POZITÍV SZUBDEFINIT MÁTRIXOKRÓL ÉS ÁLTALÁNOSÍTÁSAIKRÓL[1]

KOMLÓSI SÁNDOR
Pécsi Tudományegyetem Közgazdaságtudományi Kar

Martos Béla az 1960-as évek végén bebizonyította, hogy kvadratikus függvények kvázikonvexitását az R^n nemnegatív ortánsán egy új, általa bevezetett mátrix-tulajdonsággal, a pozitív szubdefinitással lehet karakterizálni. Egészen új az a felismerés, hogy affin leképezések kvázimonotonitási tulajdonságáért ugyancsak a pozitív szubdefinitás a „felelős". Jean-Pierre Crouzeix és a szerző a lineáris komplementaritási feladatok megoldhatóságát vizsgálva jutottak el egy általánosabb pozitív szubdefinitás fogalom célszerűségének felismeréséhez. A tanulmány a pozitív szubdefinitás fogalma fejlődésének ezt a három fontos állomását mutatja be.

1 Bevezetés

Martos Béla 75. születésnapja alkalmából Forgó Ferenc írt méltató cikket jelen folyóirat hasábjain Martos Béla matematikai programozási munkásságáról [8]. Azóta eltelt 5 esztendő, mely újabb számos bizonyítékát adta annak, hogy Martos Béla úttörő munkássága az optimalizáláselmélet terén még a mai napig is újabb és újabb kutatásokat inspirál.

Ez a tanulmány a Martos Béla által bevezetett pozitív szubdefinitás fogalmának új alkalmazási, és —ezzel szerves összefüggésben— új általánosítási lehetőségeiről kíván számot adni, tisztelegve ezzel is a 2000-ben 80. életévét betöltő Martos Béla munkássága előtt.

Martos Béla egyike azon tudósoknak, akik egy manapság már széles körben művelt és elfogadott tudományterület, az *általánosított konvexitás* bölcsője mellett bábáskodtak a 60-as években.

A konvexitás fogalma a 20. század első évtizedeiben kezdett az érdeklődés középpontjába kerülni, és az optimalizáláselmélet rohamos fejlődése révén a konvex halmazokra és a konvex függvényekre vonatkozó ismereteink mára már egy önálló diszciplínává a *konvex analízissé* terebélyesedtek.

A matematikai programozás kialakulása és rohamos fejlődése előtérbe helyezte a konvexitás fogalmának lehetséges és szükséges általánosítási lehetőségeit. Az 50-es években megindult ezirányú kutatások a 60-as évek elejére olyan új fontos irányzatok kialakulásához vezettek, mint kvázikonvex programozás, kvázikonvex analízis. A kvázikonvexitás mellett olyan további fontos fogalmak alakultak ki, mint pszeudokonvexitás, explicit kvázikonvexitás, szigorú- illetve félig szigorú kvázikonvexitás, invexitás, preinvexitás stb. Újabban

[1] Beérkezett: 1999. november 3.

ezekre a fogalmakra és a rájuk vonatkozó, egyre gyarapodó ismeretekre az Általánosított Konvexitás gyűjtőfogalommal hivatkozunk.

Martos Béla —cikkünk témája szempontjából— egyik fontos hozzájárulása ehhez a diszciplínához a kvadratikus függvények kvázikonvexitási tulajdonságainak vizsgálata. Ennek kapcsán vezette be a pozitív szubdefinitás fogalmát szimmetrikus mátrixokra. Az erre vonatkozó eredményeket a 2. fejezetben tekintem át (v.ö. [15, 16]).

Néhány évvel ezelőtt Jean-Pierre Crouzeix és munkatársai affin leképezések általánosított monotonitási tulajdonságait vizsgálva kimutatták, hogy a szóban forgó tulajdonság a pozitív szubdefinitás fogalmának nemszimmetrikus mátrixokra való megfelelő kiterjesztésével karakterizálható. Ennek a kérdéskörnek dolgozatunk szempontjából releváns vonatkozásait a 3. fejezetben mutatom be (v.ö. [5]).

Jean-Pierre Crouzeix és a szerző a lineáris komplementaritási feladatok megoldhatóságát vizsgálva jutottak el egy általánosabb pozitív szubdefinitás fogalom célszerűségének felismeréséhez. A 4. fejezet részletesen tárgyalja a lineáris komplementaritási feladat megoldhatóságának kérdéskörét és bemutatja azt az új megközelítési módot, melynek eredményeképpen a pozitív szubdefinitás fogalmának egy lényegesen általánosabb formája került az érdeklődés középpontjába (v.ö. [7]).

2 Kvázikonvex kvadratikus függvények

Az $f : K \to R$ ($K \subseteq R^n$ konvex halmaz) függvényt *kvázikonvexnek* nevezzük, ha bármely $x_1, x_2 \in K$ és $0 \leq \lambda \leq 1$ esetén

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \max\{f(x_1), f(x_2)\}.$$

Legyen

$$f(x) = \langle Mx, x\rangle + \langle q, x\rangle + c, \quad x \in R^n,$$

ahol M $n \times n$-es mátrix, q n-dimenziós vektor és c valós szám. Egyszerű számolással adódik, hogy

$$\nabla f(x) = (M + M^T)x + q$$

és

$$\nabla^2 f(x) = M + M^T.$$

Mivel $2\langle Mx, x\rangle = \big\langle (M + M^T)x, x\big\rangle$ minden $x \in R^n$ esetén, ezért az általánosságot nem sértjük, ha eleve feltesszük, hogy az M mátrix szimmetrikus.

