KÖRNYEZETVÉDELMI TEVÉKENYSÉG EGY DINAMIKUS TERMELÉSI MODELLJE[1]

DOBOS IMRE
BKÁE Vállalatgazdaságtan Tanszék

A dolgozat a termelés környezetvédelmi vonzataival foglalkozik. Egy egytermékes termelő vállalat áll a vizsgálat központjában, amely egy reverz logisztikai (újrafelhasználási) alrendszerrel és egy nem készletezhető természeti elem (pl. levegő) segítségével végzi termelését. A vállalat célja a nyereség maximalizálása egy dinamikus modellben. A transzformáció technológiai összefüggései az új termék előállítási és az újrafelhasználási termelési függvényekkel írhatóak le. Az időt dinamikus változónak tekinti a modell. A nyereség maximalizálási probléma megoldásához a Pontrjagin-féle maximumelvet alkalmazza a cikk.

Kulcsszavak: termeléselmélet, mikroökonómia, környezeti menedzsment, reverz logisztika, optimális irányítás

1 Bevezetés

A cikk célja az, hogy a termelés dinamikus vonzatait vizsgálja. A termelő vállalat egy környezetvédelmi modelljét mutatjuk be. A vállalat egy végterméket állít elő. E termék előállításához a vállalat két tényezőt használ fel: egy homogén termelési tényezőt, amit nyersanyagként vagy termelő berendezésként interpretálhatunk, és egy természeti erőforrást, mint pl. víz vagy levegő. A környezeti elem ebből a szempontból termelési tényezőnek tekinthető (Kistner (1993)). A piacról a vállalathoz visszaérkező használt termékeket a vállalat visszaveszi és annak a minőségét megvizsgálja. Ha a visszatérő termék javítható, akkor megjavítják, és mint új terméket a késztermékraktárba szállítják. Ha nem javítható, akkor szétszerelik és mint termelési tényezőt használják. Ha a termék sem nem javítható, sem nem használható, akkor mint hulladékot kezelik. Más szavakkal, ez a modell egy reverz logisztikai alrendszerrel rendelkezik. A reverz logisztika termeléselméleti modelljei költségminimalizáló vállalat esetére viszonylag széles körben ismertek az irodalomban (Dobos (2002), Dobos-Kistner (2000), Kistner-Dobos (2000)), azonban ezek a modellek a természeti erőforrásokat nem kapcsolják be a vizsgálatokba.

Ebben a dolgozatban feltételezzük, hogy a vállalat árelfogadó és a nyereségét akarja maximalizálni. A transzformáció technológiai összefüggéseit két termelési függvény írja le: az előállítás (gyártás) termelési függvénye és az újrafeldolgozás (reverz logisztika) termelési függvénye. A termelési függvények stock-flow típusúak, vagyis a felhasznált és kibocsátott tényezőkön

[1]Beérkezett: 2002. április 17. e-mail: `dobos.ujpest@mail.datanet.hu`.

kívül a készletállományokat is tartalmazzák (Malinvaud (1985)). Azért választottuk ezt a típusú termelési függvényt, mert tisztán flow típusú termelési függvény esetén a raktárak a tervezési időhorizonton üresek lennének (Dobos (2000)). A klasszikus mikroökonómiai termeléselmélet statikus modelljében nincs szükség a készletek bevonására, mert az egy időperiódusban konstansnak tekinthető. Ez azonban nem mondható el egy dinamikus vizsgálatnál. Az optimális termelés-környezet kölcsönhatás jellemzésére folytonos időparaméterű modellt alkalmazunk. A diszkontált nyereség maximalizálási probléma megoldásához a Pontrjagin-féle maximumelvet használjuk.

