KREKÓ BÉLA DíJ

A Gazdaságmodellezési Társaság Elnöksége 2000. február 21.-i ülésén Krekó Béla díj alapítását határozta el.

A díjat a gazdaságmodellezés területén folytatott eredményes kutató munkáért, illetve a Társaság szakmai tevékenységének tartós, aktív segítéséért lehet elnyerni.

A díjat évente egy alkalommal, általában szakmai konferencia keretében a GMT mindenkori Elnöksége mint kuratórium ítéli oda; a vele járó pénzösszeg 100 ezer forint. A döntés eredménye és az indoklás minden alkalommal megjelenik a SZIGMA-ban.

A díj elnevezésének rövid indoklása

Krekó Béla a gazdaságmodellezés területén elévülhetetlen érdemeket szerzett eredményes munkájával. Szakmai tevékenységéről a Szigma XXV. évfolyam 1994/3. számában Szép Jenő írt méltatást. Két részletet azonban külön is szeretnénk megemlíteni. A 60-as évek elején —amikor az információelmélet még a lexikonok szerint is burzsoá áltudomány volt— kiharcolta a „terv-matematika" szak megindítását a Közgazdaságtudományi Egyetemen. A szakon végzett hallgatók mára a gazdaságmodellezés törzsgárdájához tartoznak. Az Egyetemi Számítóközpont létrehozásában és 14 éven át történő igazgatásában sokoldalúan gyarapította tovább érdemeit.

Meszéna György
a GMT elnöke

SZOMSZÉDOS RELÁCIÓK[1]

MAGYARKÚTI GYULA
BKÁE Matematika Tanszék, Budapest

A gazdaság szereplőinek ízlését bizonyos relációk segítségével lehet jellemezni. Azt kutatjuk, hogy mit jelent az ízlések hasonlósága és hogyan lehet ezt topológiai eszközök segítségével megragadni olyan módon, hogy egymáshoz közeli relációk bizonyos tulajdonságai azonosak legyenek.

1 Bevezetés

A gazdaság szereplőinek ízlését preferencia relációk segítségével szokás jellemezni. Mivel adott halmazon értelmezett relációk voltaképpen a szorzathalmaz részhalmazai, ezért ha az ízlések hasonlóságának intuitív fogalmát matematikai eszközökkel szeretnénk kezelni, akkor ezen halmazok „közelségének" fogalmát kell megragadnunk. Általában egy halmaz elemeinek közelségét a halmazon bevezetett topológia segítségével fogjuk meg. Ilyenkor azt gondoljuk, hogy $x_n \to x$ azt fejezi ki, hogy az x_n elég nagy indexekre közel van az x-hez. Ennek az analógiának a fenntartásával a relációk közelségéhez a relációk halmazán tehát a szorzathalmaz bizonyos részhalmazainak halmazán kell bevezetnünk topológiát. Persze a preferencia relációk halmazán sokféleképpen tudunk topológiát bevezetni. Akkor mondhatjuk, hogy közgazdasági szempontból is értelmes fogalmat kapunk, ha a relációknak a közgazdasági szempontból releváns tulajdonságai közeli preferenciáról közelire áttérve megőrződnek. A matematikai nyelvre visszatérve ez azt jelenti, hogy például tranzitív relációk ilyen értelemben vett határértéke is tranzitív legyen. Matematikai szempontból — a későbbi jól kezelhetőség érdekében — olyan topológia bevezetésére lenne szükség, amely lehetőség szerint minél szebb tulajdonságú. Azt fogjuk megmutatni, hogy mód van olyan topológia bevezetésére, amely a fenti értelemben közgazdaságilag releváns és a kapott preferencia tér kompakt szeparábilis metrikus tér lesz. Ilyen topológia könnyen jellemezhető és a természetes váromanyos a zárt konvergencia topológia.

Nézzük most részletesebben, hogy hogyan juthatunk el a zárt konvergencia topológiához. Megvizsgáljuk először külön-külön a problémát reflexivitás majd tranzitivitás szempontjából.

2 Definíciók és jelölések

Legyen az egész dolgozatban X egy halmaz és $R \subseteq X \times X$ egy reláció. Ezt egyszerűen (X, R) módon jelöljük.

[1] Beérkezett: 1998. szeptember 19. A kutatást részben a Soros Alapítvány támogatta.

Definíció 2.1 *Definiáljuk a reláció tartóját:*

$$\operatorname{supp}(X,R) := \left\{ z \in X : \begin{array}{l} \exists x \in X, \text{ hogy } (x,z) \in R \text{ ; vagy} \\ \exists y \in X, \text{ hogy } (z,y) \in R \end{array} \right\}.$$

Világos, hogy a reláció metszeteivel is meg lehet fogni a fogalmat:

$$\operatorname{supp}(X,R) := \bigcup_{x \in R} R_x \cup \bigcup_{y \in R} R^y,$$

ahol a reláció *x-metszete* és *y-metszete* a következőképpen van definiálva:

$$R_x := \{z \in X : (x,z) \in R\} \quad \text{és} \quad R^y := \{z \in X : (z,y) \in R\}.$$

Definíció 2.2 *Azt mondjuk, hogy az (X,R) reláció relatív reflexív, ha $(x,y) \in R \Rightarrow (x,x) \in R$ és $(y,y) \in R$.*

Akkor érdekes a relatív reflexivitás, ha a reláció tartója nem az egész X. Ellenkező esetben, nyilván a reflexivitást kapjuk vissza. Most definiáljuk a reláció azon legbővebb részhalmazát, ahová megszorítva a relációt, már reflexív relációt kapunk.

Definíció 2.3 *Az (X,R) reláció reflexiv magja a*

$$\operatorname{ref}(X,R) := \{x \in X : (x,x) \in R\}$$

halmaz.

A pontos fogalmazás érdekében irjuk fel, a jól ismert *Kuratowski–limesz* fogalmát is.

Definíció 2.4 *Legyen (X,τ) egy topológikus tér és $A_n \subseteq X$.*

- *Az A_n halmazok Kuratowski–értelemben vett limesz inferiorja azon $x \in X$ pontok halmaza, amelyekre igaz, hogy minden $U \in \tau(x)$ környezet esetén az $U \cap A_n \neq \emptyset$ véges sok n-től eltekintve. Ezt a halmazt $\operatorname{Li} A_n$-nel jelöljük.*
- *Az A_n halmazok Kuratowski–értelemben vett limesz szuperiorja azon $x \in X$ pontok halmaza, amelyekre igaz, hogy minden $U \in \tau(x)$ környezet esetén az $U \cap A_n \neq \emptyset$ végtelen sok n-re. Ezt a halmazt $\operatorname{Ls} A_n$-nel jelöljük.*
- *Amennyiben $\operatorname{Li} A_n = \operatorname{Ls} A_n$, akkor azt mondjuk, hogy az A_n halmazsorozat Kuratowski-értelemben konvergál a közös $\operatorname{Li} A_n = \operatorname{Ls} A_n$ halmazhoz.*

Pusztán jelöléstechnikai kérdés, de $\operatorname{Li} A_n$ és $\operatorname{Ls} A_n$ jelöléssel azt szeretném hangsúlyozni, hogy nem pontsorozat, hanem halmazsorozat limesz szuperiorjáról és limesz inferiorjáról van szó.

Világos, hogy amennyiben a τ topológia a tér diszkrét topológiája, úgy a klasszikus limesz szuperior és limesz inferior fogalmakat kapjuk.

3 Reflexivitás

Állítás 3.1 *Az (X, R) egy reláció pontosan akkor relatív reflexív, ha*

$$\operatorname{ref}(X, R) = \operatorname{supp}(X, R).$$

Világos, hogy $\operatorname{ref}(X, R) \subseteq \operatorname{supp}(X, R)$ mindig teljesül, ezért a fenti tételt úgy is fogalmazhatjuk, hogy az (X, R) reláció relatív reflexivitásának szükséges és elegséges feltétele az, hogy minden $x \in \operatorname{supp}(X, R)$ esetén $(x, x) \in R$.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy a reláció relatív reflexiv és $z \in \operatorname{supp}(X, R)$. Ekkor vagy

- $\exists x \in X$, hogy $(x, z) \in R$;
- $\exists y \in X$, hogy $(z, y) \in R$;

Mindkét esetben a relatív reflexivitás miatt $(z, z) \in R$, ami azt jelenti, hogy $z \in \operatorname{ref}(X, R)$. Tehát $\operatorname{supp}(X, R) \subseteq \operatorname{ref}(X, R)$, másik irányú tartalmazás viszont triviális.

Tegyük most fel, hogy $\operatorname{supp}(X, R) \subseteq \operatorname{ref}(X, R)$, és legyen $(x, y) \in R$. Világos, hogy ekkor $x, y \in \operatorname{supp}(X, R)$, ezért $(x, x) \in R$ és $(y, y) \in R$ is fennáll, ami azt jelenti, hogy (X, R) valóban relatív reflexiv. □

Fontos, de könnyű látni, hogy ha (X, R) egy relatív reflexív reláció, akkor az $A := \operatorname{supp}(X, R)$ jelöléssel (A, R) reláció reflexív. Fordítva, ha $A \subseteq X$ mellett kiindulunk egy (A, R) relációból, akkor ezt tekinthetjük az egész X-en értelmezett (X, R) relációnak is hiszen $R \subseteq A \times A \subseteq X \times X$. Ha az (A, R) reláció reflexiv, akkor az így nyert (X, R) reláció is relatív reflexiv. Ez azt jelenti, hogy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés van az X részhalmazain értelmezett reflexív relációk és az egész X-en értelmezett relatív reflexív relációk között, és ezt a megfeleltetést a supp operátor adja, amely egy az egészen értelmezett relatív reflexív relációhoz a fentiek szerint bijektív módon rendel egy az X valamely részhalmazán értelmezett, de már reflexiv relációt. Ilyen módon áttérhetünk a részhalmazokon értelmezett reflexiv relációk vizsgálatáról az egészen értelmezett relatív reflexiv relációk vizsgálatára.

