A MAGYAR MÓDSZER ÉS ÁLTALÁNOSÍTÁSAI [1]

FRANK ANDRÁS
ELTE, Operációkutatási Tanszék

A lineáris programozás dualitás tételének legkorábban előforduló speciális alakja Egerváry Jenő klasszikus tétele teljes páros gráf teljes párosításainak maximális súlyáról. Az elegáns bizonyítás elvezet egy hatékony algoritmushoz, melynek a szállítási problémára kiterjesztett alakja a nemzetközi szakirodalomban a Magyar Módszer nevet viseli. A módszer alapelvét azóta több irányban is általánosították: nempáros gráfok maximális súlyú párosításainak meghatározására, a súlyozott matroid metszet problémára, folyam és szubmoduláris áram feladatokra. Jelen munkában áttekintjük a Magyar Módszer e kiterjesztéseit.

1 Bevezetés

A Matematikai és Fizikai Lapok 1931-es 38-as számában jelent meg Egerváry Jenő: *Matrixok kombinatorius tulajdonságairól* című dolgozata. [A címben szereplő *kombinatorius* szó valószínűleg nem elírás, mert a cikk páratlan oldalainak tetején is ekként szerepel. Ugyanakkor Egerváry egy 1957-ben megjelent dolgozatának [9] irodalomjegyzékében saját cikkére hivatkozva már a *kombinatorikus* szót használja.] A dolgozat fő eredménye Kőnig Dénes páros gráfok maximális elemszámú párosításairól szóló tételének súlyozott változata, melyet eredeti, betűhív alakban idézünk:

1.1 Tétel (Egerváry). *Ha az $||a_{ij}||$ n-edrendű matrix elemei adott nemnegatív egészek, úgy a*

$$\lambda_i + \mu_j \geq a_{ij}, \quad (i,j = 1,2,\ldots n), \quad (\lambda_i, \mu_j, \text{ nem negatív egészek}) \tag{1}$$

feltételek mellett

$$\min \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k + \mu_k) = \max(a_{1\nu_1} + a_{2\nu_2} + \ldots + a_{n\nu_n}), \tag{2}$$

hol $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_n$ az $1, 2, \ldots n$ számok összes permutációit befutják.

Egerváry a dolgozatban megjegyzi, hogy a tétel akkor is érvényben marad, ha elejtjük az a_{ij} mátrixelemekre rótt egészértékűségi feltevést, és a λ_i, μ_j számokról nem követeljük meg az egészértékűséget.

[1] Beérkezett: 2002. március 29. Készült a T029772 és T037547 sz. OTKA pályázatok támogatásával. Operációkutatási Tanszék, Eötvös Loránd Tudományegyetem, Pázmány P. s. 1/c, Budapest, Hungary, H-1117 és Traffic Lab Ericsson Hungary, Laborc u.1, Budapest, H-1037. A szerző tagja az Egerváry Kutatócsoportnak (EGRES). e-mail: `frank@cs.elte.hu`.

Kőnig Dénes érdeme volt, hogy felismerte az eredetileg Frobenius által vizsgált súlyozatlan probléma gráfelméleti jellegét, Frobenius tételét (amelynek ekvivalens alakja a Hall tétel) általánosította, és a konstruktív alternáló utas módszert alkalmazta tételének bizonyítására. Ennek segítségével hatékonyan ki lehet számítani páros gráf maximális elemszámú párosítását és az éleknek pontokkal történő minimális elemszámú lefogását. Akkoriban a gráfelmélet gyerekcipőben járt, így nem csoda, hogy Egerváry a tételét még a mátrixok nyelvén fogalmazta meg. Lényegét tekintve azonban ez a tétel páros gráfokról szól, és az általánosításokhoz is könnyebben eljuthatunk, ha gráfos alakban adjuk meg. Tekintettel arra, hogy az A mátrix a_{ij} elemei költségként értelmezhetők, a továbbiakban a helyett a c jelölést használjuk. Azt is előrebocsátjuk, hogy a célfüggvényt néha költség- néha súlyfüggvénynek nevezzük, az előbbit inkább minimalizáláskor, az utóbbit maximalizáláskor használva.

1.2 Tétel. *Legyen $G = (V, E)$ teljes páros gráf, melynek pontjai két n elemű osztályba vannak sorolva. Legyen továbbá $c : E \rightarrow \mathbf{R}_+$ az éleknek egy nemnegatív számokkal történő súlyozása. Ekkor G teljes párosításainak maximális súlya egyenlő a nemnegatív súlyozott lefogások minimális súlyával, ahol nemnegatív súlyozott lefogáson egy olyan $\pi : V \rightarrow \mathbf{R}_+$ függvényt értünk, amelyre $\pi(u) + \pi(v) \geq c(uv)$ a gráf minden uv élére fennáll. Amennyiben c egészértékű, úgy az optimális π is választható egészértékűnek.*

A szakirodalomban a maximális súlyú párosítás kérdését gyakran hozzárendelési problémának nevezik. Érdemes még egy ekvivalens alakban megfogalmazni Egerváry tételét, a lineáris programozás nyelvén.

1.3 Tétel. *Jelölje A a G teljes páros gráf pont-él incidencia mátrixát, és legyen c nemnegatív célfüggvény. Ekkor a $\max\{ax : x \geq 0, Ax \leq 1\}$ lineáris program optimuma mindig felvétetik egész (és így $0-1$) vektoron, és van olyan egész optimális megoldás, amelyre $Ax = 1$. Továbbá, ha c egészértékű, úgy a $\min\{\sum(\pi(v) : v \in V), \pi \geq 0, \pi A \geq c\}$ lineáris program optimuma is egészen felvétetik, és a két optimum mindig megegyezik egymással.*

Egerváry eredményének úttörő jellege a következőkben foglalható össze.

1. A tétel a legelső explicit megfogalmazása, mégha speciális mátrixokra is, a lineáris programozás dualitás tételének.

2. A dualitás tételnek olyan esetét írja le, amelyben mindig létezik egészértékű optimum.

3. A konstruktív bizonyítási jelleg rámutat az algoritmusoknak, mint önálló matematikai objektumoknak jelentőségére, összefüggésben az algoritmusok hatékonyságával. Bár 1931-ben e fogalmak értelemszerűen fel sem vetődhettek, Egerváry módszere mind gyakorlatilag, mind elméletileg hatékony. Amint az kimutatható (lásd alább), polinomiális, sőt valójában erősen polinomiális futásidejű.

4. Egerváry tétele és eljárása azt demonstrálja, hogy egy elegáns matematikai eredmény miként nyújthat megoldást természetesen felvetődő gyakorlati kérdésekre.

A Magyar Módszer számos további eljárás kiindulópontja lett. Korai példaként Ford és Fulkerson minimális költségű folyam algoritmusa hozható fel. A hozzárendelési feladatban, szállítási problémában, hálózati folyamoknál fellép az a jelenség, hogy az optimum egész vektoron is felvétetik. Ennek valójában közös gyökere van, éspedig az, hogy a szóban forgó problémához tartozó lineáris program feltételi mátrixa teljesen unimoduláris. A Magyar Módszer gondolatait azonban olyan körülmények között is sikerrel fejlesztették tovább, amikor a feltételi mátrix már nem teljesen unimoduláris, mégis az optimum egészértékűsége biztosítható, ennek messze ható kombinatorikus következményeivel együtt. Mindkét eljárás kiindulópontja J. Edmondstól származik. Az első segítségével meg lehet határozni tetszőleges gráf maximális súlyú párosítását. A második kiterjesztés matroidokra vonatkozik. Ennek segítségével például ki lehet számítani egy élsúlyozott irányítatlan gráf olyan minimális súlyú feszítő fáját, amely egy megadott pontban (vagy általánosabban egy stabil ponthalmaz pontjaiban) fokszám korlátoknak tesz eleget. Vagy, a gráf élhalmazán megadott k darab költségfüggvényhez meg tudunk határozni k élidegen feszítő fát úgy, hogy minimalizáljuk a kiválasztás teljes költségét, ahol az i-dik fát az i-dik költségfüggvény szerinti költsége szerint számoljuk be.

A dolgozat célja, hogy összefoglalót adjon az ilyen irányú eredményekről. Ennek során megadok néhány olyan bizonyítást, melyek ismertek ugyan, de magyar nyelvű szakirodalomban még nem szerepeltek. A súlyozott matroid metszet tételre egy másutt még nem publikált új bizonyítást adok, amely csak a matroidok elemi tulajdonságait használja, szemben a komolyabb apparátust igénylő korábbi poliéderes vagy algoritmikus hátterű bizonyításokkal. Azt is igazolni fogom, hogy már Egerváry eredeti bizonyítása is hatékony, azaz erősen polinomiális futásidejű algoritmust szolgáltat maximális súlyú teljes párosítás megkeresésére. Ez nem ugyanaz, mint a H. W. Kuhn által javasolt eljárás (amit valójában Kuhn nyomán Magyar Módszernek neveznek), mert Kuhn a duál változók cseréjét és az alternáló utas módszert egybeötvözi, míg az Egerváry bizonyításból közvetlenül adódó algoritmusban a maximális elemszámú párosítást meghatározó Kőnig-féle algoritmus egy különálló szubrutinként szerepel.

2 Páros gráfok

2.1 Maximális elemszámú párosítások

Az egész elmélet kiindulópontja Kőnig [15] klasszikus tétele.

2.1 Tétel (Kőnig Dénes). *Egy $G = (S,T;E)$ páros gráfban a diszjunkt élek maximális $\nu = \nu(G)$ száma egyenlő az éleket lefogó pontok minimális $\tau = \tau(G)$ elemszámával.*

Bizonyítás. Egy ν elemű párosítás lefogásához kell legalább ν csúcs, így az összes élhez is kell, ezért $\nu \leq \tau$. Ebből az is következik, hogy $(*)$ *egy ν elemű L lefogás egy ν elemű párosítás minden élét pontosan egyszer fogja le.*

A fordított irányhoz lássuk be, hogy G élei lefoghatók $\nu(G)$ ponttal. Indirekt, legyen G minimális ellenpélda abban az értelemben, hogy $\nu(G) < \tau(G)$, de minden G-nél kisebb G' gráfra $\nu(G') = \tau(G')$.

Minden u csúcsot elkerül maximális párosítás, mert ha valamelyiket nem, úgy $\nu(G-u) < \nu(G)$, és miután $G-u$ élei már lefoghatók $\nu(G-u) \leq \nu(G)-1$ ponttal, ezen lefogáshoz u-t hozzávéve G éleinek egy legfeljebb $\nu(G)$ elemű lefogását kapnánk.

Legyen $e = st$ a gráf egy éle, melyre $s \in S, t \in T$. A $G - e$ éleinek létezik $\nu(G)$ elemű $L := A \cup B$ lefogása, ahol $A \subseteq S, B \subseteq T$. Az L nem fogja le e-t, mert különben G éleinek is $\nu(G)$ elemű lefogása volna. $G-s$-nek van $\nu(G)$ elemű párosítása, amelynek B-t fedő M_B része $(*)$ miatt nem fedi A egyetlen pontját sem. $G-t$-nek van $\nu(G)$ elemű párosítása, amelynek A-t fedő M_A része $(*)$ miatt nem fedi B egyetlen pontját sem. De most $M_A \cup M_B \cup \{e\}$ párosítása G-nek, melynek elemszáma $|A|+|B|+1 = \nu(G)+1$, ellentmondás. □

A most következő algoritmikus bizonyítás lényegében Kőnig eredeti bizonyítása kicsit algoritmikusabb nyelven elmondva. (Kőnig nem tekintette explicit azt a kérdést, hogy miként lehet megtalálni a szóban forgó alternáló utakat, de a bizonyításából ez közvetlenül kiolvasható.)

Algoritmikus bizonyítás. A nemtriviális $\nu \geq \tau$ irány igazolásához konstruálunk egy M párosítást és egy L lefogást, melyek elemszáma ugyanaz. Az eljárás tetszőleges M párosításból indul ki, ami kezdetben az üres halmaz is lehet. Az általános lépésben vagy találunk egy nagyobb párosítást, és ekkor a nagyobb párosításra vonatkozóan iteráljuk az eljárást, vagy pedig egy $|M|$-mel megegyező elemszámú lefogást, amikor is az algoritmus véget ér.

Irányítsuk meg M éleit T-től S felé, míg az összes többi élt fordítva. Jelölje R_S illetve R_T az S-ben illetve a T-ben az M által fedetlen pontok halmazát. Jelölje Z az R_S pontjaiból az így kapott irányított gráfban irányított úton elérhető pontok halmazát (amit szélességi kereséssel találhatunk meg).

Két eset lehetséges. Amennyiben R_T-nek esik pontja Z-be, akkor megkaptunk egy olyan R_S-t és R_T-t összekötő P utat, amely M-ben alternál. Most M és P szimmetrikus differenciája egy M-nél eggyel több élből álló M' párosítás. (Technikailag az eljárást nagyon egyszerű végrehajtani: a megtalált út éleinek irányítását egyszerűen megfordítjuk.)

A másik esetben R_T diszjunkt Z-től. Z definíciója folytán Z-ből nem lép ki irányított él. Érvényes továbbá, hogy Z-be nem lép be megirányított $uv \in M$ párosítás él, hiszen v csak u-n keresztül érhető el, így v csak akkor lehetett irányított úton elérhető R_S-ből, ha u is az volt.

Következik, hogy az $L := (T \cap Z) \cup (S - Z)$ halmaz egyrészt lefogja az összes élt, másrészt minden M-beli élnek pontosan az egyik végpontját tartalmazza, tehát $|M| = |L|$. □

A fenti bizonyítás egyúttal hatékony algoritmust is jelent a szóban forgó optimumok meghatározására. A lépésszám megbecsléséhez figyeljük meg, hogy legfeljebb $n/2$ alkalommal kell utat keresnünk. Miután egyetlen út megkeresése az élszámmal arányos időben történhet, az összlépésszám nem nagyobb, mint $O(nm)$ (ahol n a gráf pontszáma, míg m az élszáma).

A Kőnig tételhez szorosan kapcsolódik Hall tétele.

2.2 Tétel. *Egy $G = (S, T; E)$ páros gráfban akkor és csak akkor létezik S-t fedő párosítás, ha teljesül a Hall-féle feltétel:*

$$|\Gamma(X)| \geq |X| \quad \textit{minden } X \subseteq S \textit{ részhalmazra}\,, \tag{3}$$

ahol $\Gamma(X)$ jelöli azon T-beli pontok halmazát, melyeknek van szomszédja X-ben.

