezt a munkát a tesztelők végzik. Egyik formájában időről időre ellenőrzik az alapfunkciók helyes működését, másik formájában egy-egy területet tüzetes vizsgálat alá vesznek.




(a) Kapcsolatokkal kiegészített Gantt diagram

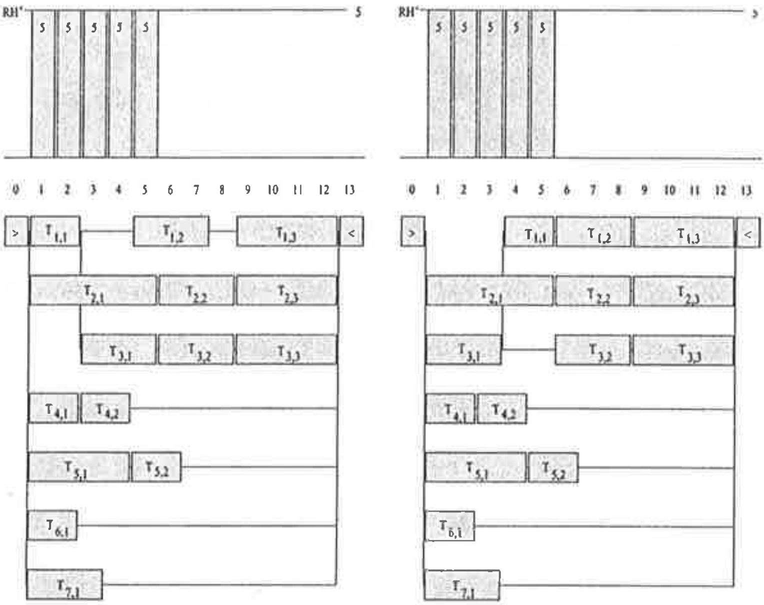
(b) Az RH erőforráshoz tartozó keresési fa

*1. ábra.* Tevékenységi diagram

Az 1. ábrán a projekteket AON (Activity-On-Node) formában ábrázoltuk [2]. Ebből leolvashatjuk, hogy az erőforrás korlátok figyelembe vétele nélkül legkevesebb 12 nap alatt végezhető el minden feladat. Ilyen határidők mellet az összes lehetséges ütemezések halmazának elemszáma 27 720 000. Amennyiben a határidőt egy nappal meghosszabbítjuk, úgy a lehetséges ütemezések száma 731 808 000-ra nő. Ez a két számadat is jól érzékelteti, hogy a feladat megoldása közel nem triviális.

A feladat speciális szerkezetének köszönhetően az $RH^1$ erőforrásra nézve elfogadható ütemezések halmazát előállító keresési fa összesen három csomópontot tartalmaz, az eredményül adódó, elfogadható ütemezési osztályok száma kettő. A *2. ábra* ezen két osztály egy-egy reprezentáns ütmezését ábrázolja. A diagramok alatt az osztályokhoz tartozó minimális összeférhetetlenségi halmaz kétféle feloldását tüntettük fel. Ezzel az algoritmus első fázisának végére értünk.

A második fázisban az alapfeladatot kiegészítettük az esethez tartozó $H_a$ illetve $H_b$ közvetlen megelőzési relációval. Az első megoldás esetében a $T_{1,1} \rightarrow T_{3,1}$, míg a második megoldás estén a $T_{3,1} \rightarrow T_{1,1}$ szabályok hozzáadása biztosítja, hogy a módosított feladatok lehetséges megoldásai egyben az eredeti feladat elfogadható megoldásai legyenek. A következő lépés tehát a módosított feladatok $RS^1$ és $RS^2$ erőforrásokra vonatkozó hatékony, lehetséges megoldásainak meghatározása. Az (a) esetben a lehetséges ütemezések tere 1 386 000 elemből áll, amelynél a megoldásokat előállító keresési fa 282 csomópontot tartalmaz. A (b) esetben ugyanez az érték 831 600 illetve 150 volt. Az esetekhez tartozó Pareto optimális megoldásokat a *3. ábra* szemlélteti.

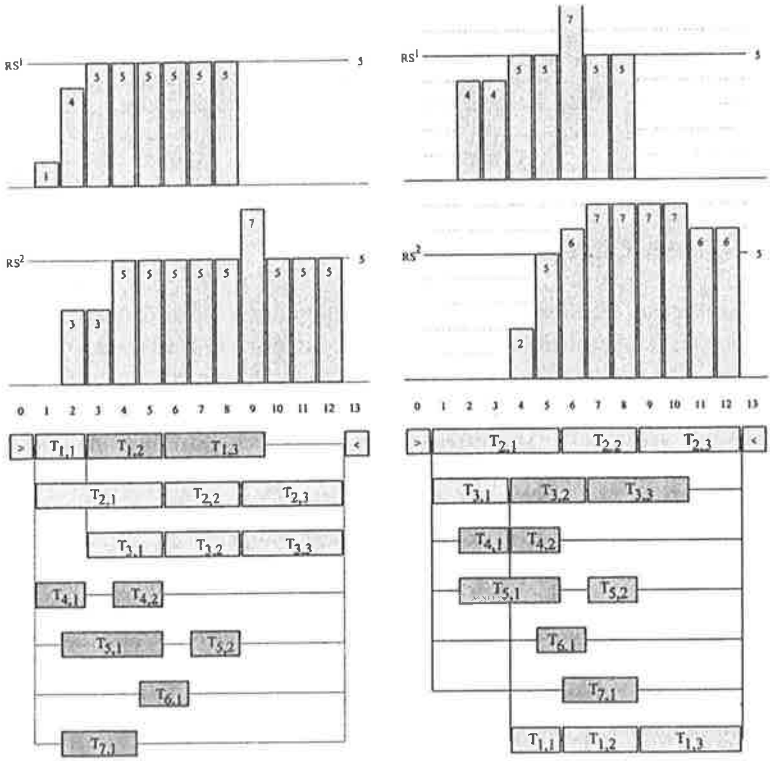


(a) eset $H_a = \{T_{1,1} \to T_{3,1}\}$ (b) eset $H_b = \{T_{3,1} \to T_{1,1}\}$

*2. ábra.* Elfogadható ütemezések

A minta példában szerencsés módon egyetlen megoldást kaptunk. Más feladatok esetén azonban többféle ütemezés is kielégítheti a Pareto optimum feltételeit. Ezek száma esetleg akkora lehet, hogy már az algoritmus első fázisában szelektálni kell az elfogadható ütemezések között. Ráadásul a valóságban ezen hatékony megoldások közül csak egy ütemezés realizálható. Ilyen döntési helyzetekben általában számos egyéb, nehezen megfogalmazható és modellezhető tényező játszik szerepet. Példánkban a döntéshozatal során az eddig szimmetrikus szerepet betöltő, gyengén korlátos erőforrások között most különbséget tehetnénk. Az $RS^1$ programozói erőforrás bővítése viszonylag magas indulási költséget és hosszabb betanítási időt igényel. Az $RS^2$ tesztelői erőforrás esetében az előző problémák egyike sem jelentkezik. Ennek figyelembe vételével azt a hatékony megoldás szerinti optimális ütemezést érdemes választani, ahol a pótlólagos erőforrások költségei minimálisak.

A feladat egészét tekintve azonban a két ütemezéshez tartozó célfüggvény értékek —az $MU^1$ kivételével— megegyeznek. Mivel az (a) megoldás szerinti ütemezés a domináns, ezért ez az egyedüli Pareto optimum, és mint ilyen egyben az optimum is. Ennek ismeretében az algoritmusunkat jelentősen gyorsíthattuk volna, ha a két esethez tartozó ütemezéseket egy közös keresési fával oldjuk meg.



(a) eset

$MU^1 = 5, IT^1 = 0$
$MU^2 = 7, IT^2 = 0$

(b) eset

$MU^1 = 7, IT^1 = 0$
$MU^2 = 7, IT^2 = 0$

*3. ábra.* Optimális megoldások

A bemutatott példa mindössze hét kisebb projektet tartalmaz, mégis a megvizsgálandó ütemezések terének elemszáma jelentős. Az algoritmus gyorsaságát a két fázis során használt leszámlálási módszerek határozzák meg. Ez a kritikus faktor további vizsgálat tárgyát képezheti, hiszen nem elegendő egy elfogadható ütemezés előállítása, hanem az összes ilyen ütemezést meg kell keresni.