Most rátérünk annak vizsgálatára, hogy milyen feltételek mellett következtethetünk az egész X-en értelmezett reláció relatív reflexivitására, amennyiben tudjuk, hogy valamilyen értelemben hozzá közeli reláció szintén relatív reflexív. Nézzünk először egy könnyű állítást:

Tétel 3.2 *Legyen (X, τ) topológikus tér és $F_n \subseteq X \times X$ olyan halmazok, amelyre fennáll, hogy*

$$\operatorname{Ls} F_n \supseteq F, \quad (\operatorname{Li} F_n \supseteq F).$$

Ekkor

$$\operatorname{Ls}(\operatorname{supp} F_n) \supseteq \operatorname{supp} F, \quad (\operatorname{Li}(\operatorname{supp} F_n) \supseteq \operatorname{supp} F).$$

Bizonyítás: Legyen $x \in \operatorname{supp} F$, azaz létezik, mondjuk $y \in X$, hogy $(x, y) \in F$. A Ls definíciója miatt ekkor minden $U \in \tau(x)$ esetén az $(U \times X) \cap F_n \neq \emptyset$ végtelen sok n-re, ami azt jelenti, hogy létezik $x_{n_k} \in \operatorname{supp} F_{n_k}$ részsorozat amelyre még $x_{n_k} \in U$ is teljesül. Eszerint tehát $x \in \operatorname{Ls}(\operatorname{supp} F_n)$.
A Li-re vonatkozó állítás hasonlóan bizonyítható. □

Tétel 3.3 *Legyen (X, τ) topológikus tér és $F_n \subseteq X \times X$ relatív reflexiv relációk sorozata X-en, amelyre*

$$\operatorname{Ls} F_n = F.$$

Ekkor (X, F) is relatív reflexiv reláció.

Bizonyítás: $(x, y) \in F$. Meg kell mutatnunk, hogy $(x, x) \in F$ és $(y, y) \in F$. Legyen V az (x, x) valamely környezete az $X \times X$ szorzat topológiában. Ekkor a szorzat topológia definíciója szerint létezik $U \in \tau(x)$, hogy $U \times U \subseteq V$. De az előző állítás miatt $x \in \operatorname{Ls}(\operatorname{supp} F_n)$, létezik tehát olyan részsorozat, hogy $x_{n_k} \in \operatorname{supp} F_{n_k}$ és $x_{n_k} \in U$. No de az F_{n_k} relatív reflexivitása szerint $(x_{n_k}, x_{n_k}) \in F_{n_k}$, így

$$(x_{n_k}, x_{n_k}) \in (U \times U) \cap F_{n_k} \subseteq V \cap F_{n_k},$$

ami azt jelenti, hogy $F_n \cap V$ végtelen sok n-re nem üres halmaz. Mivel V tetszőleges környezete lehet az (x, x) pontnak, ez utóbbi éppen azt jelenti, hogy $(x, x) \in F$. Az $(y, y) \in F$ bizonyítása a fentivel analóg módon történik. □

4 Tranzitivitás

Az előzőekhez hasonlóan a részhalmazokon értelmezett tranzitiv relációk köréből először át fogunk térni az egész X-en értelmezett relációk körébe. A kapott fogalom a negatív tranzitivitás gyengítése lesz.

Definíció 4.1 *Azt mondjuk, hogy az (X, R) reláció negatív tranzitív*[2]*, ha*

$$\left.\begin{array}{l}(x, y) \notin R \\ (y, z) \notin R\end{array}\right\} \Rightarrow (x, z) \notin R.$$

Nyilvánvaló, hogy az (X, R^c) komplementer reláció pontosan akkor negatív tranzitív, ha (X, R) tranzitív.
Ha egy negatív tranzitív reláció alaphalmaza valamely halmaz részhalmaza, akkor ha a relációt a bővebb halmaz relációjának tekintjük, akkor a reflexivitáshoz hasonlóan a negatív tranzitivitás sem marad meg. Világos ugyanis, hogy ha olyan (x, z) párból indulunk ki, amelyre $(x, z) \in R$, és találunk egy a tartón kívüli y elemet, akkor $(x, y) \notin R$ és $(y, z) \notin R$. Ennek megfelelően most is gyengítenünk kell a fogalmat.

[2]Találóbb lenne a co-tranzitív elnevezés, de a nemzetközi standardtól nem szeretnék eltérni.

Definíció 4.2 *Legyen (X, R) egy reláció. Azt mondjuk, hogy ez relatív negatív tranzitív, ha minden $y \in \operatorname{supp}(X, R)$ esetén*

$$\left.\begin{array}{l}(x,y) \notin R \\ (y,z) \notin R\end{array}\right\} \Rightarrow (x,z) \notin R.$$

Most is teljesen nyilvánvaló, hogy az ha az egész halmazon értelmezett relációról áttérünk a tartóra leszorított relációra, akkor a relatív negatív tranzitivitás negatív tranzitivitásba megy át, és fordítva. Pontosabban, ha (X, R) egy reláció, akkor $A := \operatorname{supp}(X, R)$ jelölés mellett az (A, R) reláció negatív tranzitív. Fordítva, ha $A \subseteq X$ mellett kiindulunk egy (A, R) negatív tranzitív relációból, akkor az egész X-en értelmezett (X, R) reláció is relatív negatív tranzitív. Azt kaptuk tehát, hogy az az operátor, amely az egész halmazon értelmezett relatív reflexív relációkhoz reflexív relációkat rendelt, most a relatív negatív tranzitív relációk esetén negatív tranzitív relációt eredményez.

Most tovább tárgyalva a reflexivitás és tranzitivitás közti analógiát, azt mutatjuk meg, hogy negatív tranzitív relációk Kuratowski–féle limesze negatív tranzitív relációt ad.

Tétel 4.3 *Legyen (X, τ) topologikus tér és $F_n \subseteq X \times X$ relatív negatív tranzitív relációk sorozata X-en, amelyre*

$$\operatorname{Ls} F_n = \operatorname{Li} F_n = F.$$

Ekkor (X, F) is relatív negatív tranzitív reláció.

Bizonyítás: Tegyük fel –indirekt–, hogy valamely $y \in \operatorname{supp} F$ esetén $(x, y) \notin F$, $(y, z) \notin F$, mégis $(x, z) \in F$. Ekkor minden $U_1 \in \tau(x)$ és minden $U_2 \in \tau(z)$ esetén létezik $(x_n, z_n) \in (U_1 \times U_2) \cap F_n$ minden $n \geq N$ esetén. Legyen $V \in \tau(y)$ is tetszőleges környezet. Láttuk korábban, hogy $y \in \operatorname{Li}(\operatorname{supp} F_n)$, ezért feltehető, hogy minden $n \geq N$ esetén létezik $y_n \in \operatorname{supp} F_n$ és $y_n \in V$. No de az F_n halmazok relatív negatív tranzitivitása miatt az

$$(x_n, y_n) \notin F_n \text{ és } (y_n, z_n) \notin F_n$$

közül legalább az egyik nem teljesülhet, hiszen egyébként $(x_n, z_n) \notin F_n$ következne. Ebből viszont már következik, hogy vagy létezik $(x_{n_k}, y_{n_k}) \in F_{n_k}$ részsorozat, vagy létezik $(y_{n_k}, z_{n_k}) \in F_{n_k}$ részsorozat. Az előbbi nem lehet, hiszen ekkor az (x, y) tetszőleges $U_1 \times V$ környezete végtelen sok F_n-beli pontot tartalmazna, azaz $(x, y) \in \operatorname{Ls} F_n = F$. Az $(y_{n_k}, z_{n_k}) \in F_{n_k}$ esetből teljesen hasonlóan az következne, hogy $(y, z) \in F$, tehát ellentmondást kaptunk. □

5 Alkalmazás

Az előző két szakasz eredményeit a következőképpen foglalhatjuk össze.

Következmény 5.1 *Legyen az (X, F_n) relációk relatív reflexívek és relatív negatív tranzitívek, valamint tegyük fel, hogy az $F_n \subseteq X \times X$ halmaz Kuratowski–értelmeben konvergál valamely $F \subseteq X \times X$ halmazhoz. Ekkor az (X, F) reláció is relatív reflexív és relatív negatív tranzitív.*

Definiáljuk egy kicsit szokatlan módon a preferencia reláció fogalmát eleve folytonosnak:

Definíció 5.2 *Legyen (X, τ) topológikus tér, valamint $A \subseteq X$. Az $(A, \succ)$ relációt preferencia relációnak nevezzük, ha*

- *A zárt halmaz,*
- *$\succ \subseteq A \times A$ nyílt halmaz,*
- *$\succ$ irreflexív,*
- *$\succ$ tranzitív.*

Az X összes részhalmazain értelmezett összes preferencia relációi halmazát jelöljük $\mathcal{P}$-vel.