A tételt rögtön kicsit általánosabb alakban igazoljuk. Definiáljuk egy $X \subseteq S$ halmaz **hiányát** a $h(X) := (|X| - |\Gamma(X)|)$ értékkel és legyen $\mu = \mu(G, S)$ a maximális hiány, azaz

$$\mu := \max_{X \subseteq S} h(X)\,. \tag{4}$$

2.3 Tétel. *Egy $G = (S, T; E)$ páros gráfban egy párosítás által nem fedett S-beli pontok minimális száma egyenlő μ-vel.*

Bizonyítás. A max $\leq$ min egyenlőtlenség nyilván fennáll. A fordított irány igazolásához legyen M egy maximális (azaz ν elemű) párosítás és L egy minimális (azaz $\tau = \nu$ elemű) lefogás. Legyen $X := S - L$. Ekkor M pontosan $|S| - \nu$ elemét nem fedi S-nek. Másrészt $\Gamma(X) \subseteq L - S$ és így

$$|X| - |\Gamma(X)| \geq |S - L| - |L - S| = |S| - |L| = |S| - \tau = |S| - \nu\,.$$

□

Legyen $\mathcal{F}$ az S maximális (azaz μ) hiányú részhalmazainak rendszere, vagyis $\mathcal{F} := \{X \subseteq S : |X| - |\Gamma(X)| = \mu\}$. Az $\mathcal{F}$ tagjait röviden *max-hiányú* halmazoknak fogjuk hívni. Az előbbi bizonyítás mutatja, hogy egy-egy értelmű kapcsolat áll fenn a minimális lefogások és a max-hiányú S-beli halmazok között: Ha L minimális lefogás, akkor $S - L$ max-hiányú halmaz, míg ha $H \subseteq S$ max-hiányú halmaz, akkor $\Gamma(H) \cup (S - H)$ minimális lefogás lesz.

2.4 Lemma. *$\mathcal{F}$ zárt a metszet és unió képzésre.*

Bizonyítás. Könnyű ellenőrizni, hogy a h függvény szupermoduláris, azaz $h(X) + h(Y) \leq h(X \cap Y) + h(X \cup Y)$. Tegyük most fel, hogy X és Y két maximális hiányú halmaz (azaz $\mathcal{F}$ elemei). Ekkor $\mu + \mu = h(X) + h(Y) \leq h(X \cap Y) + h(X \cup Y) \leq \mu + \mu$, és emiatt valóban $h(X \cap Y) = \mu$, $h(X \cup Y) = \mu$. □

A lemmából következik, hogy az összes max-hiányú halmaz metszete is és uniója is max-hiányú, azaz létezik egy egyértelmű legszűkebb és egy legbővebb max-hiányú halmaz. Megjegyzendő, hogy Kőnig fenti alternáló utas algoritmusa segítségével e két halmaz könnyen megkonstruálható. Például, a legszűkebb K max-hiányú halmaz, amint azt könnyű kimutatni, éppen $Z \cap S$ lesz, ahol Z jelölte az irányított segédgráfban az R_S-ből elérhető pontok halmazát. Ez egyúttal azt is mutatja, hogy az algoritmus által produkált $(S - K \cup \Gamma(K))$ lefogás nem függ az algoritmus futásától (szemben az algoritmus által szolgáltatott párosítással). A súlyozott párosítási algoritmus bizonyításához szükségünk lesz még az alábbi hasznos megfigyelésre.

2.5 Lemma. *Legyen $K \subseteq S$ a legszűkebb max-hiányú halmaz G-ben. Ha a gráfból kitöröljük az összes olyan élt, amely $\Gamma(K)$ és $S-K$ között vezet, akkor a létrejövő G' gráfban a maximális hiány ugyanaz, mint G-ben. Továbbá G és G' max-hiányú halmazainak rendszere ugyanaz.*

Bizonyítás. Miután G egy M maximális párosításának a $\Gamma(K)$-t fedő élei mind K-ban végződnek, az M benne van G'-ben is, vagyis G' max hiánya legfeljebb akkora, mint G-é, de persze kisebb nem lehet, mert G' részgráfja G-nek. Ebből az is következik, hogy a G egy max-hiányú halmaza G'-ben is max-hiányú. Legyen most X tetszőleges max-hiányú halmaz G'-ben. Mivel K max-hiányú G'-ben is, a 2.4 lemma szerint $K \cap X$ is max-hiányú G'-ben. De akkor $K \cap X$ max-hiányú G-ben, hiszen $K \cap X$-ből induló élt nem töröltünk, és így a K minimalitása folytán $K \subseteq X$. Ekkor viszont $\Gamma(X) = \Gamma'(X)$, azaz X max-hiányú G-ben is. □

2.2 Súlyozott párosítások

Egervárynak az 1.2 tételére adott eredeti bizonyításának a váza a következő. Legyen π egy minimális súlyú nemnegatív, egészértékű súlyozott lefogás. (A π súlyán a $\sum[\pi(v) : v \in S \cup T]$ összeg értendő.) Feltehetjük, hogy π az S elemein mindenütt pozitív, mert ha nem, akkor az S-beli pontokon eggyel növelve, a T-beli pontokon eggyel csökkentve már ilyen lesz. Amennyiben azon élek G_π részgráfjában, melyekre $\pi(u) + \pi(v) = c(uv)$ létezik teljes M párosítás, úgy M maximális súlyú párosítás, melynek súlya egyenlő a $\pi(v)$ értékek összegével. Ha viszont G_π-ben nincs teljes párosítás, úgy Kőnig vagy Hall tétele alapján létezik hiányos X halmaz, azaz olyan, amelynek $|X|$-nél kevesebb szomszédja van. A π értékeit az X pontjain eggyel csökkentve, a $\Gamma_{G_\pi}(X)$ pontjain pedig eggyel növelve, egy másik nemnegatív, súlyozott lefogást kapunk, amelynek súlya kisebb, mint π-é, ellentmondásban π minimális választásával.

Ez a bizonyítás könnyen algoritmizálható, hiszen tetszőleges π súlyozott lefogásból kiindulva vagy talál egy maximális súlyú teljes párosítást, és ekkor az aktuális π is optimális, vagy pedig talál egy jobb súlyozott lefogást, amivel az eljárást iterálva véges sok lépés után az első eset következik be. Egy kézenfekvő gyorsítási lehetőség azonnal kínálkozik (amint azt Egerváry a későbbi [9] dolgozatában maga is javasolja): a π súlyozott lefogás módosításakor ne eggyel növeljünk vagy csökkentsünk, hanem a legnagyobb olyan δ értékkel, amelyre a módosított π' még súlyozott lefogás. Az így nyert eljárást nevezzük Egerváry algoritmusának. (Hangsúlyozzuk, hogy ez nem ugyanaz, mint a H. W. Kuhn által kifejlesztett primál-duál eljárás, amit ma valójában a világban Kuhn javaslata nyomán Magyar Módszernek hívnak.)

Az Egerváry algoritmusnak az az előnye is megvan, hogy nem egészértékű c súlyfüggvényre is működik, bár ekkor még az is kérdés, hogy az eljárás véges-e egyáltalán, és Egerváry valójában a nemegész c esetét nem algoritmikusan, hanem folytonossági megfontolásokkal intézte el.

Nem kevésbé fontos a másik kérdés, hogy Egerváry algoritmusa milyen hatékony, akár egész a c, akár nem. Példával megmutatható, hogy ha tetszőleges olyan X halmazt használunk a π módosítására, amely megsérti a Hall-féle feltételt, akkor az algoritmus nem polinomiális futásidejű (és ez a kellemetlenség még akkor is előfordulhat, ha X maximális hiányú halmaz.) Ráadásul irracionális költségek esetén még azt sem tudjuk, hogy az algoritmus véges sok lépés után megáll-e.

Egerváry azonban [8]-ban azt javasolja, hogy a π változtatását annak a maximális hiányú X halmaznak a segítségével végezzük, amelyet Kőnig alternáló utas algoritmusa szolgáltat, amely tehát a(z egyértelmű) legszűkebb max-hiányú halmaz. Az alábbiakban kimutatjuk, hogy Egerváry algoritmusa ilyenkor polinomiális, sőt erősen polinomiális futásidejű. Mivel nem jelent semmilyen többlet nehézséget, a bizonyítást rögtön a tétel azon csöppnyit általánosabb alakjára mondjuk el, amikor a páros gráf nem feltétlenül teljes, csupán azt írjuk elő, hogy tartalmazzon teljes párosítást.

2.6 Tétel. *Tegyük fel, hogy a $G = (S, T; E)$ páros gráfnak van teljes párosítása. Legyen továbbá $c : E \to \mathbf{R}_+$ az éleknek egy nemnegatív számokkal történő súlyozása. Ekkor G teljes párosításainak maximális súlya egyenlő a súlyozott lefogások minimális súlyával, ahol súlyozott lefogáson egy olyan $\pi : V \to \mathbf{R}$ függvényt értünk, amelyre $\pi(u) + \pi(v) \geq c(uv)$ a gráf minden uv élére fennáll. Amennyiben c egészértékű, úgy az optimális π is választható egészértékűnek. Amennyiben G teljes páros gráf, az optimális π választható nemnegatívnak.*

Bizonyítás. Tetszőleges M teljes párosításra és π súlyozott lefogásra fennáll, hogy $\sum(\pi(z) : z \in S \cup T) = \sum([\pi(u)+\pi(v)] : uv \in M) \geq \sum(c(uv) : uv \in M)$, vagyis a minimum valóban legalább a maximum. Az is kiolvasható, hogy itt egyenlőség pontosan akkor áll, ha az M párosítás minden uv éle *pontos* abban az értelemben, hogy $\pi(u) + \pi(v) = c(uv)$. Célunk tehát azt kimutatni, hogy létezik egy olyan π, amelyre nézve a pontos élek gráfjában létezik teljes párosítás.

Legyen π egy olyan súlyozott lefogás (egészértékű, ha c az), amelyre a pontos élek $G_\pi = (S, T; E_\pi)$ részgráfjában a $\mu_\pi (= |S| - \nu(G_\pi))$ érték minimális, és ezen belül, az (egyértelmű) legszűkebb max-hiányú $K \subseteq S$ halmaz a lehető legnagyobb. Készen vagyunk, ha a μ_π maximális hiány nulla, mert ez épp azt jelenti, hogy G_π-nek van teljes párosítása. Tegyük fel tehát, hogy $\mu_\pi > 0$. Mivel G-nek van teljes párosítása, biztosan van olyan e éle G-nek, amely K és $T - \Gamma_\pi(K)$ között vezet, ahol $\Gamma_\pi(K)$ jelöli a K szomszédainak halmazát a G_π-ben. Ilyen él nem pontos, így a

$$\delta := \min(\pi(u) + \pi(v) - c(uv) : uv \in E, u \in K, v \in T - \Gamma_\pi(K)) \qquad (5)$$

érték pozitív. Módosítsuk π-t úgy, hogy a K minden elemén δ-val csökkentjük, míg $\Gamma_\pi(K)$ minden elemén δ-val növeljük, azaz

$$\pi'(v) := \begin{cases} \pi(v) - \delta, & \text{ha } v \in K; \\ \pi(v) + \delta, & \text{ha } v \in \Gamma_\pi(K); \\ \pi(v), & \text{egyébként.} \end{cases} \tag{6}$$

A δ választása miatt az így módosított π' továbbra is súlyozott lefogás, amely egészértékű, ha c az volt. A π'-ra vonatkozó pontos élek $G_{\pi'}$ gráfja abban különbözik G_π-től, hogy van legalább egy éle (ahol a δ-t definiáló minimum felvétetett) K és $T - \Gamma_\pi(K)$ között, de biztosan nincsen éle $T \cap \Gamma_\pi(K)$ és $S - K$ között (miközben G_π-nek lehetett). A 2.5 lemma szerint $\mu_{\pi'} = \mu_\pi$, és $G_{\pi'}$-ben a legszűkebb max-hiányú halmaz szigorúan bővebb, mint K, és ez ellentmond π választásának.

Beláttuk tehát, hogy van olyan π súlyozott lefogás, amelyre a pontos élek részgráfjában van teljes párosítás. Végül tegyük fel, hogy G teljes páros gráf, és igazoljuk, hogy π választható nemnegatívnak. Legyen a π legnegatívabb értéke $-\alpha$ ahol $\alpha > 0$ és legyen $\pi(v) = -\alpha$, ahol v mondjuk S-ben van. ekkor minden $u \in T$ csúcsra $\pi(u) + \pi(v) \geq c(uv) \geq 0$ miatt $\pi(u) \geq \alpha$. Így ha π-t úgy módosítjuk, hogy S elemein növeljük α-val, míg T elemein csökkentjük α-val, akkor egy másik minimális súlyozott lefogás keletkezik, amelyik már nemnegatív. □

A 3. szakaszban még az is kiderül, hogy az optimális súlyozott lefogás pontosan akkor választható nemnegatívnak, ha a maximális súlyú párosítás teljes párosításon vétetik fel (amely feltétel persze teljes páros gráf esetén fennáll.)

A bizonyítás alapján Egerváry algoritmusa a következő. Az algoritmus bemenete egy teljes párosítással rendelkező páros gráf, míg a kimenete egy maximális súlyú párosítás és egy minimális súlyú súlyozott lefogás. Szubrutinként szükségünk van a súlyozatlan esetre vonatkozó fentebb ismertetett alternáló utas algoritmusra, amely egy tetszőleges $G' = (S, T; E')$ páros gráfban megkonstruál egy maximális M' párosítást és a(z egyértelmű) legszűkebb $K' \subseteq S$ max-hiányú halmazt (melyekre tehát $|M'| = |\Gamma'(K')| + |S - K'|$). Hivatkozás kedvéért ezt Kőnig szubrutinnak nevezzük.

Az algoritmus egy általános lépésében rendelkezésre áll egy π súlyozott lefogás (amely egészértékű, ha c az, és amely kezdetben lehet például az azonosan α lefogás, ahol α a $c(e)$ költségek maximuma. Alkalmazzuk a Kőnig szubrutint a π-re nézve pontos élek G_π részgráfjára. Amennyiben G_π-ben van M teljes párosítás, úgy az algoritmus az aktuális π súlyozott lefogás és M teljes párosítás kiadásával véget ér. Ha viszont G_π-nek nincs teljes párosítása, úgy a szubrutin által szolgáltatott (G_π-re nézve) legszűkebb K_π max-hiányú halmaz segítségével (6) szerint módosítjuk π-t, és az eljárást iteráljuk.

