ÁRFOLYAMINGADOZÁSOK ÉS KOCKÁZATBECSLÉS A BUDAPESTI ÉRTÉKTŐZSDÉN[1]

PALÁGYI ZOLTÁN
BKÁE Matematika Tanszék, Budapest

Ebben a dolgozatban a Budapesti Értéktőzsde egyik vezető részvényének, a MOL-nak a tranzakciónkénti áringadozásait tanulmányozzuk. Megmutatjuk, hogy az áringadozások empirikus sűrűségfüggvénye jelentősen eltér a normálistól, és a vizsgált időszakban jól közelíthető egy $\alpha = 1.48$ indexű stabil eloszlással. Szemléltetjük, hogy ennek az eredménynek milyen hatása van a részvény kockázatának becslésére.

1 Bevezetés

Az árfolyamingadozások leírására használt legelterjedtebb modell [1] szerint a részvények ára ($P(t)$) Brown-mozgást követ, azaz rögzített T késleltetési idő mellett különböző t értékekre az $\ln P(t+T) - \ln P(t)$ mennyiségek független normális eloszlású valószínűségi változók, amelyek várható értéke zérus, szórásuk pedig arányos a T késleltetési idővel.

Mára világossá vált, hogy a fenti modell nem írja le kielégítően az adatsorokat, mert az áringadozások empirikus eloszlása rendszerint túl csúcsos ahhoz, hogy normális legyen. Pontosabban az áringadozások hisztogrammjai hasonlítanak ugyan egy haranggörbére, de a középső tartomány csúcsosabb, a farokrész levágása pedig lassabb, mint a minta várható értéke és szórása alapján illesztett normális eloszlásé. Mivel a normalitás alapvető feltevése fontos pénzügyi elméleteknek (derivatívák árazása, CAPM), elvetésének komoly elméleti következményei vannak, melyekkel ebben a dolgozatban nem foglalkozunk.

1963-ban Mandelbrot [2] a gyapotárak vizsgálata alapján úgy módosította a fenti modellt, hogy $\ln P(t{+}T){-}\ln P(t)$ stabil (Levy) eloszlást követ. A Levy eloszlások családja (a következő szakaszban áttekintjük tulajdonságaikat) tartalmazza a normálist, de az utóbbi kivételével a Levy eloszlásoknak nincs szórásuk. Emiatt Mandelbrot modelljét sok kritika érte.

Később számos tanulmány [3-7] készült nagy frekvenciájú adatsorokra - így például az S&P500 [5] illetve a CAC40 [7] indexek idősoraira. Ezek a vizsgálatok annyiban megerősítették Mandelbrot modelljét, hogy az empirikus eloszlások sűrűségfüggvényeinek középső tartományára jól illeszkedő $1 < \alpha < 2$ paraméterű stabil eloszlást találtak. A görbe farokrészének "levágása" azonban nem az illető stabil eloszlás aszimptotikus tulajdonságai-

[1]Beérkezett: 1998. szeptember 14.

nak megfelelően, hanem általában gyorsabban, exponenciálisan [8], vagy hatványkitevő szerint [9] történik, így a szórás véges lesz.

Ebben a dolgozatban először áttekintjük a stabil eloszlások néhány tulajdonságát, majd a Budapesti Értéktőzsdén megfigyelt áringadozásokat vizsgáljuk [10-13]. Vizsgálatunk fontos eleme, hogy napon belüli adatokat használunk. Választásunk a MOL részvényre esett, mert a napi tranzakciók számát tekintve ez a papír az elsők között van.

2 A stabil eloszlások néhány tulajdonsága

Az egyváltozós stabil eloszlások elméletét lényegében az 1920-as és 1930-as években P. Levy és A. Y. Hincsin dolgozták ki. A részleteket számos könyvben [14-15] megtalálhatjuk, itt csak néhány eredményt idézünk.

