

A KITETTSÉG PROFILOK BECSLÉSE TÖBBSZINTŰ MONTE CARLO MÓDSZERREL¹

BOROS PÉTER

Budapesti Corvinus Egyetem

A partnerkockázati kitettség mérése az OTC piacokon aktív felek kiemelt fontosságú feladatává nőtte ki magát. A kitettség értékének meghatározásához jelentős számítási kapacításra van szükség. Tanulmányunkban egy új módszert javasolunk a kitettség profilok számítására, amely a többszintű Monte Carlo szimulációt használva a számítási igény jelentős csökkenéséhez vezet. Munkánkban bevezetünk egy algoritmust, amely egzaktan szimulálható sztochasztikus alapfaktortól függő derivatívák kitettségének becsléséhez használható. A módszer teljesítményét és annak a hagyományos Monte Carlo becsléssel történő összehasonlítását egy egyszerű kamatláb csereügyleten keresztül mutatjuk be.

Kulcsszavak: partnerkockázat, kitettség, többszintű Monte Carlo. *JEL kategória:* C15, C53, G12, G13, G32, G33

1 Bevezetés

Az OTC piacokon aktív szereplők egymás felé fennálló kitettségük megfelelő mérése és monitorozása jelentős munkát jelent a felek partnerkockázattal foglalkozó osztályainak. A partnerkockázat az OTC piacokon megkötött derivatív szerződések élettartama során, a partnerek lehetséges csődjéből eredő veszteség kockázata. A kockázat ugyan hasonló a klasszikus hitelkockázathoz, jellemzően két ok miatt mégis különbözik attól. Míg egy hitelszerződés során a felek egyértelműen hitelező és adós kategóriákba oszthatóak, és a hitelező kitettsége egy jól meghatározott mennyiséggel leírható, addig a partnerkockázat esetén ezek nem teljesülnek. Mivel egy OTC derivatív szerződés értéke, minden esetben az aktuális piaci faktoroktól függ, így a fennálló kitettség is folyamatosan változik. Ebből adódóan a kitettség értéke akár egyik napról a másikra előjelet is válthat, így felcserélve az adós és a hitelező szerepét. Éppen ezen okok miatt a kitettség meghatározása egy bonyolult, számításigényes feladat.

Egy derivatív szerződés adott pillanatban vett értéke meghatározza az azonnali kitettség értékét, azonban felek jellemzően hosszabb távon is szeretnék tudni (várható) kitettségüket. Így például a bankok óriási számítási kapacitást használnak a kitettség profilok becslésére. A profilok a jövőbeli kitettség valamilyen statisztikai mértékének időbeli függvényeik. Ilyen például

¹Boros Péter PhD hallgató, Budapesti Corvinus Egyetem, Befektetések és Vállalati Pénzügy Tanszék. A tanulmányban kifejtett nézetek kizárólag a Szerző személyes véleményét tükrözik. E-mail: borospeter90@gmail.com. Beérkezett: 2017. október 27.

a gyakran előtérbe kerülő várható pozitív kitettség profil, amely maga is számos további fontos mennyiség inputja. A bázeli nemteljesítéskori kitettség a nemcsökkenő, várható pozitív kitettség profil első évig tartó integrálja. Ezen túl az így kapott mennyiség a szabályozói partnerkockázati tőke egyik bemeneti paramétere. De hasonlóan fontos szerepet kap a kitettség profil a hitelértékelési kiigazítás számításakor is.²

A bankok a kitettség méréséhez klasszikusan Monte Carlo szimuláción alapuló árazási módszert használnak. A pontos becslés jellemzően magas számú szimulált alapfaktort kíván meg, ami a számítási igény nagyon gyors megugrását eredményezi egy több ezer partnerrel, több millió ügyletet megköltő nagy, piaci szereplőnél. Ezért a számítási kapacitás szükséglet csökkentése nem csupán egy elméleti szempontból kívánatos feladat, hiszen az komoly költségcsökkenéshez vezethet.

Jelen munkában egy alternatív módszert, a többszintű Monte Carlo becslést alkalmazzuk a kitettség profilok becslésére. A módszert eredetileg Heinrich (2001) vezette be parametrikus integrálási feladatokra, majd Giles (2008) ültette át pénzügyi problémákra. A módszert azóta számos esetben felhasználták derivatív árazási feladatokhoz, valamint sztochasztikus alapfaktorok szimulálására, azonban tudomásunk szerint Hofer és Karlsson (2017) az első munka, ami partnerkockázati keretek közé illeszti azt. Ők a hitelértékelési kiigazítás értékének különböző paraméterek melletti számolásához vezetnek be egy többszintű Monte Carlo alapú technikát.

A tanulmányunkban, a korábbi eredmények által motiválva, a kitettség profilok többszintű Monte Carlo módszer melletti becslését vizsgáljuk. Bemutatunk egy profilbecslési algoritmust, amit egzaktan szimulálható sztochasztikus alapfaktorok melletti modellekben használhatunk. Szemben a korábbi horizontális jellegű becslésekkel, mi vertikálisan az idő paramétert használjuk a többszintű Monte Carlo módszer szintjeinek szétválasztására. Az új módszer szignifikáns számítási teljesítmény növekedést eredményez, így mind a futási időt és a futáshoz szükséges számítási kapacitást csökkenthetjük adott pontosságú becslés eléréséhez.

A következő fejezetben egy formalizált bevezetést adunk a partnerkockázat által használt kitettség fogalmához. Ezután bemutatjuk a többszintű Monte Carlo módszertanát és annak alkalmazását a kitettség profilok becslésére. Ezt a részt egy algoritmussal zárjuk, ami lépésről lépésre mutatja be az általunk javasolt profil becslési technikát. A harmadik fejezetben egy egyszerű numerikus példában mutatjuk be módszerünk teljesítményét, és összevetjük a hagyományos Monte Carlo becsléssel. Végül az utolsó fejezetben összefoglaljuk a tapasztalatainkat.

²Részletes leírásért magát a bázeli szabályozást (BIS, 2010) vagy Gregory (2015) könyvét ajánljuk.

2 Alapfogalmak

Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbf{Q})$ egy valószínűségi mező, ahol Ω az összes lehetséges kimenet halmaza, \mathcal{F} az összes eseményt lefedő σ -algebra. A piacon t időpontig elérhető információt az \mathcal{F}_t tartalmazza. Végül \mathbf{Q} legyen a kockázatsemleges mérték.

Először a partnerkockázat kezelés során használt kitettség fogalmát vezetjük be.³ Tegyük fel, hogy B és C megköt egy T időpontban lejáráo derivatív szerződést. Ha egy rövid időre feltételezzük, hogy B és C partnerkockázat mentesek, azaz soha sem csődölhetnek, akkor jelölje $\Pi(t, T)$ az általuk kötött derivatív ügylet t és T közötti diszkontált pénzáramainak az összegét, B szemszögéből. Nevezzük ezt kockázatmentes diszkontált nettó pénzáramnak. A kockázatmentes diszkontált nettó pénzáram alapján a következőképpen definiálhatjuk a derivatív t -ben vett árát:

$$V(t) = \mathbf{E}_t[\Pi(t, T)], \quad (1)$$

ahol $\mathbf{E}_t[\cdot] = \mathbf{E}[\cdot | \mathcal{F}_t]$ azaz az \mathcal{F}_t filtrációra vett \mathbf{Q} szerinti feltételes várható érték.