Most már definiálhatunk egy konvergencia fogalmat a Kuratowski–limesz segítségével a (folytonos) preferenciák $\mathcal{P}$ halmazán.

Tétel 5.3 *Tekintsük az $(A_n, \succ_n) \in \mathcal{P}$ preferenciákat. Legyen*

$$F_n := (A_n \times A_n) \setminus \succ_n$$

komplementer reláció. Ekkor nyilván

- *F_n zárt $A_n \times A_n$-ben, ezért $X \times X$-ben is,*
- *(A_n, F_n) reflexív, ezért (X, F_n) relatív reflexív,*
- *(A_n, F_n) negatív tranzitív, ezért (X, F_n) relatív negatív tranzitív.*

Amennyiben az F_n halmazok Kuratowski-értelemben konvergálnak valamely F halmazhoz az $X \times X$ szorzat topológikus térben, akkor azt mondjuk, hogy az $(A_n, \succ_n)$ preferencia relációk sorozata konvergens. Ebben az esetben definiáljuk a sorozat $(A, \succ)$ határértékét a következőképpen:

$$A := \operatorname{supp}(X, F), \quad \succ := (A \times A) \setminus F.$$

Láttuk, hogy (X, F) relatív reflexív, ezért (A, F) reflexiv, ezért a komplementerére $(A, \succ)$ irreflexív.
Láttuk, hogy (X, F) relatív negatív tranzitív, ezért (A, F) negatív tranzitív, ezért $(A, \succ)$ tranzitív.
Látható, hogy akármilyen halmazok Kuratowski–limsupja zárt halmaz, tehát F zárt, ezért A is az. Így F zárt az $A \times A$ halmaz relatív topológiájában, ezért $\succ$ nyílt.

Azt kaptuk tehát, hogy a határértékül definiált $(A, \succ)$ reláció valóban preferencia reláció. Vegyük még észre azt is, hogy az A tartót az F relatív reflexiv volta miatt definiálhattuk volna

$$A := \{x \in X, (x,x) \in F\}$$

módon is.

Persze természetes módon merül fel a kérdés, hogy mondjunk olyan feltételeket, hogy a fenti konvergencia a $\mathcal{P}$ valamely topologizálásából származó konvergencia-fogalom legyen, sőt olyan feltételekre vágyunk, hogy minél szebb tulajdonságai legyenek ennek a topológikus térnek. Tudjuk például, hogy ha a kiindulásul vett (X, τ) topológikus tér kompakt metrikus tér, akkor az $X \times X$ is ilyen a szorzat topológiával, és kompakt metrikus tér zárt részhalmazai a Hausdorff metrikával ellátva kompakt metrikus teret ad, amely konvergencia fogalma egybeesik a Kuratowski–limesszel. Tehát, ha kompakt metrikus térből indulunk ki, akkor a preferenciákon az imént bevezetett konvergencia fogalom szintén egy kompakt metrikus tér konvergenca fogalma.

Persze rögtön látszik, hogy első nekifutásra sikerült túlontúl erős feltételeket találni, hiszen (X, τ) kompaktsága, még $\mathbb{R}^n$ egy nem korlátos részhalmazán sem teljesül, ami pedig mindenképp része a klasszikus esetnek. Felmerülhetne valamilyen kompaktifikáció, de ott nehéz lenne a bejövő képzetes elemeknek közgazdasági tartalmat adni, bár valamilyen ügyes interpretáció elképzelhető, és még az is lehetséges, hogy közelebb vinne a tartalom megértéséhez.

A másik lehetőség, hogy definiáljuk az $X \times X$ zárt részhalmazain a zárt konvergencia topológiát. Ahhoz, hogy T2 teret kapjunk, tehát a sorozat határértéke egyértelmű legyen, azt kell feltenni, hogy az (X, τ) lokálisan kompakt. Ismert, hogy ha még szeparábilitást is feltesszük az (X, d) lokálisan kompakt metrikus térről, akkor a zárt konvergencia topológia egy kompakt metrizálható topológiát ad, melynek konvergenciája szintén a Kuratowski-limesszel esik egybe. Ezt a kérdéskört is tartalmazó részletes monográfia például [5]. Világos, hogy ez utóbbi sokkal inkább megfelel vizsgálatainknak. Tehát fennáll a következő tétel.

Tétel 5.4 *Megadható olyan topológia, amellyel ellátva $\mathcal{P}$-t kompakt metrikus teret kapunk és ebben a topológiában*

$$(A_n, \succ_n) \to (A, \succ) \Longleftrightarrow \operatorname{Li} F_n = \operatorname{Ls} F_n = F$$

ahol $F_n := (A_n \times A_n) \setminus \succ_n$ *és* $F := (A \times A) \setminus \succ$.

Irodalom

1. Barten P.A., and Böhm, V., 1982, Consumer Theory, in: K. J. Arrow and M. D. Intriligator, eds., *Handbook of Mathematical Economics*, Vol. 1, (North–Holland Amsterdam).

2. Bridges, S. D. and Mehta B. G., 1995, Representations of Preference Orderings. *Lecture notes in economics and mathematical systems* **422**, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
3. Dancs, S., 1980, Halmazértékű topológiák, Kézirat.
4. Eilenberg, S., 1941, Ordered Topological Spaces, *American Journal of Mathematics* **63**, 39–45.
5. Hildenbrand, W., 1974, Core and equilibra of a large economy, Princeton, N. J., Princeton University Press.
6. Kreps, D.M., 1990, A course in microeconomic theory, Princeton, N. J., Princeton University Press.
7. Rader, T., 1963, The Existence of Utility Function to Represent Preferences, *Review of Economic Studies* **31**, 229-232.
8. Schmeidler, D., 1971, A condition for completnes of partial preference relation, *Econometrica* **39**, 403-404.
9. Sonnenschein, H., 1965, The Relationship Between Transitive Preference and the Structure of the Choice Space, *Econometrica* **33**, 624-634.
10. Uzawa, H., 1960, Preference and Rational Choice in the Theory of Consumption *Proceedings of a Symposium on Mathematical Methods in the Social Sciences*, Stanford: Stanford University Press.

NEIGHBORING PREFERENCES

The tastes of economic agents are described by preference relations. The intuitive concept of 'similar' tastes is therefore made precise mathematically by a topology on the set of all preferences. We need a topology that is metrizable, separable or even compact. Such a topology exists and can easily be characterized. The natural candidate for a topology on the set of all preference relations is the closed convergence topology.

FELTÉTELES SZÉLSŐÉRTÉKFELADATOK A MIKROÖKONÓMIÁBAN[1]

SZABÓ IMRE[2]
BKÁE Matematika Tanszék, Budapest

A mikroökonómiában mind a fogyasztási elmélet, mind a termelési elmélet a gazdasági szereplők viselkedését igen egyszerű szélsőértékfeladatokkal írja le. Ezeket a ma már klasszikusnak számító feladatokat már sokféleképpen megvizsgálták. Mindkét elméletben kétféle megközelítésben is megfogalmazták a problémát.

1 Bevezetés

A dolgozat a fogyasztók illetve a termelők viselkedésének a mikroökonómiában szokásos szélsőértékfeladatokkal való jellemzése hátterét vizsgálja. Ez egy igen régen vizsgált terület, sőt a graduális tananyag része is, ennek ellenére még nem teljesen kidolgozott. A dolgozat ezen terület széles körben ismert állításait (ún. néptételeit) gondolja újra, elsősorban Diewert [4] és [5] dolgozata alapján. Úgy igyekeztem elrendezni az állításokat és megfogalmazni a bizonyításokat, hogy jól látszódjon, miszerint egyrészt a kapott leképezések (például indirekt hasznossági függvény, költségvetési leképezés, keresleti leképezés) tulajdonságai a szélsőértékfeladatok függvényeinek milyen tulajdonságaiból következnek, másrészt mi a felhasznált matematikai eszközök (például a Berge-tétel) szerepe. Ennek során sikerült eléggé áttekinthető bizonyítást találni a költségvetési leképezés folytonosságára, amely általánosabb esetben is működik. Továbbra is nyitott kérdésnek mondható az értékfüggvény deriválhatóságának a problematikája, amelynek vizsgálata meghaladja e dolgozat kereteit.

Érdekes módon kétféle szélsőértékfeladattal is jellemezhetjük a fogyasztókat: egy maximum- és egy minimumfeladattal. Ezek a feladatok ugyanannak a dolognak két különböző, de teljesen egyenrangú megközelítései, amelyek egymáshoz való viszonya ismert. Azonban tudjuk, hogy a szélsőértékfeladatok általában is összetartozó párban jelennek meg. Az egyes problémák kellő matematikai kitisztázása után távolabbi cél lehet a mikroökonómia e két feladatának egymáshoz való viszonyát leírni, ezen viszony konvex analízisbeli hátterét megvilágítani. Mindezek ismeretében ezen feladatok közgazdasági értelmezése gazdagabbá és harmonikusabbá tehető majd.

[1]Beérkezett: 1998. október 7.

[2]A kutatást részben a Soros Alapítvány Belföldi Doktorandusz Ösztöndíj programja támogatta.