2 Paraméterek és változók

Egy háromraktáras termelési-reverz logisztikai modellt vizsgálunk folyamatos hulladékkezelés mellett. A modellt mint egy optimális irányítási problémát reprezentálhatjuk három állapot- (a termelési tényező, a végtermék és a visszaérkező használt termékek készletállományai) és tíz irányítási változóval. A készletváltozásokat a három raktárra a készletezéselméletben ismert készletmérleg egyenlőséggel értelmezzük, ami folytonos időkezelés esetén differenciálegyenletként írható fel. A termelési tényező raktárkészletét a beszerzett anyag és a visszaérkezéskor szétszerelt és termelési tényezőként újra felhasználható anyag mennyisége növeli, míg a termelésbe bevont termelésközi készlet csökkenti. A végtermék készletszintjét a termelés és a visszaérkezéskor megjavított és újnak tekintett termék mennyiség növeli, de a piacon eladott termékek mennyisége csökkenti. Végül a visszatért termékek készletszintjét az aktuális visszaérkezés növeli, de az újrafeldolgozásra bevont és a hulladékkezelésre átadott termékek mennyiség csökkenti. A készletszintek változását befolyásoló változókat flow-típusuk miatt rátának nevezzük. A modell anyagáramlási sémáját mutatja az *1. ábra.*

A vállalat célja a diszkontált nyereség maximalizálása. A nyereséget a modellben, mint az árbevétel és a lineáris költségek (beszerzési költség, szennyezési adó, hulladékkezelési költség és a raktárak készletezési költsége) diszkontált különbségeként értelmezhetjük. A következő paramétereket használjuk a modellben:

T	a tervezési horizont hossza,
r	visszaérkezési ráta, $0 \leq r \leq 1$,
ρ	diszkontráta,
$h_P(t)$	a termelési tényező készlettartási költség együtthatója a t-ik időpontban,
$h_S(t)$	a végtermék készlettartási költség együtthatója a t-ik időpontban,
$h_R(t)$	a visszatérő termékek készlettartási költség együtthatója a t-ik időpontban,
$p(t)$	a végtermék ára a t-ik időpontban,
$q_p(t)$	a termelési tényező beszerzési ára a t-ik időpontban,
$q_e(t)$	a szennyezési adó értéke a t-ik időpontban,
$q_d(t)$	a hulladékkezelés költsége a t-ik időpontban.

Döntési változók:

Állapot- (stock) változók:

$I_P(t)$	a termelési tényező készletszintje, nemnegatív,
$I_S(t)$	a végtermék készletszintje, nemnegatív,
$I_R(t)$	a visszatért termékek készletszintje, nemnegatív.

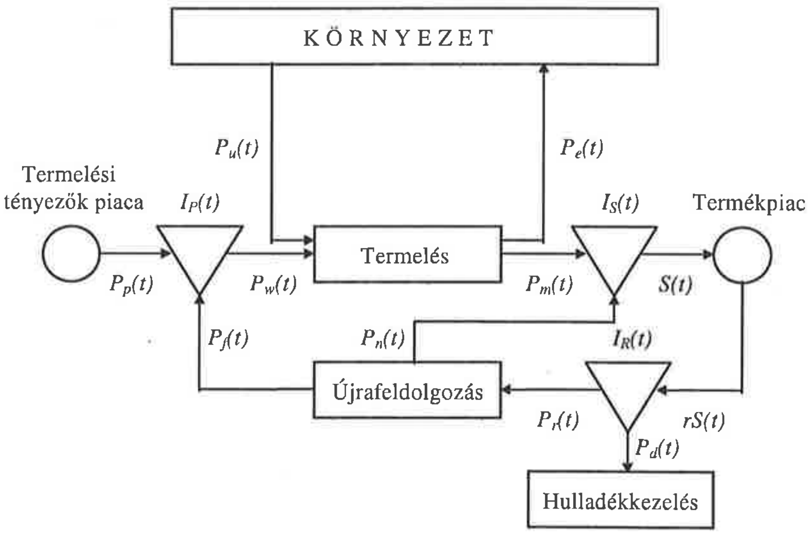
Irányítási (flow) változók:

$S(t)$	keresleti (eladási) ráta, folytonosan differenciálható,
$P_p(t)$	beszerzési ráta, nemnegatív,
$P_w(t)$	termelésközi készlet változás rátája, nemnegatív,
$P_f(t)$	a visszaérkezett termékekből, mint termelési tényező felhasználás rátája, nemnegatív,
$P_n(t)$	a visszaérkezett termékekből, mint végtermék felhasználás rátája, nemnegatív,
$P_m(t)$	termelési ráta, nemnegatív,
$P_r(t)$	újrafeldolgozási ráta, nemnegatív,
$P_d(t)$	hulladékkezelési ráta,
$P_u(t)$	a természeti erőforrás felhasználás rátája, nemnegatív,
$P_e(t)$	környezeti kibocsátás (környezetszennyezés, emisszió) rátája, nemnegatív.