Most vezessük be a partnerkockázatot a modellbe azzal a feltételezéssel, hogy mindkét fél a derivatív élettartama során fizetéseképtelenné válhat. Csőd esetén a derivatív szerződést azonnal zárják, amely esetén a túlélő fél köteles minden tartozását megfizetni a fizetéseképtelen partnernek, míg követelésein veszteséget fog elszenvedni. A veszteség a fizetéseképtelen partnertől visszaszerezhető értéken múlik, amely arányát rendszerint REC_i -vel jelölik, ahol $i \in \{B, C\}$ és $0 \leq REC_i \leq 1$. A lehetséges eseteket B szemszögéből az 1. táblázatban foglaljuk össze.

		Követelés $V_\tau > 0$	Kötelezettség $V_\tau < 0$
Pénzáram ideje (τ)	B csődje	V_τ	$V_\tau REC_B$
	C csődje	$V_\tau REC_C$	V_τ

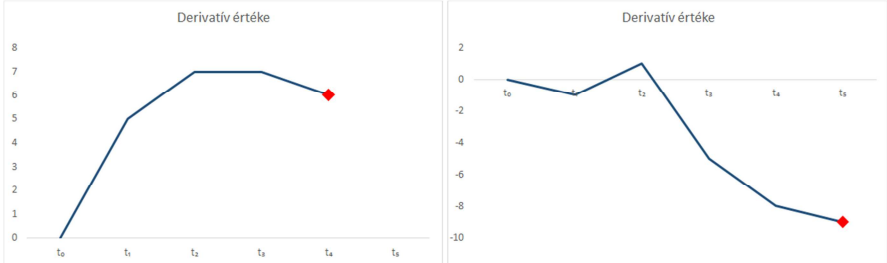
1. táblázat. Pénzáramok B szemszögéből a derivatív csőd miatti zárásakor

Az alábbi ábrákon egy két lehetséges kimenetet felölelő példát mutatunk be. Mindkét esetben egy derivatív megállapodás B szemszögéből vett értékének alakulását vizsgáljuk egy $[t_0, t_5]$ intervallumon. A bal oldali ábrán a derivatív végig pozitív értéket vesz fel, így a partner lehetséges csődje mindvégig kockázatot jelent B -nek. A példában C hipotetikus csődje t_4 időpontban következik be. Így B veszteséget fog elszenvedni, hiszen C nem képes az akkor éppen fennálló 6 egységnyi tartozását megfizetni.

A jobb oldali ábrán egy alternatív scenáriót mutatunk be. Itt a derivatív értéke az idő első részében nulla körül ingadozik. Így t_1 -ben még B tartozik, majd t_2 -ben C a tartozó fél. Végül az érték negatív tartományba tolódik, így

³Brigo et al. (2013) munkája egyszerű összefoglalást ad a partnerkockázat alapfogalmairól.

a példában t_5 időpontban bekövetkező C csődjekor ismét neki van követelése B -vel szemben. Ebben az esetben B köteles és képes megfizetni a teljes 9 egységnyi tartozását a csődbejutott félnek. Tehát C fizetéseképtelensége ilyenkor nem jelent további veszteséget B -nek.



1. ábra. Két példa – a derivatív értéke B szemszögéből

Így amikor partnerkockázatról beszélünk, leggyakrabban csak a partnerünk által fennálló tartozás mértékére vagyunk kíváncsiak, hiszen alternatív esetben nem veszítünk az ügylet értékén. Ez a kitétséggel fogalmának az alapja:

$$E(t) = \max\{0, V(t)\} . \quad (2)$$

Tehát a t időpontban fennálló kitétség a derivatív piaci értékének pozitív része. Ezt felhasználva definiálhatjuk a várható pozitív kitétség profilt, amely dolgozatunk alapja lesz:

$$EE(t) = \mathbf{E}_0[E(t)] = \mathbf{E}_0 \left[(\mathbf{E}_t[\Pi(t, T)])^+ \right] , \quad (3)$$

ahol $(x)^+ = \max\{0, x\}$.⁴ Következő lépésként megadhatjuk az így kapott profil lejáratiig vett integráljának az átlagát, amit hitel-egyenértékesnek is neveznek

$$EPE = \frac{1}{T} \int_0^T EE(t) dt . \quad (4)$$

A gyakorlatban szokás egy $0 = T_0 < T_1 < T_2 < \dots < T_{m-1} < T_m = T$ felosztást használni és az EPE-t a következőképpen közelíteni:

$$EPE = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^m EE(T_i)(T_i - T_{i-1}) . \quad (5)$$

A szabályozói tőketartalékolásban felhasznált nemteljesítéskori kitétséghez például az első évhez tartozó, nemcsökkenő $EE(t)$ profil kell használni, így:

$$EEPE = \sum_{i=1}^{m'} \max_{j \leq i} \{EE(T_j)\} (T_i - T_{i-1}) , \quad (6)$$

⁴A számítás céljától függően a külső $\mathbf{E}_0(\cdot)$ várható érték ebben az esetben jelentheti a kockázatmentes és a valós mérték alatt vett várható értéket is. Így például partner limitek meghatározásához a valós mérték alatt, míg a hitelértékelési kiigazítás számításakor a kockázatmentes mérték alatt kell számolni.

ahol $T_{m'} = 1$.

Láthatjuk tehát, hogy a várható pozitív kitétség profil számítása különösen fontos. A bankok partnerkockázat kezelési részlegei Monte Carlo módszert használnak a profil becslésére. Első lépésként több ezer szimulált utat generálnak az alap piaci faktorokból. Majd a generált faktorok alapján minden szimulációs időpontban beárazzák az összes partnerrel kötött ügyleteket. Ezután az ügyletek mentén aggregálnak és nettósítanak, ahol az engedélyezett. Végül a több ezer út alapján számolják az átlagos kitétséget minden időpontban, minden partnerre. Ez a művelet óriási számítási kapacitásokat igényel.

Hagyományos Monte Carlo módszer esetén, N szimulált utat feltételezve a következőképpen adhatunk torzítatlan becslést az $EE(T_i)$ értékére:

$$\widehat{EE}^{MC}(T_i) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N E^{(j)}(T_i), \quad (7)$$

ahol $E^{(j)}(T_i)$ a j -edik úton T_i időpontban fennálló kitétség.

Jelen munkában egy alternatív Monte Carlo alapú technikát javasolunk a kitétség profilok meghatározására, amely szignifikánsan alacsonyabb számítási kapacitás mellett jó becslést biztosít. A többszintű Monte Carlo módszer egy, már régóta ismert megközelítés, amely csak nemrégiben került partnerkockázat kezelési felhasználásra. Hofer és Karlsson (2017) a hitelértékelési kiigazítás különböző paraméterek melletti számítására használja módszert. Így például munkájukban foglalkoznak kockázatos kamatláb csereügylet portfólió fix kamatának meghatározásával, vagy éppen a rossz irányú kockázat mérésével. A következő részben ismertetjük a módszert.