2 A haszonmaximalizálási feladat (Marshall-féle megközelítés)

Elsőként a haszonmaximalizálási feladatot, a Marshall-féle megközelítést tárgyaljuk. Ez a megközelítés azért is érdekes, mert az általános egyensúlyelmélet Arrow-Debreu modeljében ennek a feladatnak egy általánosításával írják le a fogyasztók magatartását. Az egyensúly létezésének, azaz a Kakutani fixponttétel alkalmazhatóságának a feltétele, a Berge-tételen keresztül, a költségvetési leképezés folytonossága. Ennek a bizonyítása tekinthető az elmélet legmunkásabb részének. Az alábbiakban a haszonmaximalizálási alapfeladat és az általánosított haszonmaximalizálási feladat költségvetési leképezésének a folytonosságát hasonló gondolatmenettel bizonyítjuk.

Legyen $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ adott függvény. Tekintsük a következő, $(\mu, p) \in \operatorname{int}\mathbb{R}_+ \times \operatorname{int}\mathbb{R}^n_+$ paraméterpárral paraméterezett feladatsereget:

$$\begin{aligned} & f(x) \to \max \\ & \text{miközben } \ \langle p, x\rangle \le \mu \text{ és } x \in \mathbb{R}^n_+ \end{aligned} \tag{1}$$

2.1 Definíció. *Az (1) feladatsereg* feltételi leképezés*ének nevezzük azt a $H : \operatorname{int}\mathbb{R}_+ \times \operatorname{int}\mathbb{R}^n_+ \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ halmazértékű leképezést, amelyre $\forall\ (\mu, p) \in \operatorname{int}\mathbb{R}_+ \times \operatorname{int}\mathbb{R}^n_+$ esetén*

$$H(\mu, p) := \{x \in \mathbb{R}^n_+ : \langle p, x\rangle \le \mu\}\,.$$

Ekkor az (1) feladatsereg a következő ekvivalens alakba írható:

$$\begin{aligned} & f(x) \to \max \\ & \text{miközben } \ x \in H(\mu, p) \end{aligned}$$

2.2 Definíció. *Az (1) feladatsereg* megoldásleképezés*ének nevezzük azt az $\mathcal{X} : \operatorname{int}\mathbb{R}_+ \times \operatorname{int}\mathbb{R}^n_+ \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$, halmazértékű leképezést, amelyre $\forall\ (\mu, p) \in \operatorname{int}\mathbb{R}_+ \times \operatorname{int}\mathbb{R}^n_+$ paraméterpár esetén*

$$\mathcal{X}(\mu, p) := \operatorname{argmax}_{H(\mu,p)} f\,.$$

Amennyiben $\forall\ (\mu, p) \in \operatorname{int}\mathbb{R}_+ \times \operatorname{int}\mathbb{R}^n_+$ esetén $\mathcal{X}(\mu, p) \neq \emptyset$, akkor az $\mathcal{X}$ halmazértékű leképezés egy $\chi : \operatorname{int}\mathbb{R}_+ \times \operatorname{int}\mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n_+$ szelekcióját az (1) feladatsereg egy megoldásfüggvény*ének nevezünk.*

2.3 Definíció. *Az (1) feladatsereg* értékfüggvény*ének azt az $f^\vee : \operatorname{int}\mathbb{R}_+ \times \operatorname{int}\mathbb{R}^n_+ \to \overline{\mathbb{R}}$ függvényt nevezzük, amelyre*

$$f^\vee(\mu, p) := \sup_{H(\mu,p)} f\,.$$

Ha létezik $\chi : \operatorname{int}\mathbb{R}_+ \times \operatorname{int}\mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n_+$ megoldásfüggvénye a feladatseregnek, akkor $\forall\ (\mu, p) \in \operatorname{int}\mathbb{R}_+ \times \operatorname{int}\mathbb{R}^n_+$ esetén $f^\vee(\mu, p) = f(\chi(\mu, p))$, így $f^\vee = f \circ \chi$.

2.4 Megjegyzés. Az értékfüggvény segítségével a megoldásleképezés a következőképpen is megadható: $\forall\ (\mu, p) \in \mathrm{int}\mathbb{R}_+ \times \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+$ paraméterpár esetén

$$\mathcal{X}(\mu, p) = \{x \in H(\mu, p) : f(x) = f^\vee(\mu, p)\}\,.$$

2.5 Megjegyzés. A fogyasztási elméletben a fentieket a következőképpen interpretálhatjuk: Tekintsünk egy gazdaságot, amelyben tegyük föl, hogy egy fogyasztónak van egy fogyasztási halmaza, ez legyen $\mathbb{R}^n_+$. Jelölje $x \in \mathbb{R}^n_+$ a fogyasztási javaknak, $p \in \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+$ pedig ezen fogyasztási javak árainak vektorát. A fogyasztó rendelkezik egy $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ hasznossági függvénnyel, valamint $\mu \in \mathrm{int}\mathbb{R}_+$ nagyságú jövedelemmel. A fogyasztó a fogyasztási javainak vektorát úgy határozza meg, hogy maximalizálja az $f(x)$ hasznosságát a $\langle p, x\rangle \le \mu$ költségvetési feltétel mellett. Ekkor az (1) feladatot *haszonmaximalizálási feladatnak*, a $H : \mathrm{int}\mathbb{R}_+ \times \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+ \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ feltételi leképezést *költségvetési leképezésnek*, az $\mathcal{X} : \mathrm{int}\mathbb{R}_+ \times \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+ \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ megoldásleképezést *Walras-* illetve *Marshall-féle* vagy *közönséges verseny keresleti leképezésnek*, az $f^\vee$: $\mathrm{int}\mathbb{R}_+ \times \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+ \to \overline{\mathbb{R}}$ értékfüggvényt *indirekt hasznossági függvénynek* nevezzük.

A későbbi (4) feladattal ellentétben az (1) feladatnak nincs interpretációja a termelési elméletben, mert a profitmaximalizálási feladat más szerkezetű.

2.6 Definíció. *Az (1) feladatban μ-vel osztva, $\frac{p}{\mu}$ helyett p-t írva, a feladatnak a következő módosítását kapjuk:*

$$\begin{aligned} & f(x) \to \max \\ & \text{miközben } \ \langle p, x\rangle \le 1 \ \textit{és}\ x \in \mathbb{R}^n_+ \end{aligned} \tag{2}$$

A (2) feladatsereg feltételi leképezése *az a* $\hat{H} : \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+ \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ *halmazértékű leképezés, amelyre* $\forall\ p \in \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+$ *esetén*

$$\hat{H}(p) := \{x \in \mathbb{R}^n_+ : \langle p, x\rangle \le 1\}\,.$$

A (2) feladatsereg megoldásleképezése *az az* $\hat{\mathcal{X}} : \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+ \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ *halmazértékű leképezés, amelyre* $\hat{\mathcal{X}}(p) := \mathrm{argmax} f|_{\hat{H}(p)}$. *A (2) feladatsereg* értékfüggvénye *az az* $\hat{f}^\vee : \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+ \to \overline{\mathbb{R}}$ *függvény, amelyre*

$$\hat{f}^\vee(p) := \sup f|_{\hat{H}(p)} = \sup\{f(x) : \langle p, x\rangle \le 1 \ \textit{és}\ x \in \mathbb{R}^n_+\}\ .$$

Ha létezik $\chi : \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n_+$ *megoldásfüggvénye e feladatseregnek, akkor* $\hat{f}^\vee(p) = f(\chi(p))$, *így* $\hat{f}^\vee = f \circ \chi$.

2.1 A feltételi (költségvetési) leképezés tulajdonságai

2.7 Állítás. *A (2) feladatsereg* $\hat{H} : \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+ \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ *feltételi leképezése*

(1) konvex, kompakt értékű

(2) *lokálisan Lipschitz-folytonos a Hausdorff-metrikára nézve, így Hausdorff-folytonos, ezért*

(3) *Vietoris-folytonos leképezés.*

Bizonyítás. (1) A $\hat{H}$ nyilván konvex és zárt értékű. Belátjuk még, hogy korlátos értékű. Legyen $p \in \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+$ tetszőleges adott, ekkor $\exists\ \alpha > 0$, hogy $\forall\ k = 1, \dots, n$ esetén $p_k \geq \alpha$. Legyen $x \in \hat{H}(p)$ tetszőleges, ekkor egyrészt $x \in \mathbb{R}^n_+$, másrészt

$$1 \geq \langle p, x\rangle = \sum_{k=1}^{n} p_k \cdot x_k \geq \sum_{k=1}^{n} \alpha \cdot x_k = \alpha \sum_{k=1}^{n} x_k = \|x\|_1 \geq \alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\|x\|,$$

azaz $\|x\| \leq \frac{\sqrt{2}}{\alpha}$, jelölje $\mathcal{K} := \frac{\sqrt{2}}{\alpha}$, ekkor $\|x\| \leq \mathcal{K}$. Ezek szerint a $\hat{H}(p)$ halmaz korlátos. Mivel egy zárt halmaznak és egy zárt halmaz folytonos ősképének a metszete, azért zárt is, így kompakt.

(2) Legyen $p \in \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+$ tetszőleges adott, ekkor $\exists\ \alpha > 0$, hogy $\forall\ k = 1, \dots, n$ esetén $p_k \geq \alpha$, ezért $\exists\ \delta > 0$, hogy $\forall\ q \in B(p, \delta)$ mellett $\forall\ k = 1, \dots, n$ esetén $p_k \geq \frac{\alpha}{2}$.

