

# A RÁCKEVEI (SOROKSÁRI) DUNA-ÁG VÍZMINŐSÉGI MODELLEZÉSE TÖBBSZEMPONTÚ DÖNTÉSI MÓDSZEREK FELHASZNÁLÁSÁVAL<sup>1</sup>

BALLA K., KÉRI G., NÉMETH E., RAPCSÁK T., SÁGI Z., TÓTH T.  
ÉS VERRASZTÓ Z.  
MTA SZTAKI és KDV KÖFE

## 1 Környezetvédelem és döntésemélet

Az utóbbi években a környezeti problémák vizsgálata világszerte döntő jelentőségűvé vált, és ennek eredményeképpen a technikai fejlődés egyik hajtómotorja lett. Nagyon fejlett módszertan alakult ki részproblémák vizsgálatára, ugyanakkor a környezeti problémák megoldása —a többszintű, csoportos döntéshozatali eljárásoktól kezdődően, a döntések megfelelő szakmai szinteken való megjelenítéséig és megoldásáig, esetenként többször is visszatérve ugyanazon szinteken ugyanazon kérdésekhez— nincs megfelelően támogatva. Ennek csalhatatlan jele, hogy jóllehet konkrét környezeti problémáknál a legkülönbözőbb döntési szinteken a legkülönbözőbb információkra lenne szükség a legkülönbözőbb formákban, ehelyett az esetek többségében minden szinten nagy terjedelmű, komplex tanulmányok jelennek meg. A tanulmányok általában egy adott időszakot dolgoznak fel a rendelkezésre álló adatok és bonyolult összefüggések alapján. A döntéshozatal gyakran több hónapot, esetleg több évet vesz igénybe, viszont a papíron tárolt információk csak igen körülményesen módosíthatók. Így azok nem alkalmasak a döntéshozatali eljárás ideje alatt bekövetkező, előre nem látható események, a dinamikusan változó adatok és az ezen adatokból az összefüggések segítségével levont következtetések figyelembevételére.

Több mint tíz éve elfogadott tény, hogy a teljes döntéshozatali folyamatot kell támogatni, a dinamikusan változó adatokat az igényeknek megfelelő adatbázisban kell tárolni, dinamikus összefüggések segítségével kell az eredményeket megjeleníteni. A döntéshozatali folyamat szoftveres támogatása tehát manapság már nélkülözhetetlen. Ennek hiányában ugyanarról a témáról egyre-másra születhetnek újabb és újabb tanulmányok, párhuzamosan akár több is. A jelenleg alkalmazott módszertan másik nagy hiányossága, hogy nem tesz éles különbséget a különböző döntési szintek között, aminek következtében az egyes hierarchikus szinteken nem a szükséges információk és nem az adott szintre jellemző gondolkodásmódnak és szemléletnek megfelelő formában állnak a döntéshozók rendelkezésére, ami a munka hatékonyságát nagymértékben rontja.

<sup>1</sup>Beérkezett: 1999. szeptember 19.

Ezt látva kereste meg az MTA SZTAKI Operációkutatás és Döntési Rendszerek Osztályát a Pest Megyei Kereskedelmi és Iparkamara, hogy az előbb vázolt problémákat kiküszöbölve modellezzük a Ráckevei (Soroksári) Duna-ág (a továbbiakban RSD) vízháztartását, amire új módszertant és szoftverrendszert dolgoztunk ki. Osztályunk hosszú idő óta foglalkozik döntéstámogatással és környezeti modellezéssel, ld. [2]-[12], Verrasztó Z. pedig környezeti modellezéssel, ld. [15]-[19].

## 2 Új döntési technológia

Az RSD Duna-ág vízháztartásával kapcsolatban kidolgozott döntési technológia lépései a következők:

1. A célok minél pontosabb, verbális megfogalmazása a probléma megoldásáért felelősséggel tartozó döntési fórumon.
2. A célok szempontjából releváns jellemzők azonosítása, esetleg több különböző döntési szinten.
3. A jelenlegi helyzet vizsgálata a célok függvényében, ezen belül
  - a) a szükséges paraméterek jelenlegi értékének meghatározása;
  - b) a külső hatások azonosítása (pl. befolyó szennyvizek mennyisége és összetétele, vízkivételek, dunai tápvíz);
  - c) a vizsgálandó dinamikus folyamatok modellezése (pl. transzport folyamatok).
4. A szabályozási pontok és lehetséges cselekvési tervek, intézkedések azonosítása (pl. szennyvíztisztítók építése/fejlesztése, iszapkotrás, haltelepítés, zsilipek működési rendje).
5. Modellalkotás, ezen belül a hatásmechanizmusok vizsgálata és a jellemzők számszerű előrejelzése a megadott scenáriókra. Ezzel összefüggésben
  - a) a vizsgálatokhoz alkalmazott terjedési modellt és annak megoldását az ammónium és a fenol esetére bemutatva, az A1 függelékben ismertetjük;
  - b) az oxigénháztartásra vonatkozó számításokat az A2 függelékben közöljük.
6. A modellek alkalmazása a számba jöhető intézkedéscsomagok hatásának előrejelzésére.
7. Az eredmények vizualizálása.
8. Az intézkedéscsomagok értékelése és/vagy összehasonlítása műszaki és gazdasági szempontokat figyelembe véve, a döntésért felelős fórumon.

Érdemi változások esetén természetesen ismételten vissza lehet térni ugyanazokhoz a lépésekhez (pl. 1, 4 és 8).

A kidolgozott döntési technológia egyes lépéseinek szoftveres támogatására programcsomagot dolgoztunk ki, ennek segítségével végeztük el a fenti döntési technológia alkalmazását.

### 3 Vízminőség javítás a DPSZ szennyvizének átvezetésével a Dunába

Az RSD vizét erősen szennyezi a Dél-pesti Szennyvíztisztító (a továbbiakban DPSZ) szennyvizének bevezetése. Ezért az alábbi példában azt mutatjuk meg, hogyan lehetne a Dunába történő átvezetésére vonatkozó döntést az előbbiekben megadott döntési technológiával előkészíteni.

1. Az első lépésben a megfelelő döntési fórumon kitzük a stratégiai célt, mégpedig a vízminőség és az üdülés feltételeinek javítását az RSD-n.
2. A releváns jellemzők meghatározása az MSZ 12749:1993 szabvány, valamint a fürdővizekre és a horgászatra (azon belül a "pontyos" vizekre) vonatkozó Európai Unió 76/160/EEC számú, ill. 78/659/EEC számú direktíva alapján (ld. 2. és 3. táblázat) történhet.

A vízminőség szempontjából releváns jellemzőket a szabvány alapján, megfelelő bontásban, fastruktúrába rendezve közöljük az 1. táblázatban — azokat a csoportokat kihagyva, amelyek vonatkozásában nem volt kimutatható és valószínűleg a jövőben sem lesz várható számottevő terhelés.

Fontosnak tartjuk, hogy a direktívában nem szabályozott, de a vízi élővilág követelményrendszerénél határértékkel rendelkező komponensek (ld. [1]) is szerepeljenek, hiszen Magyarországon ezek is okozhatnak problémát (4. táblázat).

3. Ebben a példában a jelenlegi helyzetből következők között a foszfor, az ammónium, a fenolok, a biokémiai oxigénigény és a levegő szennyeződés vizsgálatának a szükségessége. Más jellemzők is fontosak voltak, de a modellek alkalmazását ezen elemeken keresztül mutatjuk be.
4. A szabályozási pontok közül csak egyet, a DPSZ szennyvizének a Dunába történő átvezetését tekintjük.
5. A vizsgálatokhoz szükséges modellek és megoldásuk részletes leírása megtalálható [13]-ban. A terjedési és oxigénhártartási modellt és azok megoldását az A1 és A2 függelékben ismertetjük.
6. A projekt keretében elkészített programcsomag segítségével a modelleket megoldottuk.

7. Az eredmények vizualizálása digitális térképek segítségével történt, ahol az RSD egyenes szakaszokkal történő közelítésével számított eredmények illesztése és simítása jelentett speciális nehézséget. Az ammóniumra, a fenolokra és a levegőszennyeződésre vonatkozó eredmények a csatolt térképeken (1-6. ábra) láthatók.
8. A DPSZ szennyvizének a Dunába történő átvezetése a modell számításai szerint az alábbi kedvező hatásokat eredményezi:

Az 1-4. ábrák térképei alapján megállapítható, hogy ammónium szempontjából az RSD a DPSZ-ig II., alatta IV. osztályú; fenolok szempontjából a DPSZ-ig II. osztályú, a DPSZ és Majosháza között III. osztályú, Majosháza alatt ismét II. osztályú.

A DPSZ szennyezésétől mentes helyzetben a folyó mindkét szennyező komponens szempontjából homogén, mégpedig II. osztályú, ami az EU direktíváknak is megfelel.

A rendelkezésre álló adatokból megállapítható [14], hogy a foszforterhelés döntő mértékben a dunai tápvízből kerül be az RSD-be, a Kvassay-szilip felől.

A levegőszennyeződésre vonatkozó 5. és 6. ábra térképeiről leolvasható, hogy a nitrogén-oxidok esetén erősebb, a szilárd nem-toxikus szennyeződések esetén gyengébb regionális hatás érvényesül.

A levegőszennyezési ábrák árnyalásának értelmezése: Fehér szín 0 koncentrációt jelent; a színskála alsó harmadánál látható világosabb szürke árnyalat az immissziós határérték felét (nitrogén-oxidoknál  $75 \mu\text{g}/\text{m}^3$ , szilárd nem-toxikus komponens esetén  $50 \mu\text{g}/\text{m}^3$  koncentrációt), a skála felső harmadánál levő sötétebb szürke árnyalat az immissziós határértéket ( $150$ , ill.  $100 \mu\text{g}/\text{m}^3$  koncentrációt) jelent. A fekete szín a térképen előforduló legmagasabb koncentráció értékét, de legalább a határérték másfélszeresét reprezentálja. A közbeeső értékeknek a közbeeső árnyalatok felelnek meg, folytonos átmenetben. (A figyelembe vett határértékek az MSz 21854-1990 szabvány szerinti, védett I. levegőtisztaság-védelmi kategóriára vonatkozó 24 órás immissziós határértéket jelentik.)

A biokémiai oxigénigényt a huzamosabb zápor okozta diffúz szennyeződés hatásaként vizsgáltuk, mivel a vizsgált időszakot megelőzően halpusztulás történt az RSD-n. A 9. ábra mutatja az RSD vízhozamának várható alakulását, a 10. ábra pedig az ennek következtében várhatóan kialakuló oxigénigény és oldott oxigén koncentrációkat. Látható, hogy az RSD alsó szakaszán az oldott oxigén szintje kritikus mértékben lesüllyed. (Az MSZ 12749:1993 számú szabvány szerint  $4 \text{ mg}/\text{l}$ -t meghaladó érték számít tűrhetőnek,  $3 \text{ mg}/\text{l}$  alatt pedig erősen szennyezettnek minősül a víz.)

Összefoglalásként hangsúlyozzuk, hogy a kidolgozott döntési módszertan és az elkészült programcsomag adaptálható más környezeti problémák megoldására is.

## A1. Az alkalmazott terjedési modell ismertetése

Valamely vízfolyásba bevezetett szennyezőanyag elkeveredése a transzport-egyenlet alapján írható le. Néhány praktikus egyszerűsítő feltétel kikötésével (permanens elkeveredés feltételezése, keresztirányú konvekciós terjedés elhanyagolása, állandó sebesség feltételezése stb.) a transzportegyenlet a következő alakot ölti:

$$v \frac{\partial c}{\partial x} = D \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}, \quad (\text{A1.1})$$

ahol

- $x$  a vízfolyás irányába mutató,  $y$  pedig a keresztirányú (tehát a partokra merőleges) térkoordináta,
- $c$  az  $(x, y)$  ponthoz tartozó szennyezőanyag-koncentrációnak a függőleges irányban (azaz különböző mélységekre) átlagolt középértéke,
- $v$  az áramlási sebességnek hasonló módon átlagolt értéke,
- $D$  az  $y$  irányú módosított diszperziós tényező (lásd Somlyódy [20]).

Az RSD-re alkalmazott terjedésmodellezésnél is az (A1.1) egyenletből indultunk ki, melyet tetszőleges  $(x_0, y_0)$  esetén kielégít a

$$c = \frac{1}{\sqrt{x - x_0}} \exp \left[ -\frac{v}{4D(x - x_0)} (y - y_0)^2 \right] \quad (\text{A1.2})$$

függvény. A tükrözési elv alkalmazásával tetszőleges véges számú  $(x_k, y_k)$  koordinátájú,  $M_k$  intenzitású szennyezőforrás esetén a szennyezőanyag-koncentrációt a

$$c = \sum_{k: x > x_k} \frac{M_k}{2h\sqrt{\pi Dv}} \frac{1}{\sqrt{x - x_k}} \sum_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ -\frac{v(y + 2nB - y_k)^2}{4D(x - x_k)} \right] + \sum_{k: x > x_k} \frac{M_k}{2h\sqrt{\pi Dv}} \frac{1}{\sqrt{x - x_k}} \sum_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ -\frac{v(-y + B + 2nB - y_k)^2}{4D(x - x_k)} \right] \quad (\text{A1.3})$$

közelítő formulával számolhatjuk, ahol  $h$  a víz mélysége,  $B$  pedig a szélessége (szakaszonkénti átlagértékekkel számolva).

Mivel az RSD-nek nem elhanyagolható görbületei vannak, ezért a modell alkalmazásához a folyó görbevonalú középvonalát előbb egyenes szakaszokból álló törtvonallal helyettesítjük, ezután a közelítő törtvonalhoz egy görbevonalú  $(\xi, \eta)$  koordinátarendszert illesztünk, ahol  $\xi$  a kiindulóponttól számított vonalhossz,  $\eta$  pedig a törtvonaltól mért előjeles távolság. Ezt a görbevonalú koordinátarendszert egy derékszögű koordinátarendszerre illesztve, a törtvonalat mintegy kiegyenesítve, alkalmazni tudjuk az egyenes vonalú vízfolyásra érvényes modellt és formulákat. Természetesen ezáltal a módszer közelítő jellege még hangsúlyosabbá válik.

A modell számítógépes programja Pascal nyelven készült. A programot 3 különböző szennyezőanyagra futtattuk, mindhárom anyagra két változatban. Az egyik változatban a jelenlegi 3 fő szennyezőforrás (Kvassay-zsilip, DPSZ, Gyáli patak) figyelembevételével, a másikban viszont a DPSZ terhelésének figyelmen kívül hagyásával, tehát csak a Kvassay-zsilip felől és a Gyáli patakból eredő szennyezőanyag-terhelés alapján, az így elképzelt esetre. Ezáltal meg tudhatjuk, milyen vízminőség-javulás érhető el, ha a DPSZ tisztított szennyvizét átvezetik a nagy-Dunába.

A programot a következő adatokkal futtattuk.

a) Szennyezőkomponenstől független adatok:

- keresztirányú diszperziós tényező ( $D = 0,2 \text{ m}^2/\text{s}$ ),
- a dunaág geometriai adatainak táblázata szelvényenként, a mintegy 50 szakaszból álló közelítő törtvonalnak megfelelő bontásban. A geometriai adatok táblázatában 120-320 m vízszélesség, 1,4-4 m vízmélység és 19-22  $\text{m}^3/\text{s}$  vízhozam adatok szerepelnek. Ennek megfelelően a vízfolyás átlagos sebessége a legtöbb helyen 0,03-0,04  $\text{m/s}$  körüli érték. (A Kvassay-zsilip közelében ennél nagyobb, a Tassi zsilip közelében, ahol a folyóág egyre jobban kiszélesedik, ennél kisebb a vízfolyás sebessége.) A programban az input táblázatban levő adatok csúszo átlagaival számoltunk.
- A szennyezőforrások helye az alkalmazott koordinátarendszerben (Kvassay-zsilip, DPSZ bevezetése, Gyáli patak bevezetése).

b) Szennyezőkomponensenként eltérő adatok:

- Terhelési határértékek (az érvényben levő magyar szabványból véve): Ammónium vonatkozásában 0,2  $\text{g}/\text{m}^3$  koncentrációig kiváló (I. oszt.); 0,5  $\text{g}/\text{m}^3$ -ig jó (II. oszt.); 1,0  $\text{g}/\text{m}^3$ -ig tűrhető (III. oszt.); 2,0  $\text{g}/\text{m}^3$ -ig szennyezett (IV. oszt.); 2,0  $\text{g}/\text{m}^3$  fölött erősen szennyezett (V. oszt.). Fenolok vonatkozásában 0,002  $\text{g}/\text{m}^3$ -ig kiváló (I. oszt.); 0,005  $\text{g}/\text{m}^3$ -ig jó (II. oszt.); 0,01  $\text{g}/\text{m}^3$ -ig tűrhető (III. oszt.); 0,02  $\text{g}/\text{m}^3$ -ig szennyezett (IV. oszt.); 0,02  $\text{g}/\text{m}^3$  fölött erősen szennyezett (V. oszt.).
- Szennyezőforrások intenzitása (egy adott időpontban mért értékek): Ammónium terhelésre vonatkozóan a Kvassay-zsilipnél 5,64  $\text{g/s}$ , a DPSZ-nél 19,07  $\text{g/s}$ , a Gyáli pataknál 0,64  $\text{g/s}$ . Fenol terhelésre vonatkozóan a Kvassay-zsilipnél 0,0561  $\text{g/s}$ , a DPSZ-nél 0,038  $\text{g/s}$ , a Gyáli pataknál 0,012  $\text{g/s}$ .

Mivel a DPSZ-től származó ammónium terhelés lényegesen nagyobb az egyéb szennyezőforrások hasonló adatánál, a fenol terhelésre viszont ez nem áll, ezért a fenti adatok alapján számolás nélkül, előre látható, hogy a DPSZ vízének a Dunába történő átvezetése jelentős mértékben javíthat az RSD ammónium-szennyeződésén, viszont kevésbé látványos változás várható a fenol-szennyeződés esetében.

A futások eredményeit tartalmazó 1-4. ábrák térképeiről színskála alapján leolvasható szennyezettségi értékek teljes mértékben egybevágznak ezzel az előzetes várakozással.

A számítások menete a következő.

(i) Kiszámítjuk a folyó középvonalának törtvonalú közelítését definiáló  $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_t, Y_t)$ , töréspontokat összekötő, egyenesnek tekintett folyószakaszok hosszát és irányszögét az

$$\begin{aligned} R_i &= \sqrt{(X_{i+1} - X_i)^2 + (Y_{i+1} - Y_i)^2}, \\ X_{i+1} - X_i &= R_i \cos \varphi_i, \\ Y_{i+1} - Y_i &= R_i \sin \varphi_i \end{aligned} \quad (\text{A1.4})$$

$i = 1, 2, \dots, t - 1$  formulák alapján.

(ii) Kiszámítjuk minden egyes  $(x_k, y_k)$  szennyezőforrás koordinátáit a törtvonalra illeszkedő görbevonalú koordinátarendszerben. Ehhez olyan  $i$  indexet kell keresnünk, melyre fennáll

$$\begin{aligned} 0 &\leq (X_i - x_k) \cos \varphi_i + (Y_i - y_k) \sin \varphi_i \leq R_i, \\ -\frac{B}{2} &\leq (Y_i - y_k) \cos \varphi_i - (X_i - x_k) \sin \varphi_i \leq \frac{B}{2} \end{aligned} \quad (\text{A1.5})$$

A második egyenlőtlenségpár annak ellenőrzésére szolgál, hogy a szennyezőforrás valamelyik part mentén vagy a partokon belül legyen. Ebben az esetben az  $(x_k, y_k)$  szennyezőforrás görbevonalú koordinátái:

$$\begin{aligned} \xi_k &= \sum_{j=1}^{i-1} R_j + (X_i - x_k) \cos \varphi_i + (Y_i - y_k) \sin \varphi_i, \\ \eta_k &= (Y_i - y_k) \cos \varphi_i - (X_i - x_k) \sin \varphi_i. \end{aligned} \quad (\text{A1.6})$$

(iii) A sík  $(x, y)$  pontjaihoz tartozó szennyezőanyag-koncentráció kiszámítása. Az előzőhöz hasonló módon ellenőrizzük, hogy az  $(x, y)$  pont értelmezhető-e, mint a vízfolyás partmenti vagy belső pontja, azaz, hogy fennáll-e

$$\begin{aligned} 0 &\leq (X_i - x) \cos \varphi_i + (Y_i - y) \sin \varphi_i \leq R_i, \\ -\frac{B}{2} &\leq (Y_i - y) \cos \varphi_i - (X_i - x) \sin \varphi_i \leq \frac{B}{2} \end{aligned} \quad (\text{A1.7})$$

valamilyen  $i$  indexre. Ha nem, akkor  $c(x, y) = 0$ , ha igen, akkor viszont legyen

$$\begin{aligned} \xi &= \sum_{j=1}^{i-1} R_j + (X_i - x) \cos \varphi_i + (Y_i - y) \sin \varphi_i, \\ \eta &= (Y_i - y) \cos \varphi_i - (X_i - x) \sin \varphi_i. \end{aligned} \quad (\text{A1.8})$$

Ezután az  $(x, y)$  ponthoz tartozó szennyezőanyag-koncentráció az (A1.3) formulával számítható, a  $(\xi, \eta)$  ill.  $(\xi_k, \eta_k)$  görbevonalú koordináták behelyettesítésével.

A szennyezőanyag-koncentrációk térképen való ábrázolásához a töréspontok és a szennyezőforrások helyeit egyaránt pixelben célszerű megadni. A koordinátáik így a térképről leolvashatók. A koordináták pixel jelölésével szemben más adatok esetén (pl. folyószélesség, vízmélység) a metrikus számértékeket célszerű meghagyni, hogy a koncentrációk számítása érvényes maradjon. Ezért a formulák egy része kiegészül egy  $\alpha$  arányossági tényezővel, amely azt fejezi ki, hogy a számítógépen tárolt térképen egy pixel a valóságban hány méternek felel meg. Ezért mindjárt a számítás kezdetén az (i) pontban szereplő (A1.4) formula első sora

$$R_i = \alpha \sqrt{(X_{i+1} - X_i)^2 + (Y_{i+1} - Y_i)^2}$$

alakra módosul. Hasonlóan a (A1.5)-(A1.8) formulákban is az  $X_i$ -t és az  $Y_i$ -t tartalmazó tagokat szorozni kell  $\alpha$ -val, ha a pontok koordinátái pixelben vannak megadva.

Megjegyezzük, hogy a számítás során a (A1.3) formulában szereplő végtelen összegeknek csak azokat a tagjait vesszük figyelembe, melyekben az exponenciális függvény argumentuma  $-30$ -nál nagyobb. A többi tag elhanyagolása megengedhető, és ily módon a számítás néhány tag összegzésére egyszerűsödik.

A modell megoldása során felhasznált néhány hasznos számítástechnikai ötlet: A szennyezőanyag-koncentráció nagyságrendjét a vízfelület részeinek különböző színezésével érzékeltetjük az eredetileg fekete-fehér térképen. A koncentráció nagyságrendjének a szabvány szerinti 5 különböző kategóriájának a térképen 5 különböző szín, ill. fekete-fehér nyomdatechnika esetén 5 különböző árnyalás fog megfelelni. Színezés esetén a legkevésbé szennyezett részek zöld színt kapnak, az ennél szennyezettebb részek pedig a szennyezettség fokának mértékében kék, sárga, narancs, ill. piros színt. Árnyalás esetén minél szennyezettebb a víz, annál sötétebb tónust alkalmazunk.

Ábrázolás méretnöveléssel: Ha el szeretnénk érni, hogy a szennyeződés koncentrációjának keresztirányú (azaz a vízfolyásra merőleges irányú) változásai jobban látszódnak a térképen, ezt megtehetjük úgy, hogy nem magát a folyót, hanem annak keresztirányban megnövelt képét színezzük a térképen a koncentráció nagyságrendjének megfelelően. A töréspontokat és a szennyezőforrásokat ugyanúgy adjuk meg, mint korábban, viszont a (iii) pont számításai során még egy  $\beta$  arányossági tényezőt is bevezetünk, amely a keresztirányú nyújtás arányát fejezi ki. Az (A1.7)-(A1.8) formulákban ekkor az  $\eta$  koordinátát a derékszögű koordinátákkal előállító kifejezéseket az  $\alpha/\beta$  hányadossal kell szorozni, ahol  $\alpha$  a pixelben megadott koordináta-adatok miatt,  $\beta$  pedig a nyújtás miatt jön be. Ha nem akarunk méretet növelni, akkor  $\beta = 1$ , méretnövelési szándék esetén pedig  $\beta > 1$ .

## A2. Oxigénháztartás modellezése

A biokémiai oxigénigényt a huzamosabb zápor okozta diffúz szennyeződés hatásaként vizsgáltuk, mivel a vizsgált időszakot megelőzően halpusztulás történt az RSD-n. Az oxigénháztartás vizsgálatára részletesebben kimunkált



BOI-O<sub>2</sub> modellezési lehetőségek között említendő a nem-pontszerű külső terhelést is figyelembe vevő oxigénforgalmi részmodell (Jolánkai [21], 1992), mely lényegében egydimenziós, nem időfüggő modell, amely az ún. vízszál követésén alapszik. Szükségesnek láttuk, hogy a rendelkezésünkre álló információkat egy teljesebb modellben is feldolgozzuk. Ez képes figyelembe venni a folyamatszakaszon fellépő valamennyi pontszerű és nem-pontszerű, akár a folyamatszakaszon változó terhelést is. Lehetőség nyílik arra, hogy a folyamatszakaszon az összes jellemző mennyiséget változóként, vagy legalábbis csupán részzakaszokként állandóként vegyünk figyelembe. A modell paramétereinek meghatározása mérési adatok alapján elvégezhető. A paraméteridentifikációt követően a különféle scenáriók szimulálhatók.

## A modell jellemző mennyiségei

*A helyfüggő keresett függvények*

- $C_1$  biokémiai oxigénigény koncentrációja,
- $C_2$  oldott oxigén koncentrációja.