3 Többszintű Monte Carlo a várható pozitív kitétség profil becslésére

A többszintű Monte Carlo módszerről Heinrich (2001), Giles (2008) és Giles (2015) munkái adnak részletes leírást. Az alapprobléma, hogy egy bizonyos intervallumban mozgó paramétertől függő mennyiséget, az intervallum összes lehetséges pontjára szeretnénk becsülni. Így például Heinrich (2001) egy $u(\lambda)$ függvényt használ illusztrációnak, ahol

$$u(\lambda) = \int_0^1 f(\lambda, t) dt, \quad (8)$$

és $\lambda \in [0, 1]$. Követve Heinrich (2001) leírását és jelölését, standard Monte Carlo módszer esetén az alábbi becslést alkalmazhatjuk:

$$\widehat{u}(\lambda_i) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f(\lambda_i, \xi_j), \quad (9)$$

ahol $\lambda_i = \{\frac{i}{n}, i = 1, 2, \dots, n\}$ és ξ_j független, egyenletes eloszlású véletlen változók a $[0, 1]$ intervallumon, amelyeket minden i mellett újrafelhasználunk.

Tetszőleges λ esetén $u(\lambda)$ a (9) egyenlet alapján interpolálással számítható.

$$\begin{aligned} u(\lambda) &\approx (Pu)(\lambda) = \sum_{i=0}^n u(\lambda_i)\phi_i(\lambda) \approx \sum_{i=0}^n \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f(\lambda_i, \xi_j) \right) \phi_i(\lambda) = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (Pf(\cdot, \xi_j))(\lambda) = \eta(\lambda), \end{aligned} \quad (10)$$

ahol P az interpolálás operátor és $\phi_i(\lambda)$ a hozzátartozó súlyfüggvény. Ugyan Heinrich (2001) formalizálása absztraktnak tűnhet, mégis a súlyfüggvényen keresztül könnyen specifikálhatjuk a P operátort. Így például lineáris interpolációt használva $i = 0, 1, \dots, n$ esetén az alábbi választással élhetünk:

$$\phi_i(\lambda) = \begin{cases} \frac{\lambda_{i+1}-\lambda}{\lambda_{i+1}-\lambda_i}, & \text{ha } \lambda \in [\lambda_i, \lambda_{i+1}] \\ \frac{\lambda-\lambda_{i-1}}{\lambda_i-\lambda_{i-1}}, & \text{ha } \lambda \in [\lambda_{i-1}, \lambda_i] \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases} \quad (11)$$

Finomítva a felosztást, bevezethetünk különböző szinteket a becslésbe. Legyen $\lambda_{2^l} = \{\frac{i}{2^l}, i = 0, 1, 2, \dots, 2^l\}$ és $l = 0, 1, 2, \dots, L$ valamint P_l az l szinthez rendelt interpolálás operátor.⁵ Ha $P = P_L$ és $P_{-1} = 0$, akkor $P = \sum_{l=0}^L (P_l - P_{l-1})$. Ezt a teleszkopikus összeget a (10) egyenletbe behelyettesítve az ott bevezetett becslés a következő formára módosul:

$$\eta = \sum_{l=0}^L \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (P_l - P_{l-1})f(\cdot, \xi_j) = \sum_{l=0}^L \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N P_l f(\cdot, \xi_j) - P_{l-1} f(\cdot, \xi_j). \quad (12)$$

Végül szintenként vezessünk be eltérő N_l szimulációs számot, amivel a (12) egyenlet az alábbi végső alakot veszi fel:

$$\eta = \sum_{l=0}^L \frac{1}{N_l} \sum_{j=1}^{N_l} (P_l - P_{l-1})f(\cdot, \xi_j) = \sum_{l=0}^L \frac{1}{N_l} \sum_{j=1}^{N_l} P_l f(\cdot, \xi_j) - P_{l-1} f(\cdot, \xi_j). \quad (13)$$

A fenti egyenlet tehát azt mutatja, hogy kevésbé finom intervallumon számolt λ_i értékeket újrafelhasználva javíthatjuk a becslést tetszőleges λ esetén. A javítás mértékét Heinrich (2001) számszerűsítette, amely szerint $\mathcal{O}(N^{-\frac{1}{2}})$ hibát $\mathcal{O}(N)$ nagyságú számítási igénnyel értünk el, az egyszerű módszer $\mathcal{O}(N^{\frac{3}{2}})$ nagyságával szemben. A módszer széles körben használható, de talán ennek egyik velejáró hátránya, hogy nem mindig világos, hogy a $(P_l - P_{l-1})$ tag pontosan mit is jelent. Ezért egy, a dolgozat témájához közelebb álló szemléletmódot is bemutatunk.⁶

⁵Az intervallum megválasztása számos tényezőn múlhat, amelyeket hamarosan illesztünk. Az intervallum felezésen alapuló eljárást Heinrich (2001) munkája alapján választottuk. Ebben az esetben ugyanis lineáris interpolációt alkalmazva a korábban becsült pontok ugyanakkorra mértékben járulnak hozzá a következő pont becsléséhez.

⁶A probléma egy alternatív megfogalmazásában $\mathbf{E}[f(x, \lambda)]$ értékét szeretnénk becsülni, ahol x egy véletlen változó és $\lambda \in [0, 1]$. Érdekes felírni a (13) egyenletet $L = 1$ esetén,

Giles (2008) már pénzügyi problémákra vezeti be a módszer egy változatát. Munkájában sztochasztikus differenciál egyenletek által generált alapfaktortól függő származtatott termékek árazásával foglalkozik. Legyen $S(t)$ egy sztochasztikus differenciálegyenlet szerint fejlődő alapfaktor értéke t -ben, és legyen $G_l, l = 0, 1, \dots, L$ egy $h_l = 2^{-l}T$ lépésköz által meghatározott, a $[0, T]$ intervallumot lefedő, egyre részletesebb felosztásrendszer. Giles (2008) fő kérdése, hogy hogyan becsülhetjük egy derivatív értékét. Ha $f(S(T))$ jelöli egy derivatív kifizetésfüggvényének értékét T -ben, és $P = P_L$ annak egy közelítése a legrészletesebb G_L felosztás mellett, akkor a derivatív értékéhez az $\mathbf{E}[P]$ mennyiséget kell megbecsülnünk⁷. Kihaszználva az

$$\mathbf{E}[P] = \mathbf{E}[P_0] + \sum_{l=1}^L \mathbf{E}[P_l - P_{l-1}] \quad (15)$$

egyenlőséget, és hogy

$$\mathbf{E}[P_l - P_{l-1}] \approx \frac{1}{N_l} \sum_{i=1}^{N_l} (\hat{P}_l^i - \hat{P}_{l-1}^i), \quad (16)$$

csökkenthetjük a szükséges számítási kapacitást. A módszer szerint az adott szinten használt minta elemszámot (N_l) folyamatosan növeljük, miközben $(\hat{P}_l^i - \hat{P}_{l-1}^i)$ értékét viszont ugyanazon Wiener növekményekkel számolhatjuk, kiindulva a legrészletesebből, majd azokat megfelelően csoportosítva. Így egy apróbb lépésközzel meghatározott időfelosztáson kevesebb mintát használunk fel, mint egy kevésbé részletes felosztásrendszeren. Giles (2008) belátja, hogy ez a becslési technika csökkenti a számítási igényt, hiszen $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ négyzetes hiba eléréséhez $\mathcal{O}(\epsilon^{-2}(\log \epsilon)^2)$ számítási igényre van szükség, szemben az egyszerű becslés $\mathcal{O}(\epsilon^{-3})$ igényével.