Az algoritmus számítógépes megvalósítása Visual Basic 6.0 keretrendszerrel történt [14]. A gyorsaság szempontjából lényeges kódrészek C++ nyelven íródtak, és DLL állományként álltak a rendelkezésre. A mérési eredmények egy Pentium 166 MHz processzorral felszerelt számítógépen történt futtatásból származnak.

| Algoritmus fázisa | Lehetséges ütemezések száma | Keresési fa csomópontjainak száma | Futási idő (mp) |
|---|---|---|---|
| 1. fázis | 27 720 000 | 3 | 0.150 |
| 2. fázis (a) eset | 1 386 000 | 282 | 1.382 |
| 2. fázis (b) eset | 831 600 | 150 | 0.621 |

2. táblázat. Futási eredmények

# 5 Összefoglalás

A dolgozat során ismertetett több projektes modell újszerűsége abban rejlik, hogy képes egymástól eltérő tulajdonságú, korlátos erőforrások ütemezésére. Az erősen illetve gyengén korlátos erőforrások bevezetésével számos eddig nehezen modellezhető probléma vált kezelhetővé. Egy ilyen —a szoftverfejlesztésből származó— mintafeladat egzakt megoldásainak megkeresésén keresztül bemutattuk a 3. részben definiált algoritmust használhatóságát.

A gyakorlati alkalmazások során felmerült annak az igénye, hogy a modellt kiegészítsük az egyes projektek befejezési határidejeivel is. Az $i$-edik projekt jellemzésére használt vektort ekkor egy újabb $E_i$ értékkel kell kiegészíteni. A dolgozatban vázolt modell erre az esetre is alkalmazható, ha minden határidős projektet kiegészítünk egy olyan erőforrást nem igénylő $T_{i,n_i+1}$ „üres" projekttel, amely időigénye $D_{i,n_i+1} = E(S) - E_i$ .

Az illusztrált számadatok is alátámasztják, hogy nagyobb feladatok esetén az egzakt megoldások megkeresése nem kivitelezhető [11], hiszen a leszámlálás időigénye exponenciálisan növekszik. A feladat szerkezetének legjobban megfelelő keresési heurisztikák további vizsgálat tárgyát képezhetik.

## Irodalom

1. S. Tsubakitani, R. F. Deckro: A heuristic for multi-project scheduling with limited resources in the housing industry. *Eur. J. of Operational Research* 49 [1990.] p80-91
2. S. E. Elmaghraby: Activity nets: A guided tour through some recent developments *Eur. J. of Operational Research* 82 [1995.] p383-408
3. V. Shankar, R. Nagi: A flexible optimization approach to multi-resource, multi-project planning and scheduling. *5th Industrial Engineering Research Conference*, Minneapolis, MN [1996] p263-267
4. Gy. Csébfalvi, P. Konstantinidis: Egy implicit leszámláláson alapuló új erőforrás kiegyenlítő eljárás. *Szigma* XXIX. [1998.] p43-52
5. Moreno Muffatto: Reorganizing for product development: Evidence from Japanese automobile firms. *Int. J. Production Economics* 56-57 [1998.] p483-493
6. G. Csébfalvi, P. Konstantinidis: A new exact resource balancing procedure for the multiple resource-constrained project scheduling problem *Proc. APMOD '98 Extended Abstracts*, Limasol, Cyprus, 11-13 March, 1998
7. G. Csébfalvi: A fast exact solution procedure for the multiple resource-constrained project scheduling problem. *Proc. APMOD '98 Extended Abstracts*, Limasol, Cyprus, 11-13 March, 1998)

8. B. D. Reyck, W. Herroelen: The multi-mode resource-constrained project scheduling problem with generalized precedence relations *Eur. J. of Operational Research* 119 [1999.] p538-556
9. G. Csébfalvi: Egy optimális erőforrás kiegyenlítő eljárás tevékenységi hálókra. *Új utak a magyar operációkutatásban*, tanulmánykötet, szerkesztők: Komlósi S. és Szántai T., Dialóg Campus, [1999]
10. Gy. Csébfalvi, P. Konstantinidis: A new resource leveling procedure for the multiple resource-constrained project scheduling problem. *Decision Sciences Institute 5th International Conference*, Athens, Greece [1999.] p1723-1725
11. A. Lova, C. Maroto, P. Tormos: A multicriteria heuristic method to improve resource allocation in multiproject scheduling *Eur. J. of Operational Research* 127 [2000.] p408-424
12. G. Csébfalvi: A new multi-criteria resource leveling procedure for the multiple resource-constrained project scheduling problem *Proc. EURO XVII*, [2000] megjelenés alatt
13. M. R. Zamani: A high-performance exact method for the resource-constrained project scheduling problem *Computer & Operations Research* 28 [2001] p1387-1401
14. G. Csébfalvi: *Optimális erőforrás kiegyenlítő modellek tevékenységi hálókra* (Habilitációs értekezés, PTE [2001] Pécs 120p)

## EXACT RESOURCE-CONSTRAINED SCHEDULING IN SOFTWARE DEVELOPMENT

In this paper we present a new resource allocation model with hard and soft resource constraints for software development projects. By definition, a hard resource constraint is not resolvable within the given planing horizon, but a soft resource conflict may be managed by a flexible "hiring-firing" strategy. This multi-criteria, multi-project, multi-resource allocation model can be applied to solve small or medium sized real problems even outside of the software development area. According to the definition, an implicit enumeration algorithm is stated that consist of two phases. First a makespan-minimization is applied for the hard resources, than a set of soft resource balancing problem is constructed on the hard resource feasible set of schedules. The practical interpretation of the proposed model is demonstrated in an analysis of a small-scale business software development environment. In this example we exploited the fact that in case of small-scale development the usual iterative "waterfall" structure might be replaced by a serial "designer-programmer-tester" chain.

# ENTRÓPIASZERŰ PROXIMÁLIS PONT MÓDSZER ALKALMAZÁSA A VALÓSZÍNŰSÉGGEL KORLÁTOZOTT LINEÁRIS PROGRAMOZÁSI FELADAT MEGOLDÁSÁBAN[1]

KOMÁROMI ÉVA
*BKÁE Operációkutatás Tanszék*

A következő feladatot vizsgáljuk: $ux \to \min, x \in X = \{x: \ F(x) \geq p\}$, ahol az $F$ többdimenziós folytonos valószínűségi eloszlásfüggvény és adottak az $u > 0$, $u \in R^m$, és a $0 < p < 1$ megbízhatósági szint. Megmutatjuk, hogy e feladat a valószínűséggel korlátozott lineáris programozási feladat duálisának célfüggvényében jelenik meg. Elemezzük a feladat viselkedését az adott paraméterek függvényében. Megoldására proximális pont algoritmust mutatunk be, amelyben a kvadratikus eltéréstag helyett egy Csiszár által bevezetett $\varphi$-divergencia függvényt alkalmazunk. Bizonyítjuk az algoritmus konvergenciáját.

## 1 Bevezetés

A dolgozatban a következő feladatot vizsgáljuk:

$$
\begin{array}{llll}
(P) & ux & \to & \min \\
 & x & \in & X = \{x: \ F(x) \geq p\}
\end{array}
$$

ahol $F$ $m$-dimenziós valószínűségi eloszlásfüggvény, $u \in R^m$ adott pozitív vektor, $0 < p < 1$ , az $x$ vektor tartalmazza a döntési változókat.

E feladat választását az motiválja, hogy $(P)$ megjelenik a következő sztochasztikus programozási probléma célfüggvényében:

$$
\begin{array}{llll}
(DD) \displaystyle\min_{P(x \geq \beta) \geq p} & ux + vb & \to & \max \\
 & uA + vB & = & c, \quad u \geq 0, \ v \geq 0
\end{array}
$$

ahol adottak a $\beta$ $m$-dimenziós valószínűségi változó vektor folytonos együttes $F$ eloszlásfüggvénnyel, az $A$ és $B$ $m \times n$ ill. $r \times n$-dimenziós determinisztikus mátrixok, a $c$ $n$-dimenziós, $b$ $k-$dimenziós vektorok és a $0 < p < 1$ megbízhatósági szint; $(u, v) \in R^{m+r}$ a döntési vektor. $P$ valószínűséget jelöl, $P(x \geq \beta) = F(x)$ az eloszlásfüggvény definíciója szerint, ha $F$ folytonos.

$(DD)$ a lineáris programozási koncepció kiterjesztése. E feladatban a célfüggvény együtthatók egy részét a $\beta$ valószínűségi változó vektor foglalja

[1]Beérkezett: 2001. december 2. E-mail: konaromi@bkae.hu. A dolgozat az FKFP 0231 program támogatásával készült.

magában, amelynek komponensei valamely előnyös tulajdonság (profit, árbevétel stb.) előre nem ismert fajlagos értékeit jelentik. Egy $(u, v)$ lehetséges megoldásra a célfüggvény értéke a legrosszabb esetben $\min_{P(x \geq \beta) \geq p} ux + vb$, ha $\beta$ legalább az előírt $p$ valószínűséggel veszi fel értékét. A célfüggvény tehát a profit, árbevétel, stb. legkisebb feltételezett értékét képviseli. Így a feladatunk interpretálható úgy, hogy maximalizálni szeretnénk e legkisebb értéket (a profit, stb. kapcsolódó értékét a legrosszabb esetben) a lineáris feltételek által meghatározott lehetséges megoldások halmazán.