A többváltozós függvények klasszikus elméletéből ismert, hogy az $f(x)$ kvadratikus függvény akkor és csak akkor konvex, ha az M szimmetrikus mátrix pozitív szemidefinit ($PSemiD$). A kvázikonvexitás nem hoz semmi újat, ha R^n-en vizsgáljuk. Megmutatható ugyanis, hogy $f(x)$ csak úgy lehet kvázikonvex az egész R^n-en, ha konvex. Gyakorlati feladatoknál természetes megszorítás a változók nem-negativitása. Ezért különös jelentőséggel bír az általánosított konvexitási tulajdonságokat R_+^n-on, a nem-negatív ortánson vizsgálni. Martos Béla egyik szép eredménye a következő.

1. Tétel. [15,16] *Legyen $f(x)$ nem-konvex kvadratikus függvény. Ekkor $f(x)$ akkor és csak akkor kvázikonvex az R_+^n nem-negatív ortánson, ha teljesülnek a következő feltételek:*

(i) $w \in R^n, \langle Mw, w\rangle < 0 \Longrightarrow Mw \geq 0$ *vagy* $Mw \leq 0$,

(ii) $q \leq 0$,

(iii) *van olyan* $u \in R^n$, *hogy* $q = Mu$ *és* $\langle q, u\rangle \leq 0$.

Ennek a tételnek az (i) feltétele kizárólag az M mátrixra vonatkozik. Az (i) feltételnek eleget tevő mátrixokat Martos Béla pozitív szubdefinit ($PsubD$) mátrixoknak nevezte el.

Definíció. Az n-edrendű szimmetrikus M mátrixot *pozitív szubdefinitnek* mondjuk, ha bármely $w \in R^n$-re

$$\langle Mw, w\rangle < 0 \Rightarrow Mw \leq 0 \text{ vagy } Mw \geq 0. \qquad (PSubD)$$

A definíciókból közvetlenül adódik, hogy egy $PSemiD$ mátrix $PSubD$ is egyúttal, vagyis a $PSubD$ mátrixok osztálya tartalmazza a $PSemiD$ mátrixosztályt. Az érdeklődő Olvasó Martos Béla [16] könyvében számos érdekes és fontos eredményt talál a $PSubD$ mátrixosztályról. Érdemes megemlíteni Martos tételének egy lehetséges ekvivalens formáját.

2. Tétel. [1] *Legyen $f(x)$ nem-konvex kvadratikus függvény. Ekkor $f(x)$ akkor és csak akkor kvázikonvex az R_+^n nem-negatív ortánson, ha az*

$$\begin{bmatrix} M & q \\ q^T & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix pozitív szubdefinit.

3 Affin leképezések pszeudomonotonitása

A klasszikus analízis egyik közismert tétele szerint a differenciálható $f(x)$, $x \in R$ függvény akkor és csak akkor konvex az (a, b) intervallumon, ha az $f'(x)$ derivált függvény növekvő (a, b)-n. Ez azt jelenti, hogy minden $x_1, x_2 \in (a, b)$ esetén

$$(x_1 - x_2)(f'(x_1) - f'(x_2)) \geq 0.$$

Lehet, hogy a növekedésnek ez a formulázása kissé szokatlan, de a többváltozós függvények esetén a konvexitás elsőrendű jellemzése pont ebben az alakban lehetséges. Bizonyítható ugyanis, hogy a differenciálható $f(x), x \in$

R^n függvény akkor és csak akkor konvex a $K \subseteq R^n$ konvex halmazon, ha minden $x_1, x_2 \in K$ esetén

$$\langle x_1 - x_2, \nabla f(x_1) - \nabla f(x_2) \rangle \geq 0. \qquad (Mon)$$

Ezt a tulajdonságot az $x \to \nabla f(x)$ leképezés monotonitásának nevezik.

A 60-as évektől kezdődően a különböző általánosított konvexitási tulajdonságok számos fontos tulajdonságára derült fény, de érdekes módon tisztán elsőrendű jellemzésre lényegében véve egészen 1990-ig kellett várni. Ekkor jelent meg S. Karamardian és S. Schaible nevezetes cikke [10], amelyben a (gradiens) leképezés monotonitásának fogalmát olyan módon általánosították, hogy az pontosan bizonyos általánosított konvexitási tulajdonsággal legyen ekvivalens. Bevezették a leképezés kvázimonotonitásának, pszeudomonotonitásának fogalmát és (többek között) megmutatták, hogy az $f(x)$ differenciálható függvény akkor és csak akkor kvázikonvex (pszeudokonvex) egy adott K konvex halmazon, ha a $\nabla f(x)$ gradiens-leképezés kvázimonoton (pszeudomonoton) K-n. Ennek a cikknek a megjelenése egy új kutatási irányzat, az *általánosított monotonitás* kialakulásához vezetett [6, 12], mely *variációs egyenlőtlenségek* és *általános egyensúlyi feladatok* vizsgálatánál is fontos szerepet játszik [14].

Definíció. A $T : R^n \to R^n$ leképezést *kvázimonotonnak* mondjuk a $K \subseteq R^n$ halmazon, ha bármely $x_1, x_2 \in K$ esetén

$$\langle x_1 - x_2, T(x_1) \rangle < 0 \quad \Rightarrow \quad \langle x_1 - x_2, T(x_2) \rangle \leq 0. \qquad (QMon)$$

Definíció. A $T : R^n \to R^n$ leképezést *pszeudomonotonnak* mondjuk a $K \subseteq R^n$ halmazon, ha bármely $x_1, x_2 \in K$ esetén

$$\langle x_1 - x_2, T(x_1) \rangle < 0 \quad \Rightarrow \quad \langle x_1 - x_2, T(x_2) \rangle < 0. \qquad (PsMon)$$

Ha visszatérünk a Martos Béla által vizsgált kvadratikus függvényekhez, akkor a fenti eredmények tükrében vizsgálatukat „átjátszhatjuk" a $\nabla f(x) = Mx + q$ affin leképezés vizsgálatára. Érdekes módon a $T(x) = Mx + q$ típusú affin leképezések egy általánosabb probléma kapcsán is előtérbe kerülnek, nevezetesen a lineáris komplementaritási feladatot ilyen leképezések határozzák meg.