A termelési és újrafeldolgozási összefüggéseket a következő dinamikus stock-flow típusú termelési függvények írják le:

$$F[t, I_S(t), I_P(t), P_w(t), P_u(t), P_e(t), P_m(t)] \geq 0$$

$$G[t, I_R(t), P_r(t), P_f(t), P_n(t)] \geq 0\,.$$



1. ábra. Anyagáramlás a modellben

A termelési folyamat inputjai a termelési tényező és a természeti erőforrás felhasználás, míg a folyamat outputjai a végtermék és a környezeti kibocsátás (emisszió). A reverz logisztikai alrendszernek csak egy inputja van, a visszaérkező termékek, míg két outputja: a kijavított végtermék és a szétszerelt és termelési tényezőként használt termék. Tételezzük fel, hogy a termelési függvényeink szigorúan konkávak és folytonosan differenciálhatóak a változóikban. Az F implicit termelési függvény monoton növekvő a termelésközi készletváltozás, a természeti erőforrás-felhasználás és a környezetszennyezés változókban, míg a termelési rátában szigorúan monoton csökkenő. A G újrafelhasználási termelési függvény monoton csökkenő az irányítási változókban és szigorúan monoton a visszaérkezéskor kijavított és újnak tekintett végtermék változójában. Feltételezzük még, hogy a termelési függvények felülről korlátosak és konkávak a készletszintekben.

3 A modell: a nyereség maximalizálása

A következő (1)-(5) optimális irányítási problémát vizsgáljuk:

$$\begin{aligned}\int_0^T e^{-\rho t}[p(t)S(t) - q_p(t)P_p(t) - q_e P_e(t) - q_d P_d(t) - h_S(t)I_S(t) - \\ - h_P(t)I_P(t) - h_R(t)I_R(t)]\,dt \to \max\end{aligned} \tag{1}$$

mellékfeltételek

$$\begin{aligned} I'_S(t) &= P_m(t) + P_n(t) - S(t) \\ I'_P(t) &= P_p(t) + P_f(t) - P_w(t) \\ I'_R(t) &= -P_d(t) - P_r(t) + rS(t) \end{aligned} \tag{2}$$

$$I_i(t) \geq 0, \quad (i = S, P, R) \tag{3}$$

$$S(t) \geq 0, \quad P_j(t) \geq 0, (j = p, w, f, u, e, m, n, r, d) \tag{4}$$

$$\begin{aligned} F[t, I_S(t), I_P(t), P_w(t), P_u(t), P_e(t), P_m(t)] \geq 0 \\ G[t, I_R(t), P_r(t), P_f(t), P_n(t)] \geq 0\,. \end{aligned} \tag{5}$$

A célfunkcionál a tervezési időhorizont kumulált árbevételének és a költségeinek a diszkontált különbségeként áll elő. A költségek a beszerzési, a hulladékkezelési, a környezeti adó és a raktárak készletezési költségeinek összegeként írhatóak fel. A (2) differenciálegyenletek a raktárak stock-flow készletmérleg egyenleteit tartalmazzák. A (3) és (4) egyenlőtlenségek a készletszintek és a ráták nemnegativitását biztosítják. Az (5) termelési függvényeket fentebb definiáltuk. A probléma megoldásához a Pontrjagin-féle maximumelvet alkalmazzuk. A termelési függvényekre tett konkavitási feltételek miatt az optimalitás szükséges feltételei egyben elégségesek is a nyereség maximalizáló vállalat számára.