Látni fogjuk, hogy $(DD)$ egyúttal duálisa az alábbi valószínűséggel korlátozott lineáris programozási feladatnak:

$$\begin{array}{rrcl} (PP) & cz & \to & \min \\ & P(Az & \geq & \beta) \geq p, \ Bz \geq b \end{array}$$

ahol adottak, mint a $(DD)$ feladat leírásánál, az $A$ és $B$ determinisztikus mátrixok, $c$ és $b$ determinisztikus vektorok, a $\beta$ $m$-dimenziós valószínűségi változó vektor ismert együttes eloszlásfüggvénnyel, a $p$ megbízhatósági szint, $0 < p < 1$, a $z$ $n$-dimenziós döntési vektor, $P$ valószínűséget jelöl.

E feladat eredeti megfogalmazása Charnes és Cooper (1959) nevéhez fűződik, akik minden feltételhez egyenként írtak elő megbízhatósági szintet és megmutatták, hogy a feladat felírható ekvivalens lineáris program formájában. E koncepciót Miller és Wagner (1965) kiterjesztették együttes valószínűségi feltételre, ám a $\beta$ komponenseiről feltették, hogy függetlenek. Itt bemutatott általános formájában a problémát Prékopa (1973) fogalmazta meg először. Prékopa logaritmikusan konkáv eloszlásfüggvényekre vonatkozó eredményei (1973) garantálják a feladat konvexitását az eloszlásfüggvények széles körére, beleértve a többdimenziós normális eloszlást is.

E feladat is kiterjesztése a lineáris programozási koncepciónak. Ha a jobb oldalon szereplő paraméterek egy része (pl. a termékek iránti jövőbeni kereslet, stb.) előre nem ismert, akkor a feladat megoldására a lineáris programozási modell nem alkalmas. Ha azonban e paraméterek valószínűségi változók ismert együttes eloszlással, akkor a lineáris programozási modellezésben alkalmazott megfontolásokhoz igazodóan azt írhatjuk elő, hogy az eredeti lineáris feltételeket a döntési változók legalább előre megadott $p$ valószínűséggel elégítsék ki és ezen előírás teljesülése mellett legyen a $cz$ célfüggvény maximális. Vegyük észre, hogy a $(P)$ feladat a valószínűséggel korlátozott lineáris programozási feladat legegyszerűbb esetének tekinthető, annak az esetnek, amikor $A$ az egységmátrix és $B$ ill $b$ elemei azonosan nullák.

A $(PP)$ feladat megoldása konvexitás megléte esetén is nagy körültekintést igényel. Mayer (1998) könyvében az általa alkalmazott konvex programozási algoritmusokról és azoknak a $(PP)$ feladatra történő számítógépes implementációiról számol be. A többdimenziós eloszlásfüggvény értékeinek kiszámításáról az érdeklődő olvasónak Deák (1990) és Szántai (1988) munkáit ajánljuk. Komáromi (1986) a $(PP)$ feladat duális feladatát a $(DD)$ feladatban fogalmazta meg és kifejlesztett egy prímál-duál tipusú algoritmust, amely a két feladatot egyidejűleg oldja meg. Ez az algoritmus minden iterációban igényli a $(P)$ feladat megoldását.

A $(PP)$ duálisa a következőképpen származtatható. A $P(Az \geq \beta) \geq p$ valószínűségi feltétel a valószínűség monotonitása miatt így írható fel:

$$Az \geq x, \quad F(x) \geq p, \quad x \in \operatorname{supp} F,$$

ahol $F$ a $\beta$ együttes eloszlásfüggvénye, supp $F$ az $F$ eloszlásfüggvény tartója (az $R^m$ azon részhalmaza, amelynek az $F$ függvény által meghatározott valószínűségi mértéke 1), $x$ pedig $m$-komponensű változó vektor. Ekkor a $(PP)$ feladat determinisztikus ekvivalens megfogalmazását kapjuk a

$$\begin{array}{ll} (PP1) & \min_{Az\geq x, Bz\geq b} cz \to \min \\ & x \in X = \{x : F(x) \geq p, x \in \operatorname{supp} F\} \end{array}$$

feladat formájában. A $\min_{Az\geq x, Bz\geq b} cz$ célfüggvény értéke egy $x$ helyen maga egy lineáris programozási feladat optimális értéke, amely ha létezik, egyenlő duálisának optimális értékével, feltéve, hogy e duális lehetséges megoldásainak tartománya, a $V = \{u, v : uA + vB = c, u, v \geq 0\}$ poliedrikus halmaz nemüres. Tegyük fel tehát, hogy $V \neq \emptyset$. Ekkor $(PP1)$ ekvivalens, a lineáris programozás dualitási tétele értelmében, a

$$\begin{array}{l} \max_{uA+vB=c; u,v\geq 0} (ux + vb) \to \min \\ x \in X \end{array}$$

feladattal és fennáll, hogy a két feladat célfüggvényértéke egyenlő minden olyan $x$ pontra, amelyre az $ux + vb$ felülről korlátos a $V$ halmazon. A szokásoknak megfelelően $\min_{Az\geq x, Bz\geq b} cz = +\infty$, ha $\{z : Az \geq x, Bz \geq b\} = \emptyset$. Figyelembe véve, hogy a

$$\min_{x\in X} \{\max_{(u,v)\in V} (ux + vb)\} \geq \max_{(u,v)\in V} \{\min_{x\in X} (ux + vb)\}$$

egyenlőtlenség mindig fennáll, a $(PP)$ feladat duálisát az alábbi feladatban találjuk meg:

$$\begin{array}{lcl} \min\limits_{F(x)\geq p; x\in \operatorname{supp} F} (ux) + vb & \to & \max \\ (u, v) & \in & V = \{u, v : uA + vB = c;\ u, v \geq 0\}, \end{array}$$

amely a fent leírt $(DD)$ feladattal ekvivalens, ha supp $F = R^m$.

A két feladatot az itt következő dualitási tétel kapcsolja össze (Komáromi, 1986).

**Tétel.** *(a) Ha az $ux + vb$ függvénynek van $((\widehat{u}, \widehat{v}), \widehat{x})$ nyeregpontja a $V$ halmazon történő maximalizálásra és az $X$ halmazon történő minimalizálásra nézve, akkor $\widehat{x}$ optimális megoldása a $(PP1)$ feladatnak.*

*(b) Legyen $F$ kvázikonkáv és $\widehat{x}$ optimális megoldása a $(PP1)$ feladatnak. Ha az $\{x \in X : \exists y : Ay \geq x, By \geq b\}$ halmaznak van belső pontja, akkor létezik olyan $(u', v') \in V$, hogy $((u', v'), \widehat{x})$ nyeregpontja az $ux+vb$ függvénynek a $V$ halmazon történő maximalizálásra és az $X$ halmazon történő minimalizálásra nézve.*

A $(P)$ feladat vizsgálata és megoldása tehát hozzájárul a $(PP)$ valószínűséggel korlátozott lineáris programozási feladat és duálisa, a $(DD)$ sztochasztikus programozási feladat hatékony megoldásához.

A $(P)$ feladat megoldására proximális pont módszert alkalmazunk.

E módszer (fő állomásairól ld. Martinet 1970, Rockafellar 1976 dolgozatokat) egy az $n$-dimenziós lineáris téren értelmezett konvex $f$ függvény minimalizálására szolgál. A belsőpontos módszerek körébe tartozik, lényege az, hogy egy $x_0$ közelítő megoldásból kiindulva olyan $\{x_k\}$ sorozatot generál, amelynek $k-$dik eleme a szigorúan konvex $f(x) + \frac{1}{2c_k}|x - x_{k-1}|^2$ függvényt minimalizálja, ahol $\{c_k\}$ alkalmasan választott pozitív sorozat. A proximális pont módszert Teboulle (1992) oly módon alakította át, hogy a kvadratikus eltéréstag helyett egy „entrópiaszerű" eltéréstagot alkalmazott. Bemutatta, hogy az így származtatott entrópiaszerű proximális pont algoritmus egy egységesítő keretnek tekinthető abban az értelemben, hogy közéjük tartozik, az alkalmazott eltérésfüggvényeknek megfelelően, az ismert konvex programozási algoritmusok közül az exponenciális Lagrange szorzó módszer (Bertsekas, 1982), Polyak módosított barrier módszere és a Caroll féle módosított barrier módszer (Polyak, 1992) is.