A módszer intuitív megértéséhez vegyük az $L = 1$ esetet, ahol is

$$\mathbf{E}[P_1] = \mathbf{E}[P_0] + \mathbf{E}[P_1 - P_0] \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{P}_0^{(i)} + \frac{1}{N_1} \sum_{j=1}^{N_1} [\hat{P}_1^{(j)} - \hat{P}_0^{(j)}]. \quad (17)$$

A (17) egyenlet azt mutatja, hogy egy részletesebb felosztás melletti ár becsléséhez egy kevésbé részletes felosztással becsült árat kontroll változóként használunk fel. Az így kapott megközelítés abban különbözik hagyományos kontroll változón alapuló becsléstől, hogy a kontrollként használt változó tényleges értéke nem ismert, hanem azt egy előző szinten becsültük meg.⁸

mert abból egyszerű lineáris interpolációt feltételezve az alábbi kell látnunk:

$$\mathbf{E}[f(x, 0.5)] = \frac{1}{2}(\mathbf{E}[f(x, 0)] + \mathbf{E}[f(x, 1)]) + \mathbf{E}[f(x, 0.5) - \frac{1}{2}(f(x, 0) + f(x, 1))] \quad (14)$$

⁷Ha konstans nulla kamatlábat feltételezünk, akkor éppen $\mathbf{E}[P]$ a derivatív értéke.

⁸Hagyományos kontroll változó melletti becslésnél a kontrollként használt változónak egy konstansszorosát használjuk, amely konstans függ a becsülni kívánt és a kontroll változó kovarianciájától. A többszintű Monte Carlo becslés ebben is eltér a kontroll változók módszerétől, hiszen itt a konstans értéke minden esetben egy. Mindkét észrevétel Giles (2015) munkájához köthető.

Ennek a különbségnek azonban lényeges implikációi lesznek, ahogy arra még visszatérünk.

A jelen munkában felhasználjuk Heinrich (2001), Giles (2008) és Hofer és Karlsson (2017) eredményeit és a többszintű Monte Carlo módszert a várható pozitív kitettség profil becslésére alkalmazzuk. Eredményünk két ponton járul hozzá a szakirodalomhoz. Elsőként, tudomásunk szerint ez az első munka, ahol a várható pozitív kitettség profil becslésére használják a többszintű Monte Carlo módszert. Másodsorban, szemben a korábbi munkákkal, mi nem egy modell paraméter mentén alkalmazzuk a többszintű Monte Carlo módszert, hanem magán az idő paraméteren keresztül. Ugyan Giles (2008) munkája az idő felosztást finomította a Monte Carlo becslés különböző szintjein, mégis mindig ugyanarra az időpontra, a lejáratra becsülte a számolni kívánt mennyiséget. Mi magát a profilt fogjuk becsülni, azaz úgy tekintünk a profilra, mint egy idő paramétertől függő mennyiségre, és a célunk, hogy a felosztáson szereplő minden időpontra adjuk meg a várható pozitív kitettség értékét. A becslés során a profil egyes pontjait különböző szintekhez rendeljük és az adott szinten csak azokat a profil pontokat becsüljük, kihasználva hogy az előző szinten már vannak becsült pontjaink. Azaz, mi az idő paramétert használjuk változóként, és a felosztás finomságát nem változtatjuk. Ehhez a módszerhez azonban, szemben Giles (2008) technikájával, nem szimuláljuk a sztochasztikus alapfaktorok teljes útját, hanem azokat egzakt módon generáljuk. Így módszerünk csak korlátozott esetben alkalmazható, de rámutatunk, hogy ilyenkor az új megközelítéssel jelentősen csökkenthetjük a számítási igényt.

Kiindulásul válasszunk egy $[a, b]$ intervallumot, ahol $[a, b] \subset [0, T]$. A profilt ezen az intervallumon fogjuk becsülni. Ez lehetőséget ad tetszőleges időhorizont lefedésére, amely az alkalmazástól függ. Így például a bázeli nemteljesítéskori kitettség (EAD) számolásához csupán egy évnyi értékere van szükségünk. Az intervallum megválasztásához más szempontot is figyelembe vehetünk, amit a következő fejezetben részletezünk. Jelölje $k = 0, 1, \dots, L$ a többszintű Monte Carlo egyes szintjeit és használjuk a Heinrich (2001) által javasolt felosztást. Eszerint a profilt az alábbi értékekkel becsüljük:

$$\left\{ EE(t_j) \mid t_j = a + \frac{j(b-a)}{2^L}, j = 0, 1, \dots, 2^L \right\}. \quad (18)$$

Láthatjuk, hogy Heinrich (2001) felosztását követve minden lépéskor az előző szinten szereplő pontok közé, félúton egy újabb megfigyelési pontot adunk. Így azonban kihasználhatjuk, hogy a becsülni kívánt mennyiség az adott pontot körülvevő értékekben már ismert. Ahogy arra Hofer és Karlsson (2017) is rámutatott, ha ezek között magas korrelációt tudunk elérni, akkor az egyfajta kontroll változón alapuló becslésünk jelentősen javulhat.

Legyen t_{j+} és t_{j-} az adott k szinten lévő t_j időpontot megelőző és az azt követő időpontok. Ha feltételezzük, hogy $\widehat{EE}(t_{j+})$ és $\widehat{EE}(t_{j-})$ már ismert,

akkor a köztes pontra a következő becslést alkalmazhatjuk:

$$\widehat{EE}(t_j, t_{j-}, t_{j+}) = \frac{1}{N_{\text{MLMC}}} \sum_{n=1}^{N_{\text{MLMC}}} \left(E^{(n)}(t_j) - \frac{E^{(n)}(t_{j-}) + E^{(n)}(t_{j+})}{2} \right) + \frac{\widehat{EE}(t_{j-}) + \widehat{EE}(t_{j+})}{2}, \quad (19)$$

azaz a t_j időpontra vonatkozó becslés során kontroll változóként használjuk az előző szinten, a két szomszédos pontra megbecsült profil értéket. Erre a (3) egyenlet kínál lehetőséget, hiszen:

$$EE(t_j) = \mathbf{E} \left[\widehat{EE}(t_j, t_{j-}, t_{j+}) \right]. \quad (20)$$

Hofer és Karlsson (2017) és Giles (2008) minden egyes szinten az alapfaktorok teljes útját szimulálták és kontroll változókkal való magas korrelációt az utak újrafelhasználásával érték el. Mivel minden becslési pontban csak ugyanarra az időpontra vonatkozó faktorok értékére van szükségünk, ezért a teljes út szimulálása elkerülhető. Így azonban a korrelációt is máshogy kell elérnünk. Mi ugyanazokat a véletlen számokat fogjuk újra és újra felhasználni a becslés különböző szintjein.

Ezek alapján Hofer és Karlsson (2017) munkájához hasonlóan, megfogalmazhatjuk a többszintű Monte Carlo algoritmust, ami jelen esetben a várható pozitív kitétséget fogja generálni:

1. Válaszuk meg az $[a, b] \subset [0, T]$ intervallumot, a végső Monte Carlo szintjének L paraméterét, az első szinten használt szimuláció számát (N), és legyen $k = 0$.
2. Generáljunk $N_0 = N$ független, standard normális véletlen számot és számoljuk ki a piaci faktorok értékét a $t_j \in G_0 = \{a, b\}$ pontokban. Becsüljük meg $EE(t_j)$ -t a (7) egyenlet alapján.
3. Növeljük k értékét eggyel: $k = k + 1$.
4. Adjuk meg az új szint pontjait a következőképpen:

$$G_k = \left\{ t_j \mid t_j = a + \frac{j(b-a)}{2^k}, j = 0, 1, \dots, 2^k \right\}. \quad (21)$$

5. Válasszuk meg az adott szinten szereplő szimulációk számát az alábbi módon:

$$N_k = 2^{-\frac{3k}{2}} N. \quad (22)$$

6. Minden $t_j \in G_k$ és $t_j \notin G_{k-1}$ esetén számoljuk ki N_k piaci faktort az első N_k véletlen normális változót felhasználva, és legyen $\widehat{EE}(t_j) = \widehat{EE}(t_j, t_{j-}, t_{j+})$ a (19) egyenlet alapján, feltételezve, hogy $N_{\text{MLMC}} = N_k$.