A $B(p, \delta)$ halmazon a $\hat{H}$ egyenletesen korlátos. Valóban: Legyen $q \in B(p, \delta)$ tetszőleges. Legyen $x \in \hat{H}(q)$, ekkor egyrészt $x \in \mathbb{R}^n_+$, másrészt

$$1 \geq \langle q, x\rangle = \sum_{k=1}^{n} q_k \cdot x_k \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha}{2} \cdot x_k = \frac{\alpha}{2} \sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{\alpha}{2}\|x\|_1 \geq \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\|x\|,$$

azaz $\|x\| \leq \frac{2\sqrt{2}}{\alpha}$, jelölje $\mathcal{K} := \frac{2\sqrt{2}}{\alpha}$, ekkor $\|x\| \leq \mathcal{K}$. Legyenek $q_1, q_2 \in B(p, \delta)$. Belátjuk, hogy ha az $x_1 \in \hat{H}(q_1)$, akkor az $x_2 := \frac{1}{1+\mathcal{K}\|q_2-q_1\|} \cdot x_1 \in \hat{H}(q_2)$. Ugyanis: Legyen $x_1 \in \hat{H}(q_1)$, ekkor egyrészt $x_1 \in \mathbb{R}^n_+$, másrészt $\langle q_1, x_1\rangle \leq 1$, így $\langle q_2, x_1\rangle = \langle q_1, x_1\rangle + \langle q_2 - q_1, x_1\rangle \leq 1 + \|q_2 - q_1\| \cdot \|x_1\| \leq 1 + \mathcal{K}\|q_2 - q_1\|$, ezért az $x_2 = \frac{1}{1+\mathcal{K}\|q_2-q_1\|} \cdot x_1$ esetén $\langle q_2, x_2\rangle = \langle q_2, \frac{1}{1+\mathcal{K}\|q_2-q_1\|} \cdot x_1\rangle = \frac{1}{1+\mathcal{K}\|q_2-q_1\|}\langle q_2, x_1\rangle \leq 1$.

Végül belátjuk, hogy $\forall q_1, q_2 \in B(p, \delta)$ esetén

(a) $\hat{H}(q_1) \subset B(\hat{H}(q_2), \mathcal{K}^2\|q_2 - q_1\|)$,
(b) $\hat{H}(q_2) \subset B(\hat{H}(q_1), \mathcal{K}^2\|q_2 - q_1\|)$,
(c) ezért $d_H(\hat{H}(q_2), \hat{H}(q_1)) \leq \mathcal{K}^2\|q_2 - q_1\|$.

(a) Legyen $x_1 \in \hat{H}(q_1)$ tetszőleges, ekkor a fentiek szerint egyrészt az $x_2 := \frac{1}{1+\mathcal{K}\|q_2-q_1\|} \cdot x_1 \in \hat{H}(q_2)$, másrészt $\|x_1 - x_2\| = \|x_1 - \frac{1}{1+\mathcal{K}\|q_2-q_1\|} \cdot x_1\| = |1 - \frac{1}{1+\mathcal{K}\|q_2-q_1\|}| \cdot \|x_1\| \leq \frac{\mathcal{K}\|q_2-q_1\|}{1+\mathcal{K}\|q_2-q_1\|}| \cdot \mathcal{K} \leq \mathcal{K}^2\|q_2 - q_1\|$.
A (b) fordított szereposztással adódik, míg a (c) ezekből következik.

Ezek szerint a $\hat{H}$ halmazértékű leképezés a $B(p, \delta)$ környezetben Lipschitz-Hausdorff-folytonos, így az $\mathrm{int}\mathbb{R}^n_+$ halmazon lokálisan Lipschitz-Hausdorff-folytonos, ezért Hausdorff-folytonos.

(3) Következik (2)-ből. □

2.8 Állítás. *A (1) feladatsereg* $H : \mathrm{int}\mathbb{R}_+ \times \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+ \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ *feltételi (költségvetési) leképezése*

(1) konvex, kompakt értékű,

(2) lokálisan Lipschitz-folytonos a Hausdorff-metrikára nézve, így Hausdorff-folytonos,

(3) Vietoris-folytonos leképezés.

Bizonyítás. Egyrészt látható, hogy $H = \hat{H} \circ \mathrm{frac}$, ahol $\mathrm{frac} : \mathrm{int}I\!R_+ \times \mathrm{int}I\!R^n_+ \to I\!R^n_+$, amelyre $\mathrm{frac}(\mu, p) = \frac{p}{\mu}$. Másrészt $\hat{H}$ az előző állítás szerint lokálisan Lipschitz-folytonos a Hausdorff-metrikára nézve, a frac függvény lokákisan Lipschitz-folytonos, azért a kompozíciójuk azaz a H halmazértékű leképezés, konvex és kompakt értékű lokálisan Lipschitz-Hausdorff-folytonos, ezért Hausdorff- folytonos, így Vietoris-folytonos leképezés. □

2.9 Megjegyzés. A fenti állítás alapvetően fontos, mert a Berge-tétel alapján ezen múlik mind a megoldásleképezés felső-Vietoris-folytonossága, mind az értékfüggvény folytonossága.

2.2 A megoldásleképezés tulajdonságai

Az (1) feladatsereg megoldásleképezése (keresleti leképezése) a következő tulajdonságokkal rendelkezik.

2.10 Állítás.

(1) Ha az $f : I\!R^n_+ \to I\!R$ függvény folytonos, akkor $\mathcal{X} : \mathrm{int}I\!R_+ \times \mathrm{int}I\!R^n_+ \to \mathcal{P}(I\!R^n_+)$ felső-Vietoris-folytonos.

(2) Ha az $f : I\!R^n_+ \to I\!R$ függvény kvázikonkáv, akkor $\mathcal{X} : \mathrm{int}I\!R_+ \times \mathrm{int}I\!R^n_+ \to \mathcal{P}_{conv}(I\!R^n_+)$ konvex értékű, azaz $\forall\ (\mu, p) \in \mathrm{int}I\!R_+ \times \mathrm{int}I\!R^n_+$ esetén $\mathcal{X}(\mu, p) \subset \mathcal{P}(I\!R^n_+)$ konvex halmaz.

(3) Ha az $f : I\!R^n_+ \to I\!R$ függvény szigorúan kvázikonkáv, akkor $\mathcal{X}$ értékei egyelemű halmazok, azaz $\mathcal{X} = \chi : \mathrm{int}I\!R_+ \times \mathrm{int}I\!R^n_+ \to I\!R^n_+$ függvény, azaz $\forall\ (\mu, p) \in \mathrm{int}I\!R_+ \times \mathrm{int}I\!R^n_+$ esetén $\exists!\ \chi(\mu, p)$ megoldása az (1) feladatnak.

Bizonyítás. (1) Mivel a $H : \mathrm{int}I\!R_+ \times \mathrm{int}I\!R^n_+ \to \mathcal{P}(I\!R^n_+)$ kompakt halmazértékű, Vietoris-folytonos leképezés, azért ez következik a Berge-tételből.

(2) Mivel az f kvázikonkáv, azért $\forall\ (\mu, p) \in \mathrm{int}I\!R_+ \times \mathrm{int}I\!R^n_+$ paraméterpár esetén $f^{-1}([f^{\vee}(\mu, p), \infty)) \subset I\!R^n_+$ konvex halmaz, ezért az

$$\mathcal{X}(\mu, p) = f^{-1}([f^{\vee}(\mu, p), \infty)) \cap I\!R^n_+ \cap \langle p, .\rangle^{-1}(-\infty, \mu]$$

halmaz is konvex.

(3) Indirekt módon tegyük fel, hogy a $\mathcal{X}(\mu, p)$ megoldáshalmaz több pontból áll, legyen $x_1, x_2 \in \mathcal{X}(\mu, p)$. Mivel (2) szerint az $\mathcal{X}(\mu, p)$ halmaz konvex, azért $\forall\ \lambda \in (0, 1)$ esetén $\lambda x_1 + (1 - \lambda x_2) \in \mathcal{X}(\mu, p)$, mivel f szigorúan kvázikonkáv, azért $f(\lambda x_1 + (1 - \lambda x_2)) > \min\{f(x_1), f(x_2)\}$, ami ellentmondás. □

2.3 Az értékfüggvény tulajdonságai

Az (1) feladatsereg $f^\vee : \mathrm{int}\mathbb{R}_+ \times \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+ \to \overline{\mathbb{R}}$ értékfüggvénye (indirekt hasznossági függvénye) a következő tulajdonságokkal rendelkezik.

2.11 Állítás.

(1) Ha az $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ függvény folytonos, akkor $f^\vee : \mathrm{int}\mathbb{R}_+ \times \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+ \to \overline{\mathbb{R}}$ véges és folytonos.

(2) Ha az $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ függvény monoton növekedő, akkor

(a) $\forall p \in \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+$ esetén $f^\vee(.,p) : \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+ \to \overline{\mathbb{R}}$ monoton növekedő,

(b) $\forall \mu \in \mathrm{int}\mathbb{R}_+$ esetén $f^\vee(\mu,.) : \mathrm{int}\mathbb{R}_+ \to \overline{\mathbb{R}}$ monoton csökkenő.

(3) Az $f^\vee : \mathrm{int}\mathbb{R}_+ \times \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+ \to \overline{\mathbb{R}}$ függvény kvázikonvex. (A (3) tulajdonsághoz nincs szükség az $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ függvény kvázikonkávitására.)