*A modell paramétereit*

- $x_o$  az áramlás kezdőpontja (m)
- $x_v$  az áramlás végpontja (m)
- $q$  oldalirányú hozzáfolyás (m<sup>2</sup>/sec)
- $Q$  vízhozam (m<sup>3</sup>/sec)
- $A$  nedvesített keresztmetszelyterület (m<sup>2</sup>)
- $C_{1d}$  biokémiai oxigénigény koncentrációja a hozzáfolyásban (mg/l = g/m<sup>3</sup>)
- $C_{2d}$  oldott oxigén koncentrációja a hozzáfolyásban (mg/l = g/m<sup>3</sup>)
- $K_1$  szervesanyag lebomlási tényező (1/nap)
- $K_2$  levegő felvételi tényező (1/nap)
- $C_s$  telítettségi oxigén koncentráció (mg/l = g/m<sup>3</sup>)
- $B$  bentikus oxigénigény (g/m · sec)
- $P - R$  fotoszintézis és respiráció különbsége (g/m<sup>3</sup> · sec)

Keresendők az  $[x_o, x_v]$  intervallumon a szakaszosan differenciálható  $C_1$ ,  $C_2$  függvények, a szakadási pontokban a függvényeknek és deriváltjaiknak

elsőfajú szakadásával — vagyis a függvényeknek legfeljebb ugrásai és töréspontjaik lehetnek. E függvények kielégítik az (A2.1)-(A2.2),  $i = 1, \dots, N$  egyenleteket:

$$\frac{d}{dx} \left[ \left( Q + \int_{x_0}^x q(\xi) d\xi + \sum_{j=1}^i Q_{pj} \right) C_1 \right] = qC_{1d} - K_1 AC_1 + B \quad (\text{A2.1})$$

$$\frac{d}{dx} \left[ \left( Q + \int_{x_0}^x q(\xi) d\xi + \sum_{j=1}^i Q_{pj} \right) C_2 \right] = \quad (\text{A2.2})$$

$$qC_{2d} - K_1 AC_1 + K_2 A(C_s - C_2) + A(P - R),$$

$$x_{oi} < x < x_{vi}$$

ahol

- $x_{o1} = x_0$ ,  $x_{oi+1} = x_{vi}$ ,  $i = 2, \dots, N-1$ ,  $x_{vN} = x_v$ , e pontok pedig a modell jellemzői által vannak meghatározva, mégpedig úgy, hogy
- $Q$ ,  $q$ ,  $C_{1d}$ ,  $C_{2d}$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $C_s$ ,  $P - R$  szakaszosan folytonos függvények, legfeljebb elsőfajú szakadással (vagyis ugrással) az  $x_{oi}$ ,  $i = 2, \dots, N$  (vagyis  $x_{vj}$ ,  $j = 1, \dots, N-1$ ) pontokban;
- $K_1$ ,  $K_2$  szakaszosan konstans (lépcsős) pozitív függvények, ugrásai legfeljebb az  $x_{oi}$ ,  $i = 2, \dots, N$  pontokban lehetnek;
- $Q_{pj} = Q_{pi}^+ - Q_{pi}^-$ ,  $Q_{pi}^+$ ,  $Q_{pi}^-$ ,  $i = 1, \dots, N$  konstansok.

A  $Q_{pj}^\pm \geq 0$ ,  $i = 2, \dots, N$ , konstansok interpretálhatók mint az  $x_{oi}$ ,  $i = 2, \dots, N$  pontokban belépő "pontoszerű" befolyások és vízkivételek. Koncentrációértékeiket a részzakasz-határokon vesszük figyelembe (ld. alább), melyeket  $C_{kdi}^\pm$ -szal jelölünk  $k = 1, 2$ ,  $i = 2, \dots, N$ , ha  $Q_{pj}^- > 0$ , akkor  $C_{kdi}^- = C_k(x_{oi} - 0)$ . (Itt és a továbbiakban  $f(x-0)$  a szakaszosan folytonos, az  $x$  pontban legfeljebb elsőfajú szakadású  $f$  függvény baloldali határértékét,  $f(x+0)$  pedig a jobboldali határértékét jelöli.)

A  $C_1$ ,  $C_2$  függvények eleget tesznek az alábbi kezdeti feltételeknek

$$C_k(x_0) = C_{ko}, \quad k = 1, 2, \quad (\text{A2.3})$$

valamint a

$$\left( Q(x_{oi} + 0) + \int_{x_0}^{x_{oi}} q(u) du + \sum_{j=1}^i Q_{pj} \right) C_k(x_{oi} + 0) =$$

$$\left( Q(x_{oi} - 0) + \int_{x_0}^{x_{oi}} q(u) du + \sum_{j=1}^{i-1} Q_{pj} - Q_{pi}^- \right) C_k(x_{oi} - 0) + Q_{pi}^+ C_{kdi},$$

$$k = 1, 2; \quad i = 2, \dots, N-1$$

$$(\text{A2.4})$$

átviteli feltételeknek. (Szokás szerint  $\sum_{j=1}^0 = 0$ )

Azzal a megkötéssel élünk, hogy minden  $x \in [x_{oi}, x_{vi}]$ -re és  $i = 1, \dots, N$ -re

$$Q(x) + \int_{x_{oi}}^x q(\xi) d\xi + \sum_{j=1}^i Q_{pj} > 0.$$

A feladat megoldása rekurzív módon előáll, de általános esetben számításokra semmiképpen nem ajánlható, még akkor sem, ha a benne szereplő integrálok zárt alakban megadhatók. A rendszer integrálását tehát numerikusan végezzük részintervallumonként, mégpedig a  $D_k(x) = \bar{Q}(x)C_k(x)$ ,  $k = 1, 2$  függvényekre nézve, a kezdeti értékeket pedig az előző intervallumról kapott végérték és (A2.4) felhasználásával számoljuk.

Demonstrációs céllal bemutatjuk a modell alkalmazását az RSD-re. Vizsgálatainkba most csak a nagyobb, az elhagyottakhoz képest az oxigénháztartásra vélhetően jelentősebb befolyással bíró műtárgyakat és a Gyáli patakot vontuk be. A terhelési adatok összegyűjtésekor jelentős adathiánnyal szembesültünk. Ennek áthidalására a feldolgozás alapjául éves átlagadatokat választottunk. Ezek előállításakor figyelembe vettük

- az átlagos öntözési időszak hosszát és a becsült vízkivételt,
- a belvizes időszak átlagos hosszát és a csatornákon bekerülő becsült vízmennyiséget, annak becsült BOI és  $O_2$  koncentrációját,
- az oldalirányú hozzáfolyás becsült értékét, melyet a vízgyűjtőn mért csapadék mennyisége alapján becsültünk és a folyamszakasz hosszán egyenletesen hozzáfolyónak vélelmeztünk, konstans BOI és  $O_2$  koncentrációval, melyeket szintén becsültünk,
- a telítettségi oxigénkoncentrációt az éves átlagos vízhőmérsékletből szakirodalmi képlet alapján számítottuk,
- a vízsebességet a teljes szakaszon állandónak feltételeztük, aminek következtében a keresztiszelvények adatait mellőzhettük.

Az így kapott éves átlagos vízhozamot a 7. ábrán szemléltetjük. A szervesanyag lebomlási és a levegő felvételi tényezőt, a bentikus oxigénigényt, a fotoszintézis és respiráció különbségét a folyamszakaszon állandónak vélelmeztük és mérési adatokból kalibráltuk. A felhasznált értékeket a hivatalos mérési adatok éves átlagából számoltuk.

A kalibráláshoz egy általunk kidolgozott, a feladatra orientált, azaz a  $C_1$  és  $C_2$  függvényeknek a paraméterek szerinti monotonitását figyelembe vevő illesztési eljárást alkalmaztunk. Az ily módon teljesen meghatározott modellel számolt éves átlagos BOI és  $O_2$  értékek grafikonját a 8. ábra tartalmazza.

A következőkben azt vizsgáljuk, hogy szélsőséges körülmények bekövetkezése esetén hogyan alakul az RSD oxigénháztartása. A szimulációhoz használt adatokat úgy választottuk meg, hogy az megfeleljen egy meleg nyári napon háromnapos folyamatos esőzés révén kialakuló helyzetnek. A Kvassay

zsilipnél az éves átlagnál kissé magasabb a vízhozam, de jelentősen alatta marad az éves csúcshozamnak. Szennyezettsége magasabb. A vízgyűjtőről a lehulló csapadék 20%-a megjelenik a hozzáfolyásban, ennek révén az éves átlag kb. két és félszerese az oldalirányú hozzáfolyás. Feltételeztük, hogy ilyen körülmények között a szennyeződés bemosódása nagyobb, ezért kísérleti számításainkban a hozzáfolyás BOI koncentrációját jelentősen megemeltük. Az oxigénháztartást jelentősen befolyásolja a DPSZ működése, szélsőséges helyzetben ennek BOI kibocsátása is megnőhet, de ezt nem vettük figyelembe. Így az emiatt esetleg bekövetkező addicionális vízminőségromlástól számításainkban eltekintettünk. Nyári időszakban nem vélelmeztük belvizek bevezetését és a csapadék miatt az öntözés szünetelését is feltételeztük. Számításaink eredményét szemlélteti a 9. és 10. ábra.

## Irodalom

1. Benedek P., és Literáty P., *Vízminőség-szabályozás a környezetvédelemben*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1979.
2. Csáki, P., Csiszár, L., Fölsz, F., Keller, K., Mészáros, Cs., Rapcsák, T., and Turchányi, P., A decision model for appraisal of hotels, in: *Proceedings of the Third Conference on Artificial Intelligence*, ed.: P. Koch, John von Neumann Society for Computer Sciences (1993) 69-78.
3. Csáki, P., Rapcsák, T., Turchányi, P., and Vermes, M., Research and development for group decision aid in Hungary by WINGDSS, a Microsoft Windows based group decision support system, *Decision Support Systems* 14 (1995) 205-217.
4. Csáki, P., Csiszár, L., Fölsz, F., Keller, K., Mészáros, Cs., Rapcsák, T., and Turchányi, P.: A flexible framework for group decision support: WINGDSS Version 3.0, *Annals of Operations Research* 58 (1995) 441-453.
5. Csáki P., Csiszár L., Fölsz F., Keller K., Lóránt G., Mészáros Cs., Rapcsák T. és Turchányi P., A vezetői döntéshozatal folyamatának támogatása személyi számítógépen, *Windows környezetben*, *Szigma* 4 (1995) 169-190.
6. Fölsz, F., Mészáros, Cs., and Rapcsák, T.: Distribution of gas cylinders, *European Journal of Operations Research* 87 (1995) 613-623.
7. Fölsz F., Mészáros Cs. és Rapcsák T., A töltőüzemektől a cseretelepekre történő minimális költségű szállítás megtervezése, IV. Országos Térinformatikai Konferencia Kiadványa, szerk.: Pethő, S., (1995) 126-131.
8. Csáki, P., Fölsz, F., Keller, K., Lóránt, G., Mészáros, Cs., Rapcsák, T., and Tóth, Á., Visualisation in decision support system WINGDSS 4.0, KOI'95, *Proceedings of the 5th Conference on Operational Research*, eds.: T. Hunjak, Martić, L., and Neralić, L., *Croatian Research Society* (1995) 11-32.
9. Mészáros, Cs. and Rapcsák, T., On sensitivity analysis for a class of decision systems, *Decision Support Systems* 16 (1996) 231-240.
10. Csáki, P., Fölsz, F., Rapcsák, T., and Sági, Z., On tender evaluations, *Journal of Decision Systems*. (megjelenés alatt)
11. Kéri G., Orsovai I. és Rapcsák T., Egy transzportmodell alkalmazása a Gyál térségében létesítendő hulladéklerakó esetleges talajszennyező hatásának vizsgálatára (Esettanulmány), *Alkalmazott Matematikai Lapok* 19 (1999) 169-183.

12. Mészáros, Cs., Rapcsák T., and Sági, Z., Pollution transmission in the air, Proceedings of NATO ARW on "Large scale computations in air pollution modelling", ed.: Z. Zlatev, Kluwer Academic Publishers. (megjelenés alatt)
13. Ráckevei (Soroksári) Duna-ág vízháztartás rendszerének számítógépes modellezése a többkritériumú döntési módszerek felhasználásával, Tanulmány és Mellékletek, IT Consult-PRO, 1998.
14. A Ráckevei (Soroksári) Duna-ág vízminőségi értékelése és modellezése, Tanulmány (Szerzők: Császár I., és Jolánkai G.) IT Consult-PRO, 1998.
15. Verrasztó, Z., Land formation and the geological aspects of environmental protection, IAEG Symposium, Warszawa, 1979.
16. Verrasztó, Z. and Domokos, M., Synoptic information system for the environmental protection of the central industrial area of Hungary, Int. Symp. on Environmental Contamination in Central and Eastern Europe, Budapest, 1992.
17. Pest megye környezeti jellemzői, KDV Környezetvédelmi Felügyelőség, Budapest, 1993., I.-III. kötet, 1-798. old. (szerk.: Verrasztó Z.).
18. Klinghammer I. és Verrasztó Z., A ráckevei üdülőkörzet környezeti jellemzői (tematikus atlasz, 28 lap), KDV Környezetvédelmi Felügyelőség - ELTE Térképtudományi Tanszék, 1994.
19. Domokos M.-né, László T., Pápay K.-né és Verrasztó Z., A környezetértékelés és a hatósági döntések kiszolgálására készülő szinoptikus információs rendszer, Vízügyi Közlemények, 1993, 3. füzet.
20. Somlyódy L., Szennyezőanyagok terjedésének meghatározása vízfolyásokban, Vízügyi Közlemények 67 (1985) 185-201.
21. Jolánkai G., SENSMOD: A Simple Experimental Non-point Source Model System, Proc. Int. Conf. Water Quality Modelling in the Inland Natural Environment, Borneomuth, England, 10-13 June, 1986. pp. 77-91.

#### Oxigénháztartás

- Tartalmazott oxigén (Oldott oxigén, Oxigéntelítettség)
- Oxigénfogyasztás (Biokémiai oxigénigény, Kémiai oxigénigény)
- Összes szerves szén
- Szaprobítási index

#### Nitrogén- és foszforháztartás

- Nitrogénháztartás (Ammónium, Nitrit, Nitrát, Szerves nitrogén)
- Foszforháztartás, alga (Összes foszfor, Ortofoszfát, a-Klorofil)

#### Mikrobiológiai jellemzők

- Coliform, Fekáliás coliform, Fekáliás streptococcus, Salmonella, Összes telepszám 37 ill. 22 °C-on

#### Mikroszennyezők és toxicitás

- Szervetlen mikroszennyezők (Alumínium, Bór, Cianid, Cink, Hígany, Kadmium, Króm(VI), Nikkel, Ólom, Réz)
- Szerves mikroszennyezők (Fenolok, Detergensok, Kőolajszármazékok, Illékony klórozott szénhidrogének, Peszticidek, Triazinszármazékok, Poliklórozott bifenilek, Pentaklór-fenol)

#### Egyéb jellemzők

- Egyéb anyagtartalmak (Vas, Mangán, Nátrium, Nátriumszármazék, Kálium, Kalcium, Magnézium, Karbonát, Hidrogén-karbonát, Szulfát, Klorid)
- Egyéb kémiai jellemzők (pH, lúgosság, keménység)
- Egyéb fizikai jellemzők (Összes lebegő anyag, Zavarosság, Szín, Szag, Átlátszóság, Vízhőmérséklet, Fajlagos vezetőképesség 20 °C-on)

Összes koliform	max. 10000 /100 ml
Fekáliás koliform	max. 2000 / 100 ml
Fekáliás streptococcus	0
Salmonella	0
Enterovírusok	0
pH	6-9
Szín	nincs természetellenes elváltozás
Ásványolajok	nincs szag, vízfelszínen film nem látható
Felületaktív anyagok	nincs tartós hab
Fenolok	max. 0,05 mg/l, nincs szag
Átlátszóság	min. 1 m
Oxigéntelítettség	80-120 %
Kátrány, úszó szennyezők (pl. fa, műanyag palack stb.)	nincs
Ammónia	(*)
Nitrogén Kjeldahl	(*)
Peszticidek	(**)
Arzén	(**)
Kadmium	(**)
Króm (VI)	(**)
Ólom	(**)
Higany	(**)
Cianid	(**)
Nitrát	(**)
Foszfát	(**)

(\*) eutrofizációs tendenciák esetén mérendő

(\*\*) jelenlétének gyanúja vagy a vízminőség romlása esetén illetékes hatóság által mérendő

Maximális hőmérsékletemelkedés (hőkibocsátó forrás hatására)	3 °C
Maximális hőmérséklet egyes fajok előfordulása esetén a szaporodási időszakban	28 °C 10 °C
Oldott oxigén	legalább 4 mg/l
de 50%-ban	legalább 7 mg/l
pH	6-9
Összes lebegő anyag	max. 25 mg/l
Biokémiai oxigénigény	max. 6 mg/l
Összes foszfor (mint PO <sub>4</sub> )	max. 0,4 mg/l
Nitrit (mint NO <sub>2</sub> )	max. 0,03 mg/l
Fenolok	ízültözást nem okoz a halhúsbán
Olaj jellegű szénhidrogének	nem látható, ízültözást nem okoz, halra nem káros
Nem-ionos ammónia (mint NH <sub>3</sub> )	max. 0,025 mg/l
Összes ammónium (mint NH <sub>4</sub> )	max. 1 mg/l
Összes kicsapódó klór (mint HOCl)	max. 0,005 mg/l
Összes cink	max. 1 mg/l
Összes réz	max. 0,04 mg/l

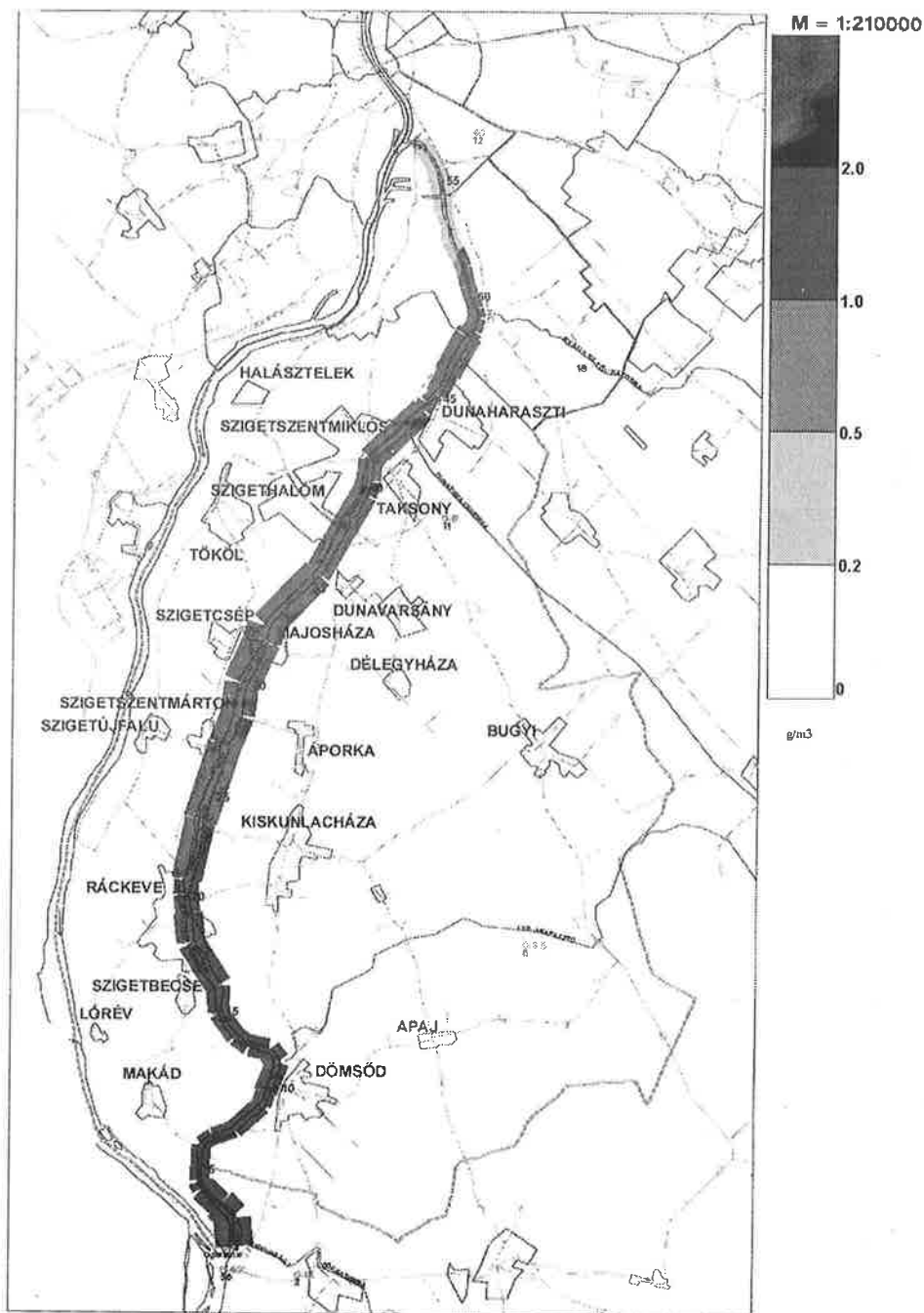
3. táblázat. A horgászat szempontjából releváns jellemzők és a rájuk vonatkozó határértékek

Hidrogén-szulfid	max. 0,002 mg/l
Cianidok	max. 0,005-0,01 mg/l
Összes higany	max. 0,0002-0,0005 mg/l
Kadmium	max. 0,003-0,01 mg/l
Ólom	max. 0,01-0,05 mg/l
Arzén	max. 0,05-0,1 mg/l
Összes króm	max. 0,01-0,05 mg/l
Nikkel	max. 0,02-0,1 mg/l
Felületaktív anyagok	max. 0,2-1 mg/l
Peszticidek, egyéb toxikus anyagok	max. 0,01 – 0,1 × TL <sub>m</sub> *

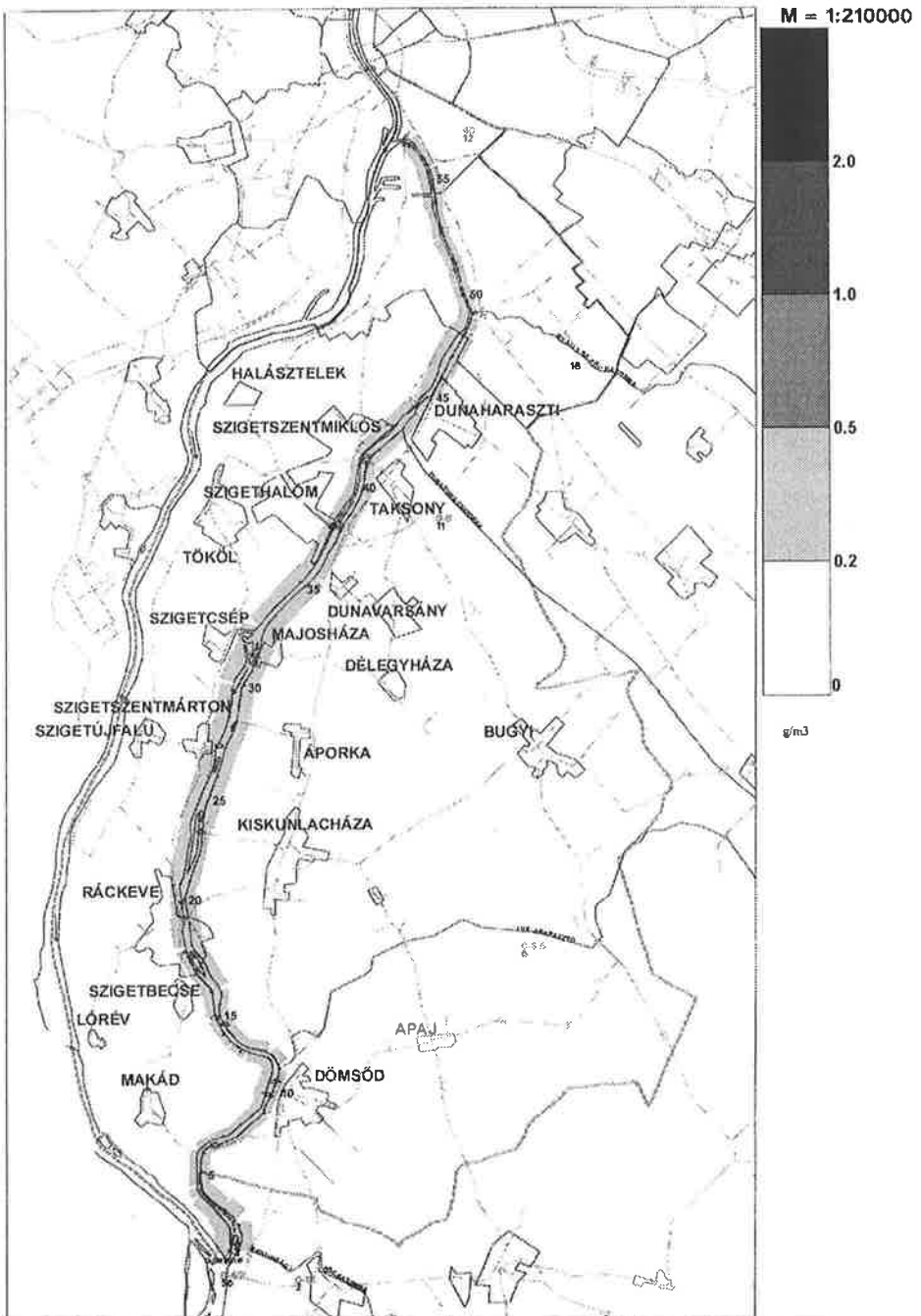
\* ahol TL<sub>m</sub> az ún. közepes tűrés határa, toxikus anyagokként más-más koncentrációérték.