Mi mondható az algoritmus lépésszámáról? Tekintsük egy fázisnak az algoritmus azon szakaszát, amíg a pontos élek (egyre változó) részgráfjában a maximális hiány változatlan. Nyilván legfeljebb $|S|$ fázis létezik. Egy fázis során a szubrutint legfeljebb $|S|$-szer hívjuk meg, hiszen beláttuk, hogy a π

cseréjekor a legszűkebb max-hiányú halmaz szigorúan bővül. Vagyis a súlyozatlan esetre vonatkozó alternáló utas algoritmusnak legfeljebb $|S|^2$-szeri meghívásával az algoritmus futása befejeződik. Miután Kőnig algoritmusának lépésszámára $O(|S||E|)$ korlát volt mondható, a leírt súlyozott eljárás teljes futásideje $O(|S|^3|E|)$.

Bár ez a lépésszám nem különösebben látványos (és valójában hatékonyabb eljárások is léteznek), mindenesetre azt megkaptuk, hogy az algoritmus polinomiális futásidejű, sőt erősen polinomiális is abban az értelemben, hogy a futásidő egyáltalán nem függ a szereplő c költségfüggvénytől, amennyiben feltesszük, hogy a számokkal végzett összeadást, kivonást és összehasonlítást egyetlen lépésben tudjuk elvégezni.

A jelen megközelítés előnye, hogy tisztán mutatja a súlyozatlan és a súlyozott párosítási algoritmusok viszonyát. A súlyozatlan Kőnig-féle algoritmus teljesen szeparáltan, szubrutinként kerül felhasználásra. Amint azt H. W. Kuhn megmutatta, a két eljárás összevonható, aminek talán hátránya, hogy az algoritmus összetettebbé válik, de előnye, hogy jobb lépésszám becslés adódik. Most ismertetjük a Kuhn által javasolt Magyar Módszert.

Kuhn algoritmusa súlyozott teljes párosítás meghatározására

Az általános lépésben tekintjük a pontos élek által (az $S \cup T$ ponthalmazon) alkotott G_π részgráfot. Legyen M egy már rendelkezésre álló párosítás G_π-ben. Irányítsuk meg M éleit T-től S felé, míg az összes többi G_π-beli élt fordítva. Jelölje R_S illetve R_T az S-ben illetve a T-ben az M által fedetlen pontok halmazát. Jelölje Z az R_S pontjaiból az így kapott irányított gráfban irányított úton elérhető pontok halmazát (amit például szélességi kereséssel találhatunk meg). Amennyiben R_T-nek esik pontja Z-be, akkor megkaptunk egy olyan R_S-t és R_T-t összekötő P utat, amely M-ben alternál. Most M és P szimmetrikus differenciája egy M-nél eggyel több élből álló M' párosítás. Ekkor az eljárás egy fázisa véget ér, és az új M' párosítással folytatva iteráljuk az eljárást.

Nézzük most azt az esetet, amikor R_T diszjunkt Z-től. Legyen $K_\pi := Z \cap S$ és módosítsuk π-t a (6)-ban leírtak szerint. Ekkor az R_S-ből elérhető pontok halmaza szigorúan bővül. Így egy fázis (ami alatt tehát a pontos élek gráfjában a maximális párosítás elemszáma nem nő) $|S|$ útkereső eljárás alkalmazása után véget ér. Mivel egy útkeresés $O(|E|)$ lépésben végrehajtható és legfeljebb $|S|$ fázis van, az algoritmus teljes futásideje $O(|E||S|^2)$.

A fejezet lezárásaképp megmutatjuk, hogy a maximális súlyú (nem feltétlenül teljes) párosítás meghatározásának problémája egyszerű fogással visszavezethető a maximális súlyú teljes párosítására.

2.7 Tétel. *Egy $G' = (S', T'; E')$ páros gráfban nemnegatív c súlyfüggvény esetén a párosítások maximális ν'_c súlya egyenlő a nemnegatív (!) súlyozott lefogások minimális τ'_c súlyával. Amennyiben c egészértékű, az optimális π' is választható egészértékűnek.*

Bizonyítás. A $\nu'_c \le \tau'_c$ egyenlőtlenség nyilvánvaló, így csak a fordított iránnyal foglalkozunk. Új pontok esetleges hozzávételével elérhetjük, hogy a páros gráf két osztálya egyforma méretű legyen. Egészítsük ki a gráfot 0 súlyú élek bevételével egy G teljes páros gráffá. A súlyfüggvény ezen kiterjesztését továbbra is jelölhetjük c-vel. A 2.6 tétel (második része) szerint G-nek létezik egy M teljes párosítása és c-nek egy π nemnegatív súlyozott lefogása, melyekre $c(M) = \sum \pi(v)$. Mivel az új élek súlya 0, így az új élek kihagyásával M-ből keletkező G'-beli M' párosítás súlya változatlanul $c(M)$. Miután új pontból (ha van) csak 0 súlyú él megy ki, így π értéke az új pontokon 0, vagyis, ha π-t megszorítjuk az eredeti pontokra, akkor a keletkező π'-re $\sum \pi'(v) = \sum \pi(v)$, és így $\sum \pi'(v) = c(M')$. □

Végül megjegyezzük, hogy tetszőleges rögzített k pozitív egészre Ford és Fulkerson minimális költségű folyam algoritmusának segítségével ki lehet számolni a maximális (vagy minimális) súlyú k élű párosítást, ha ilyen párosítás egyáltalán létezik.

3 Teljesen unimoduláris mátrixok az optimalizálásban

Az alábbiakban ismertetjük azt a Hoffmantól és Kruskaltól [13] származó megközelítést, amely rávilágít arra a háttérben megbújó mélyebb okra, ami miatt Egerváry tétele fennáll. Ez pedig az, hogy egy páros gráf pont-él incidencia mátrixa teljesen unimoduláris, és a lineáris programozás dualitás tételében az optimumok egészértékű vektoron is felvétetnek, amennyiben a feltételi mátrix teljesen unimoduláris.

Az alábbiakban egy mátrixot vagy egy vektort akkor nevezünk egésznek vagy egészértékűnek, ha minden eleme (komponense) egész szám. Valamely A mátrixot akkor nevezünk *teljesen unimodulárisnak*, ha minden aldeterminánsa $(0, \pm 1)$ értékű. Speciálisan, ilyen mátrix minden eleme $0, +1$ vagy -1. Világos, hogy TU-mátrix transzponáltja is az. Sorokat vagy oszlopokat -1-gyel szorozva vagy elhagyva ismét TU-mátrixot kapunk. Továbbá, egységvektorokat sorként vagy oszlopként egy TU-mátrixhoz illesztve TU-mátrixot kapunk. Így, ha az A TU-mátrixot kiegészítjük egy I egységmátrixszal, akkor a keletkező (A, I) mátrix is TU-mátrix. Ha A TU-mátrix, úgy $(A, -A)$ is az.

Példaképp, legyen A egy $D = (V, E)$ irányított gráf incidencia mátrixa, azaz A sorai a V-nek, oszlopai E-nek felelnek meg, és az $a_{v,e}$ elem akkor $+1$ illetve -1, ha az e él belép illetve kilép v-ből (egyébként 0). Nem nehéz igazolni, hogy digráf incidencia mátrixa teljesen unimoduláris, és hogy páros gráf incidencia mátrixa teljesen unimoduláris.

Ezeket általánosítja a *hálózati mátrix*. Legyen D olyan irányított gráf, amely irányítatlan értelemben összefüggő, és legyen F egy feszítő fa. Az A mátrix sorai az F éleinek felelnek meg, míg az oszlopai az F-en kívüli éleknek. Minden uv nem-fa élre a fában egy egyértelmű (nem biztosan irányított) út vezet v-ből u-ba. Ennek egy f elemére a mátrix $a_{f,e}$ elemét definiáljuk 1-nek, ha f iránya megegyezik az útéval és -1-nek, ha azzal ellentétes. A mátrix minden más eleme 0. Számos érdekes alkalmazást tesz lehetővé az alábbi Tutte-tól való eredmény.

3.1 Tétel. *Az A hálózati mátrix teljesen unimoduláris.*

Bizonyítás. Mivel hálózati mátrix részmátrixa is az, elég azt belátni, hogy egy négyzetes hálózati mátrix determinánsa $0,1$ vagy -1. Hálózati mátrix sorát vagy oszlopát -1-gyel szorozva hálózati mátrixot kapunk. Egy sor vagy oszlop -1-gyel való szorzása annak felel meg, hogy a megfelelő élt (akár fa-él, akár nem-fa él) átirányítjuk.

Tekintsük a fának egy v végpontját. Ha az F fa v-vel szomszédos éléhez tartozó sorban lévő nemnulla elemek α száma legfeljebb 1, akkor a determináns kifejtési szabály alapján indukcióval készen vagyunk. Tegyük fel, hogy $\alpha > 1$, vagyis v szomszédos legalább két nem-fa éllel. Átirányítás miatt feltehető, hogy ezek közül pontosan egy van v felé irányítva. Legyen ez sv és legyen vt egy másik nem-fa él. Ha az sv-nek megfelelő oszlopot, hozzáadjuk a vt-nek megfelelő oszlophoz, akkor egyrészt persze a determináns értéke nem változik, másrészt ismét hálózati mátrixot kapunk, éspedig azé a gráfét, amelyben a vt él helyett az st él szerepel.

Ilyen átalakításokkal egy olyan digráfot kaphatunk, amelyben az F feszítő fa változatlan, egyetlen nem-fa él (nevezetesen sv) szomszédos v-vel, vagyis a hozzátartozó hálózati mátrix v-nek megfelelő sorában egy nemnulla elem van. Ilyen hálózati mátrixról pedig már láttuk, hogy a determinánsa $0, \pm 1$, ugyanakkor a fenti operációk nem változatták a determináns abszolút értékét. □

Most megvizsgáljuk, hogy a lineáris programozás dualitás tétele illetve a Farkas lemma miként alkalmazható olyan kombinatorikus optimalizálási feladatok esetén, mint amilyen a súlyozott párosítás problémája. A megoldás kulcsa az a megfigyelés lesz, hogy bizonyos speciális feltételi mátrixok esetén az optimum mindig egész vektoron is felvétetik.

Adott $M = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ mátrixhoz tekintsük a

$$Px = b_0, \quad Qx \leq b_1 \tag{7}$$

lineáris rendszert. Tegyük fel, hogy ennek megoldás halmaza az R poliéder nem üres. Az R egy elemét nevezzük *erős bázis-megoldás*nak, ha előáll valamely $M'x' = b'$ egyenletrendszer egyértelmű megoldásának nulla komponensekkel való kiegészítéseként, ahol M' az M egy $[(r(M) \times (r(M)]$-es nemszinguláris részmátrixa és b' jelöli a b azon részét, amely az M' sorainak felel meg. (Könnyű igazolni, hogy egy $\{Ax = b, x \geq 0\}$ alakú rendszer egy megoldása pontosan akkor erős bázis-megoldás, ha a pozitív komponenseihez tartozó A-oszlopok lineárisan függetlenek). Abban a speciális esetben, amikor R csúcsos, némi munkával igazolható, hogy az erős bázis-megoldások éppen az R csúcsai. A definícióból következik, hogy legfeljebb csak véges sok erős bázis-megoldás létezhet. A Caratheodory tétel egy változata szerint mindig létezik erős bázis-megoldás, sőt tetszőleges olyan c célfüggvényre, amelyre cx felülről korlátos az R poliéderen, érvényes, hogy az R bármely x' eleméhez létezik egy olyan x^* erős bázis-megoldás, amelyre $cx^* \geq cx'$, amiből adódik, hogy a $\max\{cx : x \in R\}$, ha korlátos egyáltalán, akkor egy erős bázis-megoldáson felvétetik.

3.2 Lemma. *Tetszőleges M TU-mátrixszal megadott (7) egyenlőtlenségrendszer esetén, ha a jobboldali korlátozó b vektor egész, akkor minden erős bázis-megoldás egész.*

Bizonyítás. Egy erős bázis-megoldás előáll valamely $M'x' = b'$ egyenletrendszer egyértelmű megoldásának nulla komponensekkel való kiegészítéseként, ahol M' az M egy $[(r(M) \times (r(M)]$-es nemszinguláris részmátrixa és b' jelöli a b azon részét, amely az M' sorainak felel meg. Mármost, ha M TU-mátrix, akkor a nemszinguláris M' determinánsa $+1$ vagy -1. A Cramer szabály szerint, miután b' egész, az egyértelmű x' megoldás is az. □

3.3 Lemma. *Legyen c tetszőleges (nem feltétlenül egészértékű) vektor. Bármely*

$$M = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$$

TU-mátrixszal megadott $K := \{x : Px = 0,\ Qx \leq 0\}$ metszet-kúpnak, ha van olyan x' eleme, amelyre $cx' > 0$, akkor K-nak van ilyen $(0, \pm 1)$-értékű eleme is.

Bizonyítás. Mivel x' pozitív számszorosa is K-ban van, feltehető, hogy x' maga olyan, hogy minden komponense a $[-1, +1]$ zárt intervallumba esik. Vagyis a

$$(-1, \ldots, -1) \leq x \leq (1, \ldots, 1), \quad Px = 0, \quad Qx \leq 0 \tag{9}$$

rendszer által meghatározott korlátos poliédernek x' olyan eleme, amelyre $cx' > 0$. Ekkor az előbb említett tulajdonság szerint van olyan x^* erős bázismegoldása (8)-nak, amelyre $cx^* \geq cx'$. A 3.2 lemma miatt x^* egészértékű, azaz minden komponense $0, \pm 1$. □

A Farkas lemma (egyik változata) azt mondja ki, hogy a (7) és az alábbi (9) lineáris rendszerek közül pontosan az egyik oldható meg. Amennyiben a szereplő M mátrix teljesen unimoduláris, a megoldásokról több mondható:

3.4 Tétel. *Tegyük fel, hogy az $M = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ mátrix teljesen unimoduláris. Ha a (7) primál probléma oldható meg és a korlátozó b vektor egész, akkor (7)-nek van egész megoldása is. Ha az*

$$y_1 \geq 0, \quad yM = 0, \quad yb < 0 \tag{9}$$

duális probléma oldható meg, ahol $y = (y_0, y_1)$, akkor van $(0, \pm 1)$-értékű y megoldás is (függetlenül b egészértékűségétől).

Bizonyítás. A tétel első fele következik a 3.2 lemmából, és abból a már említett eredményből, hogy ha létezik megoldás, akkor létezik erős bázismegoldás is. A tétel második fele pedig a 3.3 lemma közvetlen folyománya. □

3.5 Tétel. *Ha a* $\max(cx : Px = b_0, Qx \leq b_1)$ *lineáris programozási problémának létezik megoldása, továbbá ha az* $M = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ *mátrix teljesen unimoduláris és* b *egész, akkor az optimum egész vektoron is felvétetik (függetlenül attól, hogy* c *egészértékű vagy sem).*

Bizonyítás. Miután az optimum erős bázis-megoldáson is felvétetik, a 3.2 lemmából az eredmény következik. □

Alkalmazásként először levezetjük Kőnig tételét.