Bizonyítás. (1) Mivel a $H : \mathrm{int}\mathbb{R}_+ \times \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+ \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ kompakt halmazértékű, Vietoris-folytonos leképezés, azért ez következik a Berge-tételből.
(2) (a) Legyen $p \in \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+$ tetszőleges adott. Ha $\mu_1 \le \mu_2$, akkor $(-\infty, \mu_1] \subset (-\infty, \mu_1]$ ezért $\langle p, .\rangle^{-1}(-\infty, \mu_1] \subset \langle p, .\rangle^{-1}(-\infty, \mu_2]$ így $H(\mu_1, p) \subset H(\mu_2, p)$, mivel az f monoton növekedő, azért $f^\vee(\mu_1, p) = \sup_{H(\mu_1,p)} f \le \sup_{H(\mu_2,p)} f = f^\vee(\mu_1, p)$.
(b) Legyen $\mu \in \mathrm{int}\mathbb{R}^+$ tetszőleges adott. Ha $p_1 \le p_2$, akkor $\langle p_2, .\rangle^{-1}(-\infty, \mu] \subset \langle p_1, .\rangle^{-1}(-\infty, \mu]$, ugyanis ha valamely $x \in \mathbb{R}^n_+$ esetén $\langle p_2, x\rangle \le \mu$, akkor $\langle p_1, x\rangle \le \mu$, (ha $p_1 < p_2$, akkor is csak $\le$-ség van,) így $H(\mu, p_2) \subset H(\mu, p_1)$, mivel az f monoton növekedő, azért $f^\vee(\mu, p_1) = \sup_{H(\mu,p_1)} f \ge \sup_{H(\mu,p_2)} f = f^\vee(\mu, p_2)$.
(3) Be kell látni, hogy $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ esetén az $(f^\vee)^{-1}(-\infty, \alpha] \subset \mathbb{R}^n_+$ konvex. Legyenek (μ_1, p_1), $(\mu_2, p_2) \in (f^\vee)^{-1}(-\infty, \alpha]$, azaz $f^\vee(\mu_1, p_1)$, $f^\vee(\mu_2, p_2) \le \alpha$ tetszőlegesek, legyen $\lambda \in (0,1)$ tetszőleges.
Legyen $(\mu, p) := (\lambda\mu_1 + (1-\lambda)\mu_2, \lambda p_1 + (1-\lambda)p_2)$. Be kell látni, hogy $(\mu, p) \in (f^\vee)^{-1}(-\infty, \alpha]$. Legyen $x \in H(\mu, p)$ tetszőleges, azaz

$$\lambda\langle p_1, x\rangle + (1-\lambda)\langle p_2, x\rangle \le \lambda\mu_1 + (1-\lambda)\mu_2 \,.$$

Ekkor $\langle p_1, x\rangle \le \mu_1$ vagy $\langle p_2, x\rangle \le \mu_2$. Ugyanis, indirekt módon tegyük fel, hogy $\langle p_1, x\rangle > \mu_1$ és $\langle p_2, x\rangle > \mu_2$, ekkor mivel $\lambda, (1-\lambda) > 0$, azért $\lambda\langle p_1, x\rangle + (1-\lambda)\langle p_2, x\rangle > \lambda\mu_1 + (1-\lambda)\mu_2$, ami ellentmondás.
Ha $\langle p_1, x\rangle \le \mu_1$, akkor $f(x) \le f^\vee(\mu_1, p_1) \le \alpha$, ha $\langle p_2, x\rangle \le \mu_2$, akkor $f(x) \le f^\vee(\mu_2, p_2) \le \alpha$, ezért $f(x) \le \alpha$. Ez igaz $\forall\ x \in H(\mu, p)$ estetén, azért $f^\vee(\mu, p) \le \alpha$, azaz $(\mu, p) \in (f^\vee)^{-1}(-\infty, \alpha]$. □

2.4 A haszonmaximalizálási feladat általánosítása

Az általános egyensúlyelmélet Arrow-Debreu modelljében a fogyasztókat leíró haszonmaximalizálási feladat a fenti (1) feladatnál valamivel általánosabban van megfogalmazva. Nem azt teszik fel, hogy a fogyasztási halmaz $\mathbb{R}^n_+$, hanem azt, hogy az $\mathbb{R}^n$-nek egy konvex és zárt részhalmaza. A kompaktságot direkt módon nem kell feltenni, mert egy ügyes trükkel, a releváns allokáció fogalmának a bevezetésével el lehet érni, hogy az egyensúly szempontjából szóbajöhető pontok halmaza egy rögzített kompakt halmazban legyen benne.

Az alábbiakban legyen X Banach-tér (speciálisan ez szokásosan $\mathbb{R}^n$). Legyen $M \subset X$ egy konvex, kompakt halmaz. Ezt tekintjük egy fogyasztó fogyasztási halmazának. Jelölje $x \in X$ a fogyasztási javaknak, $p \in X^*$ pedig ezen fogyasztási javak árainak vektorát. A fogyasztót egy $f : X \to \mathbb{R}$ hasznossági függvény jellemez. A fogyasztó jövedelme a következőkből áll: Egyrész rendelkezik egy $a \in X$ kezdőkészlettel, másrészt egy $h : X^* \to \mathbb{R}$ folytonos függvénnyel, ami megadja a termelők profitjából való részesedését, ezek alapján a jövedelme egy adott $p \in X^*$ ár esetén $p(a) + h(p)\ (= \langle p, a\rangle + h(p)\,)$.

A fogyasztó a fogyasztási javainak vektorát úgy határozza meg, hogy maximalizálja az $f(x)$ hasznosságát a $p(x) \le p(a) + h(p)$ (azaz $\langle p, x\rangle \le \langle p, a\rangle + h(p)\,$) költségvetési feltétel mellett.

A fogyasztó viselkedését a következő, $p \in X^*$ paraméterrel paraméterezett feladatsereg írja le:

$$\begin{aligned} & f(x) \to \max \\ & \text{miközben} \ \ x \in M \text{ és } p(x) \le p(a) + h(p) \end{aligned} \tag{3}$$

2.12 Definíció. *Az (3) feladatsereg feltételi leképezésének (költségvetési leképezésének) nevezzük azt a* $H : X^* \to \mathcal{P}(X)$ *azt a halmazértékű leképezést, amelyre* $\forall\ p \in X^*$ *esetén*

$$H(p) := \{x \in M : p(x) \le p(a) + h(p)\}\,.$$

Ekkor az (3) feladatsereg a következő ekvivalens alakba írható:

$$\begin{aligned} & f(x) \to \max \\ & \text{miközben} \ \ x \in H(p) \end{aligned}$$

2.13 Definíció. *Az (3) feladatsereg* megoldásleképezés*ének (keresleti leképezésének) nevezzük azt az* $\mathcal{X} : X^* \to \mathcal{P}(X)$ *halmazértékű leképezést, amelyre* $\forall\ p \in X^*$ *paraméter esetén*

$$\mathcal{X}(p) := \operatorname{argmax}_{H(p)} f\,.$$

Amennyiben $\forall\ p \in X^*$ *esetén* $\mathcal{X}(p) \neq \emptyset$*, akkor az* $\mathcal{X}$ *halmazértékű leképezés egy* $\chi : X^* \to X$ *szelekcióját az (3) feladatsereg egy* megoldásfüggvény*ének nevezünk.*

2.14 Megjegyzés. Az Arrow-Debreu elméletben az egyensúly létezéséhez, azaz a Kakutani-tétel alkalmazhatóságához be kell látni, hogy a keresleti leképezés felső-Vietoris-folytonos. Ez a Berge-tétel alkalmazásával a költségvetési leképezés Vietoris-folytonosságából következik. Ennek a bebizonyítása tekinthető az elmélet legmunkaigényesebb részének. Ennek során használjuk fel a pozitív kezdőkészletre (más néven létminimumra vagy döntési szabadságra) vonatkozó, viszonylag erősnek tekinthető, közgazdaságilag nehezen indokolható feltételt:

$$\forall\ p \in X^* \ \text{ árvektor esetén } \exists\ b_p \in X, \text{ hogy } p(b_p) < p(a) + h(p)\ .$$

Az alábbiakban az (3) feladatsereg H költségvetési leképezésének a Vietoris-folytonosságát az (1) feladatsereg H költségvetési leképezésének Vietoris-folytonosságához hasonlóan, a bizonyítás némi módosításával látjuk be.

2.15 Állítás. *Legyen* $\hat{H} : X^* \to \mathcal{P}(X)$ *az a halmazértékű leképezés, amelyre* $\forall p \in X^*$ *esetén* $\forall\ p \in X^*$ *esetén*

$$\hat{H}(p) = \{x \in M : p(x) \leq 1\}.$$

Tegyük még fel, hogy $\forall\ p \in X^*$ *esetén* $\exists\ b_p \in X$*, hogy* $p(b_p) < 1$ *. Akkor* $\hat{H} : X^* \to \mathcal{P}(X)$ *nemüres, konvex és kompakt értékű, Hausdorff-folytonos, így Vietoris-folytonos leképezés.*

Bizonyítás. Könnyen látható, hogy $\forall\ p \in X^*$ esetén $\tilde{H}(p) \neq \emptyset$, valamint konvex és kompakt halmaz.

Legyen $p \in X^*$ tetszőleges adott. Ekkor $\exists\ \alpha > 0$, hogy $p(b_p) < 1 - \alpha$, ezért $\exists\ \delta_1 > 0$, hogy $\forall\ q \in B(p, \delta_1)$ esetén $q(b_p) < 1 - \alpha$. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Legyen $\mathcal{K} := \max_{x \in M} \|x\| + \text{diam} M$. Legyen $0 < \lambda < \frac{\varepsilon}{\mathcal{K}}$.