4. táblázat. A direktívában nem szabályozott, de a vízi élővilág követelményrendszerénél határértékkel rendelkező komponensek és a rájuk vonatkozó határértékek

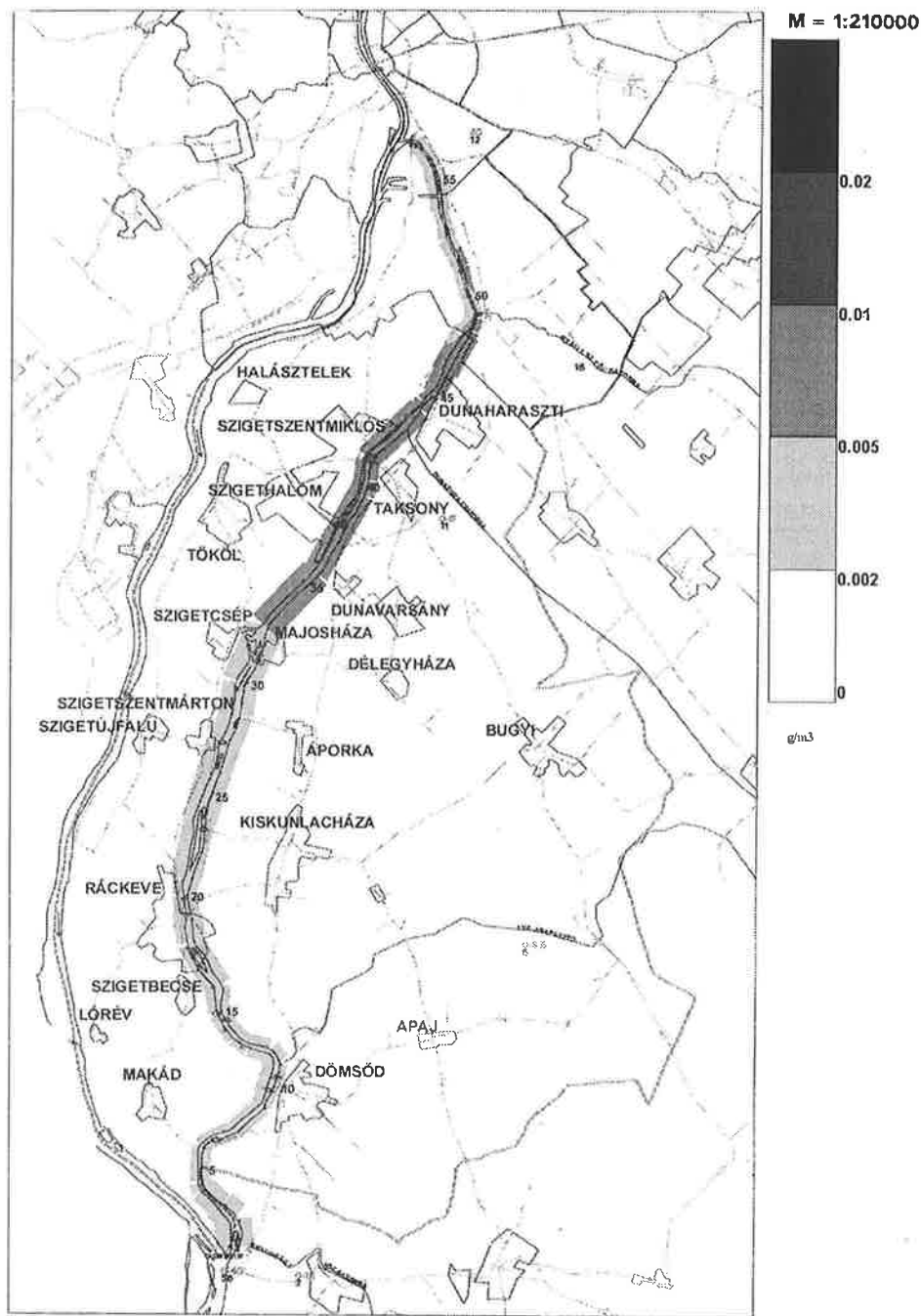




1. ábra. Ammónium koncentrációjának az eloszlása a jelenlegi állapotban

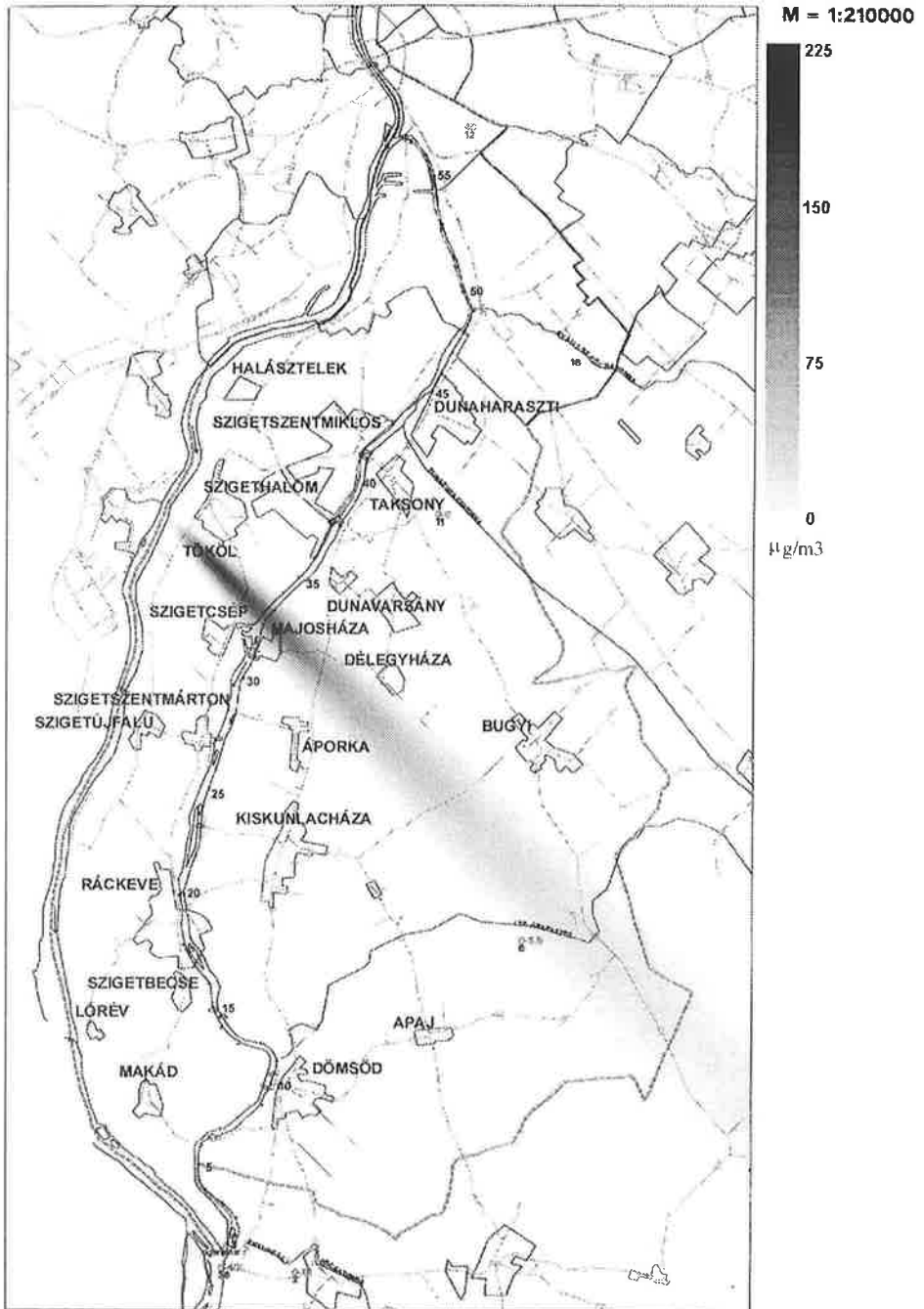


2. ábra. Ammónium koncentrációjának az eloszlása a DPSZ terhelése nélkül

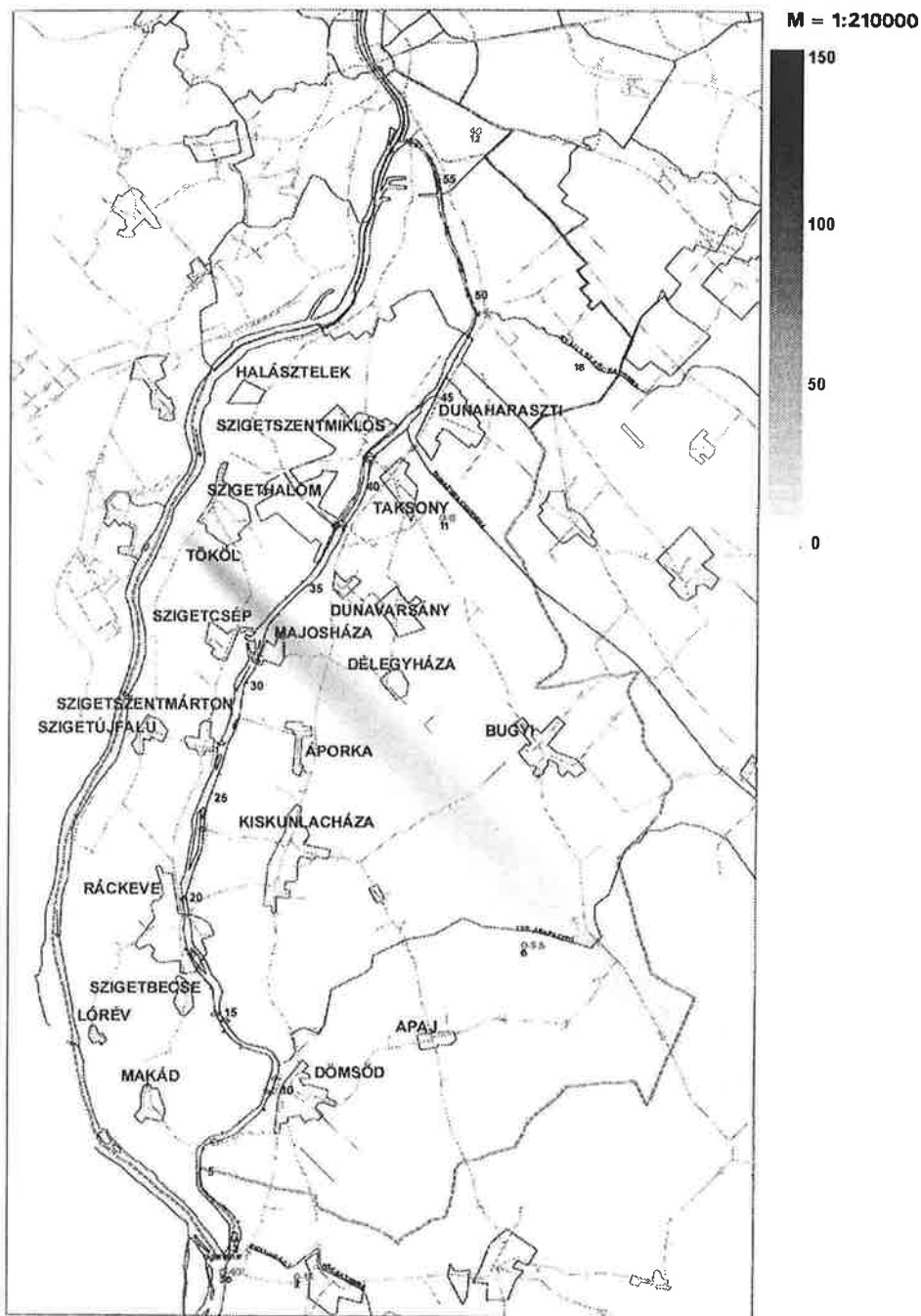


3. ábra. Fenolok koncentrációjának az eloszlása a jelenlegi állapotban

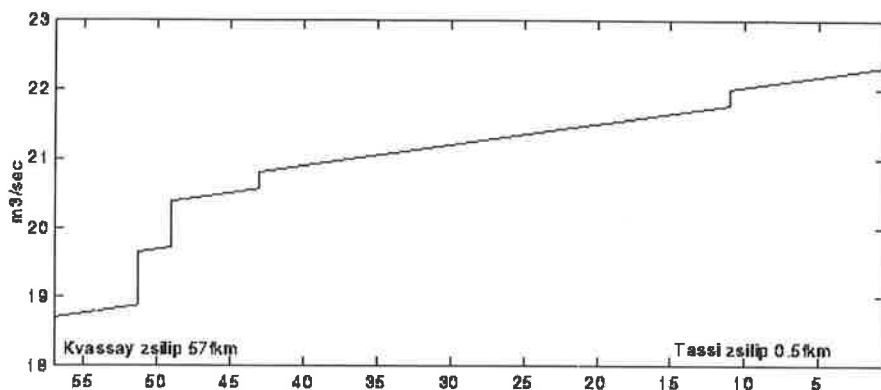




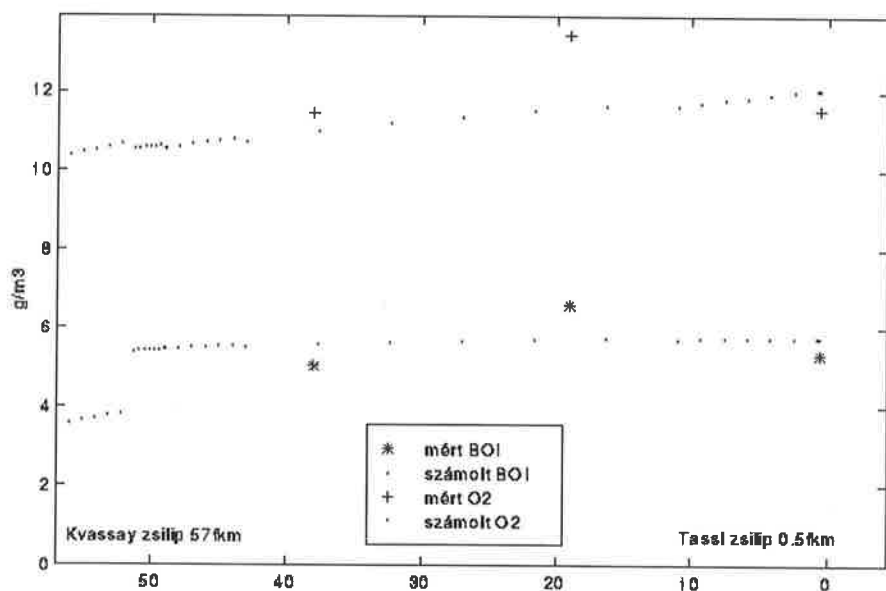
5. ábra. Nitrogén-oxidok, nem-fűtési félév, nappali időszak

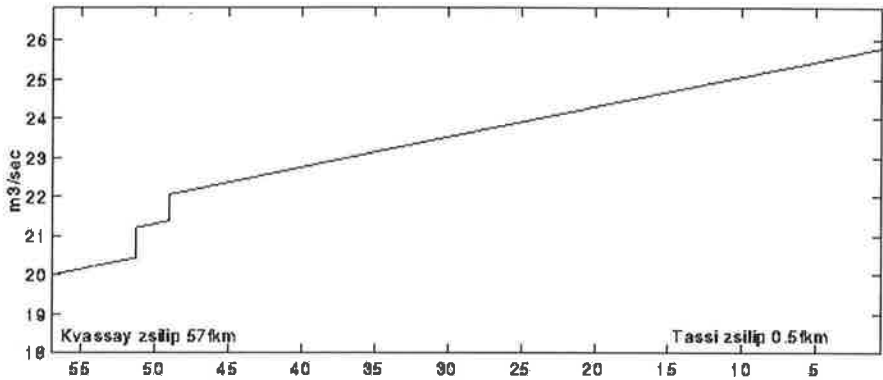


6. ábra. Szilárd nem-toxikus, nem-fűtési félév, nappali időszak

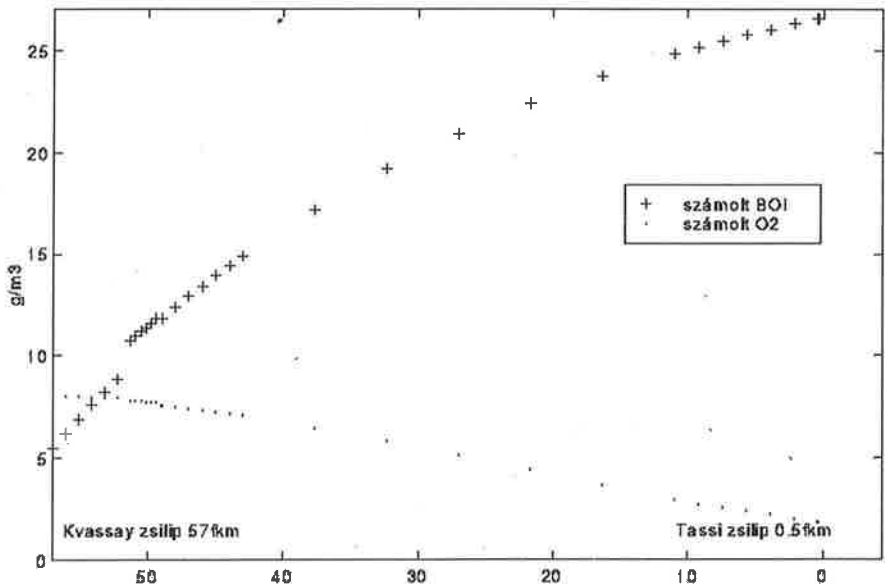


7. ábra. Éves átlagos vízhozam

8. ábra. Éves átlagos BOI és O<sub>2</sub>



9. ábra. Szélsőséges vízhozam

10. ábra. Szélsőséges BOI és O<sub>2</sub>



MODELLING OF THE WATER QUALITY OF THE RÁCKEVE-SOROKSÁR  
BRANCH OF THE RIVER, DANUBE BY APPLYING MULTIPLE CRITERION  
DECISION METHODS

Decision methods applied for an environmental problem are described for modelling the water quality of a branch of the Danube, south of Budapest (Ráckeve-Soroksár branch). The applied decision technics consist of the following steps: modelling of pollution transport and other dynamic processes, identification of control points, plans and possible measures, creation and solution of models, visualization of the results etc.



# NEMZETKÖZI VERSENY HARMADIK ORSZÁGRA VALÓ HATÁSAINAK KOMPARATÍV STATIKUS ELEMZÉSE<sup>1</sup>

KOJI OKUGUCHI – MOLNÁR SÁNDOR – TAKÁCS TIBOR  
*Gifu Shotokugakuen University – MTA SZTAKI – Systemexpert Kft.*

A nemzetközi versenyt leíró Long-Soubeyran modellt általánosítjuk. A komparatív statika módszerével elemezzük a hazai kereskedelem- és környezetvédelmi politika hatásait.

**Kulcsszavak:** nemzetközi verseny, kereskedelempolitika, komparatív statika

## 1 Bevezetés

Krugman (1984) alapvető jelentőségű dolgozatában a vámvédelem exportösztönző hatásait elemezte oligopólium esetén, ahol a nemzetközi piacon versenyző hazai és külföldi monopóliumok csökkenő határköltséggel termelnek. A hatást a feltételezett határköltségek alapján vezette le. Okuguchi és Serizawa (1996) alternatív bizonyítást adtak Krugman állítására figyelembe véve a hazai, vagy a külföldi vállalat mindkét országbeli kínálatának és mindkét monopólium teljes outputja közötti összefüggéseket. Azt az esetet is vizsgálták, ahol legalább az egyik monopólium határköltség-függvénye nem csökkenő. Krugman, valamint Okuguchi és Serizawa a vámvédelemnek csak az outputra való hatásait vizsgálták. Okuguchi (1997), Zhang és Zhang (1997) Krugman modelljét továbbfejlesztve megvizsgálták, hogy a vámvédelemnek milyen hazai és külső hatásai vannak a profitra és a társadalmi összhaszonra.

Krugman feltételezte, hogy mind a hazai mind a külső piac monopolizált. Long és Soubeyran (1996) egy alternatív nemzetközi versenymodellt adott, ahol hazai és külföldi cégek versenyeznek az adott ország piacán, és a hazai cégek exportkedvezményeket igyekeznek elérni. Long és Soubeyran (1997) egy másik dolgozatukban a kereskedelempolitika hatásait egy olyan modellben elemezték, ahol sok hazai és külföldi vállalat versenyez a külföldi, vagy harmadik ország piacán konstans marginális költségeket feltételezve. Megvizsgálták többek között a hazai koncentrációt jellemző Herfindahl-index és az inverz keresleti függvény jellegének a kereskedelempolitikára vonatkozó következményeit.

Az alábbi dolgozatban komparatív statikus elemzést végzünk a Long-Soubeyran modell egy általánosításával, amely a külső, vagy valamely harmadik ország piacán folyó nemzetközi versenyt írja le. Az eredeti Long-Soubeyran modellhez képest eltérően nem feltételezzük a marginális költségek

<sup>1</sup>Beérkezett: 1999. szeptember 19.

konstans voltát sem a hazai, sem a külső gazdaságokban, és általánosan elemezzük a hazai vállalat költségfüggvény változásainak hatásait. Mivel a hazai exportadó, vagy támogatás bevezetése a költségfüggvények változásait jelentik, a kereskedelempolitika változásainak komparatív statikus elemzéssel nyert eredményei a fenti elemzések következményeiként adódnak. Ezen kívül, mivel a kibocsátási adó formálisan azonos az exportadóval, a hazai környezetvédelmi politika változásait is az általunk javasolt komparatív statikus módszerrel elemezhetjük.

## 2 A modell és elemzése

Tegyük fel, hogy  $n$  hazai és  $n^*$  külföldi cég egyfajta termékkel versenyez a külső piacon, vagy valamely harmadik ország piacán. Legyen  $x_i$  és  $x_j^*$  rendre az  $i$ -edik hazai és a  $j$ -edik külföldi vállalat outputja. Legyen továbbá

$$p = f \left( \sum x_i + \sum x_j^* \right), \quad f' < 0$$

az inverz keresleti függvény a külső piacon, vagy a harmadik országban, ahol  $p$  a termék piaci ára. Ha  $C_i(x_i, \alpha)$  és  $C_j^*(x_j^*)$  rendre a az  $i$ -edik hazai és a  $j$ -edik külföldi vállalat költségfüggvényei, ahol  $\alpha$  az összes hazai vállalat költségfüggvényét befolyásoló paraméter, és  $\pi_i$  illetve  $\pi_j^*$  jelöli az  $i$ -edik hazai és a  $j$ -edik külföldi vállalat profitját, akkor

$$\pi_i = x_i f \left( \sum x_i + \sum x_j^* \right) - C_i(x_i, \alpha), \quad i = 1, \dots, n \quad (1.1)$$

$$\pi_j^* = x_j^* f \left( \sum x_i + \sum x_j^* \right) - C_j^*(x_j^*), \quad j = 1, \dots, n^* \quad (1.2)$$

Legyen  $Q \equiv \sum x_i + \sum x_j^*$  a külső, vagy harmadik piacon kínált teljes output. Tegyük fel, hogy minden vállalat Cournot-várakozással él az összes többi vállalat outputjára vonatkozóan. A hazai és a külföldi vállalatok profitmaximumának elsőrendű feltételei a következők:

$$f(Q) + x_i f'(Q) - C_i'(x_i, \alpha) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad C_i'(x_i, \alpha) \equiv \frac{\partial C_i}{\partial x_i} \quad (2.1)$$

$$f(Q) + x_j^* f'(Q) - C_j^{*'}(x_j^*) = 0, \quad j = 1, \dots, n^*. \quad (2.2)$$

Alapvető jelentőségű a következő két feltétel:

$$f' < C_i'' \equiv \frac{\partial^2 C_i}{\partial x_i \partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n \quad (A.I)$$

$$f' < C_j^{*''}, \quad j = 1, \dots, n^*$$

$$f' + x_i f'' < 0, \quad i = 1, \dots, n$$

$$f' + x_j^* f'' < 0, \quad j = 1, \dots, n^* \quad (A.II)$$

Mivel a Long-Soubeyran modell konstans marginális költségeket tételez fel, (A.I) teljesül. Az (A.II) teljesül, ha  $f'' < 0$  (konkáv inverz keresleti függvény). Ez a feltétel akkor is teljesülhet ha  $f' \geq 0$  (lineáris, vagy konvex inverz keresleti függvény). Az (A.I) és (A.II) mellett a maximum másodrendű feltételei is teljesülnek.

A továbbiakhoz szükségünk lesz még a következő feltételre is:

$$\frac{\partial C_i}{\partial \alpha} \equiv C_{i\alpha} > 0, \quad \frac{\partial^2 C_i}{\partial x_i \partial \alpha} \equiv C'_{i\alpha} > 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (\text{A.III})$$

A (2.1) és (2.2) elsőrendű feltételekre alkalmazva az implicit függvény tételt:

$$x_i = \varphi_i(X + X^*, \alpha), \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.1)$$

$$x_j^* = \varphi_j^*(X + X^*), \quad j = 1, \dots, n^*, \quad (3.2)$$

ahol  $X \equiv \sum x_i$ ,  $X^* \equiv \sum x_j^*$  és

$$\varphi_{iX} = \varphi_{iX^*} = \varphi_{iQ} = -\frac{f' + x_i f''}{f' - C''_i} < 0, \quad \varphi_{i\alpha} = \frac{C'_{i\alpha}}{f' - C''_i} < 0, \quad (4.1)$$

$$i = 1, \dots, n,$$

$$\varphi_{jX}^* = \varphi_{jX^*}^* = \varphi_{jQ}^* = -\frac{f' + x_j^* f''}{f' - C''_j} < 0, \quad (4.2)$$

$$j = 1, \dots, n^*,$$

ahol  $\frac{\partial \varphi_i}{\partial X} \equiv \varphi_{iX}$  stb., a jelölés egyszerűsítése érdekében. Az  $X$  és  $X^*$  definíciója szerint

$$X = \sum \varphi_i(X + X^*, \alpha) \equiv \varphi(X + X^*, \alpha), \quad (5.1)$$

$$X^* = \sum \varphi_j^*(X + X^*) \equiv \varphi^*(X + X^*), \quad (5.2)$$

ahol (4.1) és (4.2) biztosítják, hogy

$$\varphi_X = \varphi_{X^*} = \varphi_Q < 0, \quad \varphi_\alpha < 0, \quad (6.1)$$

és

$$\varphi_X^* = \varphi_{X^*}^* = \varphi_Q^* < 0. \quad (6.2)$$

Az (5.1)-et  $X$ -re, az (5.2)-t pedig  $X^*$ -ra megoldva kapjuk:

$$X = \Psi(X^*, \alpha), \quad (7.1)$$

$$X^* = \Psi^*(X) \quad (7.2)$$

hazai és külföldi vállalatra vonatkozó reakciófüggvényeket, ahol

$$0 > \Psi_{X^*} = \frac{-\sum \frac{f' + x_i f''}{f' - C''_i}}{1 + \sum \frac{f' + x_i f''}{f' - C''_i}} > -1 \quad \text{és} \quad 0 > \Psi_\alpha = \frac{\sum \frac{C'_{i\alpha}}{f' - C''_i}}{1 + \sum \frac{f' + x_i f''}{f' - C''_i}} \quad (8.1)$$

$$0 > \Psi_X^* = \frac{-\sum \frac{f' - C_j^{*''}}{f' + x_j^* f''}}{1 + \sum \frac{f' - C_j^{*''}}{f' + x_j^* f''}} > -1. \quad (8.2)$$

Ezért adott  $\alpha = \alpha_1$  mellett a teljes hazai és külföldi output egyensúlya a lefelé eszkedő  $-1$ -nél kisebb meredekségű hazai és a  $-1$ -nél nagyobb meredekségű reakciógörbék  $E_1$  metszéspontjában van.