Az $X, X_1, X_2, ...X_n$ független azonos eloszlású valószínűségi változók eloszlását stabilnak mondjuk, ha bármely $n \geq 2$ természetes számhoz találhatók C_n pozitív és D_n valós számok, amelyekre $X_1 + X_2 + ... + X_n$ eloszlása megegyezik $C_nX + D_n$ eloszlásával. Független azonos (stabil) eloszlású valószínűségi változókat összeadva tehát az eloszlás (nyújtástól és eltolástól eltekintve) nem változik.

Mit jelent a stabilitás a pénzügyi idősorokban? Legyen például $P_1, P_2, ...P_n$ egy részvény egymást követő árainak sorozata (napon belüli árakról van szó, tehát az összes megfigyelt árat feljegyezzük). Tegyük fel, hogy $\ln P_{t+1} - \ln P_t$ (ez lényegében a t-edik kötéstől a $t+1$-edik kötésig elért hozam) a fenti X_i-vel azonos (stabil) eloszlású valószínűségi változó. Ekkor

$$\ln P_{t+2} - \ln P_t = (\ln P_{t+2} - \ln P_{t+1}) + (\ln P_{t+1} - \ln P_t)$$

$X_1 + X_2$-vel, azaz $C_2X + D_2$-vel azonos eloszlású. Ehhez hasonlóan $\ln P_{t+n} - \ln P_t$ $C_nX + D_n$-nel azonos eloszlású. Leegyszerűsítve azt mondhatjuk, hogy a hozamokat különböző időskálákon nézve azonos eloszlást kapunk. Szemléletesen, ha az áringadozások grafikonjait először szabad szemmel, majd nagyítóval nézzük, hasonló alakzatot látunk. Megmutatható, hogy $C_n = n^{1/\alpha}$ $(0 < \alpha \leq 2)$, ahol α a stabilitás indexe (karakterisztikus exponens, Levy exponens). Normális eloszlásra $\alpha = 2$, a többi α-ra a stabil eloszlású változónak nincs szórása, $0 < \alpha \leq 1$ esetén pedig még várható értéke sincs. (A pénzügyi idősorokban eddig megfigyelt α értékekre $1 < \alpha \leq 2$, ekkor van várható érték.) A stabil eloszlású változók gyakorlati alkalmazásait nehezíti az a tény, hogy sűrűségfüggvényük (néhány kivételtől, például a normálistól eltekintve) nem írható explicit alakban, karakterisztikus függvényük (az $\alpha \neq 1$ esetben):

$$E \exp i\theta X = \exp(-\sigma^\alpha |\theta|^\alpha (1 - i\beta (\text{sign}\theta) \tan(\pi\alpha/2)) + i\mu\theta),$$

ahol sign a szignum függvény, α a stabilitás indexe, β a ferdeséget (aszimmetriát) méri, μ eltolási, σ pedig skálaparaméter. (X pontosan akkor szimmetrikus, ha $\beta = 0$ és $\mu = 0$. Ha X-nek van várható értéke, akkor az μ-vel egyenlő.) A vizsgált pénzügyi idősorokban β és μ értéke alig tér el nullától. A $\beta = \mu = 0$ esetben X sűrűségfüggvénye:

$$f_\gamma(t) = 1/\pi \int_0^\infty \exp(-\gamma x^\alpha)\cos(tx)\,dx\,,$$

ahol bevezettük a $\gamma = \sigma^\alpha$ paramétert. Az integrál numerikus kiszámításához hasznos észrevenni, hogy

$$f_\gamma(t) = \gamma^{-1/\alpha} f_1(\gamma^{-1/\alpha} t)\,,$$

így elég $f_1(.)$-et kiszámolni. A farokrész (t nagy) becsléséhez jól használható az

$$f_1(t) \approx \Gamma(1+\alpha)\sin(\pi\alpha/2)/\pi t^{1+\alpha}$$

($\alpha < 2$) közelítő formula. Ez utóbbi az úgynevezett "vastag farok" tulajdonság: a sűrűségfüggvény görbéjének farka aszimptotikusan hatványkitevő szerint "vág le" az $\alpha < 2$ esetben, vagyis a normális sűrűségfüggvénynél sokkal lassabban. Ennek a tulajdonságnak a pénzügyi kockázat becslésénél van szerepe, hiszen a szélsőséges események éppen a farokban vannak.