A 2.1 tétel bizonyítása. Nyilván minden gráfra $\nu \leq \tau$. Az egyenlőség igazolásához azt kell kimutatnunk, hogy páros gráfban létezik olyan párosítás és olyan lefogó pontrendszer, melyek elemszáma megegyezik.

A páros gráf incidencia mátrixát jelölje A, amelyben a soroknak a gráf pontjai, az oszlopoknak a gráf élei felelnek meg. Tekintsük a következő primál-duál lineáris program párt:

$$\max(1x : Ax \leq 1,\ x \geq 0)\ , \tag{10}$$

$$\min(1y : yA \geq 1,\ y \geq 0)\ . \tag{11}$$

A 3.5 tétel szerint mindkét programnak az optimuma egész vektoron felvétetik. Jelöljük ezeket rendre x_0-lal és y_0-lal. (10) minden egészértékű megoldása $0-1$ értékű, és rögtön látszik, hogy (11) minden optimális egészértékű megoldása is $0-1$ értékű. Legyen M azon élek halmaza, melyeken x_0 az 1 értéket veszi fel, és legyen L azon pontok halmaza, amelyeken y_0 az 1 értéket veszi fel. Az $Ax \leq 1$ feltétel azt jelenti, hogy M párosítás a gráfban, míg az $yA \geq 1$ feltétel azt jelenti, hogy L az éleket lefogó pontrendszer. A primál és duál optimum értékek egyenlősége pedig azt jelenti, hogy $|M| = |L|$, ami a célunk volt. □

Természetesen a primál programban az azonosan 1 célfüggvény helyett választhatunk tetszőleges c célfüggvényt. Ekkor a fenti módszer kiadja a 2.6 tételt, sőt annak utolsó mondatát még az alábbi erősebb alakban: *Az optimális* π *akkor és csak akkor választható nemnegatívnak, ha a maximális súlyú párosítás teljes párosításon is felvétetik.*

További általánosításokat kaphatunk, ha a primál feladatban a jobboldalt valamilyen (nemnegatív) b vektornak választjuk. Ennek az a kombinatorikus jelentése, hogy maximális költségű fokszám-korlátozott részgráfot keresünk. Természetesen alsó korlátokat is kitűzhetünk a fokszámokra, mint ahogy korlátozhatjuk alulról és felülről azt, hogy egy élt hány példányban vehetünk be a keresett részgráfba. Valójában nem is érdemes megfogalmazni a különböző lehetőségekre vonatkozó min-max tételeket, mert a dualitás tétel és a páros gráf incidencia mátrixának teljes unimodularitása már magában hordozza a szükséges információt.

A szakasz befejezéseként megmutatjuk, hogy a TU-mátrixokra vonatkozó Farkas lemma (3.4 tétel) miként adja ki Hoffman megengedett áram tételét. Jelöljön $D = (V, E)$ egy irányított gráfot. Legyen $f : E \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ alsó kapacitás, $g: E \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ felső kapacitás úgy, hogy $f \leq g$. Valamely $x: E \to \mathbf{R}$ vektorra és $S \subseteq V$ részhalmazra legyen $\varrho_x(S) := \sum(x(uv) : uv \in E, uv$ belép S-be) és legyen $\delta_x(S) := \varrho_x(V - S)$. Az x vektort *áramnak* (cirkulációnak) nevezzük, ha teljesül a rá *megmaradási szabály*, azaz $\varrho_x(v) = \delta_x(v)$ fennáll minden v csúcsra. Az x áramot *megengedettnek* mondjuk, ha

$$f \leq x \leq g\,. \tag{12}$$

3.6 Tétel (A. Hoffman, 1960). *Akkor és csak akkor létezik megengedett áram, ha*

$$\varrho_f(X) \leq \delta_g(X) \text{ minden } X \subseteq V \text{ halmazra.} \tag{13}$$

Továbbá, ha f és g egészértékűek, és (13) fennáll, akkor létezik egészértékű megengedett áram is.

Bizonyítás. A szükségesség igazolásához, tegyük fel, hogy x megengedett áram. Ekkor $\delta_g(X) - \varrho_f(X) \geq \delta_x(X) - \varrho_x(X) = 0$, amiből (13) következik.

Az elegendőséghez tekintsük az $\{Ax \leq 0, x \leq g, -x \leq -f\}$ rendszert. Figyeljük meg, hogy a jelen esetben egy x vektorra akkor és csak akkor teljesül az $Ax \leq 0$ egyenlőtlenség, ha $Ax = 0$. A 3.4 tételt alkalmazva kapjuk, hogy ha a fenti rendszernek nincs megoldása, akkor van olyan (y, u, v) $(0,1)$-értékű vektor, amelyre $(*)$ $yA + u - v = 0$ és $(**)$ $ug - vf < 0$. Mivel $f \leq g$, így minden élre feltehető, hogy $u(e)$ és $v(e)$ közül legalább az egyik nulla (ha ugyanis mindkettő 1, akkor mindkettőt helyettesíthetjük nullával.)

Jelölje Z azon z pontok halmazát, ahol az $y(z) = 1$. Ekkor $(*)$ miatt minden olyan e élre, amelynek mindkét vége vagy Z-ben vagy $V - Z$-ben van, $u(e) = v(e) = 0$. Továbbá minden Z-be belépő e élre $v(e) = 1$, $u(e) = 0$ és minden z-ből kilépő élre $v(e) = 0, u(e) = 1$. Miután $ug = \delta_g(Z)$ és $vf = \varrho_f(Z)$, így $(**)$ ellentmond a (13) feltételnek. □

4 Párosítások nem-páros gráfban

Nem-páros gráfokra a maximális (súlyú) párosítás meghatározásának problémája jóval nehezebb, mint a páros esetben. Ebben a fejezetben ismertetjük azt a döntően J. Edmondstól eredő elméleti hátteret, amely lehetővé tette [4] az algoritmusok kidolgozását. Maguk az algoritmusok összetettebbek annál, semhogy egy ilyen összefoglaló cikk keretében vállalkozhatnánk a bemutatásukra, ugyanakkor az alábbi fő eredményekre mára már viszonylag tömör bizonyítások állnak rendelkezésre. A közölt bizonyítások Schrijver [17] munkájából valók, némi egyszerűsítéssel.

4.1 Maximális elemszámú párosítások

A maximális elemszámú párosítás meghatározásának kérdésére Tutte tétele illetve a Berge-Tutte formula adja meg az elvi választ. A háromszög példája mutatja, hogy a páros gráfra vonatkozó esettel szemben, itt már a párosítások maximális ν elemszáma lehet szigorúan kisebb, mint a lefogó pontok minimális τ száma.

4.1 Tétel (W. T. Tutte). *Egy $G = (V, E)$ gráfban akkor és csak akkor létezik teljes párosítás, ha a csúcsok bármely X részhalmazát kihagyva a keletkező páratlan pontszámú komponensek $q(X)$ száma legfeljebb $|X|$.*

Ezt általánosítja (bárha könnyen levezethető belőle) a párosítások maximális számára vonatkozó Berge-Tutte formula.

4.2 Tétel (Berge-Tutte formula).

$$\nu(G) = \min(|V| - q(X) + |X| : X \subseteq V)/2\,. \tag{14}$$

Vagy ekvivalens alakban, egy párosítás által fedetlenül hagyott pontok minimális száma egyenlő $q(X) - |X|/2$ érték minimumával.

Bizonyítás. Egy összefüggő gráfot *(faktor-)kritikusnak* neveznek, ha bármely pontját kihagyva a maximális párosítás elemszáma nem csökken, más szóval minden csúcsot elkerül maximális párosítás. A bizonyítás egyszerű indukcióval fog következni az alábbi lemmából.

4.3 Lemma (Gallai). *Ha $H = (U, F)$ gráf kritikus, akkor $|U|$ páratlan és $\nu(H) = (|U| - 1)/2$, azaz H-nak van olyan párosítása, amely egyetlen pontot hagy fedetlenül.*

Bizonyítás. Kritikus gráfnak természetesen nem lehet teljes párosítása. Tegyük fel indirekt, hogy H egy maximális párosítása legalább két pontot fedetlenül hagy, és válasszuk meg ezt az M párosítást és a fedetlen s és t pontokat úgy, hogy a H-beli távolságuk minimális legyen. Ez a távolság persze nem lehet egy, azaz s és t nem lehet szomszédos, mert akkor az st élt M-hez véve nagyobb párosítást kapnánk. Az s-t és t-t összekötő P legrövidebb útnak legyen x egy belső pontja. Mivel H kritikus, létezik x-t elkerülő maximális M' párosítás. M és M' két maximális elemszámú párosítás, ezért szimmetrikus differenciájuk diszjunkt alternáló körökből és páros élszámú utakból áll. Ezek közül jelölje R az x-t tartalmazó utat. Ekkor M és R szimmetrikus differenciája egy olyan M'' maximális párosítás, amely szabadon hagyja x-t, és legalább az s és t pontok egyikét, és ez ellentmond az s, t és M választásának. □

Rátérve a Berge-Tutte formula bizonyítására, látható, hogy tetszőleges M párosítás és $X \subseteq V$ halmaz esetén legalább $q(X) - |X|$ pont marad fedetlen, azaz M legfeljebb $|V| - (q(X) - |X|)$ pontot fed, így az M elemszáma legfeljebb $(|V| - q(X) + |X|)/2$. Így (14)-ben $\nu(G) \leq \min$ következik.

A fordított irány bizonyításához V elemszáma szerinti indukciót alkalmazunk. Ha $|V| = 0$, akkor (14) mindkét oldala 0. Tegyük fel tehát, hogy $|V| \geq 1$ és azt, hogy a (14) formula érvényes minden kisebb gráfra. Nyilván feltehető, hogy G összefüggő. Azt kell kimutatnunk, hogy létezik egy olyan $X_0 \subseteq V$ halmaz, amelyre

$$\nu(G) \geq (|V| - q(X_0) + |X_0|)/2\,. \tag{15}$$

1. eset *G nem kritikus*, azaz van olyan v pontja, amelyet elhagyva a keletkező G' gráfra $\nu(G') \leq \nu(G) - 1$. Legyen $V' := V - v$. Indukciót használva kapjuk, hogy létezik olyan $X_0' \subseteq V - v$, amelyre $\nu(G') = (|V'| - q'(X_0') + |X_0'|)/2$, ahol $q'(X_0')$ a $G' - X_0'$-ben jelöli a páratlan komponensek számát. Legyen $X_0 := X_0' + v$. Nyilván $q(X_0) = q'(X_0')$. Ezeket összevetve kapjuk:

$$\nu(G) - 1 \geq \nu(G') = (|V'| - q'(X_0') + |X_0'|)/2 = (|V| - q(X_0) + |X_0| - 2)/2\,,$$

ami éppen (15).

2. eset *G kritikus.* A Gallai lemma alapján $\nu(G) = (|V| - 1)/2$. Tehát $X_0 := \emptyset$ választással

$$\nu(G) = (|V| - 1)/2 \geq (|V| - q(X_0) + |X_0|)/2\,,$$

azaz (15) fennáll. □

4.2 A súlyozott párosítások problémája

Hogyan lehet nempáros gráfban egy maximális súlyú (teljes) párosítást megtalálni, és egyáltalán mi mondható a maximális súlyú párosítás súlyáról vagy a minimális költségű teljes párosítás költségéről? Magyarán, mi Egerváry tételének nempáros gráfos megfelelője? A megoldáshoz J. Edmonds zseniális ötlete adja a kulcsot. Ennek lényege a következő. Tekintsük a teljes párosítások (incidencia vektorainak) konvex burkát. Írjuk ezt le egyenlőtlenségekkel, majd alkalmazzuk a lineáris programozás dualitás tételét. A terv nehézsége persze az egyenlőtlenségek megtalálásában van, de az adott problémára Edmondsnak ez fényesen sikerült.

Feltesszük, hogy a szereplő gráfok hurok-mentesek. Célunk tehát egyenlőtlenségekkel (azaz félterek metszeteként) megadni egy $G = (V, E)$ gráf párosításai illetve teljes párosításai incidencia vektorainak konvex burkát, melyeket rendre B_P illetve B_{TP}-vel fogunk jelölni. Továbbiakban rövidség kedvéért egyszerűen csak párosítások konvex burkáról beszélünk. Miután tetszőleges politop felírható véges sok féltér metszeteként, tudjuk, hogy létezik ilyen leírás. Ennek explicit megadása azzal az előnnyel jár, hogy a lineáris programozás dualitás tételét alkalmazva egy min-max tételt nyerhetünk a maximális súlyú párosítás illetve a minimális súlyú teljes párosítás súlyára.

Páros gráfok esetén a páros gráf incidencia mátrixának teljes unimodularitása miatt az $\{x : x \in \mathbf{R}_+^E,\ d_x(v) \leq 1 \text{ minden } v \in V \text{ csúcsra}\}$ poliéder csúcsai egészek, és így $0-1$ vektorok, vagyis párosítások incidencia vektorai, tehát ez a poliéder éppen a párosítás poliéder. Hasonlóképp, ha a $d_x(v) \leq 1$ egyenlőtlenségeket egyenlőségekre cseréljük, úgy megkapjuk a páros gráf teljes párosítás poliéderét. Nem páros gráf esetén azonban az így kapott poliéderek már nem írják le B_P-t illetve B_{TP}-t. Például egy háromszög esetén a mindenütt 1/2 vektorra $d_x(v) = 1$ teljesül, de ez nem lehet B_T-ben, mert abban bármely vektorban a komponensek összege legfeljebb 1 lehet.

Jelölje $\mathcal{O}$ a V legalább háromelemű páratlan elemszámú részhalmazainak rendszerét. Ennek bármely Z tagja olyan, hogy tetszőleges párosítás legfeljebb $(|Z| - 1)/2$ darab Z által feszített élt tartalmaz és tetszőleges teljes párosítás páratlan sok, így legalább egy élt tartalmaz a $[Z, V - Z]$ vágásból.