Az entrópiaszerű eltérésfüggvények körébe két függvénycsaládot szoktak sorolni. Az egyik a Csiszár (1967) által bevezetett $\varphi$ -divergencia függvénycsalád. Ez a következő: Ha adott a pozitív félegyenesen értelmezett $\varphi$ függvény, az $x$ pozitív $n$-dimenziós vektornak az $y$ pozitív $n$-dimenziós vektortól való eltérését —a $\varphi$-divergenciát— az alábbi entrópia-függvénnyel definiáljuk:

$$d_\varphi(x, y) = \sum_{j=1}^{n} y_j \varphi\left(\frac{x_j}{y_j}\right)$$

A pozitív számegyenesen értelmezett olyan szigorúan konvex $\varphi$ esetén, amelyre $\varphi(1) = 0$ és $\varphi'(1) = 0$, a $d_\varphi$ függvény nemnegatív és 0 csak akkor, ha $x = y$; de $d_\varphi$ általában nem teljesíti a távolságfüggvényre előírt háromszög-egyenlőtlenséget és nem szimmetrikus. Az *entrópia* terminológia abból származik, hogy ha speciálisan $\varphi(t) = t\ln t - t + 1$, akkor

$$d_\varphi(x, y) = \sum_{j=1}^{n} y_j \left[\left(\frac{x_j}{y_j}\right)\ln\left(\frac{x_j}{y_j}\right) - \left(\frac{x_j}{y_j}\right) + 1\right] = \sum_{j=1}^{n}\left[x_j \ln\left(\frac{x_j}{y_j}\right) - x_j + y_j\right],$$

amely éppen a Kullback-Leibler relatív entrópia.

A másik a Bregman-féle (1967) eltérésfüggvény család. Tekintsünk egy az $R^n$-n értelmezett szigorúan konvex differenciálható $\psi$ függvényt. Az $x$ $n$-dimenziós vektornak az $y$ $n$-dimenziós vektortól való eltérését az alábbi függvénnyel definiáljuk:

$$D_\psi(x, y) = \psi(x) - \psi(y) - \nabla\psi(y)(x - y).$$

Minthogy $\psi$ szigorúan konvex, ezért $D_\psi$ nemnegatív és 0 csak akkor, ha $x = y$.

Csiszár a (1991) dolgozatában a lineáris inverz problémák (pl. képfelismerés) szempontjából fontos tulajdonságok szerint vizsgálja, csoportosítja és azonosítja az eltérésfüggvényeket és ily módon a két entrópia-függvény családot axiomatikusan vezeti be.

A $\varphi$ illetve $\psi$ függvény különböző választásaival eljutunk a statisztikában ismert jónéhány eltérésfüggvényhez. Ha például $\varphi(t) = (1 - \sqrt{t})^2$, akkor $d_\varphi$ a Hellinger távolság lesz. Ha $\psi(x) = -\ln x$, akkor $D_\psi$ a Burg-féle entrópiához vezet. Számítógépes kísérleteinkben a $\varphi(t) = -\ln t + t - 1$ függvényt alkalmaztuk.

Az, hogy a proximális pont módszerben szereplő kvadratikus tag helyére egy $\varphi$-divergencia függvény kerül, biztosítja, hogy az algoritmus automatikusan pozitív $x_k$ sorozatot generál. Teboulle bizonyította az algoritmus konvergenciáját a minimalizálandó konvex függvényre és az alkalmazott eltérésfüggvényre vonatkozó, az általánosság miatt kissé rigorózus feltevések mellett.

A következő részben a $(P)$ feladat tulajdonságait vizsgáljuk abban az esetben, amikor $F$ az $m$-dimenziós vektortéren értelmezett folytonosan differenciálható szigorúan logaritmikusan konkáv eloszlásfüggvény. Ezután, a harmadik részben, algoritmust ajánlunk a feladat megoldására oly módon, hogy a feladat Lagrange függvénye nyeregpontjának meghatározására az entrópiaszerű proximális pont módszert alkalmazzuk és az eltérésfüggvényt a $\varphi(t) = -\ln t + t - 1$ függvény generálja. Az utolsó részben bizonyítjuk az algoritmus konvergenciáját. Hangsúlyozzuk azonban, hogy mind az iterációs séma, mind a bizonyítások gondolatmenete tetszőleges Csiszár-féle $\varphi$-divergencia függvényre változtatás nélkül alkalmazható, ha fennáll, hogy $\varphi$ a $(0, 1)$ félegyenesen értelmezett szigorúan konvex, folytonosan differenciálható függvény, $\varphi(1) = \varphi'(1) = 0, \lim_{t\to 0} \varphi'(t) = -\infty$. Annak az oka, hogy a tárgyalást korlátoztuk a $\varphi(t) = -\ln t + t - 1$ függvény esetére az, hogy az algoritmus koncepciójára szerettünk volna koncentrálni és elkerülni azt, hogy újabb konvex analízisbeli fogalmak részletezése elvegye az olvasó kedvét e szellemes, és konvex programozási feladatok megoldására általában is jól használható módszertől.

## 2 A $(P)$ feladat tulajdonságai

Ha supp $F$ felülről korlátos, akkor a lehetséges megoldások halmaza korlátos. A feladatot általánosabb formájában vizsgáljuk tehát azzal, hogy feltesszük, hogy supp $F = R^m$. Az alábbiakban azt is feltesszük, hogy az $F$ eloszlásfüggvény szigorúan logaritmikusan konkáv és folytonosan differenciálható a supp $F$ belsejében. Ez maga után vonja, hogy $F$ minden komponensének szigorúan növekvő függvénye. Feltesszük továbbá, hogy $u > 0$, $0 < p < 1$.

A logaritmus szigorúan növekvő függvény volta miatt a $(P)$ feladatot a következő ekvivalens és egyben klasszikus konvex minimalizációs formában vizsgálhatjuk:

$$(P) \qquad ux \;\rightarrow\; \min$$

$$x \quad \in \quad X = \left\{ x \in R^m : \ln \frac{p}{F(x)} \leq 0 \right\}.$$

A lehetséges megoldások $X$ halmaza korlátos alulról abban az értelemben, hogy létezik olyan $w \in R^m$, hogy $x \in X$ maga után vonja, hogy $x \geq w$ - pl. $w_i = \arg\{F_i(x_i) = p\}, (i = 1, \ldots, m)$ választás mellett, ahol $F_i$ az $i$-edik marginális eloszlás, ez az egyenlőtlenség fennáll. Így minden pozitív $u$ mellett $ux$ alulról korlátos az $X$ halmazon. Mivel $X$ zárt az $F$ folytonossága miatt, ezért $(P)$-nek van optimális megoldása, és ez a megoldás egyetlen a $\ln F$ szigorú konkávitása miatt. A szereplő függvények konvexek és differenciálhatók.

A feladat tulajdonságait összefoglaljuk az alábbi lemmákban.

**1. Lemma.** *Az $ux$ lineáris célfüggvény felveszi a minimális értékét a feltételi halmaz egyetlen pontjában.* □

A következő lemmákban $\widehat{x} = \arg\min_{x \in X} ux$.

**2. Lemma.** *A $p$ választása miatt a $\ln \frac{p}{F(x)} \leq 0$ feltétel kielégíti a Slater feltételt: létezik olyan $x'$ $m$-dimenziós vektor, amelyre* $\ln p - \ln F(x') < 0$. □

Tekintsük a $(P)$ feladathoz tartozó Kuhn-Tucker feladatot:

$$(K-T) \qquad \begin{array}{lll} u_i = \delta \frac{1}{F(x)} \frac{\partial F(x)}{\partial x_i} & & (i = 1, \ldots, m) \\ \delta \geq 0, x \in R^m, & F(x) \geq p, & \delta(\ln p - \ln F(x)) = 0. \end{array}$$

**3. Lemma.** *Létezik olyan $\widehat{\delta} \in R$, hogy $\widehat{\delta}$ és $\widehat{x}$ megoldják a $(K-T)$ feladatot.*

Az állítás következik az 1. és 2. Lemmából a Kuhn-Tucker optimalitási tétel értelmében (ld. Mangasarian, 1969). □

**4. Lemma.** $\widehat{\delta} > 0$, *egyetlen és* $F(\widehat{x}) = p$.

Mivel $\ln F$ parciális deriváltjai pozitívok a függvény szigorúan növekvő volta miatt és mivel $u > 0$, ezért $\widehat{\delta} > 0$. Így az utolsó, az egyensúlyi feltétel miatt $F(\widehat{x}) = p$. □

**5. Lemma.** *A $(P)$ feladat optimális célfüggvényértéke* $\ln p$ *szigorúan konvex, szigorúan növekvő függvénye.*

*Bizonyítás.* A konvexitást belátjuk. Legyen ugyanis $x' = \arg\min_{F(x) \geq p'} ux$, $x'' = \arg\min_{F(x) \geq p''} ux$, $x_\lambda = \arg\min_{F(x) \geq p(\lambda)} ux$, ahol $0 < p' < 1$, $0 < p'' < 1, 0 < \lambda < 1$, $\ln p(\lambda) = \lambda \ln p' + (1-\lambda) \ln p''$. Ekkor $\ln F$ szigorú konkávitása miatt

$$\ln F(\lambda x' + (1-\lambda)x'') > \lambda \ln F(x') + (1-\lambda) \ln F(x'') = \lambda \ln p' + (1-\lambda) \ln p'' = \ln p(\lambda).$$

De $x_\lambda$ jelentése miatt $ux_\lambda < u(\lambda x' + (1-\lambda)x'') = \lambda ux' + (1-\lambda)ux''$, és ez az, amit bizonyítani akartunk.