A *Lineáris Komplementaritási Feladat* (LKF) a következő [4]: keressük azokat az $x \in R^n$ vektorokat, amelyek eleget tesznek a következő feltételeknek

$$\begin{aligned} \langle Mx + q, x \rangle &= 0, \\ Mx + q &\geq 0, \qquad\qquad LKF(M, q) \\ x &\geq 0, \end{aligned}$$

ahol M n-edrendű kvadratikus mátrix, q pedig n-dimenziós vektor.

Az $LKF(M,q)$-ban szereplő M mátrix csak kvadratikus, nem kell szimmetrikusnak lennie. A legújabb vizsgálatok kiderítették, hogy $LKF(M,q)$-nak számos jó tulajdonságot biztosít az, ha a $T(x) = Mx + q$ affin leképezés pszeudomonoton R^n_+-on. Érdemes a következő tételt összehasonlítani az 1. Tétellel.

3. Tétel. [5] *Legyen a $T(x) = Mx + q$ leképezés nem-monoton, legyen továbbá* $\mathrm{rank}(M) \geq 2$. *Ekkor $T(x)$ akkor és csak akkor pszeudomonoton az R^n_+ nem-negatív ortánson, ha teljesülnek a következő feltételek:*

(i) $w \in R^n, \langle Mw, w\rangle < 0 \Longrightarrow M^T w \geq 0$ *vagy* $M^T w \leq 0$,

(ii) *van olyan* $u \in R^n$, *hogy* $q = Mu$,

(iii) *ha* $q = M\bar{u}$, *akkor* $\langle M^s\bar{u}, \bar{u}\rangle \leq 0$ *és* $M^s\bar{u} \leq 0$.

Könnyen észrevehetjük, hogy az (i) feltétel szimmetrikus mátrixok esetén pontosan a pozitív szubdefinitást jelenti, ennélfogva az (i) feltétel a Martos-féle szubdefinitás fogalomnak a kvadratikus mátrixok osztályára való kiterjesztése.

Definíció. [5] Az n-edrendű M mátrixot pozitív szubdefinitnek ($PSbD$) mondjuk, ha bármely $w \in R^n$-re

$$\langle Mw, w\rangle < 0 \Rightarrow M^T w \leq 0 \text{ vagy } M^T w \geq 0. \qquad (PSbD)$$

Az érdeklődő Olvasó számos érdekes és fontos eredményt talál a $PSbD$ mátrixokról az [5] dolgozatban. Bizonyítható, többek között, a 2. Tétel analogonja.

4. Tétel. *Legyen a $T(x) = Mx + q$, ahol $\mathrm{rank}(M) \geq 2$. Ekkor $T(x)$ akkor és csak akkor pszeudomonoton az R^n_+ nem-negatív ortánson, ha az*

$$\begin{bmatrix} M & q \\ q^T & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix pozitív szubdefinit.

4 Általánosított PSbD mátrixok

Ebben a részben megmutatjuk, hogy a lineáris komplementaritási feladat egy újszerű vizsgálata hogyan vezet el a $PSbD$ mátrixosztály egy további általánosításához.

4.1 A Lineáris Komplementaritási Feladat

Tekintsük ismét az $LKF(M,q)$ feladatot:

$$\begin{aligned} \langle Mx + q, x\rangle &= 0, \\ Mx + q &\geq 0, \qquad\qquad LKF(M,q) \\ x &\geq 0, \end{aligned}$$

Jelölje $S(M,q)$ a fenti feladat megoldási halmazát. Ennek tanulmányozásához „bevett szokás" a következő segédfeladatot segítségül hívni:

$$\min\left[f(x) = \langle Mx+q, x\rangle : Mx+q \geq 0,\ x \geq 0\right]. \qquad QP(M,q)$$

Jelölje $S'(M,q)$ ennek a feladatnak a megoldási halmazát. Nyilvánvaló, hogy

$$S(M,q) \subseteq S'(M,q),$$

és $a \in S(M,q)$ akkor és csak akkor teljesül, ha a lehetséges megoldás és $f(a)=0$. A $QP(M,q)$ kvadratikus programozási feladatnak van néhány igen figyelemreméltó tulajdonsága: a feltételi halmaza poliedrikus, a célfüggvénye pedig a feltételi halmazon alulról korlátos. Frank és Wolfe egyik nevezetes tétele szerint [9] ennek a feladatnak mindig van optimális megoldása, amennyiben létezik lehetséges megoldása. Lehetséges megoldás létezése azt jelenti, hogy létezik olyan $x \in R^n$ vektor, amelyre teljesülnek az $x \geq 0$ és $Mx+q \geq 0$ feltételek. A Farkas-lemma szerint ez a *konzisztencia feltétel* ekvivalens a következővel:

$$u \geq 0,\ M^T u \leq 0 \Rightarrow \langle q, u\rangle \geq 0.$$

Vezessük be a következő kúpot

$$K_M = \left\{u \in R^n : u \geq 0,\ M^T u \leq 0\right\},$$

és tekintsük ennek negatív polárisát:

$$K_M^0 = \{p \in R^n : \langle p, u\rangle \leq 0\ \forall u \in K_M\}.$$

Ennek a poláris kúpnak a segítségével a „konzisztencia" kérdése a következőképpen is kifejezhető: az $LKF(M,q)$ feladat feltételrendszere akkor és csak akkor konzisztens (megoldható), ha