4.3 A teljes párosítás poliéder

Legyen $G = (V, E)$ teljes párosítással rendelkező irányítatlan gráf. Jelölje a teljes párosítások (incidencia vektorainak) konvex burkát P_G. Tekintsük a következő poliédert

$$P' := \tag{16}$$

$$\{\, x \in \mathbf{R}^E,\ x \geq 0,\ d_x(v) = 1 \text{ minden } v \in V \text{ csúcsra}, \tag{17}$$

$$d_x(Z) \geq 1 \text{ minden } Z \in \mathcal{O}\text{-ra.}\,\} \tag{18}$$

4.4 Tétel (Edmonds). $B_{TP} = P'$

Bizonyítás. Paritási megfontolásból adódik, hogy egy M teljes párosítás és egy páratlan elemszámú Z halmaz esetén $d_M(Z)$ páratlan és így legalább 1. Emiatt $B_{TP} \subseteq P'$. A fordított irányú tartalmazás igazolásához tekintsünk P'-nek egy x elemét. Erről fogjuk kimutatni, hogy előáll teljes párosítások konvex kombinációjaként.

Feltehetjük, hogy x minden élen pozitív, mert azon éleket, ahol 0, kihagyhatjuk a gráfból. Nevezzünk egy $Z \subseteq V$ halmazt *pontosnak* (x-re nézve), ha $|Z|$ páratlan és $d_x(Z) = 1$. Egy pontos halmaz komplementere is pontos. Z pontos halmaz *valódi*, ha $|Z| \geq 3, |V - Z| \geq 3$. Jelölje $d(Z, Z')$ a $Z - Z'$ és $Z' - Z$ között vezető élek számát.

4.5 Lemma. *Ha Z és Z' olyan pontos halmazok, melyek metszete páratlan elemszámú, akkor metszetük és uniójuk is pontos. Továbbá ilyenkor $d(Z, Z') = 0$.*

Bizonyítás. Ha a metszet páratlan, akkor az unió is, ezért $1 + 1 = d_x(Z) + d_x(Z') = d_x(Z \cap Z') + d_x(Z \cup Z') + 2d_x(Z, Z') \geq 1 + 1 + 0$, amiből a lemma következik. □

Nevezzünk egy M párosítást (az x-re nézve) *feszesnek*, ha M teljes párosítás és $d_M(Z) = 1$ fennáll minden Z pontos halmazra. A tétel bizonyításához arra lesz csak szükségünk, hogy létezik feszes párosítás, de kényelmesebb kicsit többet igazolni:

4.6 Lemma. *Minden $e = uv \in E$ élhez létezik e-t tartalmazó feszes párosítás.*

Bizonyítás. Először nézzük meg azt az esetet, amikor nem létezik valódi pontos halmaz. Ekkor azt kell igazolnunk, hogy létezik e-t tartalmazó teljes párosítás, hiszen ez automatikusan feszes. Ha indirekt nem létezne ilyen, akkor Tutte tétele nyomán létezik egy olyan $A \subseteq V - \{u, v\}$ halmaz, amelyre a $G - \{u, v\} - A$ gráfban a páratlan komponensek t száma nagyobb, mint A elemszáma. Legyen $A' := A \cup \{u, v\}$, jelölje a szóban forgó páratlan komponenseket $Z_1, Z_2, \ldots, Z_t$, és legyen E' az A' és a páratlan komponensek között vezető élek halmaza. Mivel $|V|$ páros, t és $|A|$ ugyanolyan paritású, így $t \geq |A| + 2 = |A'|$. Ekkor egyrészt $x(E') = \sum(d_x(Z_i) : i = 1, \ldots, t) \geq t$, másrészt $x(E') \leq \sum(d_x(w) : w \in A') - x(uv) \leq |A'| - x(uv) < |A'|$, amiből $|A'| > t$ adódik, és ez az ellentmondás bizonyítja a lemmát abban az esetben, ha nincs valódi pontos halmaz.

Tegyük most fel, hogy Z_1 valódi pontos halmaz. Legyen $Z_2 := V - Z_1$ és jelölje rendre $G_1 = (Z_1 + z_2, E_1)$ és $G_2 = (Z_2 + z_1, E_2)$ a Z_2 illetve a Z_1 halmazok összehúzásával keletkező gráfokat, ahol z_i a Z_i halmaz összehúzásával keletkező csúcsot jelöli. Jelölje x_1 illetve x_2 az x vektor megszorítását az E_1 illetve az E_2 éleire. Miután $d_x(Z_1) = 1$, a G_i minden csúcsára teljesül $d_{x_i}(v) = 1$. Továbbá G_i minden páratlan elemszámú Z halmazára $d_{x_i}(Z) \geq 1$.

Tegyük először fel, hogy az $e = uv$ él mindkét vége ugyanabban a Z_i-ben van, mondjuk Z_1-ben. Indukcióval létezik G_1-nek egy M_1 feszes párosítása, amely tartalmazza e-t. Legyen f' az M_1-nek a z_2-t fedő éle. Jelölje f a G-nek azt az élét, amelyből a Z_2 összehúzásakor f' keletkezett és jelölje f'' a G_2-nek azt az élét, amely f-ből keletkezett a Z_1 összehúzásakor. (Vagyis f'' szomszédos a z_1 csúccsal.) Indukcióval létezik G_2-ben egy f''-t tartalmazó M_2 feszes párosítása. Ekkor $M := (M_1 - f') \cup (M_2 - f'') + f$ teljes párosítása G-nek, amely tartalmazza e-t.

Abban az esetben, ha e végpontjai különböző Z_i-khez tartoznak, akkor G_1-ben létezik e'-t tartalmazó M_1 feszes párosítás és G_2-ben létezik e''-t tartalmazó M_2 feszes párosítás és ilyenkor $M := (M_1 - e') \cup (M_2 - e'') + e$ teljes párosítása G-nek, amely tartalmazza e-t.

Állítjuk, hogy mindkét esetben M feszes. Valóban, tetszőleges $Z \subseteq V$ páratlan elemszámú halmazra $|Z \cap Z_1|$ és $|Z \cap Z_2|$ egyike páratlan, mondjuk $|Z \cap Z_1|$. A 4.5 lemma alapján $|Z \cup Z_1|$ és így $|Z_2 - Z|$ is páratlan és pontos, továbbá $|Z \cap Z_1|$ pontos és $d_x(Z, Z_1) = 0$. Emiatt $d_M(Z \cap Z_1) = d_{M_1}(Z \cap Z_1) = 1$, $d_M(Z_2 - Z) = d_{M_2}(Z_2 - Z) = 1$ és $d_M(Z, Z_1) = 0$. Ebből $1 + d_M(Z) = d_M(Z_1) + d_M(Z) = d_M(Z_1 \cap Z) + d_M(Z_1 \cup Z) + 2d_M(Z_1, Z) = 1 + 1 + 0$, amiből $d_M(Z) = 1$ következik, vagyis M valóban feszes. □

A tétel bizonyításához visszatérve, azt feltettük, hogy x mindenütt pozitív. Azt is feltehetjük, hogy G összefüggő. A tétel nyilvánvalóan igaz, ha G-nek egyetlen éle van. Tegyük fel tehát, hogy nem ez a helyzet. Ekkor $(*)$ x-nek van olyan komponense, amely kisebb, mint 1.

A 4.6 lemma szerint létezik egy M feszes párosítás. Tekintsük az $x_\alpha := (x - \alpha\chi_M)/(1 - \alpha)$ vektort. Mivel M teljes párosítás minden v csúcsra $d_{x_\alpha}(v) = 1$ teljesül bármely α értékre. Mivel M feszes, kicsiny pozitív α-ra $d_{x_\alpha}(Z) \geq 1$ fennáll minden páratlan Z-re. Mivel x mindenütt pozitív, kicsiny pozitív α-ra $x_\alpha \geq 0$. Válasszuk α-t maximálisra úgy, hogy $x_\alpha \in P'$, vagyis α a legnagyobb olyan szám, amelyre $\alpha \leq x(e)$ minden $e \in E$ élre és $(d_x(Z) - \alpha d_M(Z))/(1 - \alpha) \geq 1$ (Konkrétan $\alpha := \min\{\alpha_1, \alpha_2\}$, ahol $\alpha_1 = \min(x(e) : e \in E)$, és $\alpha_2 := \min\{(d_x(Z) - 1))/(d_M(Z) - 1) : Z$ nem-pontos páratlan halmaz.$\}$) Ekkor $(*)$ miatt $0 < \alpha < 1$, $x_\alpha \in P'$ és az α maximális választása miatt vagy x_α-nak van 0 komponense vagy x_α-ra nézve szigorúan több pontos halmaz létezik. Így indukcióval feltehetjük, hogy x_α benne van B_{TP}-ben, azaz előáll teljes párosítások konvex kombinációjaként. De akkor $x = \alpha\chi_M + (1 - \alpha)x_\alpha$ miatt x is előáll teljes párosítások konvex kombinációjaként. □

Tegyük fel, hogy $c : E \to \mathbf{R}_+$ egy adott súly- (vagy költség) függvény.

A teljes párosítás poliéder leírását és a dualitás tételt felhasználva kapjuk az alábbi formulát a teljes párosítások minimális súlyára.

4.7 Tétel (Edmonds). *A teljes párosítások minimális súlya egyenlő az alábbi maximummal:*

$$\max \sum \big(y(Z) : Z \subseteq V,\ |Z| \text{ páratlan}\big)\ , \tag{19}$$

ahol $y(Z) \geq 0$, *ha* $|Z| > 1$ *és minden* $e = uv \in E$ *élre*

$$\sum \big(y(Z) : |Z \cap \{u, v\}| = 1\big) \leq c(e)\ .$$

□

4.4 A párosítás poliéder

A teljes párosítások poliéderének leírását felhasználva egyszerű elemi konstrukció segítségével megadhatjuk a párosítások poliéderét. Jelölje $i_x(Z)$ a Z által feszített éleken az x komponenseinek összegét.

4.8 Tétel. *Tetszőleges* $G = (V, E)$ *gráf párosításai incidencia vektorai által feszített politop pontosan a következő poliéder:*

$$P_0 := \{\, x \in \mathbf{R}^E : x \geq 0\,, \tag{20}$$

$$d_x(v) \leq 1 \text{ minden } v \in V\text{-re}\,, \tag{21}$$

$$i_x(Z) \leq (|Z| - 1)/2 \text{ minden páratlan elemszámú } Z \subseteq V \text{ halmazra}\}\ . \tag{22}$$

Bizonyítás. Egy M párosítás $x := \chi_M$ incidencia vektorára nyilván mindkét egyenlőtlenség fennáll, így a párosítások konvex burkának elemeire is.

Megfordítva, legyen most x egy olyan vektor, amely az egyenlőtlenségeket kielégíti. Készítsük el a G gráfot két példányban, melyeket jelölje $G' = (V', E')$, $G'' = (V'', E'')$. Kössük össze a megfelelő v' és v'' pontokat egy-egy éllel és az így kapott gráfot (a $V' \cup V''$ ponthalmazon) jelöljük H-val. Készítsünk el egy y vektort a H gráf élein. G minden e élére legyen $y(e') := y(e'') := x(e)$, ezenkívül minden $v \in V$ csúcsra legyen $y(v'v'') := 1 - d_x(v)$.

Állítjuk, hogy y benne van a H teljes párosítás poliéderében. A definícióból nyilvánvaló, hogy $d_y(u) = 1$ fennáll H minden csúcsára. Legyen most $Z = A' \cup B''$ egy páratlan elemszámú halmaz. Ekkor $A - B$ és $B - A$ egyike páratlan elemszámú, mondjuk $A - B$, és így, $i_x(A - B) \leq (|A - B| - 1)/2$ miatt, $d_y(Z) \geq \sum[d_y(v') : v' \in (A' - B')] - 2i_y(A' - B') - d_y(A' - B', A' \cap B') + d_y(A'' - B'', A'' \cap B'') = |A - B| - 2i_x(A - B) \geq 1$. A 4.4 tétel miatt y a H teljes párosításainak konvex kombinációja, ami miatt ezen párosításokat a G-re megszorítva az x a G párosításainak konvex kombinációjaként áll elő. □

Figyeljük meg, hogy a tétel azzal ekvivalens, hogy a P_0 poliéder egész. Ez ugyanis azzal egyenértékű, lévén P_0 korlátos, hogy P_0 csúcsai egészek, ami a (21) miatt azt jelenti, hogy P_0 csúcsai $0-1$-vektorok. Miután a P_0-ban lévő (így (21)-et) kielégítő $0-1$-vektorok pont a párosítások incidencia vektorai, a tétel valóban azzal ekvivalens, hogy P_0 egész poliéder. A 4.8 tételben megadott leírást és a dualitás tételt összetéve, a következő eredmény adódik.

4.9 Tétel (Edmonds). *Legyen $G = (V, E)$ gráf élein adott a $c : E \to \mathbf{R}$ súlyfüggvény. A gráf maximális súlyú párosításának súlya egyenlő a*

$$\min \sum_{v\in V} \pi(v) + \sum_{Z\in \mathcal{O}} y(Z)(|Z|-1)/2) \tag{23}$$

értékével, ahol $\pi : V \to \mathbf{R}_+$, $y : \mathcal{O} \to \mathbf{R}_+$ nemnegatív és minden $uv \in E$ élre

$$\pi(u) + \pi(v) + \sum(y(Z) : u, v \in Z) \geq c(uv)\ .$$

□

Az Edmonds-féle program a párosítások esetére tehát sikerrel járt: egyenlőtlenségekkel leírtuk mind a párosítások, mind a teljes párosítások konvex burkának poliéderét, és a lineáris programozás dualitás tétele segítségével karakterizálni lehetett az optimum értékeket.

Ha mindezt algoritmikus szempontból is szeretnénk hasznosítani, rögtön nagy problémába ütközünk. A szóban forgó lineáris programokban exponenciálisan sok egyenlőtlenség szerepel (minden páratlan elemszámú halmaz definiál egyet). Tehát például egy száz pontú gráfnál egyszerűen le sem tudjuk explicit írni (elfogadható időben és helyen) ezen egyenlőtlenségeket, nemhogy mondjuk a szimplex módszer alkalmazásáról egyáltalán beszélhetnénk. J. Edmonds másik nagyszabású felismerése az volt, hogy az egyenlőtlenségek explicit felsorolására valójában nincs szükség. Megadott egy olyan direkt, konstruktív bizonyítást a 4.9 dualitás tételre, amely egyúttal polinomiális futásidejű algoritmust is eredményez. Eljárása az eredeti Magyar Módszer nagymérvű általánosításának tekinthető.

Megjegyzendő, hogy amiképp a Magyar Módszer alapgondolata kiterjeszthető a szállítási feladatra, ugyanúgy Edmonds eljárása is általánosítható minimális költségű fokszám-korlátozott részgráf keresésére tetszőleges gráf esetén.