A második állítás nyilvánvalóan következik abból, hogy $F(\widehat{x}) = p$, $F$ minden komponensének szigorúan növekvő függvénye és $u > 0$. □

A bevezetőben a $(P)$ feladat fontosságát azzal indokoltuk, hogy a $(DD)$ sztochasztikus programozási feladat (a $(PP)$ duálisa) célfüggvényében megjelenik a nemnegatív $u$ vektorokon értelmezett $\min_{F(x)\geq p} ux$ függvény. Hogy ez a motiváció meggyőző legyen, definiálnunk kell e függvényt minden nemnegatív, nemnulla $u$ vektorra.

Jelöljük $(P)$ optimális megoldását mint $u$ függvényét $x(u)$-val és az optimális függvényértéket $ux(u)$-val. A valószínűségelméletből tudjuk, hogy az $F$ parciális deriváltja és az $i$. változója szerinti feltételes eloszlásfüggvénye között fennáll az alábbi összefüggés:

$$\frac{\partial F(x_1,\ldots,x_m)}{\partial x_i} = F(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_m \mid x_i)\cdot f_i(x_i),$$

ahol $f_i$ a $\beta_i$ sűrűségfüggvénye. Ez az összefüggés maga után vonja, hogy

$$x_i(u) \to \infty, \quad \text{ha } u_i \to 0.$$

Definiáljuk $x(u)$-t tetszőleges $u \geq 0, u \neq 0$ esetre azzal, hogy vesszük ezt a határértéket.

Az $x(u)$ vektorfüggvény és az $ux(u)$ valós függvény figyelemre méltó tulajdonságokkal rendelkezik. A következő állításban ezeket foglaljuk össze. Az állítás kissé részletezőbb bizonyítása a (Komáromi 1986) dolgozatban megtalálható.

**6. Lemma.** *Tegyük fel, hogy* $\ln F$ *szigorúan konkáv és minden komponensének szigorúan növekvő függvénye. Ekkor*

*(a) A $(P)$ optimális $x(u)$ megoldása folytonos az $\{u : u > 0\}$ halmazon. Ha $\lim_{k\to\infty} u^k = \widehat{u}$ egy $u^1, u^2, \ldots$ sorozatra ( $\widehat{u} \geq 0, \widehat{u} \neq 0, u^k > 0$ minden $k$-ra), akkor $\lim_{k\to\infty} x(u^k) = x(\widehat{u})$.*

*(b) $ux(u)$ folytonos és szigorúan konkáv az $\{u : u \geq 0, u \neq 0\}$ halmazon abban az értelemben, hogy*

$$[\lambda u' + (1-\lambda)u'']x\big(\lambda u' + (1-\lambda)u''\big) > \lambda u' x(u') + (1-\lambda)u'' x(u'')$$

*minden $u' \geq 0, u' \neq 0, u'' \geq 0, u'' \neq 0$, $\frac{u'}{|u'|} \neq \frac{u''}{|u''|}$, $0 < \lambda < 1$ esetén;*

*(c) Az $\{u : u > 0\}$ halmazon $ux(u)$ differenciálható, $\nabla ux(u) = x(u)$.*

*Bizonyítás.* (a) Minden $u > 0$ vektorra az $x(u)$ kielégíti a fenti $(K-T)$ feltételeket, szükségképpen $F(x(u)) = p, \delta > 0$, ténylegesen

$$\delta = p\frac{\sum_{i=1}^m u_i}{\sum_{i=1}^m \frac{\partial F(x(u))}{\partial x_i}}.$$

Ezért a $(K-T)$ feltételek folytonos egy-egy értelmű megfeleltetést képviselnek az $\{x \in R^m : F(x) = p\}$ és az $\{u > 0 : \sum_{i=1}^m u_i = 1\}$ halmazok között azon feltevés mellett, hogy az $F$ függvény folytonosan differenciálható.

(b) Legyen $ux(u)$ értéke 0, ha $u = 0$ és $-\infty$, ha $u \not\geq 0$. Az $ux(u)$ folytonossága következik abból, hogy negatívja a $sup_{F(x)\geq p}(-u)x$ támaszfüggvénynek, mely folytonos (ld. Rockafellar, 1970). Konkávitását pedig az $x(u)$ definíciója vonja maga után: $ux' > ux(u)$ minden $x' \neq x(u)$ esetén.

(c) Definíció szerint egy $t \in R^m$ az $ux(u)$ konkáv függvény szubgradiense az $\widehat{u}$ helyen, ha

$$zx(z) \leq \widehat{u}x(\widehat{u}) + t(z - \widehat{u}) \quad \text{minden} \quad z \geq 0, z \neq 0 \quad \text{esetén} .$$

Rockafellar tétele szerint (1970, 25. fejezet) $ux(u)$ differenciálható $\widehat{u}$-ban és $\nabla \widehat{u}x(\widehat{u}) = x(\widehat{u})$, ha $x(\widehat{u})$ az $ux(u)$ egyetlen szubgradiense $\widehat{u}$-ban. A $t = x(\widehat{u})$ véges, ha $\widehat{u} > 0$, és kielégíti a fenti egyenlőtlenséget, mert bármely $z \geq 0, z \neq 0$ esetén

$$zx(z) - zt \leq \widehat{u}x(\widehat{u}) - \widehat{u}t = 0$$

az $x(z)$ definíciója szerint.

Hogy az állítást belássuk, megmutatjuk, hogy ha $t \neq x(\widehat{u})$, akkor van olyan $z > 0$, hogy

$$zx(z) - zt > \widehat{u}x(\widehat{u}) - \widehat{u}t.$$

Tegyük fel először, hogy $\widehat{u}x(\widehat{u}) - \widehat{u}t = \rho \neq 0$. Válasszuk $z$-t ily módon: $z = \lambda\widehat{u}$, ahol $\lambda > 1$, ha $\rho > 0$, és $0 < \lambda < 1$, ha $\rho < 0$. Figyelembe véve, hogy $x(\lambda\widehat{u}) = x(\widehat{u})$ minden $\lambda > 0$ mellett, azt kapjuk, hogy

$$zx(z) - zt = \lambda[\widehat{u}x(\widehat{u}) - \widehat{u}t] > \widehat{u}x(\widehat{u}) - \widehat{u}t.$$

Tegyük fel most, hogy $\widehat{u}x(\widehat{u}) - \widehat{u}t = 0$. Legyen $I = \{i : x_i(\widehat{u}) - t_i > 0\} \subset \{1, \ldots, m\}$. $I \neq \oslash$, mert $t \neq x(\widehat{u})$ és $\widehat{u} > 0$. Válasszuk a $z > 0$ vektort és $0 < \lambda < 1$-t úgy, hogy

$$\begin{aligned} z_i &= (1 - \lambda)\widehat{u}_i, && \textit{ha } x_i(\widehat{u}) - t_i \leq 0, \\ z_i &= \widehat{u}_i, && \textit{ha } x_i(\widehat{u}) - t_i > 0 \end{aligned}$$

fennálljon és $x_i(z) - t_i$ nemnegatív maradjon, ha $i \in I$. Ilyen $\lambda$ létezik az (a) állításból következően. Akkor fennáll, hogy

$$zx(z) - zt = (1 - \lambda)[\widehat{u}x(z) - \widehat{u}t] + \lambda \sum_{i \in I} \widehat{u}_i[x_i(z) - t_i].$$

De $\widehat{u}x(\widehat{u}) < \widehat{u}x(z)$ és $\sum_{i \in I} \widehat{u}_i[x_i(z) - t_i] \geq 0$ $\lambda$ választása miatt. Így $zx(z) - zt > (1 - \lambda)[\widehat{u}x(\widehat{u}) - \widehat{u}t] = 0$

$$zx(z) - zt > \widehat{u}x(\widehat{u}) - \widehat{u}t$$

Ezzel az állítást beláttuk. □

Tekintsük most a $(P)$ feladat klasszikus duális feladatát (Mangasarian, 1969, 7. fejezet):

$$(D) \qquad \begin{aligned} & ux + \delta(\ln p - \ln F(x)) \to \max \\ & u_i = \delta \frac{1}{F(x)} \frac{\partial F(x)}{\partial x_i} \qquad i = 1, \ldots, m \\ & \delta \geq 0 \end{aligned}$$

A két feladat közötti szoros kapcsolatra világít rá az alábbi lemma (gyenge dualitási tétel):

**7. Lemma.** *Ha $x'$ a $(P)$ feladat, $(\delta'', x'')$ a $(D)$ feladat lehetséges megoldása, akkor teljesül, hogy*

$$ux' \geq ux'' + \delta''(\ln p - \ln F(x''))$$

*és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $x' = x''$* és $F(x') = p$.