Mivel $\lim_{\delta \to 0+} \lambda(1-\alpha) + (1-\lambda)(1+\delta) = \lambda(1-\alpha) + (1-\lambda) = 1 - \lambda\alpha < 1$, azért $\exists\ \delta_2 > 0$, hogy $\lambda(1-\alpha) + (1-\lambda)(1+\delta_2) < 1$. Legyen $\delta_3 := \min\{\delta_1, \frac{\delta_2}{\mathcal{K}}\}$. Ekkor $\forall\ q_1, q_2 \in B(p, \delta_3)$ esetén $\forall\ x \in M$ mellett $|q_2(x) - q_1(x)| \leq \delta_2$, így $q_2(x) \leq q_1(x) + \delta_2$.

Legyenek $q_1, q_2 \in B(p, \delta_3)$ tetszőlegesek. Belátjuk, hogy ekkor $\forall\ x_1 \in \hat{H}(q_1)$ esetén az $x_2 := \lambda \cdot b_p + (1-\lambda) \cdot x_1$ vektorra

(a) $x_2 \in \hat{H}(q_2)$,
(b) $\|x_2 - x_1\| < \varepsilon$, ezért
(c) $x_1 \in B(\hat{H}(q_2), \varepsilon)$.

(a) Mivel az M halmaz konvex, azért $x_2 \in M$. Továbbá $q_2(x_2) = q_2(\lambda \cdot b_p + (1-\lambda) \cdot x_1) = \lambda \cdot q_2(b_p) + (1-\lambda) \cdot q_2(x_1) \leq \lambda(1-\alpha) + (1-\lambda)(q_1(x_1) + \delta_2) \leq \lambda(1-\alpha) + (1-\lambda)(1+\delta_2) < 1$, azaz $q_2(x_2) < 1$, mivel $x_2 \in M$ is, azért $x_2 \in \hat{H}(q_2)$.
(b) $\|x_2 - x_1\| = \|\lambda \cdot b_p + (1-\lambda) \cdot x_1 - x_1\| = \|x_1 - \lambda \cdot (b_p - x_1) - x_1\| = \lambda\|b_p - x_1\| \leq \lambda \cdot \text{diam} M < \frac{\varepsilon}{\mathcal{K}} \cdot \text{diam} M < \varepsilon$.
(c) Következik (a) és (b)-ből.

Ezek szerint $\hat{H}(q_1) \subset B(\hat{H}(q_2), \varepsilon)$. A q_1 és q_2 szerepét felcserélve adódik, hogy $\hat{H}(q_2) \subset B(\hat{H}(q_1), \varepsilon)$. Ezért $\hat{H}(q_1)$ és $\hat{H}(q_2)$ Hausdorff-távolsága nem nagyobb ε-nál, ahonnan $q_2 = p$ választással adódik a $\hat{H}$ leképezésnek a p-beli Hausdorff-folytonossága. □

2.16 Állítás. *Tegyük fel, hogy* $\forall\ p \in X^*$ *árvektor esetén fennáll a pozitív kezdőkészlet feltétele:* $\exists\ b_p \in X$ *hogy* $p(b_p) < p(a) + h(p)$

Akkor a (3) feladatsereg $H : X^* \to \mathcal{P}(X)$ költségvetési leképezése konvex és kompakt értékű, Hausdorff-folytonos, így Vietoris-folytonos leképezés.

Bizonyítás. Egyrészt látható, hogy $H = \hat{H} \circ \frac{\mathrm{id}}{a+h}$, ahol $a : X^* \to I\!R$ az a lineáris leképezés, amelyre $\forall\ p \in X^*$ esetén $a(p) := p(a)$. Másrészt mivel $\hat{H}$ az előző állítás szerint konvex és kompakt értékű, Hausdorff-folytonos, így Vietoris-folytonos leképezés, valamint az $\frac{\mathrm{id}}{a+h}$ folytonos függvény, azért a kompozíciójuk, azaz a H halmazértékű leképezés konvex és kompakt értékű, Hausdorff-folytonos, így Vietoris-folytonos leképezés. □

3 A költségminimalizálási feladat (Hicks-féle megközelítés)

Legyen $f : I\!R^n_+ \to I\!R_+$ adott függvény. Tekintsük a következő, $(\nu, p) \in \mathcal{R}(f) \times \mathrm{int} I\!R^n_+$ paraméterpárral paraméterezett feladatsereget:

$$\begin{aligned} &\langle p, x\rangle \to \min \\ &\text{miközben} \quad f(x) \geq \nu \text{ és } x \in I\!R^n_+ \end{aligned} \tag{4}$$

3.1 Definíció. *Az (4) feladatsereg* feltételi leképezés*ének nevezzük azt a $H : \mathcal{R}(f) \to \mathcal{P}(I\!R^n_+)$, halmazértékű leképezést, amelyre $\forall\ (\nu, p) \in \mathcal{R}(f) \times \mathrm{int} I\!R^n_+$ esetén*

$$H(\nu, p) := \{x \in I\!R^n_+ \ : \ f(x) \geq \nu\}.$$

Megjegyzés: A $H(\nu, .)$ halmazértékű leképezés nyilván konstans.

Ekkor az (4) feladatsereg ekvivalens a következővel:

$$\begin{aligned} &\langle p, x\rangle \to \min \\ &\text{miközben} \quad x \in H(\nu, p) \end{aligned}$$

3.2 Definíció. *Az (4) feladatsereg* megoldásleképezés*ének nevezzük azt az $\mathcal{X} : \mathcal{R}(f) \times \mathrm{int} I\!R^n_+ \to \mathcal{P}(I\!R^n_+)$, halmazértékű leképezést, amelyre $\forall\ (\nu, p) \in \mathcal{R}(f) \times \mathrm{int} I\!R^n_+$ esetén*

$$\mathcal{X}(\nu, p) := \mathrm{argmin}_{H(\nu,p)} \langle p, .\rangle.$$

Tegyük fel, hogy $\forall\ (\nu, p) \in \mathcal{R}(f) \times \mathrm{int} I\!R^n_+$ esetén $\mathcal{X}(\nu, p) \neq \emptyset$, ekkor az $\mathcal{X}$ halmazértékű leképezés egy $\chi : \mathcal{R}(f) \times \mathrm{int} I\!R^n_+ \to I\!R^n_+$ szelekcióját az (4) feladatsereg egy megoldásfüggvény*ének nevezünk.*

3.3 Definíció. *Az (4) feladat* értékfüggvény*ének azt az $f^\wedge : \mathcal{R}(f) \times \mathrm{int} I\!R^n_+ \to \overline{I\!R}$ függvényt nevezzük, amelyre $\forall\ (\nu, p) \in \mathcal{R}(f) \times \mathrm{int} I\!R^n_+$ esetén*

$$f^\wedge(\nu, p) := \inf_{H(\nu,p)} \langle p, .\rangle.$$

Ha létezik $\chi : \mathcal{R}(f) \times \mathrm{int}I\!R^n_+ \to I\!R^n_+$ megoldásfüggvénye a feladatseregnek, akkor $\forall\ (\nu, p) \in \mathcal{R}(f) \times \mathrm{int}I\!R^n_+$ esetén $f^\wedge(\nu,p) = \langle p, \chi(\nu,p)\rangle$, így $f^\wedge = \langle .,. \rangle \circ (pr_2, \chi)$.

3.4 Megjegyzés. Az értékfüggvény segítségével a megoldásleképezés a következőképpen is megadható: $\forall\ (\nu,p) \in \mathcal{R}(f) \times \mathrm{int}I\!R^n_+$ paraméterpár esetén

$$\mathcal{X}(\nu,p) = \{x \in H(\nu,p) : \langle p,x\rangle = f^\wedge(\nu,p)\}.$$

3.5 Megjegyzés. A fentieket mind a fogyasztási elméletben mind a termelési elméletben interpretálhatjuk. A fogyasztási elméletben a fentieket a következőképpen interpretálhatjuk: Tekintsünk egy gazdaságot, amelyben tegyük föl, hogy egy fogyasztónak van egy fogyasztási halmaza, ez legyen $I\!R^n_+$. Jelölje $x \in I\!R^n_+$ a fogyasztási javaknak, $p \in \mathrm{int}I\!R^n_+$ pedig ezen fogyasztási javak árainak vektorát. A fogyasztó rendelkezik egy $f : I\!R^n_+ \to I\!R$ hasznossági függvénnyel. A fogyasztó a fogyasztási javainak vektorát úgy határozza meg, hogy minimalizálja a $\langle p,x\rangle$ költségét, miközben legalább ν megkívánt hasznossági szintet ér el. A (4) feladatnak a korábbi (1) feladattal ellentétben a termelési elméletben is adható egy interpretációja. Tekintsünk egy gazdaságot, amelyben tegyük föl, hogy n input felhasználásával egyetlen outputot állítunk elő. A technológiát egy f termelési függvény írja le, ami azt jelenti, hogy egy adott periódus alatt az x n-dimenziós inputvektor felhasználásával legfeljebb $f(x)$ mennyiségű output állítható elő. A termelő úgy határozza meg az termelési tényezők inputvektorát, hogy minimalizálja a $\langle p,x\rangle$ költségét, miközben legalább ν mennyiséget termel. A fenti esetekben a (4) feladatot *költségminimalizálási feladatnak*, az $\mathcal{X} : \mathcal{R}(f) \times \mathrm{int}I\!R^n_+ \to \mathcal{P}(I\!R^n_+)$ megoldásleképezést *Hicks-féle* vagy *kompenzált keresleti leképezésnek*, az $f^\wedge : \mathcal{R}(f) \times \mathrm{int}I\!R^n_+ \to \overline{I\!R}$ értékfüggvényt *kiadási-* vagy *feltételes költségfüggvénynek*, $\forall p$ esetén a $\partial_1 f^\wedge(.,p) : \mathcal{R}(f) \to \overline{I\!R}$ deriváltfüggvényt (feltéve, hogy ez létezik) *határköltségfüggvénynek* nevezzük.