4 A modell néhány tulajdonsága

Ebben a részben a felállított modellt jellemezzük. Az eredmények lehetővé teszik a modell változóinak lényeges csökkentését. A bonyolult modellt egyszerűsíthetjük a következő eredmény segítségével.

1. Lemma. *Az optimális stratégiában*

$$F[t, I_S^0(t), I_P^0(t), P_w^0(t), P_u^0(t), P_e^0(t), P_m^0(t)] = 0$$

és

$$G[t, I_R^0(t), P_r^0(t), P_f^0(t), P_n^0(t)] = 0 \,.$$

A bizonyítás nyilvánvaló. Tegyük fel pl., hogy a $G[\cdot]$ függvény szigorúan nagyobb, mint zéró. Ekkor az újrafeldolgozandó termékek mennyiségét növelhetjük, és ha ezt a mennyiséget a piacon értékesítjük, akkor a nyereség magasabb lesz.

Megjegyzés. A lemma azt mutatja, hogy az implicit termelési függvényeket egyszerűbb alakban írhatjuk a szigorú monotonitási feltételek miatt. Az implicit függvény tétel miatt (Rudin (1978)) két explicit termelési függvényt írhatunk fel, pl. a termelési rátára és a javított, de új terméknek kezelhető termékekre:

$$P_m(t) = f[t, I_S(t), I_P(t), P_w(t), P_u(t), P_e(t)]$$

és

$$P_n(t) = g[t, I_R(t), P_f(t), P_r(t)] \,.$$

A következőkben azt mutatjuk meg, hogy az $f[\cdot]$ és $g[\cdot]$ explicit termelési függvények megtartják a változókban a konkavitási tulajdonságukat és ugyanolyan monotonitási tulajdonsággal rendelkeznek, mint az implicit termelési függvények.

2. Lemma. *Az $f[\cdot]$ és $g[\cdot]$ explicit termelési függvények konkávak és monotonitási tulajdonságuk a változóikban megegyeznek az implicit függvényével.*

Bizonyítás. A monotonitási és konkavitási tulajdonságot a g explicit újrafeldolgozási termelési függvényre mutatjuk meg. A gondolatmenetet követve az f explicit termelési függvényre is beláthatjuk az állítást. Helyettesítsük az implicit újrafeldolgozási termelési függvénybe az explicitet:

$$G\{t, I_R(t), P_r(t), P_f(t),\ g[t, I_R(t), P_f(t), P_r(t)]\} = 0 \,.$$

Ha differenciáljuk ezt az implicit függvényt a változókban, akkor a gradiensnek is egyenlőnek kell lennie a zérusvektorral. (A bizonyításban eltekintünk a függvény argumentumainak kiírásától.)

$$G'_x + G'_{P_n} \cdot g'_x = 0 \quad (x = I_R, P_r, P_f) \,.$$

Rendezve ezeket az egyenlőségeket a következőt kapjuk:

$$g'_x = -\frac{1}{G'_{P_n}} G'_x \quad (x = I_R, P_r, P_f) \,.$$

Mivel feltételeztük, hogy az implicit újrafeldolgozási termelési függvény monoton csökkenő az irányítási változókban, és szigorúan monoton csökkenő az a visszaérkezéskor új termékként feldolgozás változójában. Ez azt jelenti, hogy $-(1/G'_{P_n}) > 0$, amivel beláttuk, hogy az implicit és explicit termelési függvények a közös változókban megtartják a monotonitási tulajdonságukat, mivel az explicit termelési függvény első deriváltja egyenlő az implicit termelési függvény változók szerinti deriváltja és az előbbi kifejezés szorzataként. A következő lépésünk a konkavitás belátása. Ehhez differenciálnunk kell a gradiens vektort, ami továbbra is zérus marad:

$$G''_{xy} + G''_{P_nP_n} \cdot g'_y \cdot g'_x + G'_{P_n} \cdot g''_{xy} = 0 \quad (x, y = I_R, P_r, P_f) \, .$$