*Bizonyítás.* Vegyük észre, hogy

$$ux' = ux'' + u(x' - x'') = ux'' + \delta'' \nabla \ln F(x'')(x' - x'')$$

mert $(\delta'', x'')$ a $(D)$ lehetséges megoldása. De $\ln F(x)$ szigorú konkávitása miatt

$$\nabla \ln F(x'')(x' - x'') \geq \ln F(x') - \ln F(x'')$$

és egyenlő csak akkor, ha $x' = x''$. Így

$$\begin{aligned} ux' &\geq ux'' + \delta''(\ln F(x') - \ln F(x'')) \\ &= ux'' + \delta''(\ln \tfrac{F(x')}{p} - \ln \tfrac{F(x'')}{p}). \end{aligned}$$

Mivel $x'$ lehetséges megoldása $(P)$-nek, ezért $F(x') \geq p$. Vagyis $\delta'' \ln \frac{F(x')}{p} \geq 0$ és mivel $\delta'' > 0$, ezért $\delta'' \ln \frac{F(x')}{p} = 0$ csak akkor, ha $F(x') = p$. Így $ux' \geq ux'' - \delta'' \ln \frac{F(x'')}{p}$ és egyenlőség teljesül csak akkor, ha $x' = x''$ és $F(x') = p$. □

Ebből, a 3. és 4. Lemmákat is figyelembe véve következik az alábbi

**8. Lemma.** *A $(D)$ duális feladatnak létezik egyetlen $(\widehat{\delta}, \widehat{x})$ optimális megoldása, és ebben $\widehat{x}$ a $(P)$ feladatnak is optimális megoldása.* □

Vegyük észre, hogy a $(D)$ tetszőleges lehetséges $(\delta', x')$ megoldására fennáll, hogy egyben optimális megoldása annak a feladatnak, amelynek feltételei a $(D)$ feltételei, célfüggvényében azonban $p$ helyett $p' = F(x')$ szerepel. Ezt is tartalmazza a következő észrevétel.

**9. Lemma.** *Minden adott $\delta' > 0$ esetén van olyan $x'$, hogy $(\delta', x')$ lehetséges megoldása a $(D)$ feladatnak. Az $x'$ egyetlen és $(\delta', x')$ optimális megoldása az*

$$\begin{aligned} & ux + \delta(\ln p' - \ln F(x)) \rightarrow \max \\ & u_i = \delta \frac{1}{F(x)} \frac{\partial F(x)}{\partial x_i} \qquad\qquad i = 1, \ldots, m \\ & \delta \geq 0 \end{aligned}$$

*feladatnak, ahol $p' = F(x')$.* □

A 8. Lemma a $(P)$

$$L(\delta, x) = ux + \delta(\ln p - \ln F(x))$$

Lagrange függvényére nézve a következőt jelenti:

**10. Lemma.** *Az $L(\delta, x) = ux + \delta(\ln p - \ln F(x))$ Lagrange függvénynek egyetlen $(\delta', x')$ nyeregpontja van az $x$-ben $R^m$-en történő minimalizálásra és $\delta$-ban a nemnegatív valós számokon történő maximalizálásra nézve, $\delta' > 0$, $(\delta', x')$ a $(D)$ feladat, $x'$ a $(P)$ feladat optimális megoldása. A* $\min_x\{ux + \delta(\ln p - \ln F(x))\}$ *mint* $\ln p$ *függvénye differenciálható és $\delta'$ az $L(\delta, x)$ nyeregértékének mint* $\ln p$ *függvényének* $\ln p$ *szerinti deriváltja.* □

Ez utóbbi állítás Rockafellar egy tételének (1969, 29.1 Tétel) alkalmazása feladatunkra.

A 9. és 10. Lemmákból következik, hogy minden $0 < p' < 1$ paraméterhez kölcsönösen egyértelműen tartozik egy $\delta'$ érték, és $\delta'$-höz egyértelműen tartozik az az $x'$, amellyel $\delta'$ és $x'$ kielégítik a $(K-T)$ Kuhn-Tucker feltételeket. Konkávitása miatt a $\ln F(x)$ Hesse mátrixa negatív szemidefinit minden $x$ esetén és ha az $x'$ helyen negatív definit, akkor invertálható és így az implicit függvény tétel értelmében $x'$ $\delta'$-nek differenciálható függvénye. Ezt foglalja össze a következő

**11. Lemma.** *Tegyük fel, hogy az* $\ln F(x)$ *függvény $H(x)$ Hesse mátrixa létezik. Adott $\delta' > 0$ esetén egyetlen olyan $x' \in R^m$ létezik, amelyre fennáll, hogy $\frac{u}{\delta'} = \nabla \ln F(x)$. Ekkor $x' = x(\delta') = (\nabla \ln F)^{-1}(\frac{u}{\delta'})$. Ha ezen felül $H(x)$ invertálható az $x' = x(\delta')$ helyen, akkor $x'$ deriválható a $\delta'$ helyen és* $\nabla x(\delta') = -H(x(\delta'))^{-1}\frac{u}{\delta'}$. □

A $(P)$ duálisa $(P)$ Lagrange függvénye segítségével így fogalmazható meg:

$$(D1) \qquad g(\delta) = \min_x L(\delta, x) = \min_x\{ux + \delta(\ln p - \ln F(x))\} \to \max, \qquad \delta \geq 0.$$

A 8. Lemma értelmében $g(\delta)$ felveszi a maximumát a pozitív $\delta$ értékek halmazán. További fontos tulajdonság az alábbi:

**12. Lemma.** *$g(\delta)$ szigorúan konkáv a pozitív $\delta$ értékek halmazán.*

Ezt belátjuk. Legyen $x' = \arg\min_x \{ux + \delta'(\ln p - \ln F(x))\}$, $x'' = \arg\min_x \{ux + \delta''(\ln p - \ln F(x))\}$, $x(\lambda) = \arg\min_x \{ux + (\lambda\delta' + (1 - \lambda)\delta'')(\ln p - \ln F(x))\}$, $0 < \lambda < 1$, $\delta' > 0$, $\delta'' > 0$. Ekkor

$$g(\delta') < ux(\lambda) + \delta'(\ln p - \ln F(x(\lambda))) \quad \text{és} \quad g(\delta'') < ux(\lambda) + \delta''(\ln p - \ln F(x(\lambda))).$$

Így $\lambda g(\delta') + (1 - \lambda)g(\delta'') < ux(\lambda) + (\lambda\delta' + (1 - \lambda)\delta'')(\ln p - \ln F(x(\lambda))) = g(\lambda\delta' + (1 - \lambda)\delta'')$. Ezzel az állítást igazoltuk. □

# 3 Algoritmus a $(P)$ feladat megoldására

Az itt következő algoritmus a $(D1)$ feladat megoldására szolgál, olyan $\widehat{\delta} > 0$ értéket keresünk, amely $g(\delta)$-t maximalizálja. Ekkor $(\widehat{\delta}, \widehat{x})$, ahol $\widehat{x} = \arg\min_{x \in R^m}\{ux + \widehat{\delta}(\ln p - \ln F(x))\}$, a $(D)$ feladat optimális megoldása lesz, és a 8. Lemma értelmében így $\widehat{x}$ a $(P)$ feladat optimális megoldása.

Az algoritmus konstrukciójában elsősorban Teboulle (1992) és Eggermont (1990) eredményeire támaszkodtunk.

Tekintsük a $(P)$ feladat Lagrange függvényének következő „entrópiaszerű kiterjesztését":

$$\begin{aligned} E_{\delta_k}(\delta, x) &= ux + \delta(\ln p - \ln F(x)) - \omega_k^{-1} d_\varphi(\delta, \delta') \\ &= L(\delta, x) - \omega_k^{-1} d_\varphi(\delta, \delta'), \qquad \delta \geq 0,\ x \in R^m, \end{aligned}$$

ahol $\omega_k > 0, \delta_k > 0$ adottak. A továbbiakban $\delta$ és $\delta_k$ eltérését a $\varphi(t) = -\ln t + t - 1$ függvény generálja. Tehát

$$d_\varphi(\delta, \delta_k) = \delta_k(\ln \delta_k - \ln \delta) + \delta - \delta_k.$$

Az algoritmus lényege az, hogy a k. iterációban $\delta_k > 0$ birtokában meghatározzuk $E_{\delta_k}(\delta, x)$ nyeregpontját az $x$-ben az $R^m$ téren történő minimalizálásra és $\delta$-ban a nemnegatív $\delta$ értékeken történő maximalizálásra nézve.