Tegyük most fel, hogy az  $\alpha$  értéket  $\alpha_1$ -ről  $\alpha_2$ -re növeljük. Ebben az esetben a hazai reakciógörbe balra eltolódik, ahogy azt az 1. ábrán szaggatott vonallal ábrázoltuk, míg a külföldi reakciógörbe változatlan marad. Így az új egyensúly az  $E_2$  pontban lesz, azaz a teljes hazai output csökken, míg a teljes külföldi output nő.

Az 1. ábra nem mutatja, hogy az  $\alpha$  változása hogy hat a teljes kínálatra a külső, vagy harmadik piacon. Ahhoz, hogy ezt megvizsgáljuk, tekintsük a hazai és külföldi vállalatok teljes kínálatára vonatkozó egyensúlyi feltételt az alábbiak szerint.

$$X + X^* = \sum \varphi_i(X + X^*, \alpha) + \sum \varphi_j^*(X + X^*), \quad (9)$$

vagy

$$Q = \varphi(Q, \alpha) + \varphi^*(Q), \quad (9')$$

amelyből

$$\frac{dQ}{d\alpha} = \frac{\varphi_\alpha}{1 - \varphi_\alpha - \varphi_Q^*} < 0. \quad (10)$$

Így a két ország teljes kínálata csökken az  $\alpha$  megnövelése esetén.

A (9') szerint  $Q$  az  $\alpha$  függvénye, és figyelembe véve (3.1)-et és (3.2)-t, az egyes vállalatok outputjának változása:

$$\frac{dx_i}{d\alpha} = \varphi_{iQ} \frac{dQ}{d\alpha} + \varphi_{i\alpha} \geq 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (11)$$

ahol  $\frac{dx_i}{d\alpha} < 0$  legalább egy  $i$ -re a  $\frac{dX}{d\alpha} < 0$  miatt.

Egyensúlyban mind az  $i$ -edik hazai, mind a  $j$ -edik külföldi vállalat profitja az  $\alpha$  függvénye:

$$\pi_i(\alpha) = x_i(\alpha)f(Q(\alpha)) - C_i(x_i(\alpha), \alpha), \quad i = 1, \dots, n, \quad (12.1)$$

$$\pi_j^*(\alpha) = x_j^*(\alpha)f(Q(\alpha)) - C_j^*(x_j^*(\alpha), \alpha), \quad j = 1, \dots, n^*. \quad (12.2)$$

A  $\pi_i(\alpha)$  és  $\pi_j^*(\alpha)$  függvényeket  $\alpha$  szerint differenciálva és figyelembe véve a (2.1)-(2.2) elsőrendű feltételeket, kapjuk, hogy

$$\frac{d\pi_i}{d\alpha} = x_i f' \left( (1 - \varphi_{iQ}) \frac{dQ}{d\alpha} - \varphi_{i\alpha} \right) - C_{i\alpha}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (13.1)$$

$$\frac{d\pi_j^*}{d\alpha} = x_j^* f' \left( (1 - \varphi_{jQ}^*) \frac{dQ}{d\alpha} \right), \quad j = 1, \dots, n^*. \quad (13.2)$$

A  $\frac{d\pi_i}{d\alpha}$  előjele meghatározatlan, mivel a zárójelben levő kifejezése is az. Figyelembe véve a (4.1), (4.2), (10) és (13.1)-et, kapjuk a következő állítást:

$$\frac{d\pi_i}{d\alpha} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\left(1 + \frac{f'+x_i f''}{f'-C_i''}\right) \sum \frac{C_{i\alpha}'}{f'-C_i''}}{1 + \sum \frac{f'+x_i f''}{f'-C_i''} + \sum \frac{f'+x_j f''}{f'-C_j''}} - \frac{C_{i\alpha}'}{f'-C_i''} \geq \frac{C_{i\alpha}'}{x_i f'}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (14.1)$$

Másrészt (4.2)-ből, (10)-ből és (13.2)-ből adódik, hogy

$$\frac{d\pi_j^*}{d\alpha} > 0, \quad j = 1, \dots, n^*. \quad (14.2)$$

A (14.1) állítás egyszerűsítése végett legyenek a költségfüggvényeink az alábbiak:

$$C_i(x_i, \alpha) = c_i x_i + \alpha x_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (15.1)$$

$$C_j^*(x_j^*) = c_j^* x_j^*, \quad j = 1, \dots, n^*, \quad (15.2)$$

Ekkor

$$C_{i\alpha} = x_i > 0, \quad C_{i\alpha}' = 1, \quad (16)$$

és (14.1) az alábbi alakot ölti:

$$\frac{d\pi_i}{d\alpha} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1 + \frac{f'+x_i f''}{f'}}{1 + \sum \frac{f'+x_i f''}{f'} + \sum \frac{f'+x_j f''}{f'}} \geq \frac{2}{n}. \quad (14.1')$$

Így  $\frac{d\pi_i}{d\alpha} < 0$ , ha  $n = 2$ , az előjel  $n \geq 3$  esetén meghatározatlan.

A további egyszerűsítések végett tegyük fel, hogy az inverz keresleti függvény lineáris:

$$f = a - bQ. \quad (17)$$

Ebben az esetben a (14.1')-ben a felső egyenlőtlenség jel érvényes függetlenül  $n$  és  $n^*$  értékétől. A (15.1)-ben szereplő  $\alpha$  kereskedelempolitikai paraméter lehet exportadó, vagy támogatás. Tegyük fel, hogy (15.1), (15.2) és (17) fennáll. Ha minden hazai cégnek  $\alpha$  ráta szerinti exportadót kell fizetnie minden egység export után, akkor ennek növekedése minden hazai vállalatnál csökkenti, és minden külföldi vállalat esetében növeli a profitot. Másrészt, ha minden egység export után  $\beta$  ráta szerinti exporttámogatást kapnak a hazai vállalatok, akkor

$$C_i(x_i, \alpha) = c_i x_i + \alpha x_i \equiv c_i x_i - \beta x_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (15.1')$$

A  $\beta$  növekedése ekvivalens az  $\alpha$  csökkenésével. Így az exporttámogatás növekedése a hazai vállalatok profitját növeli, a külföldiekét csökkenti.

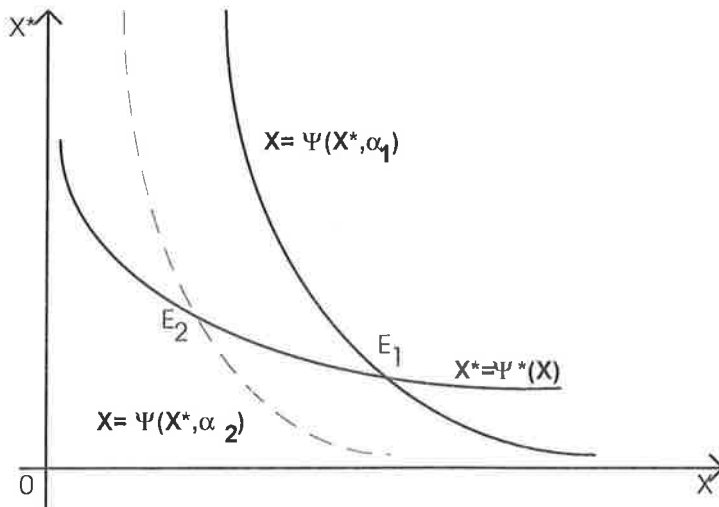
Tekintsünk most egy olyan helyzetet, amikor a hazai vállalatoknál egységnyi outputjuk után  $t$  rátájú szennyezési adót kell fizetniük. Ekkor

$$C_i(x_i, \alpha) = c_i x_i + t x_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (15.1'')$$

Ekkor a hazai vállalat költségfüggvénye formailag azonos az exportadó mellettivel, a szennyezési adó növekedésének hatása azonos az exportadó növekedésének hatásával.

### 3 Következtetések

A külső, vagy harmadik piacon folyó nemzetközi verseny általánosított Long-Soubeyran modelljét adtuk meg. A hazai vállalat költségfüggvény változásait a komparatív statika módszerével elemeztük. Megmutattuk az adott ország kereskedelempolitikájában bekövetkező változások hatásait. Elemzésünk nem terjedt azonban ki az optimális kereskedelempolitika meghatározásának problémájára.



1. ábra. Egyensúlyi teljes hazai és külföldi output

### Irodalom

1. Krugman, P. R. (1984), "Import Protection as Export Promotion; International Competition in the Presence of Oligopoly and Economies of Scale", in H. Kierzkowski(ed.), *Monopolistic Competition and International Trade*, Oxford University Press, 180–193.
2. Long, N. V. – A. Soubeyran (1966), "Lobbying for Protection by Heterogeneous Firms", *European Journal of Political Economy*, 12, 19–32.
3. Long, N. V. – A. Soubeyran (1997), "Cost Heterogeneity, Industry Concentration and Strategic Trade Policies", *Journal of International Economics*, 43, 207–220.
4. Okuguchi, K. - N. Serizawa (1996), "Effects of Trade Policy for International Duopoly", *Keio Economic Studies*, 33, 13–22.
5. Zhang, A. – Y. Zhang (1997), "An Analysis of Import Protection as Export Promotion under Economies of Scale", *Paper presented at Far-Eastern Meeting of Econometric Society*, July, 1997, Hong Kong.



COMPARATIVE STATICS FOR INTERNATIONAL COMPETITION  
IN THIRD COUNTRY

We generalize Long-Soubeyran model of international competition among domestic and foreign firms in a foreign or third country and conduct comparative static analysis of a change in domestic firms' cost functions. Our comparative static results enable us to derive comparative static results of a change in the home country's trade policy and of that in its environmental policy.



# TÖBBKRITÉRIUMOS DÖNTÉSI MODELL ALKALMAZÁSA A VILLAMOSENERGIA IPARBAN<sup>1</sup>

MOLNÁR SÁNDOR – SZIDAROVSKY FERENC – TAKÁCS TIBOR  
*MTA SZTAKI – Arizona Egyetem – Systemexpert Tanácsadó Kft.*

## 1 Bevezetés

Az alábbiakban ismertetendő módszert új áramtermelő kapacitások létesítésére kiírt tenderek kiértékelésére fejlesztettük ki. A módszer azonban alkalmazható tetszőleges többcélú kiértékelésre is.

1997-ben a Magyar Villamos Művek Rt. (MVM Rt) két tendert írt ki az új kapacitások megépítésére a 2002-2006 időszakban. Az első tender kis, azaz 200 MW<sub>e</sub>-nál nem nagyobb kapacitások létesítésére, a második 200 MW<sub>e</sub>-nál nagyobb erőművek üzembe állítására vonatkozott. Az ajánlatok kiértékelésének alapja az 1994-es Villamosenergia Törvény. Eszerint az MVM Rt az áramot a legkisebb költségek elve alapján kell, hogy beszeresse. Természetesen nincs egyetlen olyan költségjellemző, amely alapján az erőműveket egyértelműen rangsorolni lehetne. A beszerzéssel kapcsolatban felmerülnek fix és változó költségek, amelyek további költségelemekre bonthatók. A beruházások tervezett földrajzi helye szintén befolyásolja a költségeket a hálózatra való csatlakozás miatt.

A kiértékelés során természetesen egyéb szempontokat is figyelembe kell venni. Az egyik ilyen szempont az erőművi termelés okozta kibocsátások mennyisége. Nemzetközi kötelezettségvállalásainkból következően az MVM Rt-vel kapcsolatban álló erőművek egyedi és összes SO<sub>2</sub> és NO<sub>x</sub> kibocsátását a jövőben korlátozni kell megadott határértékek alapján.

A módszer kialakításakor a többkritériumos döntéshozatal bizonyos fogalmait és módszereit használtuk fel. A témakör alapvető fogalmait és összefüggéseit pl. az [1] tartalmazza. A döntéshozók preferenciáira vonatkozó információktól függően különböző ismert módszerek alkalmazhatók, mint pl. a szekvenciális optimalizáció, az E-korlátos módszer, a súlyozás stb. A többkritériumos problémákra gyakran a többváltozós hasznosság-elméletet alkalmazzzák ([3]), de nem minden preferenciarendezést lehet egyértékű hasznossági függvényvel jellemezni. Például a lexikografikus rendezés nem ekvivalens a valós értékű értékfüggvény által generált bármely rendezéssel ([4]). Az olyan döntési problémákat, ahol több döntéshozó szerepel, általában kooperatív, vagy nem kooperatív játékok segítségével modellezik, amelyek magukban foglalják a csoport döntéshozatalt és a konfliktus feloldást. A játékelméleti megközelítést pl. [5], ill. [6] foglalták össze. Ha az egyes érdekcsoportokat tekintjük döntéshozóknak, akkor a játékelméleti módszerek közvetlenül nem

<sup>1</sup>Beérkezett: 1999. május 5.

alkalmazhatók, mivel mindegyikük több célfüggvénnyel rendelkezik. A legutóbbi időkben [7] írta le a több kifizetőfüggvényű játékok vizsgálatának általános elveit.

A jövőbeni igényeket és a gazdasági feltételeket nem tudjuk pontosan előrejelezni, így ezeket a bizonytalanságokat be kell építeni a metodológiába. A döntési modellekben általában a sztochasztizálást, illetve a fuzziifikálást alkalmazzák. Mindkét megközelítésről áttekintést nyújt [1].

A fentiekben említett módszerek elemeinek kombinálásával alakítottuk ki a tenderkiértékelésben javasolt metodológiát. Az alábbiakban a kiértékelés egyes lépéseit adjuk meg.

## 2 A kiértékelési folyamat lépései

### 1. lépés

A gazdasági helyzet alakulására vonatkozó scenáriókat kell meghatározni a kiértékelendő ajánlatokra ható mutatók (pl. tüzelőanyag ár, makrogazdasági mutatók, szabályozási változatok) különböző alakulása alapján. Jelölje  $k = 1, 2, \dots, N$  ezeket a scenáriókat. A különböző érdekcsoportok számára a választott scenáriók különbözőek lehetnek. Az elemzés során három változatban vizsgáljuk mind a tüzelőanyag ár, mind pedig a villamosenergia igények alakulását. Eszerint kilenc scenáriót vizsgálunk:

1. alacsony árnövekedés alacsony igénynövekedés mellett ( $F_L \cap D_L$ )
2. alacsony árnövekedés közepes igénynövekedés mellett ( $F_L \cap D_M$ )
3. alacsony árnövekedés magas igénynövekedés mellett ( $F_L \cap D_H$ )
4. közepes árnövekedés alacsony igénynövekedés mellett ( $F_M \cap D_L$ )
5. közepes árnövekedés közepes igénynövekedés mellett ( $F_M \cap D_M$ )
6. közepes árnövekedés magas igénynövekedés mellett ( $F_M \cap D_H$ )
7. magas árnövekedés alacsony igénynövekedés mellett ( $F_H \cap D_L$ )
8. magas árnövekedés közepes igénynövekedés mellett ( $F_H \cap D_M$ )
9. magas árnövekedés magas igénynövekedés mellett ( $F_H \cap D_H$ )

Ezeket a scenáriókat vesszük alapul az új áramtermelő kapacitásokra vonatkozó ajánlatok kiértékeléséhez (azaz egyik változóban sem tételezünk fel csökkenést), így  $N = 9$ .

## 2. lépés

Ezután becsüljük az egyes scenáriók megvalósulásának  $p_k$  valószínűségeit. Az egyedi  $p(F_i)$  és  $p(D_i)$   $i, j = L, M, H$  valószínűségeket a rájuk leginkább ható gazdasági változók előrejelzése alapján becsüljük. Jelölje  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ezeket a változókat, és tegyük fel, hogy ezek a tüzelőanyagárat ( $fp$ ) és az igényt ( $de$ ) az

$$fp = f(x_1, \dots, x_n) \quad (2.1)$$

$$de = g(x_1, \dots, x_n) \quad (2.2)$$

összefüggések szerint határozzák meg. Először ezeket a függvényeket kell becsülni. A függvényeket tényadatok alapján nemlineáris (vagy speciális esetben lineáris) legkisebb négyzetek módszerével történő illesztéssel idősor adatok alapján határozzuk meg.

Miután az  $f$  és a  $g$  függvényeket meghatároztuk, a gazdasági változókat kell becsülnünk. Az előrejelzés eredménye minden változó esetében egy valószínűségeloszlás lesz. Az előrejelzés módszerétől függően kapunk diszkrét, vagy folytonos eloszlást. Jelöljék  $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n$  ezeket a véletlen változókat. Eloszlásaik alapján az  $fp$  és a  $de$  valószínűségeloszlását az alábbiak szerint határozhatjuk meg.

Tegyük fel, hogy  $\tilde{x}_i$  változók diszkrét eloszlásúak  $p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{ir_i}$  valószínűségekkel. Ekkor az

$$fp(j_1, j_2, \dots, j_n) = f(x_{1j_1}, \dots, x_{nj_n}) \quad (2.3)$$

és a

$$de(j_1, j_2, \dots, j_n) = g(x_{1j_1}, \dots, x_{nj_n}) \quad (2.4)$$

értékeket tekintjük a  $p_{1j_1} \cdot p_{2j_2} \cdot \dots \cdot p_{nj_n}$  valószínűségekkel. Figyeljük meg, hogy itt kihasználtuk a gazdasági változók függetlenségét. Ezt a függetlenséget a vizsgált változók kiválasztásakor szem előtt kell tartanunk. (Eunek egyik lehetséges eszköze a faktoranalízis).

Legyenek most  $[a_L, b_L]$ ,  $[a_M, b_M]$ ,  $[a_H, b_H]$ , az alacsony, a közepes és a magas tüzelőanyagárnak megfelelő intervallumok. Az igények esetében legyenek a megfelelő intervallumok  $[A_L, B_L]$ ,  $[A_M, B_M]$  és  $[A_H, B_H]$ . Ekkor  $\alpha = L, M, H$ -ra és  $\beta = L, M, H$ -ra az  $\alpha$  tüzelőanyagár és a  $\beta$  igénynövekedés valószínűsége

$$P(\alpha, \beta) = \sum_{j_1} \sum_{j_2} \dots \sum_{j_n} p_{1j_1} p_{2j_2} \dots p_{nj_n}, \quad (2.5)$$

ahol

$$fp(j_1, \dots, j_n) \in [a_\alpha, b_\alpha] \quad \text{és} \quad de(j_1, \dots, j_n) \in [A_\beta, B_\beta]$$

Ha a gazdasági változók folytonos eloszlásúak, az  $fp$  és a  $de$  eloszlásfüggvényét nehéz meghatározni, mert ahhoz egy  $n$ -dimenziós integrált kell kiszámítani. Ezért egy sztochasztikus szimuláció alkalmazását javasoljuk a következő módon. Szimuláljuk az  $x_1, \dots, x_n$  véletlen értékeket, és minden érték  $n$ -eshez számítsuk ki a megfelelő  $fp$  és  $de$  értékeket a már meghatározott  $f$  és  $g$

függvények alapján. Ezt a szimulációt  $N^*$ -szor megismételve  $N^*$   $(fp, de)$  párt kapunk. A programmal kiszámoltatjuk, hogy az  $(fp, de)$  pár hányszor esik az  $(\alpha, \beta)$  kategóriába,  $\alpha, \beta = L, M, H$ . Jelölje ezt az értéket  $N^*(\alpha, \beta)$ . Ekkor a keresett valószínűségeket a

$$P(\alpha, \beta) \approx \frac{N^*(\alpha, \beta)}{N^*} \quad (2.6)$$

relatív gyakorisággal közelítjük. Így a 2. lépés végén  $P(\alpha, \beta)$  valószínűségeket sorozatát kapjuk, amelyek az egyes szcenáriók bekövetkezésének valószínűségeit adják (a korábbi jelölésünknek megfelelően legyenek ezek  $P_1, P_2, \dots, P_9$ ).

### 3. lépés

Ezután a kiértékelés kritériumait határozzuk meg. Ehhez először végig kell gondolni a tender célját, illetve azokat a feltételeket, amelyeket a kiválasztáskor teljesíteni kell. Ezek a célok és feltételek nem feltétlenül kvantifikálhatók. Például villamosenergia igények kielégítésének célját, vagy a környezetbarát módon való termelés feltételét csak verbálisan lehet megfogalmazni. Ezután minden célt és feltételt tovább bontunk. Például a környezetbarát termelés feltételét a levegőminőségre, talajvízállapotra, zajszintre stb.

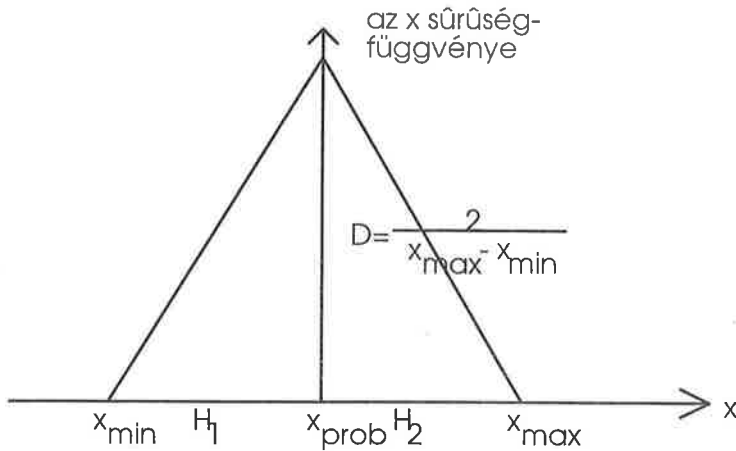
Végül meghatározzuk azokat a mérhető kritériumokat, amelyeket figyelembe lehet venni a konkrét kiértékelés során. A levegőminőség esetében tekinthetjük a kibocsátott  $\text{CO}_2$ ,  $\text{SO}_2$ ,  $\text{NO}_x$  stb. mennyiségeket. Hasonlóan járunk el a többi cél és feltétel esetében is.

A gyakorlatban az alábbi eljárás látszik megvalósíthatónak. A különböző kockázatviselők (vagy érdekcsoportok) képviselői először meghatározzák a célokat és feltételeket. Minden cél és feltétel esetén meghatározzuk, hogy abban mely csoportok érdekeltek elsősorban. Ezek a csoportok fogják egymással egyeztetve elvégezni a meghatározott célok és feltételek további felbontását. A mérhető kritériumok meghatározását az egyes csoportok külön végzik, a felbontás alapján. Megjegyezzük, hogy a fenti eljárást sikeresen alkalmazták Észak-Arizona erdészeti stratégiájának kialakításában ([8]).

### 4. lépés

Minden egyes (esetünkben a kilenc) szcenárióhoz meghatározzuk a kifizetési mátrixot.

Ha egy célváltozó teljesen kvantifikálható, és nem kell figyelembe vennünk bizonytalanságot, a kifizetési mátrixba a tényleges adat kerül. Bizonytalan adatok esetén a várható értéket tekintjük. Ha a bizonytalanság esetén nem rendelkezünk adatsorral, általában a következő szerint szoktunk eljárni. Szakértőkkel készítettünk becslést a legvalószínűbb értékre, és az adott változó lehetséges minimumára és maximumára vonatkozóan. Ekkor az 1. ábrán látható háromszög-eloszlást választjuk.