Ahonnan

$$g''_{xy} = -\frac{1}{G'_{P_n}} \cdot \left(G''_{xy} + G''_{P_nP_n} \cdot g'_y \cdot g'_x\right) \quad (x, y = I_R, P_r, P_f) \, .$$

Azt kell most bebizonyítanunk, hogy a $\{g''_{xy}\}$ $(x = I_R, P_r, P_f;\ y = I_R, P_r, P_f)$ mátrix nempozitív definit, amivel belátjuk a konkavitást. A definitást a definícióból kiindulva bizonyítjuk, vagyis a következő kifejezés előjelét vizsgáljuk:

$$-\frac{1}{G'_{P_n}} \sum_x \sum_y a_x \cdot \left(G''_{xy} + G''_{P_nP_n} \cdot g'_x \cdot g'_y\right) \cdot a_y \quad (x, y = I_R, P_r, P_f) \, ,$$

ahol a_x $(x = I_R, P_r, P_f)$ tetszőleges vektor. Itt csak azt kell megmutatnunk, hogy a szummás kifejezés nempozitív. A G függvény feltételezett konkavitásából következik, hogy

$$\sum_x \sum_y a_x \cdot G''_{xy} \cdot a_y \leq 0 \, ,$$

és $G''_{P_nP_n}$ is nempozitív. Az utolsó tagunkat úgy írhatjuk fel, hogy

$$\sum_x \sum_y a_x \cdot g'_x \cdot g'_y \cdot a_y = \left(\sum_x a_x \cdot g'_x\right) \cdot \left(\sum_y a_y \cdot g'_y\right) \, ,$$

ami nemnegatív, és ezzel beláttuk a definitséget és a

$$P_n(t) = g[t, I_R(t), P_f(t), P_r(t)]$$

függvény konkavitását is.

A következő lemma szükséges feltételt mond ki a visszaérkező termékek újrafelhasználásáról.

3. Lemma. *Ha $p(t) - rq_d(t) \geq 0$ egy $[t_1, t_2]$ időintervallumon, akkor optimális stratégia minden visszatérő terméket újrafelhasználni, és az optimális eladási ráta pozitív: $P_d^0(t) = 0$, $S^0(t) \geq 0$.*

Bizonyítás. Tételezzük fel, hogy az optimális hulladékkezelési ráta pozitív. Megmutatjuk, hogy ebben az esetben a nyereség növelhető, ami ellentmond a hulladékkezelési rátára tett pozitivitási feltételnek. Ha a hulladékkezelési ráta pozitív, akkor létezik egy $\Delta P_d(t)$ mennyiség, ami nem nagyobb, mint az optimális pozitív hulladékkezelési ráta. Ha az egész $\Delta P_d(t)$ mennyiséget újrafeldolgozzuk, akkor az újrafeldolgozott végtermék

$$\Delta P_n(t) = g[t, I_R^0(t), P_f^0(t), P_r^0(t) + \Delta P_d(t)] - P_n^0(t) ,$$

amellett a feltétel mellett, hogy a többi változót változatlanul hagyjuk. A $g[\cdot]$ termelési függvény monotonitási tulajdonsága miatt a $\Delta P_n(t)$ mennyiség szintén. Ha ezt az végtermék mennyiséget közvetlenül eladjuk, akkor $r\Delta P_n(t)$ termék tér vissza az újrafeldolgozandó raktárba. Modellezzük most a költségfolyamot. Az újrafeldolgozással megtakarítottunk egy $q_d(t)\Delta P_d(t)$ nagyságú költséget és egy $p(t)\Delta P_n(t)$ nagyságú extra árbevételt értünk el. A visszaérkező termékek hulladékkezelési költsége $q_d(t)r\Delta P_n(t)$. A pénzáram ez után a tranzakció után

$$q_d(t)\Delta P_d(t)+p(t)\Delta P_n(t)-q_d(t)r\Delta P_n(t) = q_d(t)\Delta P_d(t)+\big(p(t)-rq_e(t)\big)\Delta P_n(t) .$$

Azonban ez utóbbi kifejezés pozitív az árakra és a mennyiségekre tett feltételek miatt, és ez a tény ellentmondásban van a kiinduló feltételezéssel az optimalitásról. Az optimális hulladékkezelési ráta nem lehet pozitív és az eladási ráta pozitív.