Az eljárás kezdetén választunk egy kiinduló $\delta_0 > 0$ kezdeti értéket és megadjuk azt az $(\underline{\omega}, \overline{\omega})$, $0 < \underline{\omega} < \overline{\omega}$ intervallumot, amelyben az egyes iterációkban az $\omega_k$ $(k = 0, 1, \ldots)$ sorozat elemeit választjuk. Az algoritmus $k$-adik iterációjában meghatározzuk a

$$\delta_{k+1} = \arg\max_{\delta \geq 0} \{g(\delta) - \omega_k^{-1} d(\delta, \delta_k)\} = \arg\max_{\delta \geq 0} \{g(\delta) - \omega_k^{-1}[\delta_k(\ln \delta_k - \ln \delta) + \delta - \delta_k]\}$$

értéket a $\delta_k$ érték ismeretében, ahol $g(\delta) = \min_x L(\delta, x) = \min_x \{ux + \delta(\ln p - \ln F(x))\}$. Ez a következő iterációs sémához vezet:

$x^{k+1}$ az alábbi egyenletrendszer megoldása:

$$(1) \qquad u_i = \frac{\delta_k}{1 + \omega_k \ln \frac{F(x)}{p}} \frac{\partial \ln F(x)}{\partial x_i} \qquad i = 1, \ldots, m,$$

$\delta_{k+1}$ az alábbi értékadás eredménye:

$$(2) \qquad \delta_{k+1} = \frac{\delta_k}{1 + \omega_k \ln \frac{F(x^{k+1})}{p}}$$

Ha $F(x^{k+1}) = p$ (vagy $p$-hez kellően közeli), akkor az eljárás befejeződik: $x^{k+1}$ a $(P)$ feladat optimális megoldása.[2]

[2]Egy megjegyzés erejéig itt hivatkozunk arra a bevezetés végi állításunkra, amely szerint az algoritmus alkalmazható és konvergens a $\varphi$–divergencia függvények széles körére. Amennyiben olyan Csiszár-féle $\varphi$-függvényt alkalmazunk, amely a bevezetőben leírt tulajdonságokkal rendelkezik, akkor mindkét formulában $\frac{\delta_k}{1+\omega_k \ln \frac{F(x^{k+1})}{p}}$ helyett $\delta_k \varphi^{*\prime}(\omega_k \ln \frac{p}{F(x^{k+1})})$ szerepel, ahol $\varphi^*$ a $\varphi$ függvény konjugáltja. Be lehet látni, a $\ln \frac{p}{F(x)} \leq 0$ feltétel ekkor ekvivalens az $\omega_k \varphi^*(\ln \frac{p}{F(x)}) \leq 0$ feltétellel. A $\varphi(t) = -\ln t + t - 1$ konjugáltja, mint könnyen kiszámítható, a $\varphi^*(s) = \ln \frac{1}{1-s})$ függvény, $s \leq 1$.

# 4 Az algoritmus konvergenciájáról

Először azt kell belátnunk, hogy az algoritmus jól definiált, azaz $(x^{k+1}, \delta_{k+1})$ minden iterációban létezik.

**13. Lemma.** *Az (1)-(2) egyenletrendszert megoldó $(x^{k+1}, \delta_{k+1})$ létezik és nyeregpontja az*

$$E_{\delta_k}(\delta, x) = ux + \delta(\ln p - \ln F(x)) - \omega^{-1} d_\varphi(\delta, \delta_k)$$

*függvénynek $\omega = \omega_k > 0$ és $\delta_k > 0$ mellett a $\delta$-ban a nemnegatív számokon történő maximalizálásra és $x$-ben az $R^m$-en történő minimalizálásra nézve.*

*Bizonyítás.* Az $\frac{1}{1+\omega_k \ln \frac{F(x)}{p}} \nabla \ln F(x)$ függvény az $\left\{x : F(x) > pe^{-\omega_k^{-1}}\right\}$ halmazon értelmezett szigorúan konkáv $\ln(1 + \omega_k \ln \frac{F(x)}{p})$ függvény gradiense, amely 0-hoz tart, ha $x \to \infty$, vagyis ha $F(x) \to 1$. A $\ln(1 + \omega_k \ln \frac{F(x)}{p})$ függvény esszenciálisan sima: értelmezési tartománya belsejében folytonosan differenciálható és $\left|\nabla \ln(1 + \omega_k \ln \frac{F(x)}{p})\right| \to +\infty$, ha $x$ az értelmezési tartomány egy határpontjához tart. Ezért $\nabla \ln(1 + \omega_k \ln \frac{F(x)}{p})$ invertálható, ld. Rockafellar (1970). Az $F$ gradiense pozitív. Ezért minden pozitív $\frac{u}{\delta_k}$ vektor esetén van egyetlen olyan $x^{k+1}$, amelyre $\frac{u}{\delta_k} = \nabla \ln(1 + \omega_k \ln \frac{F(x)}{p})$, vagyis olyan $x^{k+1}$, amely kielégíti az (1) feltételeket. Vegyük észre, hogy egyúttal $x^{k+1} = \arg\min_x E_{\delta_k}(\delta_{k+1}, x)$. Végül vegyük észre, hogy $\delta_{k+1}$ maximalizálja az $E_{\delta_k}(\delta, x^{k+1})$ szigorúan konkáv függvényt a $\delta \geq 0$ feltétel mellett. Így $(x^{k+1}, \delta_{k+1})$ az $E_{\delta_k}(\delta, x)$ függvény nyeregpontja. □

Mivel $F(x^{k+1}) > pe^{-\omega_k^{-1}}$, ezért $\delta_{k+1} > 0$. Fontossága miatt ezt külön állításban fogalmazzuk meg.

**14. Lemma.** $\delta_{k+1} > 0$.

**15. Lemma.** *A $g(\delta_k)$ szigorúan növekvő konvergens sorozat.*

*Bizonyítás.* Vegyük figyelembe, hogy

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= \arg\min_x \{ux + \delta_{k+1}(\ln p - \ln F(x))\}, \\ \delta_{k+1} &= \arg\max \left\{\delta(\ln p - \ln F(x_{k+1})) - \omega_k^{-1} d_\varphi(\delta, \delta_k)\right\}. \end{aligned}$$

Vagyis $g(\delta_{k+1}) = ux^{k+1} + \delta_{k+1}(\ln p - \ln F(x^{k+1}))$. Így

$$\begin{aligned} g(\delta_{k+1}) &> ux^{k+1} + \delta_{k+1}(\ln p - \ln F(x^{k+1})) - \omega_k^{-1} d_\varphi(\delta_{k+1}, \delta_k) \\ &= \max\nolimits_{\delta \geq 0} \left\{ux^{k+1} + \delta(\ln p - \ln F(x^{k+1})) - \omega_k^{-1} d_\varphi(\delta, \delta_k)\right\} \\ &> ux^{k+1} + \delta_k(\ln p - \ln F(x^{k+1})) - \omega_k^{-1} d_\varphi(\delta_k, \delta_k) \\ &= ux^{k+1} + \delta_k(\ln p - \ln F(x^{k+1})) \\ &> \min\nolimits_x \{ux + \delta_k(\ln p - \ln F(x))\} \\ & ux^k + \delta_k(\ln p - \ln F(x^k)) = g(\delta_k). \end{aligned}$$

A $\{g(\delta_k)\}$ sorozat konvergenciája ezután abból következik, hogy a sorozat felülről korlátos, hiszen $g(\delta)$ felveszi a maximumát a pozitív $\delta$ értékek halmazán. □

**16. Lemma.** *A $\{\delta_k\}$ sorozat konvergens.*

*Bizonyítás.* A 10. Lemma szerint $g(\delta)$ felveszi a maximumát. Mivel $g(\delta)$ konkáv, ez azt jelenti, hogy a $\{\delta \geq 0 : g(\delta) \geq \gamma\}$ halmaz korlátos minden $\gamma \in R$ esetén, beleértve a $\gamma = g(\delta_0)$ esetet is. Így a $\{\delta_k\}$ sorozat is korlátos, van tehát torlódási pontja. Tegyük fel, hogy az állítással ellentétben a $\{\delta_k\}$ sorozatnak két torlódási pontja van, jelölje ezeket $\overline{\delta}$ és $\overline{\overline{\delta}}$. Minthogy az $\{\omega_k\}$ sorozat korlátos, szintén van torlódási pontja, jelölje ezt $\omega$, $\omega > 0$. Legyen $\{\delta_{j_k}\}$ a $\{\delta_k\}$ olyan végtelen részsorozata, amelyre fennáll, hogy

$$\lim_{k\to\infty} \omega_{j_k} = \omega, \quad \lim_{k\to\infty} \delta_{j_k} = \overline{\overline{\delta}}, \quad \lim_{k\to\infty} \delta_{j_k+1} = \overline{\delta}.$$