3 Az árfolyamingadozások sűrűségfüggvénye

Az előző szakaszban leírt stabilitás vizsgálatához a MOL részvénynek a Budapesti Értéktőzsdén 1997. január 1-től 1998. június 30-ig megfigyelt árainak sorozatát $(P_1, P_2, \ldots P_n)$ választottuk. P_1 tehát 1997 első tranzakciójának ára, P_2 a másodiké, stb. A vizsgált időszakban a tranzakciók száma $n = 214392$. Feltesszük, hogy az $\ln P_{t+1} - \ln P_t$ (tick-by-tick) hozamok mintáját szimmetrikus α és γ paraméterű stabil eloszlású változó

$$f(t) = 1/\pi \int_0^\infty \exp(-\gamma x^\alpha)\cos(tx)\,dx$$

sűrűségfüggvénye írja le. Könnyű belátni, hogy n ilyen sűrűségfüggvény konvolúciója:

$$f_n(t) = 1/\pi \int_0^\infty \exp(-n\gamma x^\alpha)\cos(tx)\,dx\,,$$

innen pedig $f_n(0) = n^{-1/\alpha} f(0)$. $f_n(0)$-t n függvényében log-log skálán ábrázolva a kapott egyenes meredekségéből megbecsüljük α-t, a tengelymetszetből pedig $f(0)$-t. Ezután az $f(0) = \Gamma(1/\alpha)/\pi\alpha\gamma^{1/\alpha}$ képletből kiszámítjuk γ-t.

$f_n(0)$ kiszámításához az eredeti ($\ln P_{t+1} - \ln P_t$) mintából n elemet húzunk véletlenszerűen visszatevéssel és a kihúzott elemeket összeadjuk. A húzások száma félmillió – ez számítástechnikailag még könnyen kezelhető. A kapott összegeket egy 0.0012 ablakszélességű hisztogrammba tesszük és leolvassuk $f_n(0)$ értékét.

Az első ábrán $\log_2 f_n(0)$ értékeit tüntettük fel $\log_2(n)$ függvényében. Látható, hogy a pontokra szépen illeszkedik egy egyenes – α becsült értéke 1.48. A fent leírt módon γ-ra a 0.000011 értéket kapjuk.

A második ábrán az $(\ln P_{t+1} - \ln P_t)$ adatokból kapott hisztogrammot (gyémántok), a fenti α és γ paramétereknek megfelelő stabil eloszlás numerikus integrálással kiszámított sűrűségfüggvényét (folytonos vonal), valamint a minta várható értéke és szórása alapján illesztett normális eloszlás sűrűségfüggvényét (szaggatott vonal) látjuk. A függőleges tengelyen tízes alapú logaritmus skálát használunk. Látható, hogy a stabil eloszlás sűrűségfüggvénye négy nagyságrenden át szépen illeszkedik az adatpontokra, az illesztés csak a szélső tartományokban kezd romlani, ahol már nem volt elég adat, így a rögzített hisztogramm ablakszélesség miatt ezek a pontok szétszóródtak – lényegében "zajnak" tekinthetjük őket. Szépen látszik az is, hogy a normális sűrűségfüggvény mennyire távol esik az adatpontoktól.