$$-q \in K_M^0.$$

Ennek és a korábban említett Frank-Wolfe tételnek az alapján nyilvánvaló, hogy

$$S'(M,q) \neq \emptyset \Leftrightarrow -q \in K_M^0,$$

illetve egy $a \in R^n$ lehetséges megoldásra

$$a \in S(M,q) \Leftrightarrow -q \in K_M^0 \text{ és } f(a) = 0.$$

A fentiekből következik, hogy ha $K_M = \{0\}$, akkor az $LKF(M,q)$ feladat minden $q \in R^n$-re konzisztens, hiszen ebben az esetben $K_M^0 = R^n$. Ez az eset következik be például akkor, ha az $M + M^T$ mátrix pozitív szemidefinit.

Tegyük most fel, hogy $a \in S'(M,q)$. Ekkor a-ban teljesülnek az optimalitás Karush-Kuhn-Tucker feltételei, nevezetesen léteznek olyan $u, v \in R^n$ vektorok, hogy

$$(M+M^T)a + q - M^T u - v = 0, \qquad KKT(a)$$

$$a, u, v, Ma + q \geq 0, \qquad KKT(b)$$

$$\langle a, v\rangle = \langle Ma + q, u\rangle = 0. \qquad KKT(c)$$

Jelölje $S''(M,q)$ azon a vektorok összességét, melyekre teljesülnek a fenti $KKT(a)$–(c) feltételek. Mivel a $QP(M,q)$ kvadratikus programozási feladat feltételi halmaza reguláris, mert poliedrikus, ezért

$$S'(M,q) \subseteq S''(M,q),$$

következésképpen

$$S(M,q) \subseteq S'(M,q) \subseteq S''(M,q). \qquad (S)$$

Az $LKF(M,q)$ probléma megoldásainak megkeresésére elterjedt módszer a következő: megadunk olyan feltételeket, melyek biztosítják az $S(M,q) = S''(M,q)$ egybeesést és az $S(M,q)$ halmaz elemeit a $QP(M,q)$ kvadratikus programozási segédfeladat megoldása révén határozzuk meg [3, 4, 7].

A $KKT(a)$–(c) feltételrendszerből könnyen adódik a következő:

$$0 = f(a) + \langle u, v\rangle + \left\langle M^T(u-a), (u-a)\right\rangle, \qquad (F)$$

ahol $f(a) = \langle Ma + q, a\rangle \geq 0$ és a Lagrange-szorzókra vonatkozó nem-negativitási kikötés miatt $\langle u, v\rangle \geq 0$. Ha történetesen $\left\langle M^T(u-a), (u-a)\right\rangle \geq 0$, akkor $f(a) = 0$, következésképpen a megoldása az $LKF(M,q)$ feladatnak. Ezt a tényt ötvözve a konzisztenciára vonatkozó egyik korábbi megállapításunkkal egy már régóta jól ismert állításhoz jutunk:

5. Tétel. *Ha az $M + M^T$ mátrix pozitív szemidefinit, akkor minden q-ra $S(M,q) = S''(M,q) \neq \emptyset$.*

4.2 Egy új feltétel az $S(M,q) = S''(M,q)$ egybeesés biztosítására

A cikk hátralevő részeiben gyakran fogjuk használni a következő jelöléseket.

- Legyen H szimmetrikus mátrix. Jelölje

  $$\nu_-(H)$$

  a H mátrix negatív sajátértékeinek számát, annyiszor számolva az egyes sajátértékeket, amennyi a multiplicitásuk.

- Legyen $t \in R$ és legyenek

  $$t^+ = \max\{t, 0\}, \quad t^- = \max\{0, -t\}.$$

- Tetszőleges $x \in R^n$ vektorra legyenek

  $$x^+ = (x_1^+, x_2^+, ..., x_n^+) \quad \text{és} \quad x^- = (x_1^-, x_2^-, ..., x_n^-).$$

A következő tétel a kiindulópontja a további vizsgálódásoknak, mely mélyebb betekintést ad az (F) feltétel "finomszerkezetébe".

6. Tétel. [7] *Legyen $a \in R^n$ KKT-stacionárius pontja a $QP(M,q)$ feladatnak $u, v \geq 0$ Lagrange multiplikátor vektorokkal. Legyen $w = u - a$. Ekkor*

$$f(a) = \langle a, Ma + q\rangle = \left\langle \left(M^T w\right)^+, w^- \right\rangle , \tag{F1}$$

$$\langle u, v\rangle = \left\langle \left(M^T w\right)^-, w^+ \right\rangle , \tag{F2}$$

$$0 = \left\langle \left(M^T w\right)^+, w^+ \right\rangle + \left\langle \left(M^T w\right)^-, w^- \right\rangle , \tag{F3}$$

$$f(a) = -\frac{1}{2}\langle q, w\rangle . \tag{F4}$$

Bizonyítás. Írjuk át a $KKT(a)$ és (F) feltételeket *koordinátás alakba*: minden i-re

$$v_i + (M^T w)_i = (Ma + q)_i \tag{1}$$

és

$$0 = (Ma + q)_i a_i + u_i v_i + (M^T w)_i w_i .$$

Ez utóbbit egyszerű átrendezéssel a következő alakra hozhatjuk.

$$-w_i(M^T w)_i = a_i(Ma + q)_i + u_i v_i \geq 0, \quad \forall i , \tag{2}$$

melyből azonnal adódik $(F3)$.