1. ábra. Háromszög eloszlás adatbizonytalanság esetén

Legyen  $D$  a sűrűségfüggvénynek az  $x_{\text{prob}}$  pontban felvett értéke. Mivel a sűrűségfüggvény integrálja 1, ezért

$$\frac{(x_{\text{max}} - x_{\text{min}})D}{2} = 1,$$

ahonnan

$$D = \frac{2}{x_{\text{max}} - x_{\text{min}}} \quad (2.7)$$

Így a sűrűségfüggvény

$$f(x) = \begin{cases} (x - x_{\text{min}}) \frac{D}{H_1} & \text{ha } x_{\text{min}} \leq x \leq x_{\text{prob}}; \\ (x_{\text{max}} - x) \frac{D}{H_2} & \text{ha } x_{\text{prob}} \leq x \leq x_{\text{max}}; \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \quad (2.8)$$

ahol  $H_1 = x_{\text{prob}} - x_{\text{min}}$  és  $H_2 = x_{\text{max}} - x_{\text{prob}}$ . A várható értéket egyszerű integrálással kapjuk:

$$\bar{x} = \int_{x_{\text{min}}}^{x_{\text{prob}}} (x^2 - x \cdot x_{\text{min}}) \frac{D}{H_1} dx + \int_{x_{\text{prob}}}^{x_{\text{max}}} (x \cdot x_{\text{max}} - x^2) \frac{D}{H_2} dx =$$

$$\frac{D}{H_1} \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} x_{\text{min}} \right]_{x_{\text{min}}}^{x_{\text{prob}}} + \frac{D}{H_2} \left[ \frac{x^2}{2} x_{\text{max}} - \frac{x^3}{3} \right]_{x_{\text{prob}}}^{x_{\text{max}}} =$$

$$\frac{D}{H_1} \left[ \frac{1}{3} x_{\text{prob}}^3 + \frac{1}{6} x_{\text{min}}^3 - \frac{1}{2} x_{\text{min}} x_{\text{prob}}^2 \right] + \frac{D}{H_2} \left[ \frac{1}{6} x_{\text{max}}^3 - \frac{1}{2} x_{\text{max}} x_{\text{prob}}^2 + \frac{1}{3} x_{\text{prob}}^3 \right] \quad (2.9)$$

amelyet könnyen kiszámolhatunk. Megjegyezzük, hogy  $\bar{x} = x_{\text{prob}}$  akkor és csak akkor, ha

$$x_{\text{prob}} = \frac{x_{\min} + x_{\max}}{2}, \quad (2.10)$$

azaz, amikor a legvalószínűbb érték a legkisebb és a legnagyobb érték átlaga. Így ebben az esetben a fenti számolás elhagyható. Ha a kifizetési mátrix bármely elemére rendelkezünk adatsorral, várható értékek az átlagukat tekinthetjük. Ismétlődő értékek esetén súlyozott átlagot veszünk:

$$\bar{x} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_s x_s}{m_1 + m_2 + \dots + m_s}, \quad (2.11)$$

ahol  $m_1, m_2, \dots, m_s$  az előforduló értékek multiplicitásai.

A nem kvantifikálható célváltozók esetében szubjektív mértékeket tekintünk. Esztétikai szempontokat például a  $[0, 100]$  intervallumon mérhetjük. Ezeket az értékeket az adott célhoz kijelölt csoport határozza meg (az egyéni ítéletek átlagát vesszük). A fenti eljárást a kifizetési mátrix minden egyes elemére végrehajtjuk.

A mátrixokat minden egyes scenárióra meghatározzuk. Megjegyezzük, hogy egyes scenáriók nem hatnak minden egyes mátrixelemre, így ezeket elég egyszer meghatározni. A további elemzésekhez biztosítanunk kell, hogy minden egyes célfüggvény maximumát keressük (ha szükséges a változó  $(-1)$ -szeresét tekintjük).

## 5. lépés

Minden egyes célváltozóhoz hozzárendelünk egy hasznossági függvényt. Ezek becslését az egyes változókhoz kijelölt csoportok (kockázatviselők) végzik. Az alábbiakban ismertetendő eljárást az összes célváltozóra végrehajtjuk.

Az első lépés a legrosszabb célfüggvényérték meghatározása. Ha a célfüggvény nem korlátos, választunk egy értéket, amely gyakorlatilag minimumnak tekinthető. Jelölje ezt az értéket  $g_{\min}$ . Hasonlóan állapítsunk meg egy  $g_{\max}$  értéket. Ha  $U$  az asszociált hasznossági függvény, akkor legyen

$$U(g_{\min}) = 0 \quad \text{és} \quad U(g_{\max}) = 1. \quad (2.12)$$

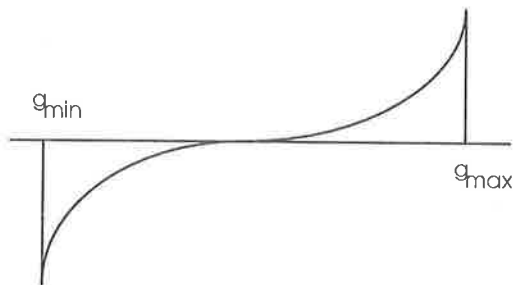
Egy közbenső  $g_{\text{mid}}$  értéket egyszerű felezéssel jelölünk ki:

$$g_{\text{mid}} = \frac{g_{\min} + g_{\max}}{2}. \quad (2.13)$$

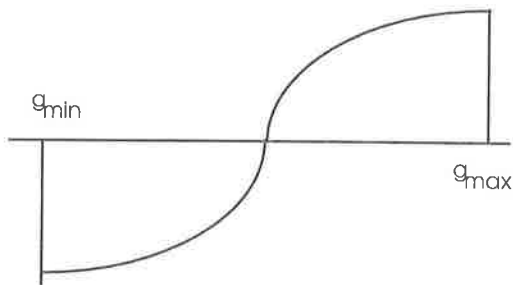
A csoporttal készítettünk becslést az  $U(g_{\text{mid}})$  értékre. Ekkor két részintervallumunk van. Ismételjük meg mindkettőre az eljárást. Ezt tovább folytatva a  $k$ -adik lépés után  $2^k$  részintervallum lesz.

Ekkor véges számú pontban ismerjük a hasznossági függvény értékeit. Ezekre egy folytonos függvényt illesztünk. Az irodalomban (ld. például [1]) három hasznossági függvény típust szoktak megkülönböztetni: a kockázatkereső, a kockázatalhárító és a kockázattal szemben közömbös hasznossági függvényt. Ezeket a függvénytípusokat a 2-4. ábrák mutatják be.

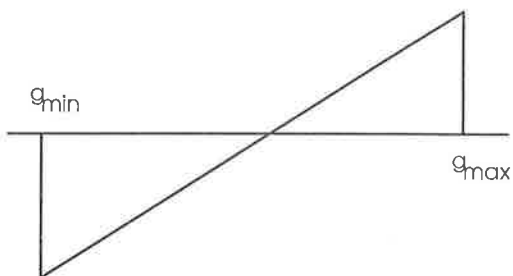




2. ábra. Kockázatkereső hasznossági függvény



3. ábra. Kockázatelhárító hasznossági függvény



4. ábra. Kockázattal szemben közömbös hasznossági függvény

A gyakorlati alkalmazásoknál gyakran a fenti típusok kombinációit tekintik, így nem a fenti típusok valamelyikének alkalmazását javasoljuk. A kersett folytonos függvény legyen a szomszédos pontokat összekötő legsimább interpolációs függvény. A numerikus analízis irodalmából ismert (ld. például [9]), hogy ez a természetes harmadfokú spline-interpolációs függvény. Ez az

alábbiak szerint állítható elő. Tegyük fel, hogy a  $g_1 < g_2 < \dots < g_n$  független változókhoz tartozó értékek  $u_1, u_2, \dots, u_n$ . Legyen

$$\begin{aligned} h_k &= g_{k+1} - g_k, \\ s_k &= \frac{U_{k-1} - U_k}{h_k} \quad (k = 1, \dots, n-1) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Legyen továbbá  $c_1 = c_n = 0$  és a  $c_2, \dots, c_{n-1}$  ismeretlenekre oldjuk meg a

$$c_{k-1}h_{k-1} + 2c_k(h_{k-1} + h_k) + c_{k+1}h_k = 3(s_k - s_{k-1}) \quad (2.15)$$

lineáris tridiagonális egyenletrendszer, ahol  $k = 2, 3, \dots, n-1$ . Miután a  $c_k$  értékeket meghatároztuk, definiáljuk az

$$a_k = U_k \quad (2.16)$$

$$b_k = s_k - \frac{h_k}{3}(2c_k + c_{k+1}) \quad (2.17)$$

és

$$d_k = \frac{c_{k+1} - c_k}{3h_k} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1). \quad (2.18)$$

Végül, a  $[g_k, g_{k+1}]$  intervallumban a természetes spline interpolációs függvény:

$$a_k + b_k(g - g_k) + c_k(g - g_k)^2 + d_k(g - g_k)^3 \quad (2.19)$$

Miután meghatároztuk minden egyes célváltozóra és minden egyes részintervallumra a természetes spline interpolációs függvény szegmenseit, a folytonos hasznossági függvényeket teljes egészében előállítottuk. Ekkor ezek ábráit még egyszer véleményezzük a csoportok szakértőivel, szükség esetén módosítjuk. Ezt az utólagos korrekciós lehetőséget feltétlenül szükségesnek tartjuk.

## 6. lépés

Ebben a lépésben többváltozós hasznossági függvényeket állítunk elő. Tegyük fel, hogy az egyes célfüggvényekhez az  $U_1, U_2, \dots, U_s$  egyedi hasznossági függvényeket határoztuk meg. Feltesszük továbbá, hogy ezekre a függvényekre teljesül a kölcsönös hasznossági függetlenség feltétele, vagyis bármely célfüggvény hasznossági függvénye független a többi hasznosság konkrét értékétől (a pontos definíciót ld. [1]). Ebben az esetben a többváltozós hasznossági függvény vagy additív:

$$U = k_1U_1 + k_2U_2 + \dots + k_sU_s \quad (2.20)$$

vagy multiplikatív:

$$kU + 1 = (kk_1U_1 + 1)(kk_2U_2 + 1) \cdots (kk_sU_s + 1) \quad (2.21)$$

ahol  $k_1, k_2, \dots, k_s$  és  $k$  ismeretlen konstansok ([3]). A fő probléma ezen ismeretlen értékek meghatározása. Itt a gyakorlatban leginkább bevált két eljárást vázolunk: a legkisebb négyzetek és a szisztematikus becslés módszerét.

Tegyük fel először, hogy a többváltozós hasznossági függvény lineáris. A legkisebb négyzetek módszerénél az egyes csoportok szakértőivel becsült készítettünk az  $U_1, U_2, \dots, U_s$  adott értékei alapján a többváltozós hasznossági függvény értékeire. Minden egyedi hasznossági függvényre öt értéket javasolunk: 0, 1/4, 1/2, 3/4, 1. Így  $5^s$  pontot kapunk. Ha ez túl sok, akkor tekintjük a 0, 1/2, 1 értékeket (összesen  $3^s$  pont). Minden egyes  $U_1^{(j)}, \dots, U_s^{(j)}$  pontra legyen a becsült többváltozós hasznossági érték  $U^{(j)}$ ,  $j = 1, 2, \dots, 3^s$  vagy  $5^s$ . A (2.20)-beli ismeretlen  $k_i$  értékeket ekkor sztenderd lineáris legkisebb négyzetek módszerével való becslés alapján kapjuk.

A szisztematikus becslésnél a kockázatviselők a többváltozós hasznossági függvényt  $s$  pontban becsülik:

$$U_1 = 0, \dots, U_{i-1} = 0, U_i = 1, U_{i+1} = 0, \dots, U_s = 0, \quad (2.22)$$

$i = 1, 2, \dots, s$ . A többváltozós érték annak felel meg, ha az  $i$ -edik hasznosság a maximális, a többi a minimális szinten van. Ha  $U^{(i)}$  jelöli a becsült többváltozós hasznossági értéket, akkor egyszerű helyettesítéssel kapjuk, hogy

$$k_i = U^{(i)}. \quad (2.23)$$

Tekintsük most a multiplikatív formát. A fenti jelöléssel a legkisebb négyzetek módszere a

$$\sum_j \left[ kU^{(j)} + 1 - (kk_1U_1^{(j)} + 1)(kk_2U_2^{(j)} + 1) \dots (kk_sU_s^{(j)} + 1) \right]^2 \quad (2.24)$$

kifejezést minimalizálja. A feltétel nélküli optimalizációs problémát sztenderd, pl. gradiens típusú algoritmusokkal oldhatjuk meg. A részleteket ld. [10]-ben. Az optimalizáció végrehajtásához számos ismert szoftver eszköz áll rendelkezésre: MATLAB, IMSL stb. A szisztematikus becslési eljárásban a (2.22) pontokat a (2.21) egyenletbe helyettesítjük. Ekkor  $i = 1, 2, \dots, s$ -re

$$kU^{(i)} + 1 = kk_i + 1, \quad (2.25)$$

mivel  $j \neq i$ ,  $kk_jU_j + 1 = kk_j \cdot 0 + 1 = 1$  és  $kk_iU_i + 1 = kk_i \cdot 1 + 1 = kk_i + 1$ . A (2.25)-ből következik, hogy a lineáris esethez hasonlóan

$$k_i = U^{(i)}. \quad (2.26)$$

A  $k_i$  értékek előállítását után helyettesítsük az  $U_1 = \dots U_s = 1$ -et a (2.21) multiplikatív formulába, és a többváltozós hasznossági függvényt normalizáljuk 1-re, hogy a  $k$  ismeretlen értékére kapjuk a

$$k + 1 = (kk_1 + 1)(kk_2 + 1) \dots (kk_s + 1) \quad (2.27)$$

egyenletet. Figyeljük meg, hogy a  $k = 0$  mindig megoldás, amely a multiplikatív formát lineárisra redukálja. Ha  $k \neq 0$ , akkor a (2.27) egyenletet  $k$ -ra megoldjuk. Egyszerű számolással a  $k$ -val való osztás után

$$k^{s-1}k_1k_2 \dots k_s + k(k_1k_2 + k_1k_3 + \dots + k_{s-1}k_s) + (k_1 + k_2 + \dots + k_s - 1) = 0$$

amely a  $k$ -ra polinomiális egyenlet. Többszörös gyökök esetén a legjobb megoldást úgy kapjuk, hogy választunk egy további pontot a következő módon. Válasszuk például az  $U_1 = U_2 = \dots = U_s = 1/2$ -et, és legyen az ennek megfelelő többváltozós hasznossági érték  $U^{(1/2)}$ . Ekkor a minimalizálandó a

$$\left| kU^{(1/2)} + 1 - \left( \frac{kk_1}{2} + 1 \right) \left( \frac{kk_2}{2} + 1 \right) \dots \left( \frac{kk_s}{2} + 1 \right) \right|, \quad (2.28)$$

vagy egy ponthalmazt választva a legkisebb négyzetek módszere szerinti (2.24) alapján választjuk meg a  $k$  legjobb értékét a megoldáshalmazból.

## 7. lépés

Minden egyes szcenárióra és ajánlatra kiszámítjuk a megfelelő többváltozós hasznossági függvény értékét. Tekintsünk most egy rögzített szcenáriót és egy konkrét ajánlatot. Legyenek a 4. lépésben kiszámított célfüggvény értékek  $g_1, \dots, g_s$ . Az 5. lépésben meghatározott egyedi hasznossági függvényeket felhasználva könnyen kiszámíthatjuk az

$$U_1^* = U_1(g_1), U_2^* = U_2(g_2), \dots, U_s^* = U_s(g_s)$$

hasznossági értékek sorozatát. Ezután a 6. lépés eredménye alapján az  $U^*$  vagy a (2.20) vagy a (2.21) egyenlet alapján határozható meg, attól függően, hogy melyik eredményezett jobb illesztést a 6. lépésben. Ha az ajánlatokat  $PR_1, PR_2, \dots, PR_p$ -vel jelöljük, a számítás végeredménye az 1. táblázat, ahol  $U_{ij}^*$  az  $i$ -edik ajánlat  $j$ -edik szcenárió melletti többváltozós hasznossági értéke.

Tender	Szcenárió			
	1	2	...	9
1	$U_{11}^*$	$U_{12}^*$	...	$U_{19}^*$
2	$U_{21}^*$	$U_{22}^*$	...	$U_{29}^*$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$p$	$U_{p1}^*$	$U_{p2}^*$	...	$U_{p9}^*$

1. táblázat. A hasznossági értékek mátrixa

Végül mindegyik ajánlatra kiszámíthatjuk a fenti hasznossági értékek várható értékét:

$$U_i^* = \sum_{j=1}^9 P_j U_{ij}^*$$

(a  $P_j$  valószínűségeket a 2. lépésben határoztuk meg).

A fenti lépéseket minden csoportra megismételve kapjuk a kifizetési mátrixot, amelyben a sorok a csoportoknak, az oszlopok pedig az ajánlatoknak felelnek meg, az  $U_{kl}$  általános elem az  $l$ -edik ajánlat  $k$ -adik csoport általi végső értékelést adja. Ezt a táblázatot egy olyan diszkrét csoportdöntési probléma kifizetési táblázatának tekinthetjük, amelyben a sorok a tagoknak, az oszlopok a döntési lehetőségeknek felelnek meg.

### 3 A végső kiválasztási eljárás

Figyeljük meg, hogy minden csoport esetén a hasznossági függvények normalizáltak, így a végső kiválasztási eljárásban nincs szükség normalizálásra. Ezt a végső kiválasztást a következő egyszerű algoritmus alapján javasoljuk lebonyolítani.

Csoport	Tender			
	1	2	...	$p$
1	$U_{11}$	$U_{12}$	...	$U_{1p}$
2	$U_{21}$	$U_{22}$	...	$U_{2p}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$K$	$U_{K1}$	$U_{K2}$	...	$U_{Kp}$

2. táblázat. Csoport döntési kifizetési mátrix

A különböző csoportok fontosságát a végső döntést hozók értékelik. Legyenek az ezt kifejező tényezők  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_K$ , ahol  $\alpha_i \geq 0$  minden  $i$ -re, és  $\alpha_1 + \dots + \alpha_K = 1$ . Akkor minden ajánlatra számítsuk ki az

$$U_l^F = \sum_{k=1}^K \alpha_k U_{kl}^2 \quad (3.1)$$

értékeket, és válasszuk közülük a legnagyobbat.

Megjegyezzük, hogy bármely más többcélú eljárást, vagy konfliktus feloldási módszert választhatjuk a végső döntéshozatal során [2,6,11]. A (3.1) egyenlet az origótól való  $l_2$ -távolságot maximalizálja.

### Irodalom

1. Szidarovszky, F., M. Gerslon, and L. Duckstein (1986) *Techniques for Multi-objective Decision Making in Systems Management*. Elsevier, Amsterdam.
2. Szidarovszky, F. and S. Molnár (1986) *Game Theory with Engineering Applications* (in Hungarian). Műszaki Könyvkiadó, Budapest.
3. Kenney, R. L. and H. Raiffa (1976) *Decisions with Multiple Objectives: Preference and Value Trade-off*. Wiley, New York.
4. Fishburn, P. (1970) *Utility Theory for Decision Making*. Wiley, New York.
5. Selten, R. (ed.) (1991) *Game Equilibrium Models*, Vol. 1-4. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York.
6. Myerson, R. B. (1991) *Game Theory: Analysis of Conflict*. Harvard Univ. Press, Cambridge, Mass.
7. Szidarovszky, F. and A. Eskandari (1996) A Note on Pareto Equilibria. *Pure Math. and Appl.*, Vol. 7, No. 1-2, pp. 191-195.

8. Eskandari, A., P. Ffolliott, and F. Szidarovszky (1995) Uncertainty in Multi-criterion Watershed Management Problems. *Technology*, Vol. 332A, pp. 199-207.
9. Yacowitz, S. and F. Szidarovszky (1986) *Introduction to Numerical Computations*. Macmillan, New York (2nd editor 1989)
10. Hadley, G. (1964) *Nonlinear and Dynamic Programming*. Addison-Wesley, Reading, Mass.
11. Taylor, A. D. (1995) *Mathematics and Politics*. Springer-Verlag, New York.
12. Argonne National Laboratory - Systemexpert Consulting Ltd: Final audit report prepared for the Hungarian Power Companies Ltd. (megjelenés alatt)

## MULTIOBJECTIVE DECISION MAKING IN ENGINEERING APPLICATIONS

The paper presents a method evaluating tenders to bring on-line new power generating capacities. However, this methodology can be applied to all kind of multiobjective evaluation problems. In 1997, the Hungarian Power Companies (HPC) issued two tenders for installing new capacities in the period of 2002–2006, one for big capacities (200 MW<sub>i</sub>), and one for smaller ones. HPC is responsible for the electricity supply of the country. It buys power from plants and sells it to distributors. Bid evaluations in Hungary are governed by the Electric Power Act passed in 1994. This act basically requires the HPC to ensure that any future power acquisitions abide by the principle of least cost.

## HALANDÓSÁGI TÁBLÁK BECSLÉSE BAYESI MÓDSZEREKKEL<sup>1</sup>

GÁL PÉTER

Dolgozatomban az életbiztosítások matematikájának egy alapvető feladatára, a halandósági táblák szerkesztésére mutatok be lehetséges módszereket. Megközelítem kiindulópontja a bayesi statisztika. A statisztikai következtetés-elmélet e viszonylag fiatal vonulata jelentőségéhez és sokrétű alkalmazhatóságához képest kevésbé ismert, ezért a dolgozat első fejezetében röviden bemutatom elvi alapjait és a későbbiek során használt néhány módszerét és tulajdonságát. A második fejezet a címbe szereplő fontos gyakorlati problémára tett megoldási javaslatokkal hívja fel a figyelmet a megközelítés hatékonyságára, flexibilitására. Szeretnék köszönetet mondani a dolgozat elkészítésében nyújtott segítségért Hunyadi Lászlónak, a BKE egyetemi tanárának és Szabó Józsefnek, a Winterthur Biztosító Rt. vezető matematikusának.

### 1 A bayesi statisztika alapjai

"Két esemény együttes bekövetkezésének valószínűsége egyenlő az első bekövetkezésének valószínűsége szorozva annak valószínűségével, hogy a második bekövetkezik, feltéve, hogy az első bekövetkezik."<sup>2</sup> Ezt az állítást közel két és fél évszázaddal ezelőtt fogalmazta meg az angol matematikus, filozófus Thomas Bayes tiszteletes, s erre az állításra épült később a klasszikus valószínűségszámítás Bayes-tétele.



Thomas Bayes tiszteletes  
(1702-1761)

<sup>1</sup>Beérkezett: 1998. március 28.

<sup>2</sup>Ld. [1].

A tétel a huszadik század közepén egy heves vitákat kiváltó statisztikai megközelítés alapjául szolgált. A bayesi statisztika szemléletében és eszközeiben sok helyütt szakított a klasszikus elmélettel. A bayesi elemzések során következtetéseinket a klasszikus úttal ellentétben nem csak a mintából nyerhető információk alapján hozzuk. Lehetőség nyílik szubjektív vélemények egzakt kezelésére, szubjektív valószínűségek használatára. Nem feltételezzük az ismételt mintavétel lehetőségét, a rendelkezésre álló egyetlen minta alapján dolgozunk. Továbbá —talán a legjelentősebb szemléletbeli különbség, hogy— a bayesi statisztika becslésének tárgya nem rögzített érték, hanem véletlen változó és a becslés e változó valószínűség-eloszlásának meghatározását jelenti.

A bayesi megközelítést a külső információk felhasználása és a szubjektív valószínűségek használata miatt sok támadás érte (éri). Hívei éppen abban látják erejét, hogy véleményük szerint egyrészt a statisztikus elemzése során mindig felhasznál külső információt (pl. sikertelen kísérletek elvetése) és az elemzés átláthatóságát növeli, ha ezek formálisan is megjelennek a modellben; másrészt a bayesi megközelítésben elképzelhető a külső információk hiánya is, azaz a klasszikus mintavételi statisztika speciális esetként jelenik meg benne. Továbbá a bayesi elméletben is találkozhatunk a klasszikus statisztika alapfeladatainak, a pont- és intervallumbecslés, a hipotézisvizsgálat analogonjaival.

A bayesi módszerek igencsak számításgényes eljárásokat használnak, ezért nem meglepő, hogy e megközelítés népszerűsége a számítástechnika robbanásszerű fejlődését követte. Manapság már sok területen alkalmazható a hagyományos módszerek mellett vagy helyett.

## A Bayes-tétel, a prior és a posterior fogalma

A bayesi megközelítés alapja a Bayes-tétel —melyet gyakran a fordított valószínűség tételének is neveznek— folytonos valószínűségi változókra a következőképpen formalizálható:

$$f(\mathbf{y}, \theta) = f(\mathbf{y} | \theta) f(\theta) = f(\theta | \mathbf{y}) f(\mathbf{y}), \quad (1)$$

azaz

$$f(\theta | \mathbf{y}) = \frac{f(\theta) f(\mathbf{y} | \theta)}{f(\mathbf{y})}, \quad (2)$$

ahol  $\mathbf{y}$  megfigyelések véletlen vektora,  $\theta$  szintén valószínűségi változónak tekintett paramétervektor,  $f(\mathbf{y}, \theta)$ ,  $f(\mathbf{y} | \theta)$  és  $f(\theta | \mathbf{y})$  pedig az együttes illetve feltételes sűrűségfüggvényeket jelölik. Mindezt a következő formában is írhatjuk:

$$f(\theta | \mathbf{y}) \propto f(\theta) f(\mathbf{y} | \theta), \quad (3)$$

ahol  $\propto$  arányosságot jelöl. Az arányossági tényező nyilván  $1/f(\mathbf{y})$ , mely egy konkrét mintát tekintve konstans. Az  $f(\theta)$ -t a  $\theta$  paramétervektor a priori sűrűségfüggvényének vagy röviden priorjának nevezzük. Az  $f(\theta)$  az a posteriori sűrűségfüggvény vagy posterior,  $f(\mathbf{y} | \theta)$  pedig a mintavételi statisztikából



ismert likelihood függvény. (3) tehát szavakkal a következőképpen fogalmazható meg: a posterior sűrűségfüggvény arányos a prior és a likelihood függvény szorzatával.

Á posterior tartalmaz mintán kívüli, előzetes információt, mely a prior révén jelenik meg benne és mintából származó információt, melyet a likelihood függvény közvetít. A bayesi elemzések során a posterior sűrűségfüggvényt használjuk a paraméterekre vonatkozó következtetések levonásához.

## A prior

A prior sűrűségfüggvény,  $f(\theta)$  modellünk paramétereire vonatkozó előzetes ismereteinket reprezentálja. A bayesi elemzés egyik döntő és egyáltalán nem magától értetődő mozzanata a megfelelő, a külső információkat vagy azok hiányát a lehető leghűbben közvetítő prior megválasztása. Fontos, hogy a prior matematikailag egyszerűen kezelhető legyen. További követelmény, hogy független legyen a mintától.