4 Következtetések

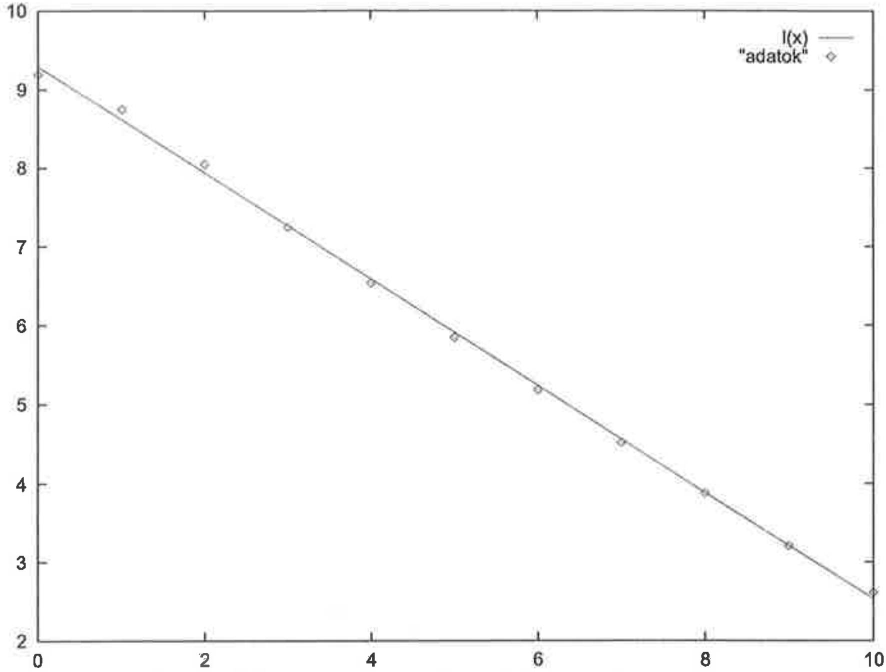
A dolgozatban a MOL részvény Budapesti Értéktőzsdén megfigyelt áringadozásainak empirikus sűrűségfüggvényét vizsgáltuk. Megállapítható, hogy az eredmény lényegesen eltér a normális eloszlás sűrűségfüggvényétől és jól leírható egy $\alpha = 1.48$ exponensű Levy eloszlás sűrűségfüggvényével.

A második ábrán a szaggatott vonal (normális eloszlás) és a vízszintes tengely metszete a minta ötszörös szórásának felel meg. A 0.02 (tízszeres szórás) illetve -0.02 pontoktól jobbra illetve balra normális eloszlás szerint lényegében nem lehetnének adatpontok - nagyjából az univerzum életkorának megfelelő ideig kellene várni, amíg ebben a tartományban figyelnénk meg áringadozást. A vizsgált másfél éves időtartam alatt viszont sok áringadozás esett ebbe a tartományba – ezek a nagy ingadozások jelentik a pénzügyi kockázatot, amelynek mértékét a normális eloszlás nagyságrendekkel alábecsüli. A stabil eloszlás kielégítően írja le az adatokat, a farokrész pontosabb becsléséhez sokkal több adatra lenne szükség, ezért pillanatnyilag nem tudunk jobbat mondani.