A lemma eredményét intuitívan is beláthatjuk. Minden egyes visszatérő termék kifizetés nélküli potenciális erőforrást jelent a vállalatnak. Kedvezőbb a visszaérkező termékeket újrafeldolgozni, és mint termelési tényezőt használni, amivel beszerzést; vagy mint újrafeldolgozott végterméket értékesíteni, amivel termelést válthatunk ki.

Tételezzük fel a továbbiakban, hogy $p(t) \geq rq_d(t)$ minden $t \in [0, T]$. Ha ez nem így lenne, akkor az állandó hulladékkezelés lenne az optimális stratégia újrafeldolgozás nélkül. Ekkor a lemmák segítségével a probléma a következő egyszerűbb alakra hozható:

$$\begin{aligned}\int_0^T & e^{-\rho t}[p(t)S(t) - q_p(t)P_p(t) - q_eP_e(t) - h_S(t)I_S(t) - \\ & - h_P(t)I_P(t) - h_R(t)I_R(t)]\, dt \to \max\end{aligned} \tag{1'}$$

mellékfeltételek

$$\begin{aligned} I_S'(t) &= f[t, I_S(t), I_P(t), P_w(t), P_u(t), P_e(t)] + g[I_R(t), P_f(t), P_r(t)] - S(t) \\ I_P'(t) &= P_p(t) + P_f(t) - P_w(t) \\ I_R'(t) &= -P_r(t) + rS(t) \end{aligned} \tag{2'}$$

$$I_i(t) \geq 0 \quad (i = S, P, R) \tag{3'}$$

$$S(t) \geq 0\,, \quad P_j(t) \geq 0 \quad (j = p, w, u, e, f, r)\,. \tag{4'}$$

A már csak hét irányítási változóval rendelkező egyszerűsített (1') - (4') modellt oldjuk meg. Ez a modell az explicit termelési függvények konkavitása miatt egy konkáv irányítási feladat, így az optimalitás szükséges feltételei egyben elégségesek is.

5 A módosított feladat megoldása

A maximumelv segítségével oldjuk meg a feladatot (Feichtinger-Hartl (1986) vagy Seierstad-Sydsaeter (1987)). A probléma Hamilton-függvénye a következő módon írható

$$\begin{gathered}
H(t, I_S(t), I_P(t), I_R(t), P_p(t), P_w(t), P_u(t), P_e(t), P_f(t), P_r(t), \psi_1(t), \psi_2(t), \psi_3(t)) = \\
p(t)S(t) - q_p(t)P_p(t) - q_e(t)P_e(t) - h_S(t)I_S(t) - h_P I_P(t) - h_R(t)I_R(t) + \\
+ \psi_1(t)\big(f[t, I_S(t), I_P(t), P_w(t), P_u(t), P_e(t)] + g[t, I_R(t), P_f(t), P_r(t)] - S(t)\big) + \\
+ \psi_2(t)\big(P_p(t) + P_f(t) - P_w(t)\big) + \psi_3(t)\big(-P_r(t) + rS(t)\big) .
\end{gathered}$$

Az optimalitás feltételeit mutatja az alábbi

Tétel. *Hogy* $\{I_S^0(t), I_P^0(t), I_S^0(t), P_p^0(t), P_w^0(t), P_u^0(t), P_e^0(t), P_f^0(t), P_r^0(t)\}$ *változók az (1') - (4') probléma optimális megoldásai legyenek, szükséges és elégséges, hogy létezzenek olyan* $\psi_1(t) \neq 0$, $\psi_2(t) \neq 0$ *és* $\psi_3(t) \neq 0$ *függvények, amelyekre minden* $0 \le t \le T$ *esetén*
(a)