Tegyük fel, hogy $(M^T w)_i > 0$. Ekkor (2) miatt $w_i \leq 0$, (1) miatt pedig $(Ma+q)_i > 0$. A $KKT(c)$ komplementaritási feltételből ekkor $u_i = 0$ adódik, ami miatt (2) a következő alakot ölti:

$$a_i(Ma + q)_i = -w_i(M^T w)_i .$$

Mindezen megállapításokból közvetlenül adódik, hogy

$$a_i(Ma + q)_i = (M^T w)_i^+ w_i^- , \tag*{$F1(i)$}$$

és

$$u_i v_i = (M^T w)_i^- w_i^+ . \tag*{$F2(i)$}$$

Tegyük most fel, hogy $(M^T w)_i < 0$. Ekkor (2) miatt $w_i \geq 0$, (1) miatt pedig $v_i > 0$. A $KKT(c)$ komplementaritási feltételből ekkor $a_i = 0$ adódik, ami miatt (2) a következő alakot ölti:

$$u_i v_i = -w_i(M^T w)_i .$$

Az elmondottak alapján nyilvánvaló, hogy ebben az esetben is teljesülnek a $F1(i)$–$F2(i)$ feltételek.

Végezetül tegyük fel, hogy $(M^T w)_i = 0$. Ekkor (2)-ből $a_i(Ma+q)_i = u_i v_i = 0$ következik és ennélfogva $F1(i)$ és $F2(i)$ ebben az esetben is teljesül. Ez pedig pontosan a $(F1)$–$(F2)$ állításokat igazolja.

Az $(F4)$ feltétel bizonyítása a következőképpen történhet: Mivel $f(a) = \langle Ma+q, a\rangle$ és $KKT(c)$ szerint $0 = \langle Ma+q, u\rangle$, ezért nyilvánvaló, hogy

$$f(a) = \langle Ma+q, a-u\rangle = \langle Ma, a-u\rangle + \langle q, a-u\rangle\,.$$

Másfelől viszont, $KKT(a)$-ból adódik, hogy $Ma+q = M^T(u-a)+v$. Mivel $KKT(c)$ miatt $\langle a, v\rangle = 0$, ezért nyilvánvaló, hogy

$$f(a) = \langle Ma+q, a\rangle = \left\langle M^T(u-a), a\right\rangle = \langle u-a, Ma\rangle\,.$$

Ebből a két összefüggésből kiadódik az $(F4)$ feltétel. □

Az imént bizonyított tétel alapján több elegendő feltétel is adható arra, hogy $S(M,q) = S''(M,q)$ teljesüljön.

- Az (F) feltétel szerint $\langle Mw, w\rangle \geq 0$ garantálja az $f(a) = 0$ feltételt.
- Az $(F4)$ feltétel szerint, ha $\langle Mw, w\rangle < 0$, de $\langle q, w\rangle \geq 0$, akkor is bekövetkezik az $f(a) = 0$ eset.
- Ha viszont $\langle Mw, w\rangle < 0$ és $\langle q, w\rangle \leq 0$, akkor az $(F1)$ feltétel szerint az $\left\langle (M^T w)^+, w^-\right\rangle = 0$ feltétel elegendő az $f(a) = 0$ feltétel „kikényszerítéséhez".

Az elmondottak remélhetőleg elegendő indokot szolgáltatnak a következő fogalom bevezetéséhez.

Definíció. [7] Az (M,q) párt *megfelelőnek* mondjuk, ha

$$\langle Mw, w\rangle < 0 \ \text{ és } \ \langle q, w\rangle \leq 0 \Rightarrow \left\langle (M^T w)^+, w^-\right\rangle = 0\,. \qquad APP$$

A következő tétel mutat rá az imént bevezetett fogalomnak a jelentőségére.

7. Tétel. [7] *Ha az (M,q) pár megfelelő, akkor $S(M,q) = S''(M,q)$.*

Bizonyítás. Folytonosság miatt az (APP) feltétel a következő „élesebb" formában is teljesül:

$$\langle Mw, w\rangle \leq 0 \ \text{ és } \ \langle q, w\rangle \leq 0 \Rightarrow \left\langle (M^T w)^+, w^-\right\rangle = 0\,.$$

Legyen $a \in S''(M,q)$. Legyenek $u, v \geq 0$ a megfelelő Lagrange multiplikátorok. Legyen $w = u - a$. Ekkor (F) és $(F4)$ szerint $\langle Mw, w\rangle \leq 0$ és $\langle q, w\rangle \leq 0$. Mivel az (M,q) pár megfelelő, ezért $\left\langle (M^T w)^+, w^-\right\rangle = 0$, és mivel $(F1)$ szerint $f(a) = \left\langle (M^T w)^+, w^-\right\rangle$, ezért $f(a) = 0$, következésképpen $a \in S(M,q)$. □

Nem nehéz belátni, hogy az (M,q) pár megfelelő a következő esetekben:

- az $M + M^T$ mátrix pozitív szemidefinit,
- az M mátrix pozitív szubdefinit de $M + M^T$ nem pozitív szemidefinit és van olyan $u \in R^n, u \geq 0$, hogy $q = Mu$.

A következő tétel megfelelő (M, q) pár mátrix komponensének egy fontos tulajdonságára mutat rá.