7. Ha $k = L$, akkor megállunk, egyébként visszalépünk a 3. ponthoz és onnan ismételjük az algoritmust.

Az 5. pontban történő N_k meghatározást Heinrich (2001) javaslata alapján választottuk. Az algoritmus tehát az intervallumon szereplő pontok távolságát felezve folyamatosan újabb időpontra becsüli a profil értékét. A következő fejezetben egy numerikus példán keresztül szemléltetjük a módszer működését és előnyeit.

4 Numerikus eredmények

A módszer erejének érzékeltetéséhez egy egyszerű kamatláb csereügyletet fogunk felhasználni. Példánkban B kap fix kamatot és fizeti az éppen aktuális féléves változó kamatot. Az olvasó kamatláb derivatívák árazásához, és általánosan a kamatláb modellekhez részletes útmutatást kaphat Brigo és Mercurio (2007) könyvében. Ezt a munkát követve felírhatjuk a kockázatmentes diszkontált nettó pénzáram értékét:

$$\Pi(0, T) = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} D(0, T_i) N \tau \left(K - L(T_{i-1}, T_i) \right), \quad (23)$$

ahol $0 = T_\alpha < T_{\alpha+1} < \dots < T_{\beta-1} < T_\beta = T$, N a névérték és τ az időarányosító faktor, jelen példában fél év. A diszkontfaktort $D(0, T_i)$ jelöli, azaz

$$D(0, T_i) = e^{-\int_0^{T_i} r_t dt}, \quad (24)$$

ahol r_t az azonnali kamatláb folyamat, amit később specifikálunk. A fix kamatot K jelenti és a $[T_{i-1}, T_i]$ időszakra vonatkozó változó kamatot pedig $L(T_{i-1}, T_i)$, azaz ha $P(T_{i-1}, T_i)$ a T_i -ben egy egységet fizető kötvény ára T_{i-1} -ben, akkor

$$P(T_{i-1}, T_i) \left(1 + \tau L(T_{i-1}, T_i) \right) = 1 \quad (25)$$

összefüggés szerint

$$L(T_{i-1}, T_i) = \frac{1 - P(T_{i-1}, T_i)}{\tau P(T_{i-1}, T_i)}. \quad (26)$$

Felhasználva az (1) és (24) egyenleteket, a kötvény árát az alábbi formában adhatjuk meg:

$$P(T_{i-1}, T_i) = \mathbf{E}_{T_{i-1}} \left[e^{-\int_{T_{i-1}}^{T_i} r_t dt} \right]. \quad (27)$$

Az (1) egyenletbe behelyettesítve a (23) egyenletben adott pénzáramokat és felhasználva a fentebb levezetett összefüggéseket, adódik a csereügylet mai

értéke:

$$\begin{aligned} V(0, K, N, \tau) &= \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} N \left(P(0, T_i) - P(0, T_{i-1}) + \tau P(0, T_i) K \right) = \\ &= -NP(0, T_{\alpha}) + NP(0, T_{\beta}) + N \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau P(0, T_i) K . \end{aligned} \quad (28)$$

A várható kitettségi profil számolásához szükség lesz a csereügylet egy tetszőleges t pontban vett értékére is. Tehát ha $T_{\alpha+j} < t < T_{\alpha+(j+1)}$, akkor fenti egyenletből apróbb levezetéssel láthatjuk, hogy

$$V(t, K, N, \tau) = -N \frac{P(t, T_{\alpha+(j+1)})}{P(T_{\alpha+j}, T_{\alpha+(j+1)})} + NP(t, T_{\beta}) + N \sum_{i=\alpha+j}^{\beta} \tau P(t, T_i) K . \quad (29)$$

Mivel az előző részben ismertetett módszer egzakt szimulációt használ, ezért ennek megfelelően kell kamatláb modellt választanunk. Ez alapján jelen példában az azonnali kamatláb dinamikáját a Vasicek modell (Vasicek, 1977) szerint választjuk meg. Így legyen $r(t)$ az azonnali kamatláb folyamat, és tegyük fel, hogy

$$dr(t) = k[\theta - r(t)]dt + \sigma dW(t), r(0) = r_0 , \quad (30)$$

ahol k, θ, σ és r_0 pozitív paraméterek. Brigo és Mercurio (2007) rámutat, hogy ebben a modellkeretben a kötvény ára az alábbi affin szerkezetben adható meg:

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r(t)} , \quad (31)$$

ahol

$$A(t, T) = e^{[(\theta - \frac{\sigma^2}{2k^2})(B(t, T) - (T-t)) - \frac{\sigma^2}{4k} B(t, T)^2]} , \quad (32)$$

és

$$B(t, T) = \frac{1}{k} [1 - e^{-k(T-t)}] . \quad (33)$$

A kamatláb folyamatot Euler-diszkrétizálás helyett az alábbi formában szimulálhatjuk egzaktan:⁹

$$r(t) = r(0)e^{-kt} + \theta(1 - e^{-kt}) + \sqrt{\frac{\sigma^2(1 - e^{-2kt})}{2k}} X , \quad (34)$$

ahol X egy standard normális valószínűségi változó.

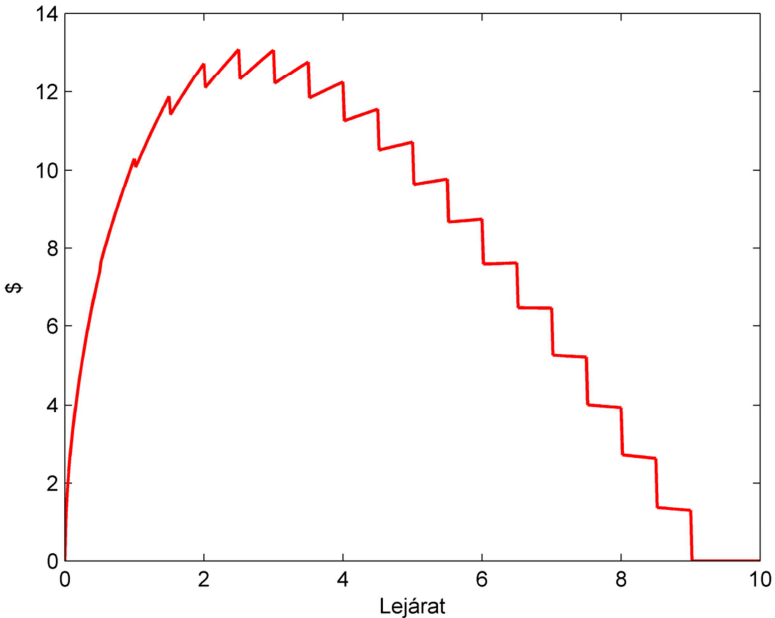
Most megvizsgálhatjuk a többszintű Monte Carlo módszer eredményeit. Példánkban az ügylet lejáratát 9 év és a névérték 100\$. A Vasicek modell paramétereit és a fair fix kamatot a 2. táblázatban közöljük.