$$\begin{aligned}
\psi_1'(t) &= -\big(f'_{I_S}[t, I_S^0(t), I_P^0(t), P_w^0(t), P_u^0(t), P_e^0(t)] + \rho\big)\psi_1(t) + h_S(t) \\
\psi_2'(t) &= -\big(f'_{I_P}[t, I_S^0(t), I_P^0(t), P_w^0(t), P_u^0(t), P_e^0(t)] + \rho\big)\psi_1(t) + h_P(t) \\
\psi_3'(t) &= -\big(g'_{I_R}[t, I_R^0(t), P_f^0(t), P_r^0(t)] + \rho\big)\psi_1(t) + h_R(t) .
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
&\max\{[p(t) - \psi_1(t) + r\psi_3(t)]S(t) \mid S(t) \ge 0\} = [p(t) - \psi_1(t) + r\psi_3(t)]S^0(t) \\
&\max\{[\psi_2(t) - q_p(t)]P_p(t) \mid P_p(t) \ge 0\} = [\psi_2(t) - q_p(t)]P_p^0(t), \\
&\max\{\psi_1(t)f[t, I_S^0(t), I_P^0(t), P_w(t), P_u(t), P_e(t)] - \psi_2(t)P_w(t) - q_e P_e(t) \mid \\
&\qquad\qquad P_i(t) \ge 0,\ i = w, u, e\} = \\
&\quad \psi_1(t)f[t, I_S^0(t), I_P^0(t), P_w^0(t), P_u^0(t), P_e^0(t)] - \psi_2(t)P_w^0(t) - q_e P_e^0(t) \\
&\max\{\psi_1(t)g[t, I_R^0(t), P_f(t), P_r(t)] + \psi_2(t)P_f(t) - \psi_3 P_r(t) \mid \\
&\qquad\qquad P_j(t) \ge 0,\ j = f, r\} = \\
&\quad \psi_1(t)g[t, I_R^0(t), P_f^0(t), P_r^0(t)] + \psi_2(t)P_f^0(t) - \psi_3 P_r^0(t) .
\end{aligned}$$

Az (a) feltételek a $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ és $\psi_3(t)$ adjungált változók differenciálegyenleteit tartalmazzák. Az adjungált változók segítségével számíthatóak ki az optimális készletszintek. A (b) feltételek közül az első kettő az adjungált változók és a piaci árak közötti kölcsönhatást jellemzi. Az adjungált változókat, mint a vállalat „belső árait" interpretálhatjuk. Ha a $\psi_1(t) + r\psi_3(t)$ „belső ár" nagyobb, mint a végtermék $p(t)$ piaci ára, akkor optimális nem eladni a termelt vagy újrafeldolgozott termékeket. A $\psi_2(t)$ „belső ár" azt mutatja, hogy ha az kisebb, mint a beszerzési ár, akkor optimális stratégia a beszerzést leállítani. A (b) feltétel utolsó kettő egyenlősége a klasszikus statikus nyereség maximalizálási feladat megoldása ismert termelési függvény és adott készletszintek mellett (Fandel (1991), Kistner (1993)). Az egyedüli különbség, hogy a vállalat egy „belső árakkal" definiált maximalizálási problémát old meg. A természeti erőforrás felhasználása mindig maximális a modellben, vagyis annyi természeti erőforrást használ a vállalat, amennyire a maximális nyereség eléréséhez szükséges; azonban a környezetbe történő szennyező kibocsátás (emisszió) mértékét a szennyezési adó korlátozza. A korlátozást a következőképpen értelmezhetjük: Ha a tényleges szennyezési adó ($q_e^a(t)$) a vizsgált tervezési időhorizonton magasabb lenne, mint a tervezett ($q_e(t)$), vagyis $q_e^a(t) > q_e(t)$, akkor a szennyező anyagok kibocsátásának mértéke az adó növekedése miatt kisebb lenne. Ezen állítás bizonyítása következik a termelési függvény emisszióban történő konkavitásából (a bizonyítást az olvasóra hagyjuk). A kapott eredményeket úgy interpretálhatjuk, mint a statikus termeléselmélet dinamikus kiterjesztését. A készletszintek változása követi a „belső árak" változását.