8. Tétel. *Ha az (M, q) pár megfelelő, akkor $\nu_-(M + M^T) \leq 1$.*

Bizonyítás. Legyen az (M, q) pár megfelelő. Először is megmutatjuk, hogy ekkor érvényes a következő implikáció:

$$\langle q, w\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle Mw, w\rangle \geq 0\,. \tag{3}$$

Ezt indirekt módon bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy létezik olyan w, amelyre $\langle q, w\rangle = 0$ és $\langle Mw, w\rangle < 0$ teljesül. Az (APP) feltétel folytán

$$\left\langle \left(M^T w\right)^+, w^- \right\rangle = 0\,. \tag{4}$$

Mivel nyilvánvaló, hogy $\langle q, -w\rangle = 0$ és $\langle M(-w), -w\rangle < 0$, ezért ugyancsak (APP) miatt

$$\left\langle \left(M^T w\right)^-, w^+ \right\rangle = 0\,. \tag{5}$$

(4) és (5) miatt

$$\langle Mw, w\rangle = \left\langle \left(M^T w\right)^+, w^+ \right\rangle + \left\langle \left(M^T w\right)^-, w^- \right\rangle \geq 0\,,$$

ami ellentmond kiindulási feltevésünknek.

Most megmutatjuk, hogy a (3) implikáció teljesülése esetén $\nu_-(M + M^T) \leq 1$. Tegyük fel állításunkkal ellentétben, hogy $\nu_-(M + M^T) > 1$. Ekkor léteznek olyan w_1 és w_2 egymásra merőleges sajátvektorai az $(M+M^T)$ mátrixnak, hogy $\langle Mw_1, w_1\rangle < 0$ és $\langle Mw_2, w_2\rangle < 0$. A (3) implikáció miatt ekkor $\langle q, w_1\rangle \neq 0$ és $\langle q, w_2\rangle \neq 0$. Az általánosságot nem sérti, ha feltesszük, hogy $\langle q, w_1\rangle > 0$ és $\langle q, w_2\rangle < 0$. Ekkor létezik olyan $0 < t_0 < 1$ valós szám, hogy

$$\langle q, w_0\rangle = 0$$

teljesül a $w_0 = t_0 w_1 + (1 - t_0) w_2$ vektorra. (3) miatt ekkor

$$\langle Mw_0, w_0\rangle \geq 0$$

kell, hogy legyen. Másfelől azonban

$$2\langle Mw_0, w_0\rangle = \langle (M + M^T)w_0, w_0\rangle = 2t_0^2 \langle Mw_1, w_1\rangle + 2(1-t_0)^2 \langle Mw_2, w_2\rangle < 0.$$

Ez az ellentmondás igazolja tételünket. $\square$

Mivel $\nu_-(M+M^T)=0$ esetén a $QP(M,q)$ feladat egy konvex kvadratikus programozási feladat, melynek vizsgálata nem hoz semmi újat, ezért a továbbiakban azt az esetet vizsgáljuk, amikor $\nu_-(M+M^T)=1$. Ebben az esetben a

$$K=\{w:\langle Mw,w\rangle\le 0\}$$

halmaz nem üres, és a következő nevezetes tulajdonsággal rendelkezik.

Lemma. *Legyen M olyan kvadratikus mátrix, melyre a $H=M+M^T$ mátrixnak pontosan egy egyszeres negatív sajátértéke van. Ekkor létezik olyan zárt konvex kúp T, hogy*

$$K=\{w:\langle Mw,w\rangle\le 0\}=T\cup(-T)\,. \tag{6}$$

Bizonyítás. Induljunk ki abból, hogy a K kúpot a következőképpen is megadhatjuk

$$K=\{w:\langle Hw,w\rangle\le 0\}\,.$$

Ismeretes a szimmetrikus mátrixok elméletéből, hogy a $\langle Hw,w\rangle$ kvadratikus formát egy P unitér transzformáció segítségével ($PP^T=P^TP=I$) diagonál formára lehet transzformálni. Ezzel a P-vel teljesül a következő:

$$H=PDP^T=P\begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0\\ 0 & D_2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}P^T,$$

ahol d_1 jelöli a H egyetlen negatív sajátértékét, D_2 pedig egy pozitív definit diagonál mátrix.

Tekintsük a $P^T(K)=L$ kúpot. Ekkor $w\in K\Leftrightarrow P^Tw\in L$, továbbá

$$L=\left\{y=P^Tw:\langle HPy,Py\rangle=\langle Dy,y\rangle\le 0\right\}\,.$$

Particionáljuk az $y=P^Tw$ vektort a D fenti előállításának megfelelő módon:

$$y=\begin{bmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\end{bmatrix},$$

és legyen

$$Y=\{y:\langle Dy,y\rangle=d_1y_1^2+\langle D_2y_2,y_2\rangle\le 0 \text{ és } y_1\ge 0\}.$$

Az nyilvánvaló, hogy

$$L=Y\cup(-Y).$$

Legyen $T=P(Y)$. Ekkor

$$K=P(L)=P(Y)\cup P(-Y)=T\cup(-T).$$

Most megmutatjuk, hogy T zárt és konvex kúp. Ezt elegendő az Y kúpról bebizonyítani. A $\langle Dy,y\rangle$ kvadratikus forma folytonossága biztosítja azt, hogy

Y zárt. Y konvexitása azonban már nem annyira nyilvánvaló. Ehhez vegyük észre, hogy Y-t a következő módon is megadhatjuk:

$$Y = \left\{ y : \sqrt{\langle D_2 y_2, y_2\rangle} \leq \sqrt{-d_1} y_1 \text{ és } y_1 \geq 0 \right\}.$$

Tekintettel arra, hogy D_2 pozitív definit, ennélfogva a $\langle D_2 y_2, y_2\rangle$ kvadratikus forma szigorúan konvex, de ugyancsak konvex a $\sqrt{\langle D_2 y_2, y_2\rangle}$ függvény is. Legyenek $u, v \in Y$ és legyen $z = \lambda u + (1-\lambda) v$. Ekkor

$$\sqrt{\langle D_2 z_2, z_2\rangle} \leq \lambda \sqrt{\langle D_2 u_2, u_2\rangle} + (1-\lambda)\sqrt{\langle D_2 v_2, v_2\rangle} \leq$$
$$\lambda\sqrt{-d_1} u_1 + (1-\lambda)\sqrt{-d_1} v_1 = \sqrt{-d_1} z_1 \,,$$

következésképpen $z \in Y$. □

Ezek után bebizonyítjuk a következő tételt.