4.5 Duális egészértékűség

Páros gráfok esetén a párosítás poliédert egy teljesen unimoduláris mátrix írta le, és emiatt egész célfüggvény esetén a duális lineáris problémának is mindig létezett egészértékű optimuma. A 4.4 tételben megadott primál poliéderről, bár a megadott leíró rendszere nem teljesen unimoduláris, mégis kimutattuk, hogy egész (merthogy a csúcsai a teljes párosítások). Ennek nyomán felvetődik a kérdés, vajon egész c esetén a duális feladatnak is mindig létezik-e egész optimuma. A válasz sajnálatos módon nemleges, amint azt a teljes négypontú gráf mutatja a $c \equiv 1$ súlyozás esetén. Ekkor a primál optimum értéke 2 (bármely teljes párosítás súlya 2), a duál optimum egyetlen megoldása (amint az könnyen ellenőrizhető) az, amikor az y mind a négy egyelemű halmazon 1/2, másutt 0. Az egészértékű duális optimum értéke 1 vagyis kisebb, mint 2.

Ennek fényében meglepő, hogy egészértékű c esetén a 4.9 tételben szereplő duális optimum mindig eléretik egész vektoron is.

4.10 Tétel (Cunningham és Marsh). *Legyen $G = (V, E)$ gráf élein adott a $c : E \to \mathbf{Z}$ súlyfüggvény. A gráf maximális súlyú párosításának súlya egyenlő a*

$$\min \sum_{v \in V} \pi(v) + \sum_{Z \in \mathcal{O}} y(Z)(|Z| - 1)/2) \tag{25}$$

értékével, ahol $\pi : V \to \mathbf{Z}_+$, $y : \mathcal{O} \to \mathbf{Z}_+$ nemnegatív, egészértékű, és minden $uv \in E$ élre

$$\pi(u) + \pi(v) + \sum(y(Z) : u, v \in Z) \geq c(uv)\ . \tag{26}$$

Létezik olyan duális optimum, amelyre az $\mathcal{O}_y := \{Z \in \mathcal{O}, y(Z) > 0\}$ halmazrendszer lamináris (vagyis bármely két tagja vagy diszjunkt, vagy az egyik tartalmazza a másikat).

Bizonyítás. Jelölje a maximális súlyú párosítás súlyát ν_c. Adott (y, π) duális megoldásra legyen

$$b(y, \pi) := \sum_{v \in V} \pi(v) + \sum_{Z \in \mathcal{O}} y(Z)(|Z| - 1)/2\ . \tag{27}$$

A dualitás tétel triviális max $\leq$ min iránya miatt $\nu_c \leq b(y, \pi)$.

A tétel első részének igazolásához tegyük fel indirekt, hogy a min-max összefüggés nem érvényes és válasszunk egy olyan (G, c) ellenpéldát, amelyre a $|V| + |E| + \sum_{e \in E} |c(e)|$ összeg minimális. Ekkor minden e élre $c(e) \geq 1$ (különben a nempozitív élek kitörölhetők.) A most következő állítások mind erre a legkisebb ellenpéldára vonatkoznak.

4.11 Állítás. *Minden v csúcsot elkerül maximális súlyú párosítás.*

Bizonyítás. Tegyük fel indirekt, hogy a v csúcsot minden maximális súlyú párosítás fedi. Ekkor a c-értékeket a v végű éleken eggyel csökkentve a maximális súlyú párosítás súlya is csökken, éspedig eggyel, azaz a keletkező c' súlyfüggvényre nézve $\nu_{c'} = \nu_c - 1$. Mivel (G, c') már nem ellenpélda, így létezik egy egészértékű (y', π') duális optimális megoldás, amelyre $b(y', \pi') = \nu_{c'}$. Ha most π' értékét a v csúcson eggyel megnöveljük, akkor olyan (y', π'') duális megoldást kapunk c-re nézve, amelyre $\nu_c = \nu_{c'} + 1 = b(y', \pi') + 1 = b(y', \pi'') \geq \nu_c$, amiből $\nu_c = b(y', \pi'')$ adódik, ellentmondásban (G, c) ellenpélda voltával. □

4.12 Állítás. *Legyen (y, π) egy optimális duális megoldás és M egy maximális súlyú párosítás. Ekkor M fed minden olyan v csúcsot, amelyre $\pi(v) > 0$. Továbbá $y(Z) > 0$ esetén az M-nek azon élei, melyek Z-be esnek a Z-nek egy majdnem teljes (azaz $(|Z| - 1)/2$ elemű) párosítását adják.*

Bizonyítás. A 4.8 tétel szerint a primál optimum párosításon felvétetik. Az állítás nem más, mint a duál egyenlőtlenségeknek megfelelő optimalitási kritérium. □

A fenti két állítást összevetve kapjuk, hogy

4.13 Állítás. *Tetszőleges (y, π) optimális duális megoldás esetén $\pi \equiv 0$.* □

4.14 Állítás. *Létezik olyan (y, π) optimális duális megoldás, amelyre az*

$$\mathcal{O}_y := \{ Z \in \mathcal{O},\ y(Z) > 0 \}$$

halmaz-rendszer lamináris.

Bizonyítás. Induljunk ki egy (y, π) duális optimumból. Az y mindenesetre választható racionálisnak, hiszen egy bázis-megoldás racionális és mindig létezik optimális bázis-megoldás. (A 4.13 állítás szerint $\pi \equiv 0$.)

Tegyük fel, hogy $\mathcal{O}_y$ nem lamináris, azaz tartalmaz két halmazt, A-t és B-t, melyekre $A \cap B, A - B, B - A$ egyike sem üres. Állítjuk, hogy $|A \cap B|$ páratlan. Ha ugyanis páros lenne, akkor egy $v \in A \cap B$ csúcsra a 4.12 állítás első része miatt létezik maximális súlyú v-t elkerülő M párosítás. Másrészt, a 4.12 állítás második része miatt M-nek A-ba illetve B-be eső élei teljes párosítását adják $A - v$-nek illetve $B - v$-nek, de akkor $|A \cap B - v|$ páros.

Jelölje az $y(A)$ és $y(B)$ értékek minimumát α, és csökkentsük mind $y(A)$-t, mind $y(B)$-t α-val. Most $|A \cap B|$ páratlan, így persze $|A \cup B|$ is az. Növeljük $y(A \cup B)$-t α-val, és amennyiben $|A \cap B| \geq 3$, úgy $y(A \cap B)$-t is növeljük α-val. Ezt az átalakítást egy kikeresztezési lépésnek nevezzük. Könnyen ellenőrizhető, hogy a létrejövő (y', π') teljesíti (26)-ot. Azt sem nehéz belátni, hogy $b(y, \pi) = b(y', \pi')$, azaz (y', π') is optimális duális megoldás.

Ismételjük ezt az eljárást egészen addig, amíg a szóban forgó $\mathcal{Z}_y$ halmaz-rendszer nem lamináris. Állítjuk, hogy a kikeresztezési eljárás véges sok lépés után véget ér. Ezt elég csak arra az esetre igazolni, amikor y egészértékű, mert ha nem az, akkor komponenseinek közös nevezőjével felszorozhatjuk. Egy kikeresztezési lépésnél a $\sum(y(Z)|Z| : Z \in \mathcal{O})$ összeg vagy változatlanul marad (amikor $|A \cap B| > 1$) vagy csökken (ha $|A \cap B| = 1$). Világos, hogy ezen utóbbi eset csak véges sokszor fordulhat elő. Az első esetben viszont a $\sum(y(Z)|Z|^2 : Z \in \mathcal{O})$ kísérő összeg szigorúan nő, így véges sok ilyen lépés után a $\sum(y(Z)|Z| : Z \in \mathcal{O})$ összegnek kell változnia, tehát kikeresztezési lépésből valóban csak véges sok lehet. □

Rendelkezésünkre áll tehát egy $(y,\ \pi = 0)$ duális optimális megoldás, amelyre $\mathcal{O}_y$ lamináris. Mivel (G, c) ellenpélda, y nem egészértékű, azaz van olyan $A \in \mathcal{O}_y$ halmaz, amelyre $y(A)$ nem egész, azaz $\beta := y(A) - \lfloor y(A) \rfloor$ pozitív. Tegyük fel, hogy A maximális ilyen. Módosítsuk most y-t úgy, hogy $y(A)$-t csökkentjük β-val, míg $\mathcal{O}_y$ azon tagjain (ha vannak egyáltalán), melyek részhalmazai A-nak és maximális ilyenek (és melyek a laminaritás miatt diszjunktak) az y értéket növeljük β-val. Az A maximális választása és c egészértékűsége miatt így egy másik duális megoldást kapunk, de ez ellentmond y optimális voltának, hiszen ezen változtatás során a $\sum_{X \in \mathcal{O}_y} y(X)(|X|-1)/2$ összeg szigorúan csökken. Az ellentmondás mutatja, hogy nem létezhet ellenpélda.

A második részhez csak azt kell észrevennünk, hogy a fent leírt kikeresztezési eljárás az egészértékűséget nem rontja el, így egy tetszőleges egészértékű duális optimumból kiindulva végül kapott „lamináris" optimum is egészértékű. □□

5 Matroidok

5.1 A mohó algoritmus

A Magyar Módszer egy másik irányú általánosításának ismertetése előtt érdemes felidézni, hogy a kombinatorikus optimalizálásnak van egy másik kiinduló pontja is, éspedig Kruskal közismert algoritmusa összefüggő élsúlyozott gráf maximális vagy minimális súlyú feszítő fájának meghatározására. Ez az eljárás az úgynevezett mohó algoritmus, és szintén alapvető eredménynek számít, mégha jóval egyszerűbb is, mint a Magyar Módszer.

Nem meglepő, hogy nemcsak a Magyar Módszernek találtak kiterjesztéseit, hanem a mohó algoritmusnak is. Kiderült például, hogy a mohó algoritmus valójában minden matroidon helyes eredményt ad. A matroid egy olyan absztrakt struktúra, amely egy $(S, \mathcal{F})$ párral adható meg, ahol $\mathcal{F}$ az S alaphalmaz bizonyos, függetlennek hívott, részhalmazainak olyan rendszere, amelyre érvényesek az úgynevezett függetlenségi axiómák:

(I1) az üres halmaz független,

(I2) egy független halmaz bármely részhalmaza független,

(I3) az S valamennyi Z részhalmazára, a Z-be eső, Z-ben már nem bővíthető független halmazok elemszáma ugyanaz a csupán Z-től függő $r(Z)$ szám, (amit a Z halmaz rangjának neveznek, míg egy Z-ben maximális független halmazt Z egy bázisának).

Például egy gráf élhalmazán az erdők, mint független halmazok matroidot alkotnak, vagy egy mátrix oszlopainak halmazán a lineárisan független részhalmazok szintén. A matroidok érdekességét egyrészt az adja, hogy számos helyen felbukkannak (néha ugyancsak rangrejtve), másrészt matroidokra igen elegáns, jól használható elméletet dolgoztak ki.

A mohó algoritmus segítségével tetszőleges c súlyfüggvényre egy matroid maximális súlyú bázisa kiszámítható. Ehhez tegyük fel, hogy az S elemei súly szerint csökkenő sorrendben vannak, azaz $c(s_1) \geq c(s_2) \geq \ldots \geq c(s_n)$. Ebben a sorrendben tekintsük az elemeket, és az aktuálisan vizsgált elemet akkor válasszuk ki, ha a már eddig kiválasztottakkal együtt független halmazt alkot. Igazolni lehet, hogy így bizonyosan maximális súlyú független halmazt kapunk. Jelölje $r(c)$ a maximális súlyú bázis súlyát a c súlyfüggvényre nézve. Az $r(c)$ tehát a mohó algoritmus révén könnyen számolható, sőt valójában egy egyszerű explicit formában is felírható. Ehhez legyen $S_i := \{s_1, \ldots, s_i\}$.

5.1 Tétel. *Tetszőleges c esetén a maximális súlyú bázis $r(c)$ súlyára*

$$r(c) = r(S)c(s_n) + \sum_{i=1}^{n-1} r(S_i)[c(s_i) - c(s_{i+1})] \,. \tag{28}$$

A matroidok használhatósága többek között azon múlik, hogy a matroidok osztálya számos műveletre nézve zárt. Például a gráfoknál alkalmazott élelhagyás vagy élösszehúzás fogalma átvihető matroidokra, vagy egy gráf sík-dualizálása elvezet a duális matroid fogalmához. Szintén érdekes tény, hogy a maximális c-súlyú bázisok egy M_c matroid bázisait alkotják. Ennek rangfüggvényét az alábbiakban r_c-vel fogjuk jelölni. (Egy adott Z részhalmazra $r_c(Z)$ tehát azt a maximális számot jelenti, ahány elemmel egy maximális súlyú bázis bele tud metszeni Z-be.)

5.2 Maximális elemszámú közös függetlenek

A mohó algoritmus matroidokon való helytállósága persze örömteli jelenség, az algoritmus hatósugara azonban túlságosan szűk. Például páros gráf maximális súlyú párosításának kiszámítására nem alkalmas. Másik baj, hogy már a feladat kis változtatásánál is hatástalanná válik. Fákkal kapcsolatosan például meglehetős természetességgel vetődik fel az a kérdés, hogy miként lehet egy minimális súlyú feszítő fát meghatározni, ha előírjuk, hogy egy rögzített s pontban a fának a fokszáma előre megadott szám legyen, vagy általánosabban, megadott korlátok közé essék. A következő példa mutatja, hogy ilyenkor a mohó algoritmus már nem feltétlenül ad jó eredményt. [A gráf legyen a teljes négyes az s, a, b, c pontokon, az élsúlyok legyenek $w(sa) = 1, w(sb) = 1, w(sc) = 2, w(ab) = 3, w(bc) = 10, w(ac) = 11$. A keresett fa foka az s pontnál 2 legyen. Ekkor a mohó algoritmus először kiválasztja a két 1 súlyú élt sa-t és sb-t, majd más lehetősége nem lévén választja a 10 súlyú bc élt. Az így kapott fa össz-súly 12. Ugyanakkor az sc, sa, ab élekből álló fa össz-súlya csak 5.]

Még nehezebb a következő kérdés: mikor létezik egy gráfban két diszjunkt feszítő fa, és ha létezik hogyan lehet megtalálni azt a két élidegen fát, melyek összköltsége minimális. Persze ugyanezt a kérdést kettő helyett bármely k pozitív egészre megfogalmazhatjuk. Sőt még azt az általánosítást is tekinthetjük, ahol az élhalmazon nem egy, hanem k költség-függvény adott és úgy kell kiválasztanunk k élidegen feszítő fát, hogy az i-ediknek az i-dik költség-függvényre vonatkozó költségét tekintjük, és ezek összegét akarjuk minimalizálni.