6 Konklúzió

A termelés egy dinamikus környezeti modelljét vizsgáltuk, ahol a környezeti hatásokat egy homogén raktározható visszaérkezésű jószág és egy homogén nem-raktározható emisszió (kibocsátás) képezte le. Egy dinamikus termeléselmélet keretei között analizáltuk a termelés környezetvédelmi vonzatait. Eredményünk az, hogy a modellezett vállalat maximális mértékig vonja be a termelési folyamatába a természeti erőforrást, de a környezetbe történő szennyezőanyag kibocsátása emissziós (kibocsátási) adóval korlátozott. A modell reverz logisztikai alrendszere azt mutatja, hogy nem hatékony a visszatért termékeket a hulladékkezelési folyamatba bevonni; az újrafeldolgozással a vállalat pótlólagos erőforrásokhoz juthat. Az újrafeldolgozott végtermék és szétszerelt, javított termelési tényező közötti választást a vállalat „belső árai" irányítják. Az itt használt és Malivaud (1985) által kidolgozott dinamikus termeléselméleti modell azt mutatja, hogy nem létezik termelés készletek nélkül. A termelési folyamathoz szükségeltetnek a készletek mind az input (termelési tényezők), mind az output (végső termékek) oldalán.

Irodalom

1. Dobos, I. (2000): *A Dynamic Theory of Production: Flow or Stock-Flow Production Function?*, Discussion Paper 444, Faculty of Economics and Business Administration, University Bielefeld.
2. Dobos, I. (2002): Optimal Production-Inventory Strategies for a HMMS-Type Reverse Logistics System, *Int. J. of Production Economics*, to appear
3. Dobos, I. and Kistner, K.-P. (2001): A Dynamic Environmental Theory of Production, In: Fleischmann, B., Lasch, R., Derigs, U., Domschke, W., Rieder, U. (Eds.): *Operations Research Proceedings 2000: Selected Papers of the Symposium on Operations Research*, Springer-Verlag, Berlin et al., 435–438
4. Dobos, I. and Kistner, K.-P. (2000): *Production-Inventory Control in a Reverse Logistics System*, Pre-prints, Vol. 2, Eleventh International Working Seminar on Production Economics, Igls/Innsbruck, February 21-25, 2000, 67–86.

5. Fandel, G. (1991): *Theory of Production and Cost*, Springer-Verlag, Berlin et al.
6. Feichtinger, G. and Hartl, R.F. (1986): *Optimale Kontrolle ökonomischer Prozesse: Anwendungen des Maximumprinzips in den Wirtschaftswissenschaften*, de Gruyter, Berlin.
7. Kistner, K.-P. (1993): *Produktions- und Kostentheorie*, Physica-Verlag, Würzburg.
8. Kistner, K.-P. and Dobos, I. (2000): Optimal Production-Inventory Strategies for a Reverse Logistics System, In: Dockner, E.J., Hartl, R. F., Luptacik, M., Sorger, G. (Eds.): *Optimization, Dynamics, and Economic Analysis: Essays in Honor of Gustav Feichtinger*, Physica-Verlag, Heidelberg, New York, 246–258.
9. Malinvaud, E. (1985): *Lectures on Microeconomic Theory*, North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford.
10. Rudin, W. (1978): *A matematikai analízis alapjai*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest.
11. Seierstad, A. and Sydsaeter, K. (1987): *Optimal Control Theory with Economic Applications*, North-Holland, Amsterdam.

A DYNAMIC MODEL FOR ENVIRONMENTAL ASPECTS OF PRODUCTION

The paper deals with the environmental concerns of the production. It is developed an environmental model of a one product manufacturing firm with a reverse logistics subsystem and with use of a non-stockable environmental element (e.g. air). The goal of the firm is to maximize its profit in dynamical context. The technological aspects of the production is described with production functions for manufacturing and remanufacturing. The time is handled as continuous variable in the examined model. To solve the profit maximization problem, it is used the maximum principle of Pontryagin.