Az a priori információ származhat korábbi mintákkal, adatokkal végzett elemzésekből, ilyenkor adatokon alapuló információról beszélünk. Máskor elméleti megfontolásokról, szubjektív feltételezésekről, szakértői megérzésekről van szó: ezek a nem adatokon alapuló priorok. E két fajta információ természetesen nem mindig választható szét egyértelműen. Gyakran előfordul az az eset, amikor csak kevés vagy semmilyen előzetes információ nem áll rendelkezésünkre. Az ilyen prior megalkotása sem nyilvánvaló, sőt a bayesi következtetéselemélet egyik legnehezebb és legtöbb vitát kiváltó kérdése.

Szólni kell még a priorok egy fontos családjáról, a természetes konjugált prioroknak nevezett sűrűségfüggvényekről. Az ilyen priorok használatát a lánctulajdonságnak való megfelelés igénye motiválja. Szerencsés tulajdonsága ugyanis a priornak, ha valamely gyakori likelihood függvényvel való szorzataként előálló posterior egy következő következtetési lépésben megfelelő priorként szerepelhet. A természetes konjugált priorokból származtatott posterior típusa megegyezik a prioréval, így nyilván rendelkezik a lánctulajdonsággal. Példa természetes konjugált priorra a binomiális eloszlás  $p$  paraméterére feltételezett béta eloszlás. Ismert, hogy ekkor a likelihood függvény és a prior sűrűségfüggvény is  $P^k(1 - P)^{n-k}$ -val arányos és ilyen függvények szorzata nyilván hasonló alakú. További természetes konjugált családok a normális-normális vagy a Poisson-gamma modellek.

## A likelihood függvény

A bayesi elemzésben a likelihood függvény hordozza a mintából származó információkat. Gyakran feltételezzük, hogy a mintaelemek független azonos feltételes eloszlásból származnak. Ilyenkor a likelihood függvény felírható az alábbi módon:

$$f(\mathbf{y} | \theta) \propto \prod_i f(y_i | \theta). \quad (4)$$

Érdemes felhívni a figyelmet a likelihood függvény egy fontos tulajdonságára, miszerint a mintából nyerhető összes információt tartalmazza, azaz "mindent elmond, amit a minta mondhat".<sup>3</sup>

## Következtetés több mintából

Tegyük fel, hogy a  $\theta$  paramétervektor vizsgálata során rendelkezésünkre áll az  $f(\theta)$  prior mellett két független kísérletből származó minta:  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$ . Ilyen esetben a posterior elkészítések a következőképpen járhatunk el: képezzük a (3) szabály szerint az első minta alapján az

$$f(\theta | \mathbf{y}_1) \propto f(\theta)f(\mathbf{y}_1 | \theta) \quad (5)$$

posteriort, majd ezt tekintve prior sűrűségfüggvénynek a második mintát felhasználva számíthatjuk a két mintára támaszkodó posteriort:

$$f(\theta | \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) \propto f(\theta | \mathbf{y}_1)f(\mathbf{y}_2 | \theta) . \quad (6)$$

Az előző két arányosság összevetésével a posterior egy fontos tulajdonságára figyelhetünk fel:

$$f(\theta | \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) \propto f(\theta)f(\mathbf{y}_1 | \theta)f(\mathbf{y}_2 | \theta) . \quad (7)$$

Az  $f(\mathbf{y}_1 | \theta)f(\mathbf{y}_2 | \theta)$  szorzat nem más, mint a  $\theta$  paraméter likelihood függvénye az  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$  minták alapján, azaz

$$f(\theta | \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) \propto f(\theta)f(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 | \theta) . \quad (8)$$

Azt találtuk tehát, hogy a prior különböző minták alapján való ismételt módosítása azonos eredményre vezet az egyesített mintából számított likelihood függvény segítségével képzett posteriorral. Megmutatható, hogy ez az állítás kettőnél több mintára is érvényes.

A fentiek alapján az újonnan szerzett információk folyamatosan beépíthetők a posteriorba, így az a mindenkor rendelkezésünkre álló összes előzetes és mintából származó információt tartalmazhatja. Nem szükséges tehát az a priori és a korábbi mintainformációk megőrzése és az azokból való újraszámolás.

## Paraméterek pontbecslése

A bayesi megközelítés a paraméterek teljes posterior eloszlását szolgáltatja. Ezeket az eloszlásokat leírhatjuk a szokásos statisztikai jellemzőkkel: középértékekkel, szórással, ferdeséggel. Kérdés, hogy a paraméter pontbecslésére az eloszlás mely jellemzőjét érdemes használni. Kézenfekvő megoldás valamely középértéket (várható értéket, módot stb.) választani.

Egy másik lehetséges megközelítés valamilyen, a becslésből eredő „vesztesség” minimalizálása. Ehhez egy megfelelő veszteségfüggvényt ( $L(\theta, \hat{\theta})$ ) választunk, melynek változója a véletlen változónak tekintett  $\theta$  és ennek egy

<sup>3</sup>L. J. Savage: Subjective Probability and Statistical Practice, in: The foundations of Statistical Inference, Methuen & Wiley, London, New York, 1961 idézi Zellner [6].

adott mintához tartozó becslése ( $\hat{\theta} = \hat{\theta}(y)$ ). A veszteségfüggvény a becslés „rosszságát”, a  $\theta$  értékétől való távolságát hivatott mérni. Ne feledjük, hogy a bayesi megközelítés szerint nincs egyetlen „valódi”  $\theta$  érték, hanem a paraméterek posterior sűrűségfüggvénye áll rendelkezésünkre. Ezért  $\theta$  becslésének azt a pontot választjuk, amelyben a veszteségfüggvény posterior várható értéke minimális:

$$\hat{\theta} = \underset{\theta'}{\operatorname{argmin}} E(L(\theta, \theta')) = \underset{\theta'}{\operatorname{argmin}} \int_{R(\theta)} L(\theta, \theta') f(\theta | \mathbf{y}) d\theta, \quad (9)$$

feltéve, hogy a várható érték véges és a minimum létezik.

A veszteségfüggvényt sokféleképpen megválaszthatjuk, egy gyakori megoldás a kvadratikus,

$$L = (\theta - \hat{\theta})' C (\theta - \hat{\theta})$$

alak, ahol  $C$  egy konstans szimmetrikus pozitív definit mátrix. Ilyenkor a veszteségfüggvény várható értéke a következő formára alakítható:<sup>4</sup>

$$\begin{aligned} E(L(\theta, \hat{\theta})) &= E((\theta - \hat{\theta})' C (\theta - \hat{\theta})) = \\ &= E\left((\theta - E(\theta) - (\hat{\theta} - E(\hat{\theta})))' C (\theta - E(\theta) - (\hat{\theta} - E(\hat{\theta})))\right) = \\ &= E\left((\theta - E(\theta))' C (\theta - E(\theta)) + (\hat{\theta} - E(\theta))' C (\hat{\theta} - E(\theta))\right). \end{aligned} \quad (10)$$

Az utolsó várható érték első tagja független  $\hat{\theta}$ -tól, a második tag,  $(\hat{\theta} - E(\theta))' C (\hat{\theta} - E(\theta))$  pedig nem sztochasztikus, és minimumát akkor veszi fel, ha  $\hat{\theta} = E(\theta)$ . Azt a —nem meglepő— eredményt kaptuk tehát, hogy a posterior várható értéke optimális pontbecslést ad a paraméter értékére (kvadratikus veszteségfüggvény esetén).

## Nagymintás tulajdonságok

Ebben a bekezdésben a bayesi posterior sűrűségfüggvények néhány nagymintás tulajdonságát tárgyaljuk. A posteriorról tudjuk, hogy a prior és a likelihood függvény szorzatával arányos:

$$f(\theta | \mathbf{y}) \propto f(\theta) f(\mathbf{y} | \theta) = f(\theta) e^{\ln f(\mathbf{y} | \theta)}. \quad (11)$$

Tegyük most még fel, hogy  $\mathbf{y}$  egy  $n$  elemű vektor, azaz  $n$  független megfigyelésünk van. Ekkor  $\ln f(\mathbf{y} | \theta)$  általában  $n$ -nel arányos,<sup>5</sup> míg  $f(\theta)$  független a minta méretétől (mivel független a mintától). Így nagy minták esetén a likelihood függvény dominálja a posterior sűrűségfüggvényt. Zellner<sup>6</sup> igazolja, hogy (általánosan fennálló feltételek mellett) a posterior aszimptotikusan normális eloszlású lesz, a maximum likelihood becsléssel egyenlő várható

<sup>4</sup> Az első lépésben a posterior várható értékét,  $E(\theta)$ -t levonjuk és hozzáadjuk a veszteségfüggvényhez. Ez a várható értéket nem befolyásolja. A második lépésben kihasználjuk, hogy az  $E\left((\theta - E(\theta))' C (\hat{\theta} - E(\theta))\right)$  keresztszorzatok kiesnek, mivel  $E(\theta - E(\theta)) = 0$ .

<sup>5</sup> Lindley [5]

<sup>6</sup> [6] 32. old.

értékkel. Az is megmutatható, hogy a minta növekedésével a posterior szórása csökken.<sup>7</sup> Nagy minták esetén tehát a bayesi posterior sűrűségfüggvény a maximum likelihood becslés szűk környezetében „összpontosul”.

## Összefoglalás

Az első fejezetben bemutattuk, hogy a bayesi elmélet milyen, a klasszikus felfogástól eltérő elvekkel közelít a statisztika feladataihoz. A bayesi módszerek hatékonyan alkalmazhatók a klasszikus statisztika legtöbb feladatának alternatív megközelítéssel való megoldására, így a gazdasági élet döntéseinek statisztikai megalapozására vagy ezen belül a kifejezetten aktuáriusi problémák megoldására is. A vagyombiztosítási kalkulációk során előszeretettel alkalmazott megbízhatósági elmélet például előszeretettel alkalmaz bayesi módszereket a megbízhatósági tényező meghatározására.<sup>8</sup> Az alábbiakban az életbiztosítások területén mutatunk be alkalmazásokat.

## 2 A halandósági táblák problémája

Az életbiztosítások díjait a biztosítótársaságok halandósági táblák alapján határozzák meg. A biztosítók számára fontos, hogy a halandósági táblák pontos adatokat tartalmazzanak, hiszen haláleseti biztosítások esetén a halandóság alulbecslése, elérési típusú biztosítások esetén a halandóság felülbecslése veszteséget okozhat. A biztosító nem törekedhet „biztonsági játékra” a halandóságok szándékos felül-, illetve alulbecslésével, hiszen ez indokolatlanul magas biztosítási díjakat eredményezne, ami a versenyképesség rovására mehet.

A statisztikai hivatalok készítene az egész népességre vonatkozó halandósági táblákat, ezek azonban a biztosítótársaságok számára több okból sem szolgáltatnak megfelelő adatokat. Egyrészt az életbiztosítást vásárlók eloszlása a társadalomban nyilván nem egyenletes: pl. a legszegényebb rétegek, melyek halandósága az átlagnál magasabb, az átlagnál kisebb arányban kötnek életbiztosítást, így a biztosított állomány halandósági mutatói általában alacsonyabbak, mint a teljes társadalomra jellemző értékek. Ezt figyelembe véve a biztosítótársaságok szokás szerint a teljes népességére meghatározott halandósági rátákat ( $q_x$ ) egy minden korosztályra megegyező 1-nél kisebb konstanssal szorozzák meg és az így előálló halandósági táblával kalkulálnak.

Ugyancsak megkérdőjelezhetjük az országos halandósági táblák életbiztosítások díjkalkulációjánál való alkalmazásának jogosságát a biztosító ügyfelei között megjelenő antiszelekció miatt: a tapasztalatok szerint kockázati életbiztosítást az összes biztosítást vásárló átlagánál nagyobb, elérési biztosítást pedig az átlagnál kisebb halandóságú ügyfelek kötnek.

<sup>7</sup>[6] 33. old.

<sup>8</sup>Ld. pl. [4].

A biztosítónak tehát a potenciális kockázati, illetve elérési életbiztosítás vásárlók halandósági táblájára van szüksége. Ez a feladat sugallja a bayesi megközelítés alkalmazását. Rendelkezésünkre állnak ugyanis a priori feltételezések a táblára vonatkozóan és egy folyamatosan növekvő minta, a biztosító szerződéseinek állománya. A külső feltételezések között a fenti szociológiai megfontolások és az országos halandósági tábla mint kiindulópont mellett további elvárásokat is megfogalmazhatunk a priorban, például külföldi tapasztalatok alapján. Igényként merülhet fel az is, hogy a halandósági táblában szereplő értékek analitikus függvénnyel kifejezhetőek legyenek vagy más kedvező tulajdonsággal rendelkezzenek, például ne "ugráljanak", azaz egymáshoz közeli korosztályok halandósági rátái csak kevéssel térjenek el egymástól. Mindezek az elvárások a megfelelően megválasztott prioron keresztül jelenhetnek meg a modellben.

A bayesi megközelítés alkalmazásának elfogadása még nem jelent egy konkrét receptet a probléma megoldására, csak annyit, hogy feltételezéseinket, külső információinkat a priorba, a mintából származó információt a likelihood függvénybe foglalva vonjuk modellünkbe, és az e két tényező által meghatározott posterior lesz következtetésünk, becslésünk alapja. A továbbiakban láthatjuk, hogy e gondolatmenet alkalmazása többféle különböző módszert és eredményt szolgáltat. Minden példában a Mellékletben található adatokkal számolunk, melyek egy fiktív biztosítótársaság állományának nagyságát<sup>9</sup> és a bekövetkezett halálesetek számát mutatja kor szerinti bontásban három különböző évben, továbbá a „hagyományos”, országos halandósági tábla fent leírt egyszerű módosításával meghatározott halandósági rátákat.

## 1. módszer: Béta-binomiális modell a halandósági ráták becslésére

Első megoldásunkban a különböző korokban jellemző halandósági rátákat egyenként (korévenként külön-külön), egymástól függetlenül becsljük meg. Az  $x$  éves korú biztosítottak halandósági mutatójának meghatározásához rendelkezésünkre álló információk a következők: az országos halandósági táblában szereplő érték ( $q_x$ , erre alapozzuk a priort), a biztosító  $x$  éves korú állományának nagysága ( $l_x$ ) és az ezen állománybeli halálesetek száma ( $d_x$ ). A halálozások relatív gyakoriságát jelöljük  $u_x$ -szel ( $u_x = d_x/l_x$ ), a halandósági ráták keresett becslését pedig  $w_x$ -szel. Mivel csak egy évjáráttal foglalkozunk, az  $x$  indexeket ott, ahol ez nem vezet félreértéshez, a továbbiakban elhagyjuk. A halandósági mutatók kiigazítását rendszeresen (pl. évente) érdemes elvégezni, ezért fontos, hogy a prior lánctulajdonságú legyen. Ha természetes konjugált priort akarunk használni, annak kiválasztásához ismerünkkel a likelihood függvény alakját. Ezért első lépésként most határozzuk meg ezt.

Feltételezhetjük, hogy a biztosító állományában bekövetkező halálozások

<sup>9</sup>A fiktív adatokat úgy állítottam elő, hogy egy létező biztosítótársaság különböző éveken tapasztalt adataiból képeztem összegeket. Erre azért volt szükség, mert a valós adatok nem publikusak, ugyanakkor így életszerű adatokkal számolhattam.

száma binomiális eloszlást követ, melynek paraméterei a keresett halálózási arány ( $w$ ) és az állomány nagysága ( $l$ ). A likelihood függvény tehát:

$$f(d|w) = \binom{l}{d} w^d (1-w)^{l-d}. \quad (12)$$

A következő lépés a prior meghatározása. Szerencsés béta eloszlású priort választani, hiszen tudjuk, hogy az a fenti likelihood függvénnyel természetes konjugált. A béta eloszlás paramétereit úgy választjuk meg, hogy a várható érték  $q$ -nak adódjon, azaz a priori információként az országos halandósági rátát használjuk fel. Mivel két paramétert adhatunk meg, meghatározhatjuk még a szórás is. Ezt a különböző korosztályok esetében különböző nagyságnak tanácsos választanunk, hiszen  $q_{18}$  0,001 nagyságrendű, míg  $q_{80}$  0,1-hez közeli értékű. Használjunk ezért a különböző korokra egy fix  $r$  relatív szórású eloszlást. A béta eloszlás  $\alpha$  és  $\beta$  paraméterének meghatározásához a következő kétismeretlenes egyenletrendszer kell megoldanunk:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\alpha + \beta} &= q \\ \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta + 1)(\alpha + \beta)^2} &= (rq)^2. \end{aligned} \quad (13)$$

Innen

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1 - q - r^2 q}{r^2} \\ \beta &= \frac{(1 - q - r^2 q)(1 - q)}{r^2 q}. \end{aligned} \quad (14)$$

Mindezek alapján a béta eloszlású prior sűrűségfüggvénye már meghatározható:

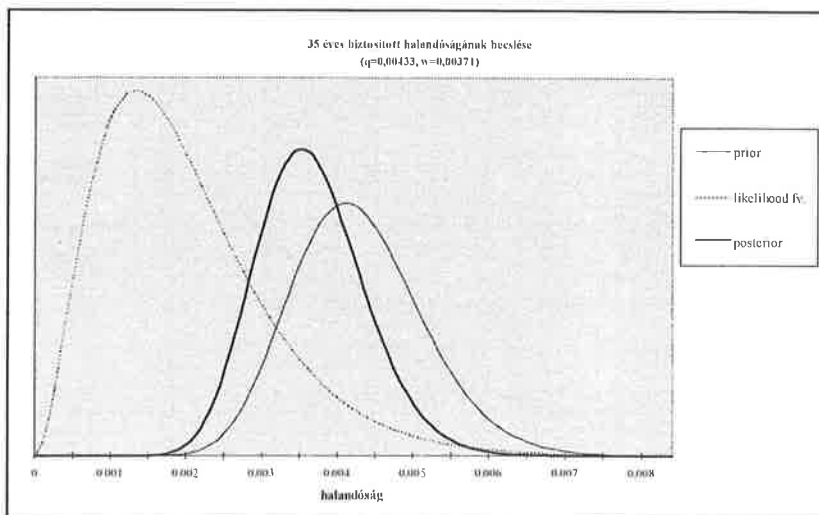
$$f(w) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} w^{\alpha-1} (1-w)^{\beta-1}. \quad (15)$$

A posterior pedig (3) alapján a következő alakú:

$$f(w|d) \propto w^{d+\alpha-1} (1-w)^{l-d+\beta-1}, \quad (16)$$

azaz  $d+\alpha$  és  $\beta+l-d$  paraméterű béta eloszlású. A posterior sűrűségfüggvény alapján meghatározhatjuk az  $E(w|d) = \frac{d+\alpha}{l+\alpha+\beta}$  posterior várható értéket, amely  $w$  bayesi pontbecslésének tekinthető.

Nézzük meg konkrét adatainkra, milyen eredményt kapunk a fenti módszerrel. Tekintsük egy 35 éves biztosított halandóságának becslését. A prior meghatározásához felhasználjuk a rendelkezésre álló halandósági tábla megfelelő értékét:  $q_{35} = 0.00433$ . 20%-os relatív szórás feltételezve a  $w$  eloszlását leíró béta eloszlású prior paramétereire (14) alapján  $\alpha = 24.89$  és  $\beta = 5722.8$  adódik. A likelihood függvény meghatározásához szükségünk van az állomány nagyságára ( $l = 1505$  fő) és a halálózások számára ( $d = 2$ ). A fentiek alapján a posterior béta eloszlású 26.89 és 7225.8 paraméterekkel. Várható értéke pedig, melyet  $w$  becslésének tekintünk  $\frac{26.89}{26.89+7225.8} = 0.00371$ . Az 1. ábrán a prior, a likelihood függvény és a posterior alakja látható.



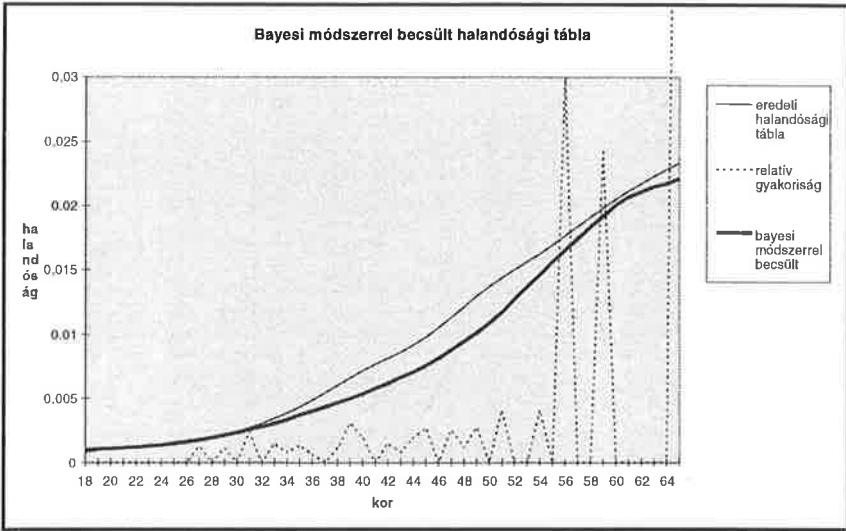
1. ábra

Látható, hogy becslésünk a halandósági táblabeli érték és az ennél jóval kisebb tapasztalt relatív gyakoriság ( $2/1505 = 0.00133$ ) közé esik. Azt is megfigyelhetjük, hogy a viszonylag kis minta kisebb súllyal szerepel a módosított halandósági érték meghatározásánál.

A választott béta-binomiális modell lánctulajdonságát kihasználva újabb mintákból nyert információinkat egyszerűen beépíthetjük a becslésbe, a most kapott posteriort tekintve priornak. Becsüljük meg a 35 éves biztosított halandóságát az első becslést és a második évi adatokat felhasználva! Most  $\alpha = 24.9$ ,  $\beta = 6692.7$ ,  $l = 3102$ ,  $d = 6$ , így  $w = 30.9/9819.6 = 0.00315$ . Megfigyelhető, hogy tovább közelítettünk a relatív gyakorisághoz, ami indokolt, hiszen most nagyobb, és ezért megbízhatóbb minta alapján becsültünk.

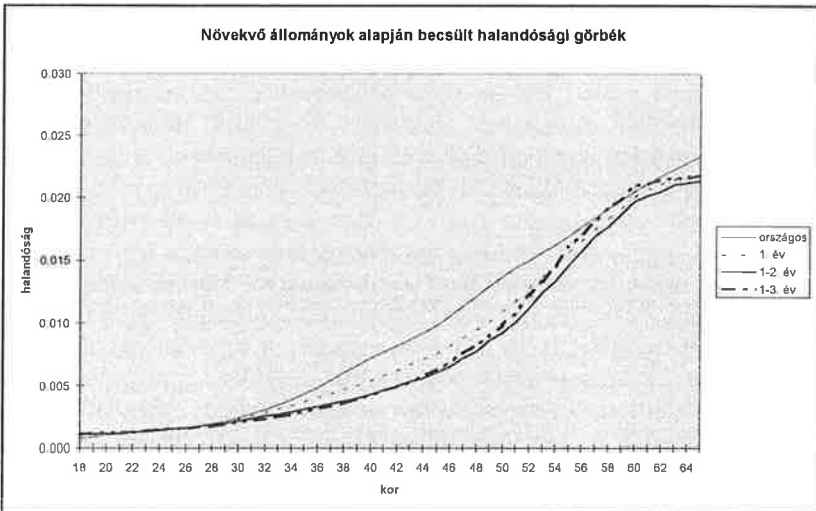
Természetesen a fenti becslés valós helyzetekben való alkalmazásához a körülmények további elemzése is szükséges. Egy fiatal biztosítótársaság<sup>10</sup> esetén például az állomány kicsi, így az empirikus halandósági arányok szórása (és ezért a szomszédos értékek közötti ingadozása) nagyon nagy lehet, és ez nagy ingadozást eredményez a bayesi módon becsült értékekben is. Mivel feltételezhető, hogy a szomszédos korcsoportok halandósága nem nagyon tér el egymástól, ezt a káros jelenséget az eredményül kapott tábla adataira illesztett "sima" görbe használatával részben orvosolhatjuk. Talán a legegyszerűbb simítási módszer mozgóátlag használata. A simítást alkalmazhatjuk a bemenő adatokra (a tapasztalt relatív gyakoriságokat simítjuk) vagy a kimenetre (a becsült halandósági rátákra). A 2. ábra a fenti módszerrel becsült halandósági mutatók 9 tagú mozgóátlagolással simított értékeit valamint az eredeti halandósági tábla adatait és a relatív gyakoriságokat mutatja:

<sup>10</sup>Magyarországon a feldolgozott adatok mennyisége szempontjából a biztosítótársaságok többnyire „fiatalnak” tekinthetők.



2. ábra

Egy másik probléma, hogy mivel a biztosítás megkötése előtt az ügyfelek egészségi állapotát megvizsgálják, az azonos korú régi és új ügyfelek halandósága is eltérhet egymástól. E csoportok különválasztása tovább csökkenti a minta méretét. Mint láttuk, ez azt eredményezi, hogy a likelihood függvény súlya a posteriorban kicsi lesz, s így becslésünk az a priori feltételezett halandósági táblához közeli értéket szolgáltat majd. Magyarán eljárásunk ilyen esetekben sok új információt nem nyújt.



3. ábra



A minta méretét és így súlyát növelhetjük, ha a következő évek adatait rendre bevisszük a modellbe. A 3. ábra a kiinduló halandósági tábla mellett az egy, kettő, illetve három év megfigyeléseire támaszkodó bayesi módon becsült, majd kisimított halandósági táblákat tartalmazza. A második illetve harmadik év adatainak bevonásakor a priori információnak már a megelőző évben meghatározott kisimított halandósági táblát tekintettük.

Látható, hogy a becsült görbe az évek múlásával jobban eltérhet az eredeti, országos halandósági táblától, mivel az egyre nagyobb állományok miatt a minta súlya a becslésekben egyre nő.