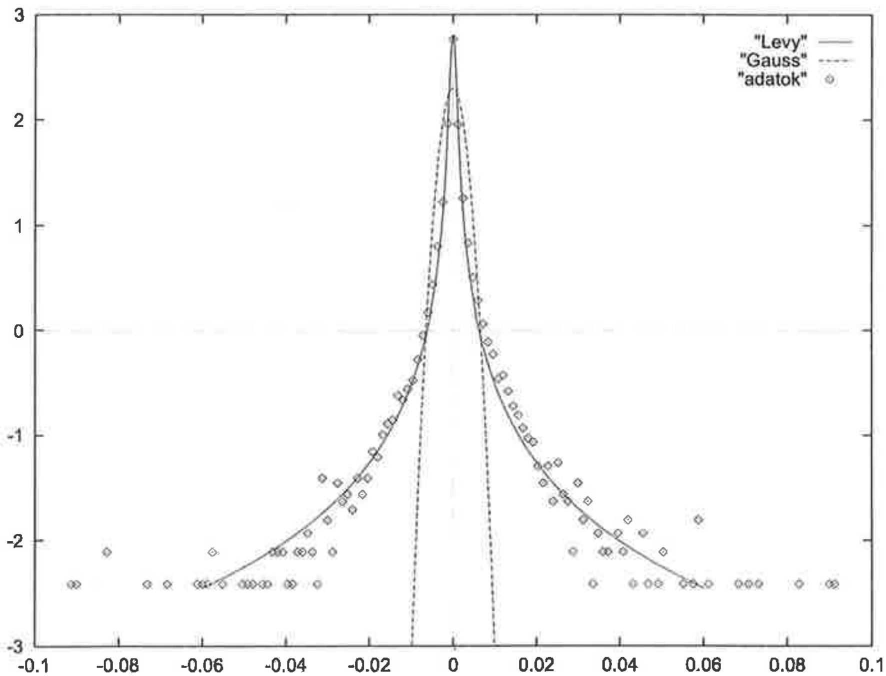
5 Köszönetnyilvánítás

Az adatok megszerzésében Pacsi Zoltán, Schalkhammer Erika és Szerelmy Gábor segítettek - nélkülük ez a munka nem jöhetett volna létre. Köszönettel tartozom a Cashline Broker Rt-nek az anyagi támogatásért.

Végül Medvegyev Péter kollégámnak szeretném megköszönni tanácsait és hasznosútmutatásait.


l(x)
"adatok"
10
9
8
7
6
5
4
3
2
0
2
4
6
8
10

1. ábra


"Levy"
"Gauss"
"adatok"
3
2
1
0
-1
-2
-3
-0.1
-0.08
-0.06
-0.04
-0.02
0
0.02
0.04
0.06
0.08
0.1

2. ábra

Irodalom

1. Hull, J. C.: *Options, Futures, and Other Derivatives, Third Edition* Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1997.
2. Mandelbrot, B. B. (1963), The Variation of Certain Speculative Prices, *J. Business* 36. 392-417.
3. Akgiray, V. (1989) *J. Business* 62. 55.
4. Mantegna, R. N. (1991), Levy Walks and Enhanced Difusion in the Milan Stock Exchange, *Physica* A 179. 232–242.
5. Mantegna, R. N. és H. E. Stanley (1995), Scaling Behavior in the Dynamics of an Economic Index, *Nature* 376. 46–49.
6. Ghashghaie, S., Breymann, W., Peinke, J., Talkner, P. and Dodge, Y. (1996) *Nature* 381. 767.
7. Zajdenweber, D. (1994), Proprietes autosimilaires du CAC40, *Revue d'Economie Politique* 104. 408–434.
8. Cont, R. et al. (1997), Scaling in Stock Market Data: Stable Laws and Beyond, *Science&Finance Working Paper*, Paris
9. Gopikrishnan, P. et al. (1998), Inverse Cubic Law for the Distribution of Stock Price Variations, *The European Physical Journal B* 3. 139–140
10. Lux, T. és Varga J. (1996), A Pareto hipotézis vizsgálata - értékpapír-piaci hozamok és az extremális hozamok eloszlása, *Szigma* XXVII. 157.
11. Varga J. (1998), On distribution for stock returns, *Managing in Uncertainty: Theory and Practice*, 139–151. Kluwer Academic Publishers
12. Rappai G. és Varga J. (1997) Applicability of the CAPM on the Hungarian stock market, *New Operational Approach in Financial Modelling*, 133–143. Physica Verlag, Berlin-New York
13. Varga J. (1996), Tests for randomness in multiple financial time series, *Modelling Techniques for Financial Markets and Bank Management*, 259–271. Physica Verlag Heidelberg
14. Gnyegyenko, B. V., Kolmogorov, A. N.: *Független valószínűségi változók összegeinek határeloszlásai*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1951.
15. Samorodnitsky, G., Taqqu, M. S.: *Stable Non-Gaussian Random Processes*, Chapman & Hall, New York, 1994.

PRICE CHANGES AND RISK ESTIMATION OF THE BUDAPEST STOCK EXCHANGE

We study the empirical density function of tick by tick log price changes of a heavily traded stock (MOL) of the Budapest Stock Exchange. A heavy tailed stable density of index 1.48 seems to describe the data well. This 'heavy tail' phenomenon has been observed in many other markets of the world. The fact that the empirical distribution of price changes is not normal inspires further theoretical research (option pricing, CACPM etc.), and affects our view on modelling and estimating financial risk.