Irányított gráfokban tűzhető ki az alábbi feladat: Határozzunk meg egy minimális költségű részgráfot, amelyben minden pont elérhető egy előre adott gyökérpontból. Általánosabban olyan minimális költségű részgráfot keresünk, amelyben minden pont k élidegen úton elérhető egy előre adott gyökérpontból.

Ezek mind olyan kérdések, melyek kívül esnek a Magyar Módszer (vagy más hálózati folyamos modell) hatókörén és megoldásukhoz egy új elméletre volt szükség. A kiindulópont J. Edmonds matroid-metszet tétele, amely a Kőnig tétel nagymérvű általánosítása matroidokra.

5.2 Tétel (Edmonds metszettétele). *Az S alaphalmazon adott két matroid. A közös független halmazok maximális elemszáma egyenlő a*

$$\min_{X \subseteq S}(r_1(X) + r_2(S - X)) \tag{29}$$

értékkel.

Edmonds tételét néha az alábbi ekvivalens alakban fogalmazzák meg.

5.3 Tétel (Edmonds). *Az S alaphalmazon adott két matroid, melyek rangfüggvénye r_1 és r_2. Akkor és csak akkor létezik legalább k elemű közös független halmaz, ha a*

$$r_1(X) + r_2(S - X) \geq k \tag{30}$$

fennáll minden $X \subseteq S$ halmazra.

Bizonyítás (Woodall). A (30) feltétel szükségessége kézenfekvő, hiszen tetszőleges F közös független halmazra és az alaphalmaz $\{X_1, X_2\}$ partíciójára fennáll, hogy $r_1(X_1) \leq |X_1 \cap F|$ és $r_2(X_2) \leq |X_2 \cap F|$, amiket összeadva kapjuk, hogy $r_1(X_1) + r_2(X_2) \leq |X_1 \cap F| + |X_2 \cap F| = |F|$.

Az elegendőséghez $|S|$ szerinti indukciót használunk. $|S| = 0$-ra a tétel nyilván igaz, így tegyük fel, hogy S nemüres és hogy a tétel érvényes minden olyan esetben, amikor az alaphalmaz $|S|$-nél kevesebb elemet tartalmaz. Válasszunk ki egy tetszőleges $s \in S$ elemet és legyen $S' := S - s$.

Amennyiben $r_1(X') + r_2(S' - X') \geq k$ fennáll minden $X' \subseteq S'$ részhalmazra, indukció alapján az $M_1|S'$ és $M_2|S'$ matroidoknak létezik k elemű közös függetlenje, amely természetesen M_1 és M_2-nek is közös függetlenje. Így feltehetjük, hogy létezik egy $X' \subseteq S'$ halmaz, amelyre

$$r_1(X') + r_2(S' - X') \leq k - 1\ . \tag{31}$$

Ebből következik, hogy s nem hurok egyik matroidban sem, mert ha mondjuk M_1-ben hurok volna, akkor $X := X' + s$-re $r_1(X) + r_2(S - X) = r_1(X') + r_2(S' - X') \leq k - 1$, ellentétben (30)-cal.

Húzzuk most össze mindkét matroidban az s elemet. Állítjuk, hogy a keletkező $M_i \cdot S'$ matroidok r'_i rangfüggvényére $r'_1(Y') + r'_2(S' - Y') \geq k - 1$ teljesül minden $Y' \subseteq S'$ részhalmazra. Álljon ugyanis valamelyik Y'-re $r'_1(Y') + r'_2(S' - Y') \leq k - 2$. Ez azzal ekvivalens, hogy $r_1(Y' + s) - 1 + r_2(S' - Y' + s) - 1 \leq k - 2$, azaz

$$r_1(Y' + s) + r_2(S - Y') \leq k\ . \tag{32}$$

Figyeljük meg, hogy $X' \cap Y'$ és $X' \cup (Y' + s)$ egymás komplementerei (S-re nézve), így (30) alapján $[r_1(X' \cap Y') + r_2((S' - X') \cup (S - Y'))] \geq k$, és hasonlóképp $X' \cup (Y' + s)$ és $(S' - X') \cap (S - Y')$ egymás komplementerei és ezért $r_1(X' \cup (Y' + s)) + r_2((S' - X') \cap (S - Y'))] \geq k$. Ezt és a szubmodularitást felhasználva (31) és (32) összeadásával kapjuk, hogy $(k - 1) + k \geq r_1(X') + r_1(Y' + s) + r_2(S' - X') + r_2(S - Y') \geq r_1(X' \cap (Y' + s)) + r_1(X' \cup (Y' + s)) + r_2((S' - X') \cap (S - Y')) + r_2((S' - X') \cup (S - Y')) = [r_1(X' \cap Y') + r_2((S' - X') \cup (S - Y'))] + [r_1(X' \cup (Y' + s)) + r_2((S' - X') \cap (S - Y'))] \geq k + k$, ami ellentmondás.

Az $M_i \cdot S'$ matroidokra tehát k helyén $(k - 1)$-gyel teljesül (30), így az indukciós feltevés alapján ezen matroidoknak létezik egy $k - 1$ elemű F közös függetlenje. De akkor $F + s$ az M_1 és M_2 matroidok k elemű közös függetlenje. □

5.3 A súlyozott matroid metszet probléma

Amint említettük, a mohó algoritmus segítségével adott $c : S \to \mathbf{R}$ vektor esetén meg lehet határozni egyetlen matroid maximális súlyú bázisát. A fentiekben tételt adtunk két matroid közös függetlenjének maximális elemszámára. Kérdés, mi mondható két matroid közös független halmazainak maximális súlyáról. A probléma első megoldása szintén Edmondstól származik. Mi most egy egyszerűsített utat követünk: a kapott eredmény Egerváry tételének általánosítása. Valójában itt több kérdés is kitűzhető: keressünk maximális súlyú közös függetlent vagy maximális súlyú közös bázist, esetleg minden szóba jövő i értékre kíváncsiak lehetünk a maximális súlyú i elemű közös független halmazra. E feladatok többé-kevésbé ekvivalensek és most a maximális súlyú közös bázis feladatkörével foglalkozunk.

Már említettük, hogy a maximális c-súlyú bázisok egy M_c matroid bázisait adják, és hogy $r(c)$-t az (28) formula határozza meg. Az alábbi előkészítő lemma arra ad választ, hogy miként változik az $r(c)$ függvény, ha c értékeit egy adott Z halmaz minden elemén eggyel megnöveljük vagy lecsökkentjük.

5.4 Lemma. *Legyen az M matroid rangfüggvénye r. Adott $c : S \to \mathbf{Z}$ egészértékű vektorra és $Z \subseteq S$ halmazra legyen $c^+ := c + \chi_Z$ és $c^- := c - \chi_Z$. Ekkor*

$$r(c^+) = r(c) + r_c(Z) , \tag{33}$$

és

$$r(c^-) = r(c) - r(S) + r_c(S - Z) , \tag{34}$$

ahol r_c a maximális súlyú bázisok által alkotott matroid rangfüggénye.

Bizonyítás. Az első azonosság igazolásához rendezzük az S elemeit c-szerint csökkenő sorrendbe úgy, hogy egyenlő súlyú elemek esetén a Z elemeit vesszük előbbre. Mivel c egészértékű, ez a sorrend c^+ súlyozás szerint is csökkenő (azaz korábbi elem súlya nagyobb vagy egyenlő, mint egy későbbi elemé). Így a mohó algoritmus által szolgáltatott B bázis mind a c, mind a c^+ súlyozásra nézve maximális súlyú.

Ekkor persze $r_c(Z) \geq |B \cap Z|$, de itt valójában egyenlőségnek kell állnia, mert ha létezne olyan maximális c-súlyú B' bázis, amelyre $|B' \cap Z| > |B \cap Z|$, akkor $c^+(B') = c(B') + |Z \cap B'| > c(B) + |Z \cap B| = c^+(B)$, ellentmondásban avval, hogy B maximális c^+-súlyú. Tehát $r_c(Z) = |B \cap Z|$, és így $r(c+) = c^+(B) = c(B) + |B \cap Z| = r(c) r_c(Z)$.

A második azonossághoz először figyeljük meg, hogy $r_c = r_{c-\chi_S}$, majd alkalmazzuk az első azonosságot c helyén $c - \chi_S$-re és Z helyén $(S - Z)$-re. Kapjuk, hogy $r(c^-) = r(c - \chi_S + \chi S - Z) = r(c - \chi_S) + r_{c-\chi_S}(S - Z) = r(c) - r(S) + r_c(S - Z)$. □

Térjünk most rá a maximális súlyú közös bázis kérdésére. Legyen ehhez adott az S alaphalmazon két matroid, M_1 és M_2, továbbá egy $c : S \to \mathbf{Z}$ egészértékű súly-függvény. Tegyük fel, hogy az M_1 és M_2 matroidoknak van közös bázisa, melynek elemszámát jelölje k.

5.5 Tétel [10]. *Az M_1 és M_2 matroidok közös bázisainak maximális c-súlya egyenlő a* $\min(r_1(c_1)+r_2(c_2) : c_1+c_2 = c,\ c_i$ *egészértékű) értékkel, ahol* $r_i(x)$ *az M_i matroidban a maximális x-súlyú bázis súlyát jelöli.*

Bizonyítás. Adott B közös bázis és c_1, c_2 esetén, nyilván $c(B) = c_1(B) + c_2(B) \leq r_1(c_1) + r_2(c_2)$, amiből a max $\leq$ min irány következik. Ebből a becslésből az is kiolvasható, hogy az egyenlőség igazolásához a c-nek olyan $c_1 + c_2$ felbontását kell találnunk, amelyre létezik M_1-nek és M_2-nek olyan B közös bázisa, amely

(∗) *egyszerre az M_1-nek maximális c_1-súlyú bázisa és az M_2-nek maximális c_2-súlyú bázisa.*

Legyen c_1 és c_2 a c-nek olyan egész felbontása, amelyre $r_1(c_1) + r_2(c_2)$ minimális. (Miután c_i egészértékű és tetszőleges B közös bázisra $c(B)$ alsó korlát $r_1(c_1) + r_2(c_2)$-re, a szóban forgó minimum létezik). Jelölje M_i' az M_i matroid maximális c_i-súlyú bázisai által alkotott matroidot ($i = 1, 2$), míg a megfelelő rangfüggvényeket jelöljük r_i'-vel.

5.6 Lemma. *Az M_1' és M_2' matroidoknak van k elemű közös független halmaza.*

Bizonyítás. Az Edmonds féle metszet tétel szerint, ha nem létezik k elemű közös független halmaz, akkor van olyan $Z \subseteq S$ halmaz, amelyre

$$r_1'(Z) + r_2'(S - Z) < k \ . \tag{35}$$

Legyen $c_1^+ := c_1 + \chi_Z$ és $c_2^- := c_2 - \chi_Z$. Alkalmazva a (33) formulát az M_1 matroidra és c_1 súlyfüggvényre illetve a (34) formulát az M_2 matroidra és a c_2 súlyfüggvényre, azt kapjuk, hogy $r_1(c_1^+) = r_1(c_1) + r_1'(Z)$ és $r_2(c_2^-) = r_2(c_2) + r_2'(S-Z) - r_2(S) = r_2(c_2) + r_2'(S-Z) - k$. Mindezeket összevetve az adódik, hogy $r_1(c_1^+) + r_2(c_2^-) = r_1(c_1) + r_2(c_2) + r_1'(Z) + r_2'(S-Z) - k < r_1(c_1) + r_2(c_2)$, ellentmondásban c_1 és c_2 minimális választásával. □

A lemma által biztosított közös B bázis tehát teljesíti a (∗) tulajdonságot. □ □

Érdemes külön is megfogalmazni a (∗) tulajdonságot.

5.7 Következmény. *Amennyiben két matroidnak van közös bázisa, úgy tetszőleges c egészértékű súlyozáshoz létezik c-nek egy egészértékű $c_1 + c_2$ felbontása valamint a két matroidnak egy B közös bázisa úgy, hogy B maximális c_1-súlyú bázisa M_1-nek és maximális c_2-súlyú bázisa M_2-nek.* □

A maximális súlyú közös független halmaz súlyára is megállapíthatunk egy formulát. (Fekete Zsolt és Makai Márton doktorandusz hallgatók segítségét a bizonyítás kidolgozásában ezúton is köszönöm.)

5.8 Tétel. *Az S alaphalmazon adott két matroid és egy c nemnegatív egészértékű súly-függvény. A maximális súlyú közös független halmaz súlya egyenlő a* $\min\{r_1(c_1) + r_2(c_2) : c_1 + c_2 = c,\ c_1 \geq 0,\ c_2 \geq 0,\ c_i$ *egész* $\}$ *értékkel.*

Bizonyítás. Legyen F közös független és legyen $c_1 \geq 0, c_2 \geq 0$ olyan, hogy $c_1 + c_2 = c$. Ekkor $c(F) = c_1(F) + c_2(F) \leq r_1(c_1) + r_2(c_2)$, amiből a max $\leq$ min irány következik.

A fordított irányhoz azt fogjuk megmutatni, hogy létezik c-nek egy olyan c_1, c_2 egészértékű, nemnegatív felbontása valamint egy F közös független halmaz, melyekre F maximális c_i-súlyú független halmaza M_i-nek ($i = 1,2$).

Feltehetjük, hogy minden elem c-súlya szigorúan pozitív és egyik matroidban sincs hurok elem. (Miért?) Legyen $R := \max(r_1(S), r_2(S)) + 1$ és S' egy R elemű halmaz, amely diszjunkt S-től. Legyen M_i^+ ($i = 1,2$) az a matroid, amelyet úgy kapunk, hogy az M_i és az S'-n vett szabad matroid direkt összegét R-rel csonkoljuk. Terjesszük ki a c-t az $S \cup S'$-re úgy, hogy az S' elemein legyen c azonosan nulla. Könnyen látszik, hogy M_i^+-ban egy R elemű B halmaz akkor és csak akkor bázis, ha $B \cap S$ független M_i-ben, és ekkor persze $c(B) = c(B \cap S)$. (Speciálisan S' nulla súlyú bázis.) Ennek megfelelően M_1 és M_2 maximális súlyú közös független halmazának a súlya egyenlő az M_1^+ és M_2^+ matroidok maximális súlyú közös bázisának a súlyával.

Az 5.7 következmény szerint létezik egy olyan közös B bázis és c_1, c_2 egész felbontása a kiterjesztett c-nek, hogy B maximális c_i-súlyú bázisa M_i^+-nak.