## 2. módszer: A halandósági tábla „sima” becslése

A következő, 2. módszer bár a fentivel azonos feladat megoldására szolgál és szintén bayesi elvek alapján közelíti meg a problémát, egyéb, az 1. módszerrel közös vonással nem rendelkezik. Az egyes korokra jellemző halandósági rátákat nem külön-külön, hanem szimultán módon becsüljük. Az eredményként kapott halandósági görbe simaságát nem utólagos „kezeléssel” biztosítjuk, hanem ezt az elvárásunkat már a priorban megfogalmazzuk. Az előző eljárással ellentétben az életbiztosítási halandósági tábla becslése során egyáltalán nem támaszkodunk az országos halandósági táblára. Ezzel egy biztosan torzító elemet távolítottunk el a modellből.

Mint azt már a korábbiakban tárgyaltuk, a becsült halandósági táblával szembeni legfontosabb elvárásunk, hogy „sima” legyen, valamint, hogy a mintából meghatározott relatív gyakoriságokkal a lehető leginkább összhangban álljon. Ezt a két elvárt tulajdonságot rendre a priorban és a mintából nyerhető információt közvetítő likelihood függvényben fogalmazzuk meg.

További újdonsága a megközelítésnek, hogy az egyes korosztályokra ( $x = 18..65$ ) jellemző halandósági ráták, mint valószínűségi változók együttes eloszlására teszünk a priori feltevést, illetve szerkesztjük meg a likelihood függvényt.

A priorban szándékozunk megfogalmazni a simaságra vonatkozó elvárásainkat. Ez azt jelenti, hogy a halandósági ráták  $w_x$  becsléseinek együttes eloszlását olyannak tételezzük fel, hogy kis valószínűséget tulajdonítunk a szomszédos értékek nagy eltéréseinek. Az eltérések mérésére használhatjuk például az euklideszi távolságot. A prior sűrűségfüggvény megadására az exponenciális függvényt választjuk, mert könnyen kezelhető, monoton függvényre van szükségünk. Látni fogjuk, hogy ez a választás a későbbiek folyamán nagyban leegyszerűsíti majd a számításokat. Legyen tehát a prior:

$$f(w_{18}, \dots, w_{65}) \propto \exp \left( - \sum_{x=18}^{64} (w_x - w_{x+1})^2 \right). \quad (17)$$

A likelihood függvényt hasonló elvek alapján szerkesztjük meg. Itt azt kell elérnünk, hogy a  $w_x$  becslések az  $u_x$  relatív gyakoriságoktól kevéssé térjenek el. Azokat a korosztályokat, melyekben az állomány nagyobb, nyilván nagyobb súllyal kell figyelembe vennünk, mint a jelentősebb mintavételi hiba-

lehetőséggel terhes kevés főből állókat. A likelihood függvényt ezért a következőképpen határozzuk meg:

$$f(u_{18}, \dots, u_{65} | w_{18}, \dots, w_{65}) \propto \exp \left( - \sum_{x=18}^{65} m_x (u_x - w_x)^2 \right), \quad (18)$$

ahol az  $m$  a minta és a prior súlyozására szolgáló faktor.

A fenti egyszerűen megfogalmazott prior és likelihood függvény egy természetes konjugált párt alkot. E két feltételes eloszlás szórásának aránya határozza meg, hogy a prior és a likelihood milyen súllyal szerepeljen a posteriorban. Ezt az „egyensúlyozó” szerepet a fenti alakú modellben az  $m$  együttható játssza.

A posterior alakja ezek után meghatározható a prior és a likelihood függvény szorzataként:

$$\begin{aligned} f(w_{18}, \dots, w_{65} | u_{18}, \dots, u_{65}) &\propto \\ \exp \left( - \sum_{x=18}^{64} (w_x - w_{x+1})^2 \right) \exp \left( - \sum_{x=18}^{65} m_x (u_x - w_x)^2 \right) &= \\ \exp \left( - \sum_{x=18}^{64} (w_x - w_{x+1})^2 - \sum_{x=18}^{65} m_x (u_x - w_x)^2 \right). & \end{aligned} \quad (19)$$

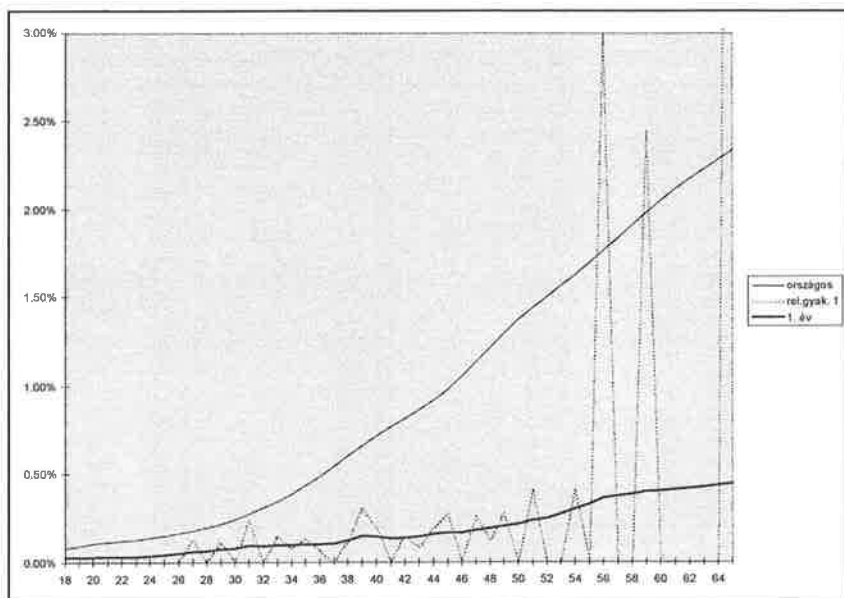
A halandósági ráták pontbecslésének tekintjük ezúttal az együttes posterior eloszlás várható értéke helyett a móduszát. Így nem szükséges meghatározunk a fenti egyenletek arányossági tényezőit és az exponenciális függvény kedvező tulajdonságai miatt a számolás leegyszerűsödik. A módusz meghatározása a posterior sűrűségfüggvény maximumhelyének megkeresését jelenti. Ez ekvivalens a

$$\sum_{x=18}^{64} (w_x - w_{x+1})^2 + \sum_{x=18}^{65} m_x (u_x - w_x)^2 \rightarrow \min \quad (20)$$

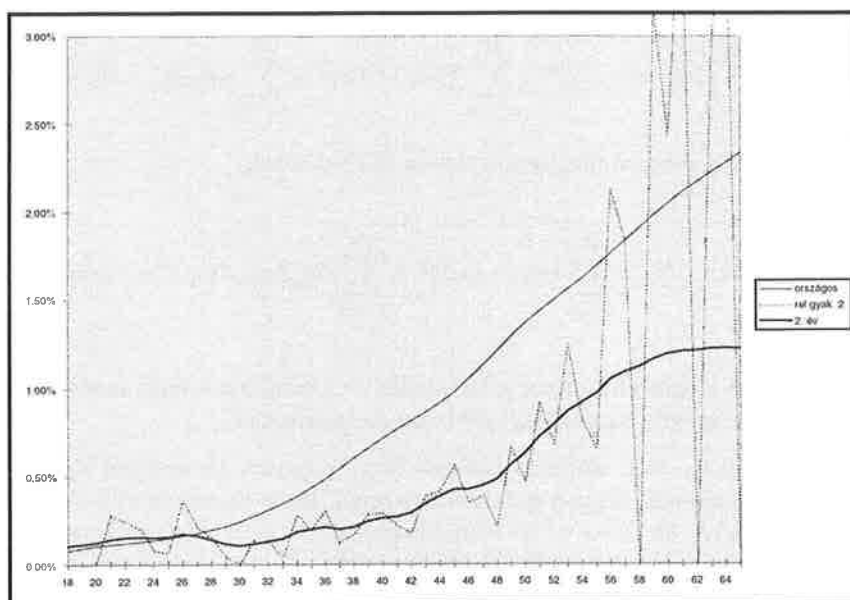
kvadratikus programozási feladat megoldásával, ami semmilyen elvi akadályba nem ütközik és számítógéppel a gyakorlatban is könnyen elvégezhető. A 4-6. ábrákon a fenti módszerrel becsült halandósági görbe és relatív gyakoriságok láthatók, az 1., 2. és 3. év adatai, azaz rendre növekvő állományok alapján.

Mikor a második és harmadik év adatait is bevonjuk a modellbe, a priorban már érdemes szerepeltetni a korábbi becslések eredményét, mint előzetes feltételezést a halandósági ráták értékére. Legyen tehát a prior alakja a további években a következő:

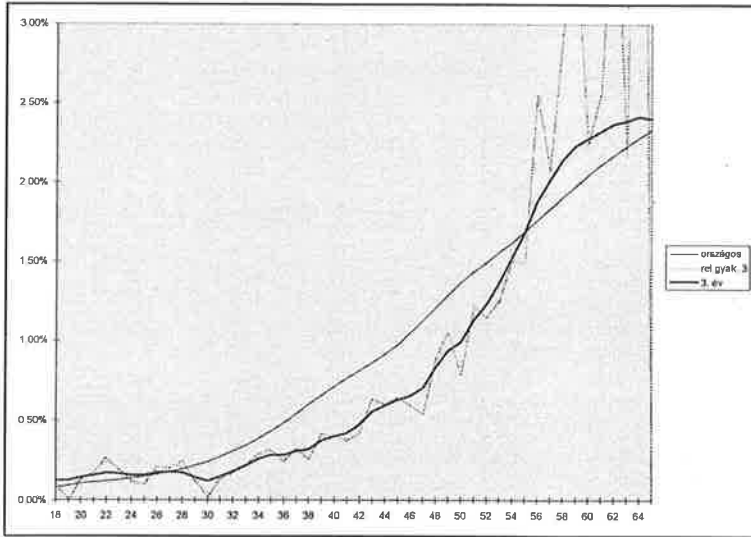
$$f(w_{18}, \dots, w_{65}) \propto \exp \left( - \sum_{x=18}^{64} (w_x - w_{x+1})^2 - \sum_{x=18}^{65} k(\hat{w}_x - w_x)^2 \right). \quad (21)$$



4. ábra



5. ábra



6. ábra

A likelihood függvény nem változott, tehát a posterior az alábbi lesz:

$$f(w_{18}, \dots, w_{65} | u_{18}, \dots, u_{65}) \propto \exp \left( - \sum_{x=18}^{64} (w_x - w_{x+1})^2 - \sum_{x=18}^{65} k(\hat{w}_x - w_x)^2 - \sum_{x=18}^{65} ml_x(u_x - w_x)^2 \right) \quad (22)$$

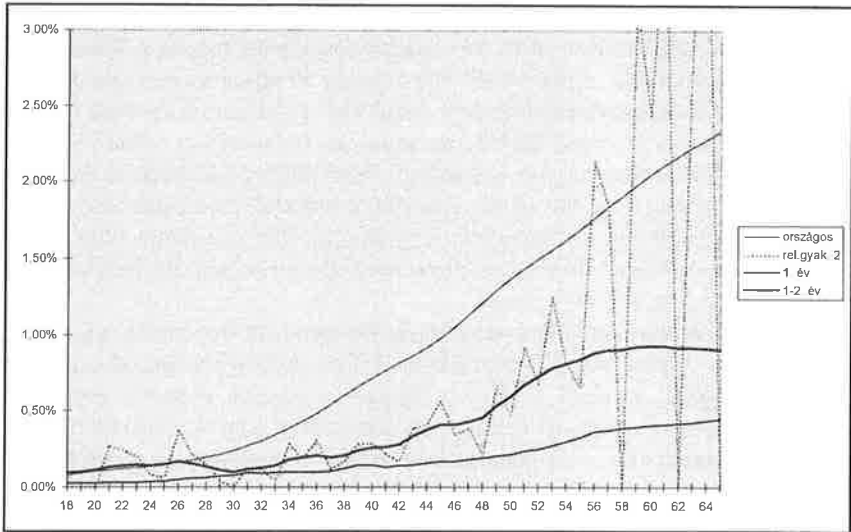
A megoldandó kvadratikus programozási feladat pedig:

$$\sum_{x=18}^{64} (w_x - w_{x+1})^2 + \sum_{x=18}^{65} k(\hat{w}_x - w_x)^2 + \sum_{x=18}^{65} ml_x(u_x - w_x)^2 \rightarrow \min \quad (20)$$

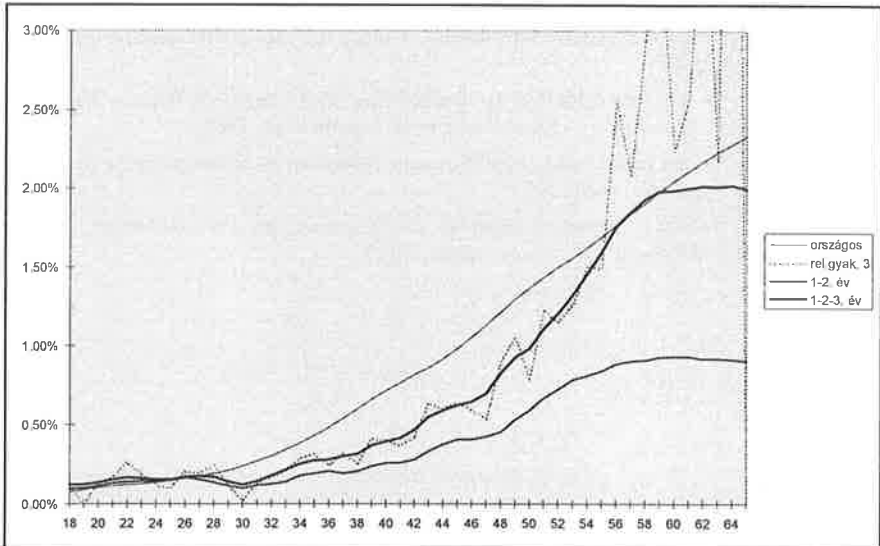
A 7-8. ábrák a második illetve a harmadik év adatainak a fenti módon való bevonásával becsült halandósági görbéket tartalmazzák.<sup>11</sup>

A 4-6. illetve 7-8. ábrákon látható, hogy nagyobb állományok esetén a relatív gyakoriságok súlya a becslésben megnő, így a becslés szinte a megfigyelési adatokra illesztett görbe lesz. Megfigyelhető az is, hogy ez a priorban megfogalmazott simasági elvárás rovására mehet.

<sup>11</sup>  $m$  értékét 0.0001-nek,  $k$ -t 0.01-nek választottam.



7. ábra



8. ábra

### 3 Összefoglalás

E dolgozatban egy olyan problémára kerestem megoldást, melyre a bayesi elvek alapján való megközelítés kézenfekvőnek tűnik, hiszen a halandósági rátákkal kapcsolatban a biztosítók sok mintán kívüli információra támaszkodhatnak és ezek figyelembevétele a becsléskor a bayesi módszerek lényege. A külső információk közül kettőt, az országos halandósági táblát illetve a halandósági görbe simaságára vonatkozó feltételezést emeltük ki és ezekre alapoztunk egy-egy modellt. A két modelltől hasonló, de természetesen nem megegyező eredmények származtak. Figyelemre érdemes, hogy szignifikáns, azonos irányú eltérést mutattak a biztosítási gyakorlatban általánosan használt halandósági táblához képest.

A módszerek hatékonysága nagy érzékenységet mutat a minta, azaz a rendelkezésre álló biztosítási állományok méretére. A magyarországi biztosítók tapasztalatai már a közeli jövőben elégségesek lesznek a bayesi módszerek eredményes használatára, az országosan összesített adatok alapján pedig — ha ilyenek léteznének — már jelenleg is érdemes lenne ilyen jellegű becsléseket készíteni.

### Irodalom

1. Bayes, T.: An Essay Towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances. The Philosophical Transactions, 1763. (Reprint in *Biometrika* 45 (1958))
2. Hunyadi L.: Bevezetés a maximum likelihood elméletbe. Oktatási segédlet. BKE Statisztika Tanszék, Budapest, 1992.
3. Hunyadi L.: A bayesi statisztika alapjai. Oktatási segédlet. BKE Statisztika Tanszék, Budapest, 1996.
4. Kovács E.: Kárstatisztikai elemzések. A BKE aktuárius főszakirány jegyzete. Budapest, 1997.
5. Lindley, D. V.: Introduction to Probability and Statistics from a Bayesian Viewpoint. Cambridge University Press, Cambridge, 1965.
6. Zellner, A.: An Introduction to Bayesian Inference in Econometrics. J. Wiley & Sons Inc., New York, 1971.
7. Zellner, A. (ed.): Bayesian Analysis in Econometrics and Statistics. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1980

# EGY KÉTSZEKTOROS NÖVEKEDÉSI MODELL HÁROMDIMENZIÓS DINAMIKÁJA<sup>1</sup>

FARKAS MIKLÓS – HORVÁTH ZSÓFIA – MEYER DIETMAR  
*Budapesti Közgazdaságtudományi Egyetem*

## 1 Bevezetés

Az elmúlt évtizedben újból nőtt a közgazdászok érdeklődése növekedéseméleti kérdések iránt. Kezdetben főleg Lucas és Romer munkásságának köszönhetően (Lucas 1988, Romer 1990) kapott nagyobb hangsúlyt a gazdasági növekedés, ezen belül elsősorban a humán tőke szerepét elemző megközelítések témaköre. A téma azóta szinte könyvtárnyi méretűvé vált irodalmát több monográfiában foglalták össze (Grossman – Helpman, 1991, Barro – Sala-I-Martin, 1995, illetve magyar nyelven Meyer, 1995).

Az ún. „új növekedésemélet” egyik központi kérdése a korábbi modellekben már figyelembe vett technikai haladás újszerű endogenizálása. E problémát az 1960-as években a Solow-Swan-modell keretében úgy igyekeztek megoldani, hogy a technika időbeli alakulását valamilyen, a hagyományos modellben szereplő változókra vezették vissza; így például az egyik megközelítésben a munka termelékenységéhez, egy másik tanulmányban a tőke növekedési üteméhez, vagy a vagyon növekedési üteméhez kapcsolták a technikai haladást. Ennek eredményeként megváltozott a Solow-Swan-modell alapegyenlete, amely tartalmazta a technikai haladás jellemzőit kifejező változókat is. Ezzel kétség kívül előrelépés történt a korábban „mennyei ajándékként” kezelt, exogén technikai haladást feltételező modellekhez képest; lehetővé vált a növekedési folyamatok valóságghűbb leírása és fontos gazdaságpolitikai következtetések levonása.

Minőségileg új szakasz kezdődött a növekedéseméletben Uzawa cikkével (Uzawa 1964), amely a többszektoros modellek kidolgozására, s ezen keresztül a megvizsgált gazdaság belső szerkezetének részletesebb figyelembevételére, ösztönözte a közgazdaságtan művelőit. Uzawa viszonylag egyszerű modelljén alapul Lucas említett cikke, amelyben az egyik szektor a közönséges javak termelésének — a jövedelem előállításának — a helye, a másikban pedig a humán tőke képződik. E modell és dinamikájának analízisét végzi Barro és Sala-I-Martin, általánosítva az előbbit azzal a feltevéssel, hogy a humán tőke termelésénél fizikai tőke is jelen lehet. Jelen tanulmányunk amnyiban tér el Barro és Sala-I-Martin modelljétől, hogy nálunk a fogyasztás növekedési ütemére adott Barro – Sala-I-Martin-féle kikötést explicit módon értelmezzük: mint a nettótőke határtermelékenységének és az időpreferenciának a függvénye.

<sup>1</sup>Beérkezett: 1999. január 8. A kutatást részben az OTKA támogatta T029893 szám alatt.

De főleg más az elemzési módszerünk: míg Barro és Sala-I-Martin a humán tőkére jutó reáltőke, valamint a reáltőkére vetített fogyasztás arányait képezve végül is egy kétdimenziós modell, addig mi az eredeti háromdimenziós modell dinamikai vizsgálatát végeztük. Ezt a dinamikai rendszerek elmélete, a stabilis és az instabilis sokaságokra vonatkozó eredmények alkalmazása tette lehetővé (Hartman 1964, Farkas 1994). Közgazdasági szempontból ez azt jelenti, hogy modellbeli változóink szintjére kapunk megoldásokat, ami Barro és Sala-I-Martin által alkalmazott elemzésnél csak akkor lenne lehetséges, ha valamely, a fent említett arányokban szereplő változóról kiegészítő feltevést tennénk. A technikai haladás figyelembevételét illetően modellünkről a következőt mondhatjuk: az általunk használt megközelítésben a technikai haladás explicit módon ugyan nem szerepel, de mivel a megoldásként adódó pályák a reáltőke, humán tőke és a fogyasztás együttes alakulásától függenek, a háttérben —főleg a reáltőke és a humán tőke fejlődése révén— mégis jelen van, méghozzá —igaz, kezdetleges módon— endogenizált formában.

Írásunkat modellünk bemutatásával kezdjük. Ezt követi dinamikájának vizsgálata, az ott kapott eredmények közgazdasági értelmezése, valamint a gazdaságpolitikai következtetések levonása.

## 2 A modell

A gazdaságot két szektorra bontjuk, az egyikben a reáltőkét, a másikban a humán tőkét állítják elő. Mindkét tőkefajtát az időtől függő változóként kezeljük, melyeket jelölje  $K(t)$ , illetve  $H(t)$ , továbbá a harmadik változó legyen az időegység alatti fogyasztás  $C(t)$ . A reál- és a humán tőkére felírt egyenletekben a Cobb-Douglas féle termelési függvényt használjuk, azaz az időegység alatt megtermelt reáltőke:

$$Y(K, H) := A(vK)^\alpha(uH)^{1-\alpha},$$

ahol az  $A > 0$  technológiai paraméter,  $0 \leq \alpha \leq 1$  tőke rugalmassági együtt-ható,  $0 \leq v \leq 1$ , illetve  $0 \leq u \leq 1$  pedig a reál-, illetve a humán tőkének a reáltőke előállításában résztvevő hányada. (Barro – Sala-I-Martin 1995, 179. old.) A fentihez hasonló termelési függvény alapján határozzuk meg az időegység alatt megtermelt humán tőke mennyiségét, vagyis:

$$Z(K, H) := B((1-v)K)^\eta((1-u)H)^{1-\eta},$$

ahol  $B > 0$  szintén technológiai paraméter és  $0 \leq \eta \leq 1$ . Legyen  $0 < \delta < 1$  az értékcsökkenési ráta (melyet az egyszerűség kedvéért a reál- és a humán tőke esetében azonosnak tekintünk). A reáltőke időegység alatti növekedése, azaz az idő szerinti deriváltja megadható úgy, hogy az előállítására vonatkozó termelési függvényből levonjuk a fogyasztást és az amortizációt, azaz:

$$\dot{K} = A(vK)^\alpha(uH)^{1-\alpha} - C - \delta K,$$

ahol a változó feletti pont az idő szerinti derivált jele.



Mivel a humán tőkét nem fordítjuk fogyasztásra, ezért idő szerinti deriváltja az előállított mennyiségének és az elértéktelenedésének különbségével egyenlő:

$$\dot{H} = B((1-v)K)^\eta((1-u)H)^{1-\eta} - \delta H.$$

A fogyasztás növekedési rátáját a reáltőke-állomány nettónövekménye, pontosabban megfogalmazva: annak hozamrátája,  $\partial((Y(K, H) - \delta K)/\partial K)$ , és egy úgynevezett  $\rho > 0$  „időpreferencia” különbségeként felírva:

$$\frac{\dot{C}}{C} = \frac{\partial(Y(K, H) - \delta K)}{\partial K} - \rho.$$

A fenti képletből látszik, hogy a reáltőke-állomány nettónövekménye saját változásával megegyező irányba módosítja a fogyasztás növekedési ütemét, míg az időpreferencia növekedése csökkentőleg hat a fogyasztás alakulására, azaz minél távolabbi a tervezett fogyasztás időpontja, annál kevésbé befolyásolja a jelen fogyasztás változását.

Ezzel végül is egy háromdimenziós differenciálegyenlet-rendszerhez jutunk:

$$\begin{aligned} \dot{K} &= A(vK)^\alpha(uH)^{1-\alpha} - C - \delta K \\ \dot{H} &= B((1-v)K)^\eta((1-u)H)^{1-\eta} - \delta H \\ \dot{C} &= (A\alpha v(vK)^{\alpha-1}(uH)^{1-\alpha} - \delta - \rho) C \end{aligned} \quad (1)$$

(Barro - Sala-I-Martin 1995, 179-180. old.)

Tegyük fel, hogy olyan gazdasági helyzetből indultunk ki, ahol mind a reál-, mind a humán tőke, mind pedig a fogyasztás értékei pozitívak, valamint azt, hogy a paraméterértékek időben állandóak. Továbbá sem a kormány, sem pedig más gazdasági szereplő nincs befolyással a dinamikára, tehát a modellünkben lejátszódó folyamatok teljes mértékben önműködők, ezért az (1) rendszer matematikai értelemben determinisztikus és autonóm. Így a gazdasági növekedés alakulását az (1) nemlineáris autonóm differenciálegyenlet-rendszer írja le, amelynek endogén változói  $K$ ,  $H$ ,  $C$ .

Közgazdaságilag indokolt, hogy a  $K$ ,  $H$ ,  $C$  változók mindig pozitívak legyenek. Nézzük meg tehát, hogy a fenti rendszer megoldásai eleget tesznek-e ennek a feltevésnek. Ha  $H = 0$ , akkor az (1) rendszer második egyenletének jobb oldala zérus, így a  $H = 0$  koordinátásik matematikai értelemben invariáns, vagyis az onnan induló megoldások e síkban maradnak. Ugyanez érvényes a  $C = 0$  koordinátásikra is, így a trajektóriák egyik síkon keresztül sem hagyhatják el a pozitív ortánst. A  $K = 0$  koordinátásik azonban nem invariáns,  $K = 0$  esetén ugyanis  $\dot{K}$  negatív:  $\dot{K} = -C$ . Továbbá  $K = 0$ -ra a harmadik egyenlet jobb oldala nem értelmezhető, mivel a  $K$  ott negatív hatványon szerepel. Így a  $K = 0$  koordinátásik közelében ez a modell nem alkalmas a gazdaság leírására.