k	θ	σ	r_0	K
0.01	0.05	0.05	0.01	0.005

2. táblázat. A numerikus példában használt paraméterek és a fair csereügylet kamata

⁹Glasserman (2013)

Első lépésként bemutatjuk az elméleti profilt. Ehhez a klasszikus Monte Carlo módszerrel alapuló becslést alkalmazzuk $N = 100\,000$ szimulált úttal és heti lépésközökkel. A becslést 100 alkalommal végezzük el, és az így kapott értékek átlagát tekintjük az elméleti értéknek, amit a lenti ábrán szemléltetünk. Egyszerű kamatláb csereügyletek esetében a profilt két hatás befolyásolja. A diffúziós hatás alapján az idő előrehaladtával a szimulált piaci alapfaktor eltávolodhat a kiinduló helyzetétől, amellyel párhuzamosan a csereügylet ára is elmozdul a kezdeti nulla értéktől, és a pozíció tulajdonosa inkább OTM vagy ITM helyzetbe kerül.¹⁰ Az amortizációs hatás miatt azonban az idő múlásával csökken a még hátralévő fizetések száma, így a partner csődje esetén veszélybe kerülő pénzáram is. Jellemzően a lefedett időhorizont első részében a diffúziós hatás dominál, majd az amortizációs hatás lesz az erősebb. A kettő együttese tehát kezdetben növekvő profilt, majd általában az idő egyharmada után csökkenő görbét eredményez.¹¹



2. ábra. Elméleti profil

A következő lépés, hogy különböző feltételek mellett megvizsgáljuk a többszintű Monte Carlo módszer teljesítményét. Összehasonlításként minden esetben a hagyományos Monte Carlo becslést is elvégezzük, és azt is hasonlítjuk az elméleti profilhoz. Ahogy arra korábban felhívtuk a figyelmet, a becslési intervallum megválasztása mindig a helyzettől függ. Mivel mi az alapfaktort egzakt technikával szimuláljuk, ezért nem rendelkezünk a folyamat teljes útjával és az abból származtatott mennyiségekkel. A (29) egyenletben azonban megjelenik az előző fizetési időpontban fennálló, a következő

¹⁰Az OTM és ITM az angol "Out of the Money" és "In the Money" rövidítése.

¹¹Cesari (2009)

időpontban egységnyit fizető kötvény ára $[P(T_{\alpha+j}, T_{\alpha+(j+1)})]$ is. Az egzakt technika miatt ez a mennyiség nem áll rendelkezésre, ezért egy egyszerűsítő feltételre van szükségünk. Válasszuk meg a becslési intervallumot úgy, hogy a legalsó szinten, a G_L halmazban található pontok közel essenek a fizetési időpontokhoz. Ha ugyanis $t_j \approx T_\alpha$ akkor

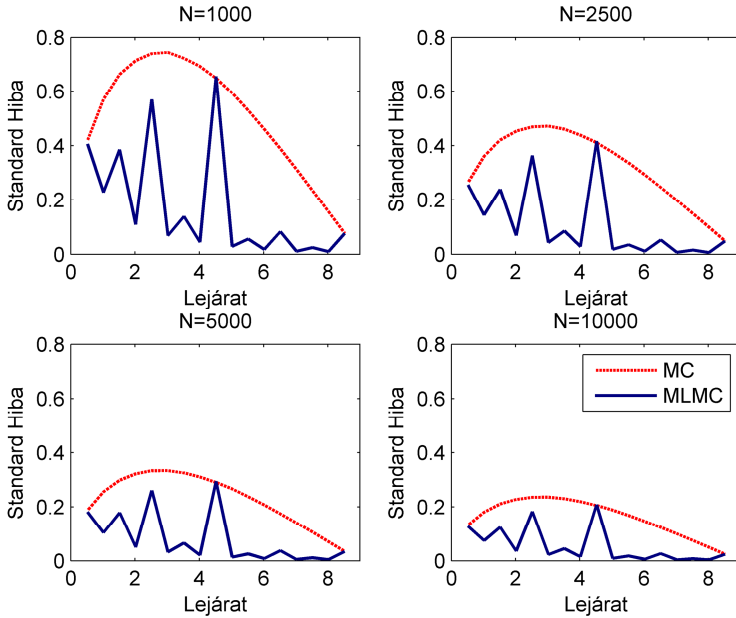
$$\frac{P(t_j, T_{\alpha+1})}{P(T_\alpha, T_{\alpha+1})} \approx 1. \quad (35)$$

Így például a 9 éves lejátú ügylet esetében $L = 4$ választása esetén 6 hónapos időfelosztást érhetünk el, ha egy 8 éves periódusra szimulálunk.

A 3. ábrán a becsült profil egyes pontjaihoz tartozó átlagos standard hibát ábrázoljuk különböző számú szimulált utat feltételezve. Minden esetben 100-szor ismételtük a becslést a megfelelő számú szimulált alapfaktorral, és az így kapott hibákat átlagoltuk, hogy kiküszöböljük a véletlenszám generátor torzítását. A grafikonok felett látható utak száma a többszintű becslésnél a kiindulási utak számát jelenti, azaz $N = N_0$. Az MC rövidítés a hagyományos Monte Carlo módszerre, míg az MLMC a többszintű Monte Carlo módszerre utal.

A hagyományos MC módszer standard hibája követi a profil alakját, és így a széleken kisebb, míg a diffúziós hatás által jobban dominált részen nagyobb értékeket vesz fel. Az ábra alapján többszintű Monte Carlo módszer a teljes intervallumon kisebb standard hibát ad, mint a hagyományos Monte Carlo árazás, azonban ez félrevezető, ahogy arra rövidesen rámutatunk. Az átlagos standard hiba alakja jól értelmezhető, ha figyelembe vesszük az előző részben közölt számítás módszertanát. A hiba a becslési intervallum két szélén gyakorlatilag egybeér a hagyományos MC módszer által adottakkal, hiszen ezen pontokban ugyanannyi szimulált utat használtunk, és nem állt rendelkezésre korábban becsült profil érték, amivel javíthattuk volna a becslést.¹² A következő becslési pont az intervallum felénél, 4,5 év közelében volt. A standard hiba itt a legmagasabb, ami arra enged következtetni, hogy a mintaszám közel harmadolását csak kevésbé ellensúlyozzák az intervallum szélein már kiszámolt kontroll változók. Ezután a 2.5 és 6.5 évhez tartozó pontokat becsültük. A szimulált alapfaktorok száma ezen a szinten csupán az eredeti nyolcada, ellenben a kontroll változók közelebb kerültek, így erősebb hatást tudnak kifejteni. A 2.5 évhez tartozó hiba magasabb, hiszen az eredeti profil is magasabb volt, szemben a 6.5 fél évhez tartozó értékével. A következő szinten a 1.5, 3.5, 5.5 és 7.5 évhez tartozó pontokat becsültük, mindössze az első szinthez tartozó szimuláció szám egy-huszonketted részével. Az átlagos standard hiba a szimulációk számának növelésével csökken, de a többszintű módszer látszólagos dominanciája minden esetben megmarad.

¹²Ahogy az ábra is mutatja, kisebb eltérések elképzelhetőek, hiszen a többszintű számítás esetén ugyanazokat a véletlen számokat használtuk fel az első és az utolsó pont egzakt becsléséhez, míg a hagyományos Monte Carlo módszeren alapuló számolásnál Euler-diszkretizálást és új véletlen standard normálisokat használtunk.