9. Tétel. [7] *Tegyük fel, hogy* $\nu_-(M+M^T) = 1$ *és* $q \neq 0$. *Ekkor az* (M,q) *pár akkor és csak akkor megfelelő, ha* $q \in T^0$ *és minden* $i = 1, 2, \ldots, n$*-hez találhatók olyan* $s_i, t_i \geq 0$ *valós számok, hogy*

$$s_i + t_i = 1 \quad \textit{és} \quad -s_i e_i + t_i m_i \in T^0,$$

ahol e_i *illetve* m_i *az* E n*-edrendű egységmátrix és az* M *mátrix* i*-edik oszlopait jelölik.*

Bizonyítás. *Szükségesség.* Tegyük fel, hogy az (M,q) pár megfelelő. Az előző tétel bizonyításából tudjuk, hogy ekkor teljesül a (3) implikáció, mely ekvivalens a következővel:

$$\langle Mw, w\rangle < 0 \quad \Rightarrow \quad \langle q, w\rangle \neq 0 \,.$$

Tekintettel a (6) dekompozícióra, ebből az következik, hogy vagy q, vagy pedig $-q$ eleme a T^0 poláris kúpnak. Mivel q adott, ezért minden további nélkül megtehetjük, hogy a (6) dekompozíciónak azt a komponensét jelöljük T-vel, amellyel $q \in T^0$ teljesül. Ekkor

$$T = \{w : \langle Mw, w\rangle \leq 0 \quad \text{és} \quad \langle q, w\rangle \leq 0\} \,. \tag{7}$$

Vezessük be minden i-re, $i = 1, 2, \ldots, n$, a

$$W_i = \left\{ w : \langle e_i, w\rangle = w_i < 0 \quad \text{és} \quad \langle m_i, w\rangle = (M^T w)_i > 0 \right\} .$$

konvex poliédert. Nem nehéz belátni, hogy (M,q) akkor és csak akkor megfelelő pár, ha minden i-re

$$T \cap W_i = \emptyset \,. \tag{8}$$

A Farkas-lemma segítségével viszonylag egyszerűen igazolható, hogy a W_i poliéder akkor és csak akkor üres, ha léteznek olyan s_i, t_i nemnegatív valós számok, melyekre $s_i + t_i = 1$ és $s_i e_i = t_i m_i$.

Ezek után tegyük fel, hogy $W_i \neq \emptyset$. Ekkor a konvex halmazok szeparációs tétele szerint a (8) feltétel ekvivalens a következővel: létezik olyan $d_i \in R^n, d_i \neq 0$ vektor, hogy

$$\sup\left\{\langle d_i, w\rangle : w \in T\right\} \leq 0 \leq \inf\left\{\langle d_i, w\rangle : w \in W_i\right\}.$$

Ebből egyfelől az következik, hogy

$$d_i \in T^0,$$

másfelől pedig az, hogy

$$0 \leq \inf\left\{\langle d_i, w\rangle : w_i \leq 0 \quad \text{és} \quad (M^T w)_i \geq 0\right\}.$$

A Farkas-lemma szerint ebből az következik, hogy vannak olyan s_i, t_i nemnegatív valós számok, melyekre $s_i + t_i > 0$ és $-s_i e_i + t_i m_i = d_i$. Tekintettel arra, hogy T^0 kúp, ezért az s_i, t_i számok normálhatók oly módon, hogy teljesüljön az $s_i + t_i = 1$ feltétel.

Elegendőség. Tegyük fel, hogy a tétel feltételei teljesülnek és a $w \in R^n$ vektorra

$$\langle Mw, w\rangle < 0 \quad \text{és} \quad \langle q, w\rangle \leq 0$$

teljesül. A T kúp (7) reprezentációjából következik, hogy $w \in T$. Mivel

$$-s_i e_i + t_i m_i \in T^0,$$

ezért

$$\langle -s_i e_i + t_i m_i, w\rangle \leq 0\,. \tag{9}$$

Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor $s_i \neq 0$. Ekkor

$$w_i \geq \frac{t_i}{s_i}(M^T w)_i\,.$$

Amennyiben $t_i \neq 0$, akkor (9)-ből azt kapjuk, hogy:

$$(M^T w)_i \leq \frac{s_i}{t_i} w_i\,.$$

Mindkét esetben teljesül a következő: minden i-re

$$(M^T w)_i^+ (w^-)_i = 0\,,$$

ami pontosan azt jelenti, hogy

$$\left\langle (M^T w)^+, w^-\right\rangle = 0\,,$$

vagyis az (M, q) párra teljesül az (APP) implikáció. □

4.3 Általánosított pozitív szubdefinit mátrixok

Az előző tételben szereplő feltételek körültekintő vizsgálata inspirálta a következő fogalom bevezetését.

Definíció. [7] Az M kvadratikus mátrixot *általánosított pozitív szubdefinitnek* nevezzük, ha léteznek olyan $s_i, t_i \geq 0, s_i + t_i = 1, i = 1, 2, ..., n$ valós számok, hogy

$$\langle Mw, w\rangle < 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{vagy} & -s_i w_i + t_i(M^T w)_i \leq 0 \quad \text{minden } i\text{-re}, \\ \text{vagy} & -s_i w_i + t_i(M^T w)_i \geq 0 \quad \text{minden } i\text{-re}, \end{cases} \qquad GPSbD$$

ahol w_i illetve $(M^T w)_i$ a w illetve $M^T w$ vektorok i-edik komponenseit jelölik.