Az (1) rendszer kvalitatív vizsgálatának a gondolatmenete következő: először linearizáljuk egy egyensúlyi helyzetében, majd a linearizált rendszernek meghatározzuk a dinamikai tulajdonságait. Ezek alapján jó közelítést

kaphatunk az eredeti nemlineáris rendszer viselkedésére a szóban forgó egyensúlyi pont környezetében. Mivel a mi modellünkben az egyensúlyi helyzetek nyeregpont jellegűek, vagyis instabilisak, ezért elemzéseink csak nem túl hosszú időintervallumon lesznek érvényesek. E —közgazdasági szempontból mindenképpen korlátozó jellegű— ténynek tudatában kell lennünk, ha később modellünk alapján gazdaságpolitikai következtetéseket fogalmazzunk meg.

Határozzuk meg tehát a  $K$ ,  $H$ ,  $C$  tér pozitív ortánsának belsejébe eső egyensúlyi helyzeteket, vagyis tegyük egyenlővé nullával a rendszer egyenleteinek jobb oldalát. Ekkor a második és a harmadik egyenletből

$$\frac{H}{K} = \left( \frac{B(1-v)^\eta(1-u)^{1-\eta}}{\delta} \right)^{\frac{1}{\eta}},$$

illetve

$$\frac{H}{K} = \left( \frac{\delta + \rho}{A\alpha v^\alpha u^{1-\alpha}} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

adódik. A feladatnak akkor van megoldása, ha a fenti két kifejezés megegyezik. Ehhez szükséges, hogy  $\rho$  időpreferencia, a többi paraméter rögzítése mellett, a következő értéket vegye fel:

$$\rho = \left( \frac{B(1-v)^\eta(1-u)^{1-\eta}}{\delta} \right)^{\frac{1-\alpha}{\eta}} A\alpha v^\alpha u^{1-\alpha} - \delta, \quad (2)$$

ami lehetséges, ha feltesszük, hogy ez az érték pozitív, azaz

$$\rho > 0. \quad (3)$$

Írjuk be a (2) kifejezést a  $\rho$  helyére, és helyettesítsük be a  $H/K$  képletét az első egyenletbe. Ekkor az adódik, hogy az (1) rendszer a (2) feltétel mellett létező egyensúlyi helyzetei egy egyenesen helyezkednek el:

$$L = \left\{ (K, H, C) \in \mathbb{R}_+^3 : H = K \left( \frac{B(1-v)^\eta(1-u)^{1-\eta}}{\delta} \right)^{\frac{1}{\eta}}, \right. \\ \left. C = K \left( A v^\alpha u^{1-\alpha} \left( \frac{B(1-v)^\eta(1-u)^{1-\eta}}{\delta} \right)^{\frac{1-\alpha}{\eta}} - \delta \right), K > 0 \right\}. \quad (4)$$

Megjegyezzük, hogy ha a (3) feltétel érvényes, akkor (4)-ben a  $C$ -re vonatkozó kifejezésben  $K$  együtthatója is a fortiori pozitív. Ha  $\rho$  nem a (2) kifejezésnek megfelelő értéket venne fel, akkor a rendszernek nincs egyensúlyi helyzete a pozitív ortáns belsejében, ezért a dinamika leírása lényegesen nehezebb. A (2) feltétel fennállása esetén a rendszer egyensúlyi helyzetei egy teljes egydimenziós kontinuumot alkotnak. Bár ez a jelenség nem tipikus, mégis úgy gondoljuk, hogy a dinamikai vizsgálat segítségével sikerül képet kapnunk a kétszektoros gazdaság viselkedéséről.

### 3 A dinamikai vizsgálat

Ezek után linearizáljuk az (1) rendszert a (4) egyenes pontjaiban, majd meghatározzuk a linearizált rendszer sajátértékeit és a nekik megfelelő sajátvektorokat. A sajátértékek meghatározására vonatkozó részletes számítás a dolgozat függelékében található, ahol megmutatjuk, hogy minden egyensúlyi pontban az egyik sajátérték zérus, a másik pozitív, a harmadik pedig negatív.<sup>2</sup>

Ahhoz, hogy explicit megoldásokat kapjunk, a rendszer paramétereire számértékeket kell felvennünk. Modellünkben az alábbiakat választottuk:

$$A = 1.1; \quad B = 1.2; \quad v = 0.8; \quad u = 0.7; \quad \alpha = 0.6; \quad \eta = 0.5; \quad \delta = 0.06.$$

Látható, hogy a termelési függvény együttthatója, amely a technikai haladás exogén részének tekinthető, a humán tőke termelésénél nagyobb értéket kapott; ez fejezi ki a technológia fejlődésének adott pályáját. A reáltőke egységnyi termelésénél e tőkefajta 60%-kal szerepel, míg a humán tőke csak 40%-kal. A humántőke egységnyi termelése a két tőkefajta azonos súlya mellett történik.

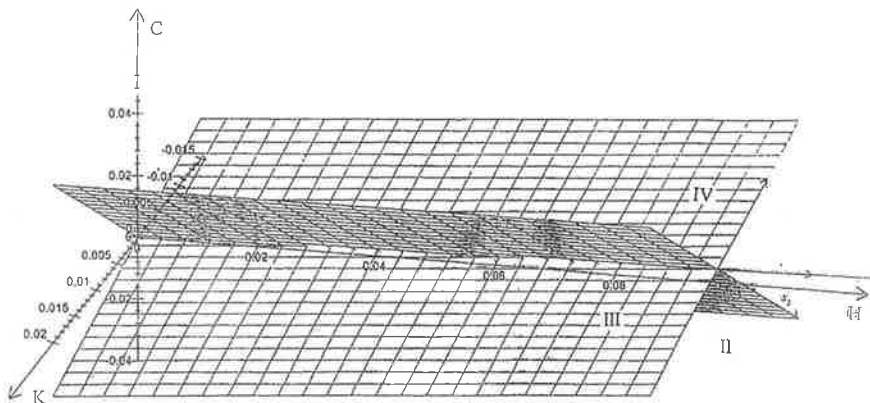
Ekkor a linearizált rendszer sajátértékei, valamint a nekik megfelelő sajátvektorok:

$$\lambda_1 = 0 \quad s_1 = (0.04; 0.96; 0.116)$$

$$\lambda_2 = 2.54 \quad s_2 = (-0.78; -0.217; 0.63)$$

$$\lambda_3 = -0.85 \quad s_3 = (-0.38; 0.34; -0.97)$$

adódnak, az összes egyensúlyi helyzetben. Ábrázoljuk ezt a  $K, H, C$  térben:



1. ábra

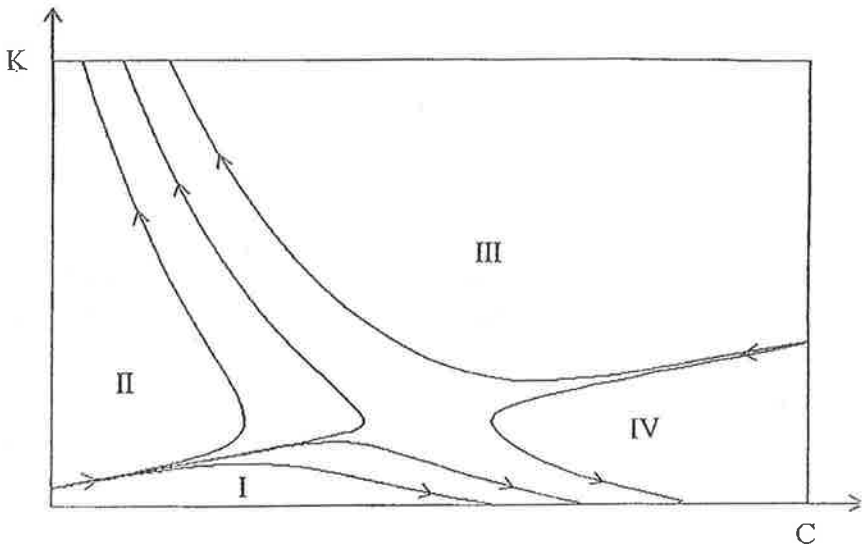
Látható, hogy az  $L$  egyenes minden pontjában van egy negatív, illetve egy pozitív sajátérték, és a hozzájuk tartozó sajátvektorok is pontonként meg-  
egyeznek. Ez azt jelenti, hogy az egyes egyensúlyi pontoknak van egy egy-  
dimenziós stabilis sokasága. Ez egy olyan görbe, ami átmegy az adott ponton,

<sup>2</sup>Belátható, hogy a zérus sajátértékhez tartozó sajátvektor párhuzamos a (4) egyenessel, valamint az is, hogy ez az egyenes „centrum sokaság” minden egyensúlyi pontban.

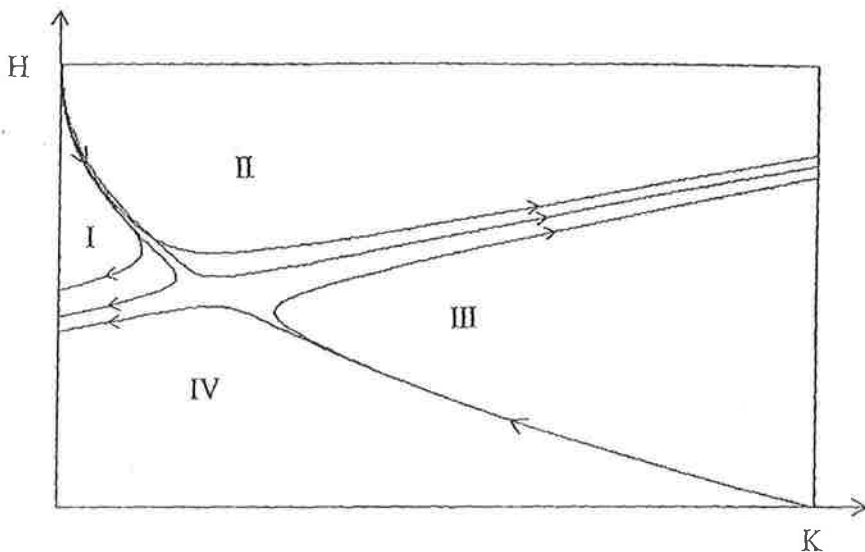
és amely mentén a mozgás az egyensúlyi helyzethez tart. Ezen kívül létezik egy egydimenziós instabilis sokasága, ami pedig olyan, az adott ponton átmenő görbe, amely mentén a mozgás távolodik az egyensúlyi helyzettől. Ezen stabilis és instabilis sokaságok érintői párhuzamosak egymással a különböző pontokban, és ezáltal két, egymást az  $L$  egyenesben metsző síkot alkotnak. Ugyanakkor ezen síkok érintősíkjai két, egymást szintén az  $L$ -ben metsző felületnek. Az egyik ilyen felületet nevezhetjük "az egyensúlyi helyzetek  $L$  egyenese stabilis sokaságának", mivel ezen felület mentén a mozgás tart az  $L$ -hez, míg a másik felületet az " $L$  instabilis sokaságának", hiszen e mentén a mozgás távolodik az  $L$ -től.

Az  $L$  egyenes stabilis és instabilis sokasága a  $K, H, C$  tér pozitív ortánsát négy részre bontja. Az I-es, II-es, III-as, illetve IV-es tartományokban lejátszódó dinamika különböző, azaz a gazdaság időbeli változását mutató trajektóriák jellege más és más lesz, attól függően, hogy a négy tartomány melyikében vettük fel a kezdeti értékeket. E helyen hangsúlyozzuk még egyszer, hogy mindez csak az egyensúlyi helyzetek egyenesének környezetében érvényes. Ha a kezdeti értékeket elegendően közel választjuk ehhez az egyeneshez, akkor az (1) rendszer helyettesíthető a linearizáltjával, valamint a stabilis és instabilis sokaságok a saját érintősíkjaikkal, melyek egyben a linearizált rendszer stabilis, illetve instabilis sokaságai.

A 2. és 3. ábrán a trajektóriáknak az egyes kétdimenziós koordinátasíkokra vett vetületei láthatók. Az egyes háromdimenziós tartományok egyik, illetve a másik koordinátasíkra vett vetületét a megfelelő számok feltüntetésével jelezzük az ábrákon. A szükséges számításokat a PHASER nevű differenciálegyenlet-megoldó szoftver segítségével végeztük el.



2. ábra



3. ábra

## 4 Az eredmények értelmezése

Az előző ábrák a humán tőke, a reáltőke és a fogyasztás alakulását mutatják meg, ha modellezett gazdaságunk az egyensúlyi állapot közelében van. A kezdeti értékektől függően a gazdaság az I-es, II-es, III-as vagy IV-es tartományban érvényesülő dinamikával jellemezhető.

Az I-es tartományban a humán tőke állománya folyamatosan csökken, a fogyasztás növekszik, a reáltőke állománya pedig egy kezdeti növekedés után szintén csökken. Az ellenkező irányú folyamat a III-as tartományban zajlik: a humán tőke nő, a fogyasztás csökken, a reáltőke egy rövid visszaesést követően növekedésnek indul. A II-es tartományban a reáltőke folyamatos növekedés figyelhető meg, egy ideig csökken a humán tőke, majd nő; a fogyasztás a humán tőkével ellentétes mozgást mutat — a kezdeti növekedés után a zérus érték felé tart. Ennek ellenkezője a IV-es tartományra jellemző; a reáltőke állománya állandóan csökken, a fogyasztás növekszik egy kezdeti hanyatlást követően, a humán tőke viszont végül csökken. Vajon milyen gazdasági folyamatok játszódnak le a háttérben, amelyek hatására a rendszer ilyen dinamikus tulajdonságokkal rendelkezik?

Kezdjük az I-es tartománnyal. Itt a humán tőke állományának — a fogyasztáshoz és a reáltőkeállományához — viszonylag magas szintje jellemző. A humán tőke időbeni csökkenése azt jelenti, hogy elhasználódása nagyobb, mint az újonnan megtermelt mennyisége. Ez lefékezi a reáltőke termelését. Mivel azonban az abban való részesedése 40%-os (ld.  $\alpha = 0.6$ ), a reáltőke állománya — saját dinamikájának köszönhetően — ideiglenesen még nőhet,

ami elegendő a fogyasztás növekedéséhez. Előbb-utóbb a humán tőke csökkenése és a reáltőke lassabb növekedése megállítja a reáltőke növekedését, a fogyasztás azonban tovább nő. Ez éppen a két tőkefajta csökkenése miatt lehetséges, azaz végül is ezek felélése teszi lehetővé a fogyasztás állandó növekedését.

A fenti folyamat úgy értelmezhető, hogy a szóban forgó gazdaságban a viszonylag magas humán tőke állománya beleütközik a relatíve alacsony reáltőke-állomány korlátjába; a magasán képzett szakemberek a meglévő géppark, laborszerek és egyéb berendezések elégtelen mennyisége miatt nem foglalkoztathatók hatékonyan. Így az újabb humán tőke képzése mellett az e szektorban dolgozók bére — dinamikáját illetően mindenképpen, de nem elképzelhetetlen, hogy abszolút mértékben is — elmarad a többi szektorban dolgozóké mögött. Ennek hatására a jól képzett munkaerő olyan területek felé áramlik, amely ugyan nagyobb jövedelmet biztosít, de alacsonyabb képzettséget igényel. A magasabb humán tőkét megtestesítő munkaerő új helyén az átlagosnál hatékonyabban fog dolgozni, vagyis a reáltőke állománya nő. Ugyanakkor növekszik a jövedelem is, amely újabb keresletet jelent a fogyasztási javak piacán; így nő a fogyasztás. A reáltőke állományának a növekedése akkor ér véget, ha vagy az továbbra is átáramló, illetve most már akár eredeti helyén megmaradó humán tőke annyira leértékelődött, hogy képtelen a meglévő reáltőke fejlesztésére, vagy a reáltőkét használók részéről nem jelentkezik igény a magasabb szintű tőkejavak kifejlesztésére. Ilyen körülmények között a reáltőke alakulása megfordul és a humán tőkével egyetemben csökkenni fog. A fogyasztás növelése csak a vagyon, azaz a tőkejavak rovására lehetséges, amely a leírt folyamatot még felgyorsítja.

Hasonló a helyzet a II-es tartományban. Ott is bekövetkezik a humán tőke átáramlása a reáltőkét gyártó szektorba, ahol szintén hatékonyabban hasznosítható; az említett okból nőni kezd a fogyasztás. Teljesen más azonban a humán tőke és a reáltőke viszonya, hiszen itt a reáltőke szektora ösztönzőleg hat a humán tőke fejlődésére — a reáltőke állományának további növelése kikényszeríti a humán tőke fejlesztését is. Ennek forrása a fogyasztás, amely így egy rövid emelkedés után a korábbi szintre visszatér.

A IV-es tartomány végső eredménye megegyezik az I-es tartományéval: a fogyasztás növekedése a reál- és a humántőke rovására történik. A különbség a kiindulópont, most a reáltőke súlya nagyobb. A saját szektorában relatíve kevésbé hatékonyan felhasznált reáltőke egy részét a humán tőke termelésénél alkalmazzák. Kevesebb jövedelem realizálódik, ezért csökken a fogyasztás. Ennek szinten tartása csak újabb jövedelemképződés mellett képzelhető el. Ez pedig a reáltőke-javakat gyártó szektorban előbb várható, mint a nagyobb megtérülési idő jellemezte humán tőke szektorában, vagyis a tőkefajta áramlása megfordul. A fogyasztás érdekében fokozott reáltőke-termelés elégtelen hatékonysága viszont azt jelenti, hogy valójában e tőkefajta felélése történik, amely értelemszerűen nem jelent kihívást a humán tőke termelése számára sem.

Érdekes a III-as tartományból levonható következtetés. A humán tőkéhez képest viszonylag magas reáltőke-állomány — az előző esethez hasonlóan —

tőkeátcsoportosításhoz vezet. A két tőkefajta azonos irányú mozgása arra enged következtetni, hogy köztük pozitív visszacsatolási mechanizmusok léteznek. Ugyanakkor pedig csökken a fogyasztás, amely ellentmondani látszik a modellben hallgatólagosan szerepeltetett feltevésnek, hogy a jövedelem növekedésével a fogyasztási színvonal emelkedése várható volna, azaz a fogyasztás csökkenése alacsonyabb jövedelemmel lenne szinkronban. A III-as tartomány ezért csak úgy képzelhető el, hogy a reáltőke-javakat szinte kizárólag a humán tőke előállításánál használják fel, szinte semmi nem jut a fogyasztásra. Némi iróniával egy ilyen gazdaságot „éhező zsenik társadalmának” lehetne nevezni.

Eddigi okfejtésünkben néhányszor már használtunk olyan magyarázatokat, amelyekben a tudatos beavatkozás lehetőségét, szükségszerűségét lehetett sejtteni. Éppen ezért szeretnénk végezetül modellünk néhány gazdaságpolitikai tanulságára kitérni. Hangsúlyozni kell azonban ezzel kapcsolatban, hogy a levont következtetések érvényessége igen korlátozott, hiszen ahogyan más helyen már megemlítettük, az elemzések tárgyát képező mozgások modellünk egyensúlyának környezetében zajlanak, az ott megfigyelhető mozgások *iránya* fontos, vagyis az, hogy merre mozdul el a gazdaság.

Az egyes tartományok trajektóriái ebben az értelemben gazdaságpolitikai alternatívákat ábrázolnak: a gazdaságpolitikai vezetés vagy a fogyasztás rováására igyekszik minél nagyobb tőkemennyiségeket termeltetni, vagy a fogyasztás szinten tartását tekinti elsődleges szempontjának. Ez utóbbi esetben viszont a meglévő tőkeállomány elpazarlásának lehetünk tanúi. Függetlenül attól, hogy a humán tőke aránya a reáltőkéhez képest magas vagy alacsony, igaz az, hogy mindkét kívánatos cél — a tőkeállomány és a fogyasztás egyszerre történő növelése — rövid távon nem érhető el.

Mindkét gazdaságpolitikára lehet példákat találni a korábbi, néhány kivételtől eltekintve inkább alacsony humán-reáltőke arány jellemezte szocialista országok életében. Köztudott, hogy a túlzott iparosítás szinte minden említett országban a fogyasztás visszaeséséhez vezetett. A fogyasztás szinten tartásából következő tőkeleértékelődés pedig a technikai elmaradottság kialakulásában, illetve növekedésében, valamint a nem egy esetben tetemes összegű belső és külső eladósodásban jut kifejezésre. Az elmúlt néhány évtized tapasztalatai így alátámasztják az egyszerű modellünkben levont következtetést: az említett, néha felváltva megtett gazdaságpolitikai lépések a szocialista országok fejlődését olyan irányba terelték, amelyből végül is nem volt visszaút.

De ugyanez érvényes a magas humán-reáltőke-arányt mutató országokra is. Úgy gondoljuk, hogy Magyarország ebbe a kategóriába tartozik, vagyis jelenlegi szituációját tekintve ábráinkban valahol az I-es és II-es tartományok közötti határvonal környékén „helyezkedik el”. A gazdaságpolitikai vezetés, nyilván hosszú távra kiható, de most meghozandó döntése kétféle lehet: vagy a fogyasztás növekedését tekinti elsődleges célnak, vagy saját erőből — a humán tőke átcsoportosításával — igyekszik a reáltőke állományát növelni. Rövid távon az első döntés tűnik előnyösebbnek, hosszú távon pedig nyilván a második. Ebben az esetben a gazdaság olyan irányba mozdul el, hogy először a reál-, később pedig a humántőke állománya nő. Mindkét fejlemény hatására

megteremtődik a lehetősége —de csak a lehetősége— annak, hogy hosszabb távon a fogyasztás is növekedjen, hiszen a tőkeállományok növekedése jövedelemnövekedést vált ki, ami növekvő fogyasztási keresletet implikál. Ebben az esetben a siker nem áll be magától, hiszen láttuk, hogy a két tőkefajta együttes növekedése csak jól működő visszacsatolási mechanizmusok révén valósulhat meg. Konkrétan ez azt jelenti, hogy létrehozni, illetve erősíteni kell azon kereteket, amelyek között a gyakorlat —a mindennapos gazdasági élet— és a humán tőke termelésének helyszínei összekapcsolódhatnak, amelyek között az oktatási szektor a kiképzendő szakemberek iránti igényekről értesül.

## 5 Függelék

Az (1) rendszer linearizáltjának együtthatómátrixa a (4) egyenes pontjaiban:

$$M = \begin{pmatrix} \rho & a(1-\alpha)b^{\frac{-\alpha}{\eta}} & -1 \\ \eta b^{\frac{1}{\eta}} \delta & -\eta \delta & 0 \\ \alpha a(\alpha-1) \left( ab^{\frac{1-\alpha}{\eta}} - \delta \right) b^{\frac{1-\alpha}{\eta}} & \alpha a(1-\alpha) \left( ab^{\frac{1-\alpha}{\eta}} - \delta \right) b^{\frac{-\alpha}{\eta}} & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{F1})$$

ahol  $a = Av^\alpha u^{1-\alpha}$ , illetve  $b = \frac{B}{\delta}(1-v)^\eta(1-u)^{1-\eta}$ . Az  $M$  mátrix elemeire a továbbiakban a következő jelölést használjuk:

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix},$$

ahol

$$m_{11}, m_{12}, m_{21}, m_{32} > 0; \quad m_{23} = m_{33} = 0; \quad m_{13}, m_{22}, m_{31} < 0. \quad (\text{F2})$$

A karakterisztikus egyenletet felírva:

$$-\lambda^3 + \lambda^2(m_{11} + m_{22}) + \lambda(m_{12}m_{21} - m_{11}m_{22} - m_{31}) - (m_{21}m_{32} - m_{22}m_{31}) = 0$$

látható, hogy az egyik gyök biztosan zérus, hiszen az (F1) megfelelő elemeinek behelyettesítése után  $m_{21}m_{32} - m_{22}m_{31} = 0$  adódik. Legyen tehát  $\lambda_1 = 0$ , ekkor a másik két sajátérték,  $\lambda_2, \lambda_3$  a következő egyenletből határozható meg:

$$\lambda^2 - \lambda(m_{11} + m_{22}) - (m_{12}m_{21} - m_{11}m_{22} - m_{31}) = 0.$$

A gyökök és együtthatók közötti összefüggés alapján tudjuk, hogy

$$\lambda_2 \lambda_3 = -(m_{12}m_{21} - m_{11}m_{22} - m_{31}),$$

ahol a jobb oldali kifejezés az (F2) feltétel miatt mindig negatív. Tehát  $\lambda_2$  és  $\lambda_3$  mindig ellentétes előjelű.



## Irodalom

1. Barro, Robert – Sala-I-Martin, Xavier: *Economic Growth*. McGraw-Hill, Inc., New York, 1995.
2. Farkas, Miklós: *Periodic Motions*, Springer-Verlag, New York, 1994.
3. Grossman, Gene M. – Helpman, Elhanan: *Innovation and Growth in the Global Economy*. The MIT Press, Cambridge (Mass.) - London, 1991.
4. Hartman, Ph.: *Ordinary Differential Equations*, Wiley, New York, 1964.
5. Lucas, Robert E.: *On the Mechanics of Economic Development*. *Journal of Monetary Economics*, vol. XXII (1988), 3–42.
6. Meyer Dietmar: *Az új növekedéstudomány*. *Közgazdasági Szemle*, 1995/4, 387–398.
7. Romer, Paul: *Endogenous Technological Change*. *Journal of Political Economy*, vol. XCVIII (1990), 71–102.
8. Uzawa, Hirofumi: *Optimal Growth in a Two-Sector Model of Capital Accumulation*. *Review of Economic Studies*, vol. XXVIII (1964), 1–24.

### A THREE DIMENSIONAL ANALYSIS OF A TWO-SECTOR MODEL

In this article a growth model describing the time development of human capital, real capital and consumption were analyzed. This was done in the frame of the original three-dimensional model, while the earlier analysis of Barro and Sala-I-Martin based on a reduced two-dimensional form. The model's equilibrium solution is a saddle-point. In its neighborhood consumption remains more or less on the same level, but human capital and real capital can tend to zero or to infinity. From economic point of view this means that for economies with a relatively high ratio of human capital and real capital exist two different paths for development: a nearly constant consumption implied by the joint stimulation of real capital and human capital, or a consumption caused by using up existing human and real capital.