3. ábra. Standard hiba különböző szimulációs szám mellett

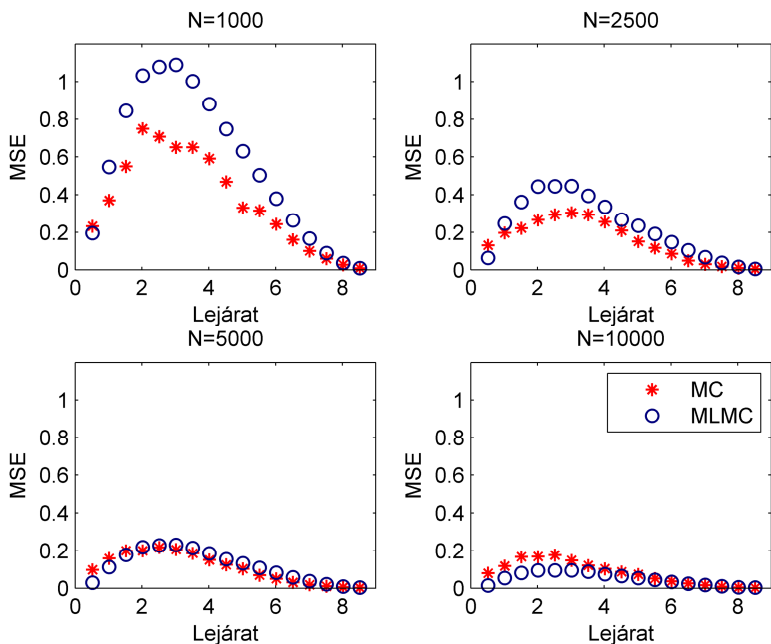
Azonban vegyük észre, hogy a hagyományos úton becsült standard hibákkal elkövettünk egy súlyos hibát, és a fenti értékek csak akkor lehetnének valóságok, amennyiben a hagyományos kontroll változók módszerét használtuk volna. Abban az esetben ugyanis a kontrollként használt változó tényleges értéke egy ismert mennyiség és nem egy becslés értéke. A probléma megértéséhez célszerű a (19) egyenletre tekinteni. Amennyiben $\widehat{EE}(t_{j-})$ és $\widehat{EE}(t_{j+})$, helyett az elméleti, ismert mennyiségek, $EE(t_{j-})$ és $EE(t_{j+})$ szerepelnének, a variancia becsléséhez azokat figyelmen kívül hagyhatnánk, és a hagyományos standard hibához a következő mennyiséget kellene megbecsülnünk:

$$\text{Var}\left(\frac{1}{N_{\text{MLMC}}} \sum_{n=1}^{N_{\text{MLMC}}} \left(E^{(n)}(t_j) - \frac{E^{(n)}(t_{j-}) + E^{(n)}(t_{j+})}{2}\right)\right). \quad (36)$$

Jelen esetben ez azonban hibás megközelítés, hiszen a profil előző és következő pontjaira csupán becslés áll rendelkezésre. A becslés hibát hordoz magában, amely hiba bizonyos része az új szinten történő becslésre is hatással van. A (19) egyenlet alapján az utolsó tagot nem hagyhatjuk figyelmen kívül a variancia számításánál. Rekurzíven visszahelyettesítve $\widehat{EE}(\cdot)$ tagokat azonban azt látjuk, hogy egy adott pont becslésénél az összes korábban felhasznált szomszédos pont hibája számít. Így valójában, ahogy haladunk a szinteken, egyre magasabb hibát halmozunk fel.

A módszereket ezért célszerűbb az elméleti értéktől vett átlagos négyzetes eltéréssel összehasonlítani. Hasonlóan a korábbi eljáráshoz, minden vizsgált N paraméter esetében 100 profilt becsültünk mindkét módszerrel. Az így kapott profilok az elméleti értéktől vett négyzetes eltérésének az átlagát mutatja a 4. ábra. A legkisebb számú szimuláció mellett a módszerünk nem

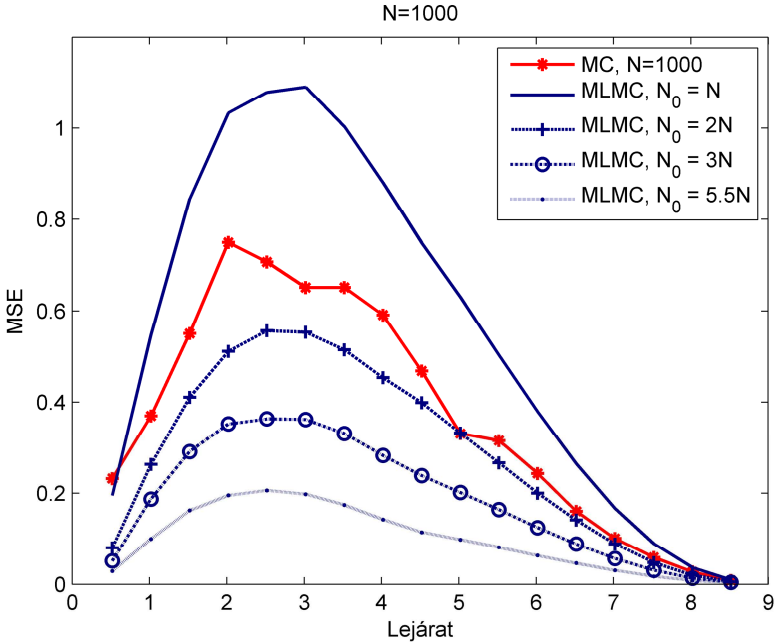
teljesített jobban, mint a hagyományos becslés, hiszen az átlagos négyzetes hiba magasabb, mint a hagyományos esetben. Úgy tűnik tehát, hogy az egyes pontoknál jelentkező, majd kumulálódó hiba itt szignifikáns eltérést okoz. Viszont vegyük észre, hogy a módszerünk gyorsabb ütemben javul, mint a hagyományos MC szimuláción alapuló árazás és az $N = 10\,000$ paraméter számnál a profil összes pontján jobban teljesít. Ekkorra ugyanis a magasabb szinteken lévő pontokon elég szimuláció áll rendelkezésre, hogy a felhalmozódó hiba ellensúlyozható legyen.



4. ábra. Az elméleti értéktől vett átlagos négyzetes eltérés különböző szimulációs szám mellett

Érdeemes kiemelni, hogy a módszer alacsony szimulációs szám mellett sem rosszabb a hagyományos Monte Carlo becslésnél. Az első esetben (bal felső ábra) a hagyományos Monte Carlo módszerrel összesen $17 \times 1\,000 = 17\,000$ adatpontot szimuláltunk és használtunk a számításához. A többszintű Monte Carlo módszert felhasználva közel 2 900 pontra volt szükségünk.¹³ Így a kiinduló N_0 értéket az N többszörösére választva, még mindig kevesebb adatpontot használva, lecsökkenthetjük a négyzetes hibát. Ezt szemléltetjük az 5. ábrán. Láthatjuk, hogy a többszintű módszer hamar előnybe kerül, és végül az $N_0 = 5.5N$ esetben közelíti meg ugyanazt a számítási igényt, amit a hagyományos Monte Carlo módszer N szimuláció mellett, miközben szignifikánsan kisebb eltérést generál.

¹³A kezdő szinttel együtt összesen 5 szintet járunk be. Az egyes szinteken becsült pontok számai sorrendben 2, 1, 2, 4, 8. Az szintekhez tartozó szimulációs számok pedig 1 000, 353, 125, 44, 15.