A 15. Lemma bizonyításában beláttuk, hogy

$$g(\delta_{j_k+1}) \quad > g(\delta_{j_k+1}) - \omega_k^{-1} d_\varphi(\delta_{j_k+1}, \delta_{j_k}) > g(\delta_{j_k})$$

minden $k$ esetén, vagyis a

$$g(\overline{\delta}) \quad \geq g(\overline{\delta}) - \omega^{-1} d_\varphi(\overline{\delta}, \overline{\overline{\delta}}) \geq g(\overline{\overline{\delta}})$$

egyenlőtlenségnek teljesülnie kell a szereplő függvények folytonossága miatt. Mivel $g(\overline{\delta})$ =g$(\overline{\overline{\delta}})$ a 15. Lemma szerint, ezért $d_\varphi(\overline{\delta}, \overline{\overline{\delta}}) = 0$, ami implikálja, hogy $\overline{\delta} = \overline{\overline{\delta}}$. Ellentmondásra jutottunk tehát azzal a feltevéssel, hogy $\overline{\delta} \neq \overline{\overline{\delta}}$. □

**17. Lemma.** *Az $\{F(x^k)\}$ sorozat konvergens,* $\lim_{k\to\infty} F(x^k) = p$.

*Bizonyítás.* Legyen $\delta_0 = \lim_{k\to\infty} \delta^k$. Ha $\delta_0 > 0$, akkor a

$$\delta_{k+1} = \frac{\delta_k}{1 + \omega_k \frac{F(x^{k+1})}{p}}$$

összefüggés miatt és azért, mert az $\omega_k$ sorozatot úgy választjuk, hogy minden eleme egy adott pozitív intervallumban legyen következik, hogy az $F(x^{k+1})$ sorozat $p$–hez tart. De $\delta_0 > 0$, különben a $\nabla \ln F(x)$ minden komponense $+\infty$-hez tartana, hiszen $(x^k, \delta_k)$ kielégíti az $u = \delta_k \nabla \ln F(x)$ egyenletrendszert. Ez $F$ eloszlásfüggvény volta miatt csak akkor lehet, ha az $F(x^k)$ sorozat 0-hoz tart. De ekkor, figyelembe véve azt is, hogy $\omega_k$-t egy korlátos pozitív intervallumban választjuk, az $1 + \omega_k(\ln F(x^k) - \ln p)$ szükségképpen $-\infty$-hez tart, ellentmondásban azzal, hogy $\delta_k > 0$. □

# 5 A módszer implementálhatóságáról

Végül néhány aggodalmaskodó megjegyzés következik a módszer implementálhatóságáról. Minden iterációban, mint látható, meg kell oldanunk az (1) egyenletrendszert (ez maga egy minimalizálási feladat). A szereplő függvények az $F$ gradiensei, amelyek függvényértékei többváltozós integrálás eredményei (többváltozós normális eloszlásfüggvény esetében e gradiensek is többváltozós normális eloszlásfüggvények), pontosan kiszámítani őket nem lehet, csak közelíteni. Az egyenletrendszer megoldására, majd az új $\delta$ értékének pontos meghatározására már emiatt sincs mód. A $(P)$ feladat optimális megoldása tehát szükségképpen pontatlan, amely tény további pontatlanságokat eredményez, amikor e megoldásokat a $(PP)$ ill. $(DD)$ feladatok megoldására szolgáló már hivatkozott (Komáromi, 1986) prímál-duál algoritmusban használjuk fel vagy ha más konvex programozási algoritmust alkalmazunk a $(DD)$ feladat megoldására. (E szempontok természetesen nem csak az entrópiaszerű proximális pont módszerrel kapcsolatban merülnek fel.) Ilyen körülmények között felvethető, vajon érdemes-e az eljárás konvergenciájának vizsgálatával bajlódni. A válasz természetesen igenlő, hiszen óvintézkedéseket is csak akkor tudunk beépíteni az eljárásba, ha tudjuk, hogy „illik" viselkednie.

A szerző tapasztalatai a pontatlansággal kapcsolatos aggodalmakat nem igazolták. A $(P)$ feladat megoldására végzett számítógépes kisérleteinkben legfeljebb 10-változós nemdegenerált normális eloszlásfüggvényeket és a $\varphi(t) = t\ln t - t + 1$ függvényt választottuk. Az (1) egyenletrendszer megoldására a ciklikus csökkentés módszerét alkalmaztuk, amely abban áll e feladat esetében, hogy a $(K-T)$ feladat $i$-edik egyenletében az $x_i$ értékét növeljük vagy csökkentjük oly mértékben, hogy egyenlőséget kapjunk – ezt folytatjuk egészen addig, amíg a pontossággal megelégszünk. Ez az eljárás is konvergens, a bizonyítás megtalálható Zangwill (1969) könyvében. Ilyen választás mellett az entrópiaszerű proximális pont módszer biztonságosnak és gyorsnak bizonyult.

## Irodalom


1. Bertsekas, D., *Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods*, Academic Press, NY, 1982.

2. Bregman, L. M., The Relaxation Method of Finding the Common Point of Convex Sets and its Application to the Solution of Problems in Convex Programming, *USSR Comput. Math. and Math Phys.* 7, 1967, pp. 200–217.

3. Csiszár, I., Information-Type Measures of Difference of Probability Distributions and Indirect Observations, *Studia Sci. Math. Hungar.* 2, 1967, pp. 299–318.

4. Csiszár, I., Why Least Squares and Maximum Entropy? An Axiomatic Approach to Inference for Linear Inverse Problems, *Annals of Statistics* 19, 1991, pp. 2032–68.

5. Deák, I., *Random Numbers Generators and Simulation*, Akadémiai Kiadó, 1990.

6. Eggermont, P. P. B., Multiplicative Iterative Algorithms for Convex Programming *Linear Algebra and Appl.* 130, 1990, pp. 25–42.

7. Iusem, A. N., Svaiter, B. F., Teboulle, M., Entropy-Like Proximal Methods in Convex Programming, *Mathematics of Operations Research* 19, 1994, pp. 790–814.

8. Komáromi, É., A Dual Method for the Probabilistic Constrained Problem, *Mathematical Programming Study* 28, 1986, pp. 94–112.
9. Mangasarian, O. L., *Nonlinear Programming,* McGraw-Hill, New York, 1969.
10. Martinet, B., Regularisation d'inéquations variationnelles par approximations successive, *Rev. Francaise d'Automatique et Inform. Rech. Opér.* 4, 1970, pp. 154–159.
11. Mayer, J., *Stochastic Linear Programming Algorithms*, Gordon and Breach Science Publishers, 1998.
12. Polyak, R. A., Modified Barrier Functions (Theory and Methods), *Mathematical Programming* 54, 1992, pp. 177–222
13. Prékopa, A., Contributions to the Theory of Stochastic Programming, *Mathematical Programming* 4, 1973, pp. 202–221.
14. Prékopa, A., On Logarithmic Concave Measures and Functions, *Acta Scientiarum Mathematicarum* 34, 1973, pp. 335–343.
15. Rockafellar, R. T., *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1970.
16. Rockafellar, R. T., Monotone Operators and the Proximal Point Algorithm, *SIAM J. Control Optimization* 14, 1976, pp. 877–898.
17. Szántai, T., A Computer Code for Solution of Probabilistic Constrained Stochastic Programming Problems, In: *Numerical Techniques for Stochastic Optimization* (Y. Ermoliev and R. J.-B. Wets eds), Springer-Verklag, 1988, pp. 229–235.
18. Teboulle, M., Entropic Proximal Mappings with Applications to Nonlinear Programming, *Mathematics of Operations Research* 17, 1992, pp. 670–690.
19. Zangwill, I. W., *Nonlinear Programming*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1969.


## AN APPLICATION OF THE ENTROPY-LIKE PROXIMAL POINT METHOD IN THE SOLUTION OF THE PROBABILISTIC CONSTRAINED LINEAR PROGRAMMING PROBLEM


We are concerned with the following problem: $ux \to \min, x \in X = \{x : F(x) \geq p\}$, where $F$ is a given joint continuous probability distribution function, $u > 0$, $u \in R^m$, and $p$ is a reliability level, $0 < p < 1$. It will be shown that this problem appears in the objective function of the dual of the probabilistic constrained linear programming problem. We will investigate the behavior of the problem as the function of its parameters. For solving it we apply a proximal point algorithm in which instead of a quadratic term we employ a $\varphi$-divergence function introduced by Csiszár. We prove the convergence of the presented algorithm.