5.9 Állítás. *c_i ($i = 1,2$) választható olyannak, hogy S' elemein azonosan nulla.*

Bizonyítás. Kimutatjuk, hogy S' minden elemének c_1 értéke ugyanaz. Az R érték választása miatt $B \cap S'$ nemüres. Az $S - B$ sem lehet üres, vagyis B nem lehet teljesen S'-ben, mert akkor egyrészt $c(B) = 0$ volna, ugyanakkor amiatt, hogy minden S-beli elem c-súlya pozitív, és nincs hurok elem, létezik pozitív súlyú közös bázis. A B ezen elhelyezkedése miatt elég kimutatnunk, hogy egy $B \cap S'$-beli x elem és egy $S' - B$-beli y elem c_1-súlya megegyezik. Miután $B - x + y$ egy másik közös bázis, kapjuk, hogy $c_1(y) \leq c_1(x), c_2(y) \leq c_2(x)$, amiből $c_1(x) + c_2(x) = 0 = c_1(y) + c_2(y)$ miatt $c_1(y) = c_1(x)$ következik. □

Feltesszük tehát, hogy c_1 és c_2 azonosan nulla az S' elemein. Ebből következik, hogy minden $x \in S \cap B$ elemre $c_i(x) \geq 0$, hiszen egy $y \in S' - B$ elemre $B - x + y$ bázisa M_i^+-nak, és ezért $c_i(x) \geq c_i(y) = 0$.

Legyen most $x \in S - B$ egy olyan elem, amelyre, mondjuk, $c_1(x)$ negatív. Növeljük $c_1(x)$-t nullára, $c_2(x)$-t pedig csökkentsük $c(x)$-re. B továbbra is maximális súlyú bázis marad M_2^+-ban, hiszen egy bázison kívüli elemen csökkentettük a súlyt. B maximális súlyú bázis marad M_1^+-ban is, hiszen B minden elemének a c_1-súlya nemnegatív és egy negatív súlyú elem súlyát növeltük nullára.

Ilyen módosításokkal elérhetjük, hogy c_i nemnegatív. Kapjuk, hogy c_i-nek az S-re való $c_i|S$ megszorítására nézve az $F := B \cap S$ közös független halmaz maximális $c_i|S$-súlyú független az M_i matroidban. □ □

J. Edmonds további érdeme, hogy mind a súlyozatlan, mind az általános súlyozott esetre kidolgozott egy polinomiális futásidejű algoritmust, amely egyúttal a tételeinek bizonyítására is használható.

Az Edmonds féle eredeti súlyozott matroid-metszet tétel a fentebb szereplőnél jóval bonyolultabb, így nem csoda, hogy Edmonds súlyozott metszet algoritmusa (és helyességének bizonyítása) pedig különösen az. A nehézség fő forrása abból ered, hogy szemben az eredeti Egerváry tétellel, az idevonatkozó duális problémát csak meglehetősen bonyolult alakban sikerült megadni. A fenti súly-szétvágós min-max tétel nemcsak egyszerű alakú, de lehetőséget teremtett egy viszonylag egyszerűen megfogalmazható és igazolható súlyozott matroid metszet algoritmus megadására [10]. Ez az algoritmus a Magyar Módszer nagyfokú és direkt általánosításának tekinthető.

6 Szubmoduláris modellek

6.1 Szubmoduláris áramok

A súlyozott matroid metszet tétel és a rá vonatkozó algoritmus számos nehéz dolog megoldását tette lehetővé (például az előbb felsorolt gráf optimalizálási feladatokét). De azért nem mindent! Nézzük például azt a feladatot, amikor egy irányított gráfot kell erősen összefüggővé tennünk minimális számú, vagy általánosabban, minimális összköltségű élének összehúzásával. Egy másik természetes feladat a következő: Határozzunk meg egy irányított gráf minimális összköltségű részgráfját, amelyben egy meghatározott gyökérponttól minden más csúcsba vezet k pontdiszjunkt út.

Ezek a feladatok már a súlyozott matroid metszet probléma segítségével sem oldhatók meg. Kifejlesztettek azonban egy még általánosabb keretet, amely magában foglalja a súlyozott matroid metszet problémát és a minimális költségű folyamok problémát is. Ez pedig a szubmoduláris áramok fogalma, amelyet Edmonds és Giles vezetett be 1976-ban [7].

Legyen $D = (V, E)$ irányított gráf és $b : V \to \mathbf{Z}$ egy keresztező szubmoduláris függvény, azaz $b(X) + b(Y) \geq b(X \cap Y) + b(X \cup Y)$ fennáll minden olyan $X, Y \subseteq V$ halmazpárra, amelyre $X \cap Y$ és $V - (X \cup Y)$ egyike sem üres. Legyen f és g a digráf élhalmazán értelmezett egészértékű alsó illetve felső korlát. Egy $x : E \to \mathbf{R}$ vektort szubmoduláris áramnak hívnak, ha $\varrho_x(Z) - \delta_x(Z) \leq b(Z)$ minden $Z \subseteq V$ halmazra fennáll. A szubmoduláris áram *megengedett*, ha $f \leq x \leq g$. Ha b azonosan nulla, visszajutunk a közönséges áram fogalmához. Edmonds és Giles többek között megmutatta, hogy a szubmoduláris áramok poliédere egész. Hoffman 3.6 megengedettségi tétele is szépen átmegy szubmoduláris áramokra [11].

6.1 Tétel. *Teljesen szubmoduláris b esetén akkor és csak akkor létezik egészértékű megengedett szubmoduláris áram, ha*

$$\varrho_f(A) - \delta_g(A) \leq b(A) \tag{36}$$

fennáll minden $A \subseteq V$-ra.

Megjegyzendő, hogy ez az eredmény nem csak Hoffman tételét foglalja magában, hanem Edmonds matroid metszet tétele is közvetlenül adódik.

Szubmoduláris áramok segítségével sikerült először levezetni az alábbi szeparációs tételt [11], amely a klasszikus konvex-konkáv elválasztási tételek diszkrét ellenpárjának tekinthető.

6.2 Tétel. *Legyen S alaphalmaz, $p^* : 2^S \to \mathbf{Z} \cup \{-\infty\}$ szupermoduláris függvény és $b^* : 2^S \to \mathbf{Z} \cup \{\infty\}$ szubmoduláris függvény, melyekre $p^*(\emptyset) = b^*(\emptyset) = 0$ és $p^* \leq b^*$. Ekkor van olyan egészértékű m moduláris függvény, amelyre $p^* \leq m \leq b^*$. Más szóval, az $\{x : x(A) \leq b^*(A)$ minden $A \subseteq S$-re, $x(S) = 0\}$ és az $\{x : x(A) \geq p^*(A)$ minden $A \subseteq S$-re, $x(S) = 0\}$ poliéderek metszete akkor és csak akkor tartalmaz egész pontot, ha $p^* \leq b^*$.*

Kiderült, hogy a Magyar Módszer alapgondolatai még ilyen általános körülmények közé is átvihetők. Evvel kapcsolatosan az egyik első dolgozat [2] egy olyan eljárást ír le, amely speciális esetként magában foglalja az eredeti Magyar Módszert, annak Ford-Fulkerson féle minimális költségű folyamokra való kiterjesztését és a fentebb említett súlyozott matroid metszet algoritmust is. Segítségével oldható meg algoritmikusan a digráf erősen összefüggővé tevésének előbb említett problémája, vagy az az érdekes kérdés, hogy egy irányítatlan gráfot mikor és miként lehet k-szor élösszefüggővé irányítani, sőt e feladatnak még az a költséges változata is kezelhető, amikor minden él lehetséges két irányának költsége különböző, és célunk a minimális költségű k-élösszefüggő irányítás megkeresése.

6.2 Még tovább

Bármennyire is általános ez az elmélet, az összes ilyen típusú eredmény azonban még ebbe sem fér bele. Például 1995-ben Jordán Tiborral bebizonyítottunk egy min-max formulát arra vonatkozólag, hogy egy irányított gráfot hány új él hozzáadásával lehet k-szor pontösszefüggővé tenni [12]. Ennek megfogalmazása érdekében legyen $D = (V, A)$ egyszerű irányított gráf és tegyük fel, hogy a $k < |V| - 1$. A V diszjunkt nemüres részhalmazaiból álló (X, Y) párra legyen $h(X, Y) := |V - (X \cup Y)|$. Azt mondjuk, hogy (X, Y) *egyirányú*, ha nem megy él X-ből Y-ba, azaz $\delta(X, Y) = 0$, ahol $\delta(X, Y)$ jelöli általában az X-ből Y-ba vezető élek számát jelöli.

A Menger tétel segítségével nem nehéz kimutatni, hogy egy $D^+ = (V, A^+)$ irányított gráf akkor és csak akkor k-összefüggő, ha $h(X, Y) \geq k$ fennáll minden (X, Y) egyirányú párra. Definiáljuk egy (X, Y) pár hiányát: $p_{hi}(X, Y) = (k - h(X, Y))^+$, ha (X, Y) egyirányú, és $:= 0$ különben. Világos, hogy $p_{hi}(X, Y) = (k - k\delta_A(X, Y) - h(X, Y))^+$ minden (X, Y) párra fennáll. Diszjunkt részhalmazokból álló párok egy $\mathcal{F}$ családját akkor nevezzük függetlennek, ha $\mathcal{F}$ bármely két $(X, Y), (X', Y')$ tagjára az $X \cap X'$ és $Y \cap Y'$ halmazok egyike legalább üres.

6.3 Tétel [12]. *A $D = (V, A)$ irányított gráf akkor és csak akkor tehető legfeljebb γ új él hozzáadásával k-összefüggővé, ha*

$$\sum (p_{hi}(X, Y) : (X, Y) \in \mathcal{F}) \leq \gamma \qquad (37)$$

fennáll minden egyirányú párokból álló független $\mathcal{F}$ családra.

A [12] dolgozat valójában egy ennél jóval általánosabb, szupermoduláris függvényekre vonatkozó eredményt mutat be, amelynek számos egyéb következménye van, egyebek között Győri Ervin távolinak látszó, nehéz min-max tétele függőlegesen konvex vízszintes és függőleges szakaszok által határolt síkbeli tartomány minimális számú téglalappal történő fedéséről. Sajnos a bizonyítás nem konstruktív, és mind a mai napig nem tudjuk, hogy miként lehet algoritmikusan az összefüggőség növelés feladatát hatékonyan megoldani.

Van itt még egy újszerű jelenség. A Magyar Módszernek a minden korábban említett kiterjesztésénél lehetséges volt a súlyozott esetek kezelése is. Az összefüggőség növelésénél azonban a súlyozott változat általánosságban NP-teljes, és csak arra az esetre van megfelelő eredményünk, amikor a súlyfüggvény speciális alakú: egy pontsúlyozás indukálja.

A kérdés fennmarad: létezik-e ezen tételnek és a szubmoduláris áramok elméletének közös általánosítása. Egy másik, nagyobb lélegzetű kutatási irány annak feltárása, hogy a szubmoduláris áramok elméletét és a párosítások elméletét be lehet-e vonni valamiféle közös ernyő alá.

* * *

Összefoglalva megállapítható, hogy Egerváry tétele és az arra adott bizonyításának gondolata, bár egy szűk oldalon leírható, egy szerteágazó elméletnek lett kiindulópontja. Az egész kérdéskör azért tűnik különösképp vonzónak, mert gyakorlati kérdések, algoritmikus és tisztán elméleti vizsgálatok metszéspontjában áll, mert számos korábban reménytelennek tűnő probléma vált kezelhetővé általa, és mert még mindig nem kevés izgalmas nyitott probléma forrása.

Irodalom

1. W. H. Cunningham and A. B. Marsh A primal algorithm for optimum matching, *Mathematical Programming Study* 8 (1978) 50–72
2. W. H. Cunningham and A. Frank, A primal-dual algorithm for submodular flows, *Mathematics of Operations Research*, Vol. 10, No. 2 (1985), 251–261.
3. J. Edmonds, Paths, trees, and flowers, *Canadian Journal of Mathematics*, 17, (1965) 449–467.
4. J. Edmonds, Maximum matching and a polyhedron with 0–1 vertices, *Journal of Research of the National Bureau of Standards* (B) 69 (1965), 125–130.
5. J. Edmonds, Matroids and the greedy algorithm, *Math. Programming*, 1 (1971) 127–136
6. J. Edmonds, Matroid intersection, *Annals of Discrete Math.* 4, (1979) 39–49
7. J. Edmonds and R. Giles, A min-max relation for submodular functions on graphs, *Annals of Discrete Mathematics* 1, (1977), 185–204
8. Egerváry Jenő, Matrixok kombinatorius tulajdonságairól, *Matematikai és Fizikai Lapok*, No. 38 (1931), 16–28.
9. Egerváry Jenő, Kombinatorikus módszer a szállítási probléma megoldására, *A Matematikai Kutató Intézet Közleményei*, IV./1 (1958), 15–28.

10. A. Frank, A weighted matroid intersection algorithm, *J. Algorithms* 2 (1981) 328–336

11. A. Frank, An algorithm for submodular functions on graphs, *Annals of Discrete Mathematics* 16 (1982) 97–120.

12. A. Frank and T. Jordán, Minimal edge-coverings of pairs of sets, *J. Combinatorial Theory*, Vol. 65, No. 1 (1995, September) pp. 73–110.

13. A. J. Hoffman and J. B. Kruskal, Jr, Integral boundary points of convex polyhedra, Linear Inequalities and Related Systems, *Annals of Mathematics Study*, 38 (1956) 223–346, Princeton University Press.

14. A. Hoffman, Some recent applications of the theory of linear inequalities to extremal combinatorial analysis, *Proceedings of the Symposia of Applied Mathematics*, 10 (1960) 113–127.

15. D. Kőnig, Graphok és matrixok, *Matematikai és Fizikai Lapok*, 38 (1931) 116-119.

16. H. W. Kuhn, The Hungarian Method for the assignment problem, *Naval Research Logistic Quarterly*, 2 (1955), 83–97.

17. A. Schrijver, Short proofs on the matching polytope, *J. Combinatorial Theory* (Ser B) 34 (1983) 104–108.

THE HUNGARIAN METHOD AND ITS EXTENSIONS

One of the earliest appearance of a special form of the linear programming duality theorem is E. Egerváry's classical result on the maximum weight of a perfect matching in a complete bipartite graph. Its elegant proof gave rise to an efficient algorithm called Hungarian Method. The basic principles of the procedure has been generalized in several directions such as the maximum weight matching problem in nonbipartite graphs, the weighted matroid intersection and the submodular flow problem. In the present work we overview these extensions of the Hungarian Method. As a new contribution, a short proof is given for the weight-splitting version of the weighted matroid intersection theorem.