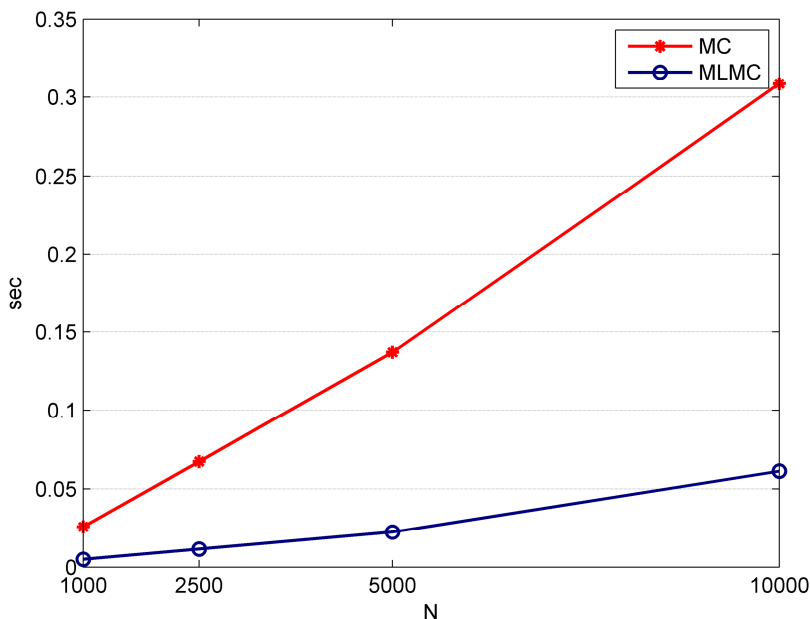


5. ábra. Az elméleti értéktől vett átlagos négyzetes eltérés alternatív kiinduló szimulációs számok mellett

Minden fentebb bemutatott futtatás során megmértük a számításához szükséges időt. Ugyan a többszintű Monte Carlo becslés lényegesen kisebb kapacitást igényel, hiszen minden szinten csak az eredeti szimulációs szám töredékével számolunk, számítási időben mégsem egyértelmű, hogy jobban teljesít, hiszen szükség van az egyes szinteken lefedett pontok meghatározására, a hozzájuk szükséges szimulációk számának megadására és végül a (19) egyenlet számítására. Eredményeink mégis azt mutatják, hogy a számítási idő is eltörpül az új módszerrel. A 6. ábrán szemléltetjük az átlagos futási időt a fentebb már leírt szimulációs számok mellett. Azontúl, hogy az általunk javasolt módszer minden esetben gyorsabb volt, az előnye a szimulációk számának függvényében tovább nő. Természetesen az átlagos négyzetes hibát leíró pontban kifejtett okok miatt nem érdemes közvetve összehasonlítani a futási időket, de az előző ábra tapasztalatai alapján láthatjuk, hogy $N_0 = 2.5N$ összehasonlításnak már van értelme. Így láthatjuk, hogy az $N_0 = 2500$ pontban mért átlagos futási idő, még mindig szignifikánsan elmarad az $N = 1000$ esetben mérttől.

A futási idő tovább javítható GPU alapú párhuzamos számítással. Az egyes szintek közötti átmenet nem párhuzamosítható, hiszen egy adott szint becsléséhez szükségünk van az előző szint becslött pontjaira. Ezzel szemben adott szinten belül az újabb osztópontokhoz rendelt profil értékek számítása párhuzamosítható, és így az időszükséglet GPU alapú rendszerrel csökkenthető.¹⁴

¹⁴A GPU alapú számítás ötletéért a Szerző köszönetét fejezi ki a Bírálóknak.



6. ábra. Átlagos futási idő

Eredményeink tehát azt mutatják, hogy a többszintű Monte Carlo módszer szignifikánsan javítja a kitettség profilok becslését, így azt érdemes a gyakorlatban is felhasználni. Munkánkat a következő fejezettel zárjuk.

5 Összegzés

Tanulmányunkban a többszintű Monte Carlo becslést alkalmaztuk a partnerkockázat egyik alapproblémájára, a kitettség meghatározására. Az általunk javasolt módszer felülmúlja a hagyományos Monte Carlo becslést, hiszen mind a számítási kapacitást, mind pedig a futási időt csökkenteni tudtuk. Nagy előnye a technika egyszerűsége is, amely a hatékony implementációhoz járul hozzá. A tanulmányban bemutatott megközelítés egy speciális többszintű Monte Carlo technikán alapul, amely azonban csupán limitált számú esetben használható. Mivel szemben a korábbi munkákkal, mi nem használtuk a szimulált alapfaktorok teljes útját, így a módszer csak egzakt szimuláció mellett alkalmazható. Az algoritmus limitált jellege azonban nem gátolja a technika széleskörű alkalmazását, hiszen számos modellre létezik egzakt szimuláció. Így hasznos kutatási téma lehet a módszer további vizsgálata és más eszköz típusokra történő alkalmazása. Ugyan mi csak a várható kitettség profil becslését teszteltük, a többszintű Monte Carlo becslés hasonlóan alkalmazható más profilok becslésére is. Ezek további vizsgálata gyakorlati szempontból is nagy relevanciával bír.

Irodalom

1. BIS, Basel Committee on Banking Supervision. (2010). Basel III: A global regulatory framework for more resilient banks and banking systems. Elérhető: <http://www.bis.org>.
2. Brigo, D. és Mercurio, F. (2007). *Interest Rate Models – Theory and Practice: with Smile, Inflation and Credit*. Springer Science & Business Media.
3. Brigo, D., Morini, M., és Pallavicini, A. (2013). *Counterparty Credit Risk, Collateral and Funding: with Pricing Cases for all Asset Classes*. John Wiley & Sons.
4. Cesari, G., Aquilina, J., Charpillon, N., Filipovic, Z., Lee, G., és Manda, I. (2009). *Modelling, Pricing, and Hedging Counterparty Credit Exposure: A Technical Guide*. Springer Science & Business Media.
5. Giles, M. B. (2008). Multilevel monte carlo path simulation. *Operations Research*, 56(3):607–617.
6. Giles, M. B. (2015). Multilevel monte carlo methods. *Acta Numerica*, 24:259–328.
7. Glasserman, P. (2013). *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*, 53. Springer Science & Business Media.
8. Gregory, J. (2015). *The XVA Challenge: Counterparty Credit Risk, Funding, Collateral, and Capital*. John Wiley & Sons.
9. Heinrich, S. (2001). Multilevel monte carlo methods. In *International Conference on Large-Scale Scientific Computing*, 58–67. Springer.
10. Hofer, M. és Karlsson, P. (2017). Efficient calibration for CVA using multilevel monte carlo. Elérhető: <https://ssrn.com/abstract=2776932>
11. Vasicek, O. (1977). An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics*, 5(2):177–188.

COUNTERPARTY CREDIT EXPOSURE ESTIMATION WITH MULTILEVEL MONTE CARLO METHOD

Counterparty credit risk exposure measurement has become an immense task for parties active on OTC markets. Determining future exposure amount is a computationally demanding task. We propose a new method for exposure profile calculation that reduces the computational costs significantly by using the multilevel Monte Carlo approach. In the paper we introduce an algorithm that estimates the exposure profile for derivative products with exact simulation of the underlying risk factors. A test on the performance of the new method and a comparison against the traditional Monte Carlo approach is carried out on a numerical example of a simple interest rate swap.