Nem nehéz igazolni, hogy az M mátrix akkor és csak akkor $PSbD$, ha $GPSbD$ $s_i = 0$ és $t_i = 1$ együtthatókkal minden i-re.

A következő példában megmutatjuk, hogy az általánosított pozitív szubdefinit mátrixok osztálya bővebb, mint a $PSbD$ mátrixoké.

Példa. Tekintsük a következő mátrixot:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Az $M + M^T$ mátrix inerciájának kiszámítása révén könnyen megállapítható (két pivot-transzformáció után), hogy $\nu_-(M + M^T) = 1$. (Az inercia kiszámításra szolgáló Cottle-algoritmus megtalálható Cottle eredeti cikkében [2], illetve a [13] egyetemi tankönyvben.) Egyszerű számolással kapjuk, hogy

$$\langle Mw, w\rangle = 3w_1 w_2 \quad \text{és} \quad M^T w = \begin{bmatrix} w_2 \\ 2w_1 - w_3 \\ w_2 \end{bmatrix}.$$

Könnyen ellenőrizhetjük, hogy M nem $PSbD$, viszont $s_1 = t_2 = s_3 = 0$ és $t_1 = s_2 = t_3 = 1$ választással teljesül az ($GPSbD$) feltétel.

Az általánosított pozitív szubdefinitás fogalma segítségével a 9. Tétel a következőképpen is kimondható.

10. Tétel. *Teljesüljön az M mátrixra a $\nu_-(M + M^T) = 1$ feltétel. Ekkor az (M, q) pár akkor és csak akkor megfelelő, ha az M mátrix $GPSbD$ és $q \in T^0$.*

5 Köszönetnyilvánítás

Ezen a helyen kívánok köszönetet mondani lektoraimnak, akik észrevételeikkel hozzájárultak ahhoz, hogy a cikk közérthetőbb legyen és kevesebb hibát tartalmazzon. Köszönettel tartozom továbbá az OTKA T 025442 és az FKFP 059/1997 pályázatoknak pénzügyi támogatásukért.

Irodalom

1. Cottle, R. W.- Ferland, J. A.: *Matrix-Theoretic Criteria for the Quasiconvexity and Pseudoconvexity of Quadratic Functions*, Stanford University, Technical Report, No. 6. 1970.
2. Cottle, R. W.: *Manifestations of the Schur complement*, Linear Algebra and its Applications, **8** (1974) 189–211.
3. Cottle, R. W., Pang, J. S. and Venkatesvaran, V.: *Sufficient matrices and the linear complementarity problem*, Linear Algebra and its Applications, **114/115** (1989) 231–249.
4. Cottle, R. W., Pang, J. S. and Stone, R. E.: *The Linear Complementarity Problem*, Academic Press, New York, 1992.
5. Crouzeix, J.-P., Hassouni, A., Lahlou, A. and Schaible, S.: *Positive Sub-Definite Matrices, Generalized Monotonicity and Linear Complementarity Problems*, SIAM J. Matrix Anal. Appl., megjelenés alatt.
6. Crouzeix, J.-P., Martínez-Legaz, J.-E., and Volle, M.: *Generalized Convexity, Generalized Monotonicity*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998.
7. Crouzeix, J.-P. - Komlósi, S.: *The Linear Complementarity Problem and the Class of Generalized Positive Subdefinite Matrices*, in: Proceedings of the XIVth International Conference on Mathematical Programming held in Mátraháza, March, 1999. submitted.
8. Forgó F.: *Martos Béla matematikai programozási munkássága*, SZIGMA, **27** (1996) 1–9.
9. Frank, M. and Wolfe, P.: *An algorithm for quadratic programming*, Naval Res. Logistics Quart., **3** (1956) 992–997.
10. Karamardian, S.-Schaible, S.: *Seven kinds of monotone maps*, Journal of Optimization Theory and Applications, **66** (1990) 37–46.
11. Komlósi S.: *Általánosított monotonitás és általánosított konvexitás*, SZIGMA, **24** (1993) 23–34.
12. Komlósi S.: *Generalized Monotonicity and Generalized Convexity*, Journal of Optimization Theory and Applications, **84** (1995) 361–376.
13. Komlósi S.: *Az optimalizáláselmélet alapjai*, Dialóg Campus Kiadó, Budapest-Pécs, 2001. Pannonius Tudományegyetem, Pécs, 1996.
14. Komlósi, S.: *On the Stampacchia and Minty Variational Inequalities*, in: G. Giorgi and F. Rossi (Eds.) Generalized Convexity and Optimization for Economic and Financial Decisions, Pitagora Editrice, Bologna, 1998, 231–260.
15. Martos B.: *Subdefinite Matrices and Quadratic Forms*, SIAM J. Appl. Math., **17** (1969) 1215–1223.
16. Martos B.: *Nonlinear Programming: Theory and Methods.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1975.

ON POSITIVE SUBDEFINITE MATRICES AND THEIR GENERALIZATION

At the end of the 1960' years Béla Martos introduced the concept of positive subdefinite matrix in order to characterize quasiconvexity of quadratic functions on the nonnegative orthant of an Euclidean space. Just some years ago Jean-Pierre Crouzeix and his co-workers revealed the role of the positive subdefiniteness concept in characterizing quasimonotonicity of affine maps. Very recently Jean-Pierre Crouzeix and the author introduced a more general concept of positive subdefiniteness proved to be important in studying Linear Complementarity Problems. The paper presents an overview of the three stages of the development of the positive subdefiniteness concept with an emphasis on the last stage.