3.1 A feltételi leképezés tulajdonságai

3.6 Állítás. *Az $f : I\!R^n_+ \to I\!R_+$ függvény pontosan akkor felülről félig folytonos, ha $H : \mathcal{R}(f) \times \mathrm{int}I\!R^n_+ \to \mathcal{P}(I\!R^n_+)$, zárt gráfú.*

Bizonyítás. *Szükségesség:* Legyen az f felülről félig folytonos, és (ν_n, p_n, x_n) graph$H$-beli sorozat, azaz $\forall\ n$-re $f(x_n) \geq \nu_n$. Tegyük fel, hogy $(\nu_n, p_n, x_n) \to (\nu, p, x)$, ekkor $f(x) = f(\lim x_n) \geq \limsup f(x_n) \geq \lim \nu_n = \nu$, azaz $x \in H(\nu,p)$, azaz $(\nu,p,x) \in \mathrm{graph}H$.

Elégségesség: Mivel a H zárt gráfú, azért zárt értékű is, azaz az $f^{-1}[\nu, \infty)$ halmazok zártak, azaz az f felülről félig folytonos. □

3.7 Állítás. *Legyen az $f : I\!R^n_+ \to I\!R_+$ függvény felülről félig folytonos, ekkor $\forall\ (\nu,p) \in \mathcal{R}(f) \times \mathrm{int}I\!R^n_+$ esetén $\exists\ \mathcal{K} > 0$ szám és $\exists\ U \times B(p,\delta)$ környezet, hogy*

1. $\forall\ (\mu, q) \in U \times B(p,\delta)$ esetén $\mathcal{X}(\mu,q) \subset H(\mu,q) \cap B(\mathbf{0}, \mathcal{K})$;

2. legyen $\hat{H} : U \times B(p,\delta) \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ *az a halmazértékű leképezés, amelyre* $\forall\ (\mu,q) \in U \times B(p,\delta)$ *esetén* $\hat{H}(\mu,q) := H(\mu,q) \cap \bar{B}(\mathbf{0},\mathcal{K})$, *ekkor a* $\hat{H}$ *kompakt értékű, felső-Vietoris-folytonos leképezés;*

3. $\forall\ (\mu,q) \in U \times B(p,\delta)$ *esetén* $f^\wedge(\mu,q) = \inf_{H(\mu,q)}\langle q,.\rangle = \inf_{\hat{H}(\mu,q)}\langle q,.\rangle$,

4. $\forall\ (\mu,q) \in U \times B(p,\delta)$ *esetén* $\mathcal{X}(\mu,q) = \{x \in \hat{H}(\mu,q) : \langle q,x\rangle = f^\wedge(\mu,q)\}$.

Bizonyítás. 1. Legyen $(\nu,p) \in \mathcal{R}(f) \times \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+$ tetszőleges adott. Ekkor $\exists\ \alpha > 0$, hogy $\forall\ k = 1,\ldots,n$ esetén $p_k \geq \alpha$, ezért $\exists\ \delta > 0$, hogy $\forall\ q \in B(p,\delta)$ mellett $\forall\ k = 1,\ldots,n$ esetén $q_k \geq \frac{\alpha}{2}$. A következő két eset lehetséges:

I. eset: $\exists\ x_0 \in \mathbb{R}^n_+$, hogy $f(x_0) > \nu$. Ebben az esetben legyen $U := (-\infty,\nu)$, ez környezete ν-nek.

II. eset: $\nu = \max\mathcal{R}(f)$, ekkor $\exists\ x_0 \in \mathbb{R}^n_+$, hogy $f(x_0) = \nu$. Ebben az esetben legyen $U := (-\infty,\nu]$, ez $\mathcal{R}(f)$-beli környezete ν-nek.

Legyen $(\mu,q) \in U \times B(p,\delta)$ tetszőleges. Ekkor egyrészt $x_0 \in H(\mu,q)$. Másrészt $\langle q,x_0\rangle \leq \|q\| \cdot \|x_0\| \leq (\|p\| + \delta) \cdot \|x_0\|$. Legyen $x \in \mathcal{X}(\mu,q)$ tetszőleges, ekkor $\langle q,x\rangle \leq \langle q,x_0\rangle$. A fentiek szerint

$$\frac{\alpha}{2}\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha}{2}x_k \leq \sum_{k=1}^{n} q_k x_k = \langle q,x\rangle \leq \langle q,x_0\rangle \leq (\|p\| + \delta) \cdot \|x_0\|,$$

ezért $\|x\| \leq \mathcal{K} := \sqrt{2}\frac{2}{\alpha}(\|p\| + \delta)\|x_0\|$, azaz $\mathcal{X}(\nu,p) \subset B(\mathbf{0},\mathcal{K})$. Ezek szerint $\mathcal{X}(\mu,q) \subset H(\mu,q) \cap \bar{B}(\mathbf{0},\mathcal{K})$.

2. Mivel a H zárt gráfú, azért a $\hat{H}$ is az, valamint $\hat{H}$ értékei benne vannak egy adott kompakt halmazban, azért felső-Vietoris-folytonos, továbbá ugyanezért nyilván kompakt értékű.

3. Ez abból következik, hogy egyrészt 1. szerint $\forall\ (\mu,q) \in U \times B(p,\delta)$ esetén $\mathcal{X}(\mu,q) \subset \hat{H}(\mu,q)$, másrészt $f^\wedge(\mu,q) = f(\chi(\mu,q))$, ahol $\chi(\mu,q) \in \mathcal{X}(\mu,q)$.

4. A 3 megjegyzés szerint $\forall\ (\nu,p) \in \mathcal{R}(f) \times \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+$ paraméterpár esetén $\mathcal{X}(\nu,p) = \{x \in H(\nu,p) : \langle p,x\rangle = f^\wedge(\nu,p)\}$, így ez következik 3.-ból. □

3.8 Állítás. *Ha az* $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$ *függvénynek nincs lokális maximuma (például szigorúan monoton növekvő), akkor a* $H : \mathcal{R}(f) \times \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+ \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$, *leképezés alsó-Vietoris-folytonos.*

Bizonyítás. 1. Legyen $(\nu,p) \in \mathcal{R}(f) \times \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+$ tetszőleges adott. Legyen $G \subset \mathbb{R}^n_+$ nyílt halmaz, amelyre $H(\nu,p) \cap G \neq \emptyset$, ekkor $\exists\ x \in H(\nu,p) \cap G$, azaz $f(x) \geq \nu$ és $x \in G$. Mivel az $f|_G$-nek x-ben nincs maximuma, azért $\exists\ y \in G$, hogy $f(x) < f(y)$. Ekkor $U := (0, f(y))$ környezete ν-nek, továbbá $\forall\ \mu \in U$ esetén $f(y) > \nu$, ezért $y \in H(\mu,p)$, ezért $y \in H(\mu,p) \cap G$, így $H(\mu,p) \cap G \neq \emptyset$, azaz $\forall\ \mu \in U$ esetén $H(\mu,p) \cap G \neq \emptyset$, azaz a $H(.,p)$ leképezés alsó-Vietoris-folytonos ν-ben. Mivel a H leképezés p-ben konstans, azért a H leképezés alsó-Vietoris-folytonos (ν,p)-ben, mivel (ν,p) tetszőleges, azért az egész értelmezési tartományon. □.

3.2 A megoldásleképezés tulajdonságai

A (4) feladatsereg megoldásleképezése (keresleti leképezése) a következő tulajdonságokkal rendelkezik.

3.9 Állítás.

(1) Ha az $f : I\!\!R^n_+ \to I\!\!R_+$ *függvény kvázikonkáv, akkor* $\mathcal{X} : \mathcal{R}(f) \times \mathrm{int} I\!\!R^n_+ \to \mathcal{P}_{conv}(I\!\!R^n_+)$ *konvex értékű, azaz* $\mathcal{X}(\nu, p) \subset \mathcal{P}(I\!\!R^n_+)$ *konvex halmaz minden* $(\nu, p) \in \mathcal{R}(f) \times \mathrm{int} I\!\!R^n_+$ *esetén.*

(2) Ha az $f : I\!\!R^n_+ \to I\!\!R_+$ *függvény szigorúan kvázikonkáv, akkor* $\mathcal{X}$ *értékei egyelemű halmazok, azaz* $\mathcal{X} = \chi : \mathcal{R}(f) \times \mathrm{int} I\!\!R^n_+ \to I\!\!R^n_+$ *függvény, azaz* $\forall\ (\nu, p) \in \mathcal{R}(f) \times \mathrm{int} I\!\!R^n_+$ *esetén* $\exists!\ \chi(\nu, p)$ *megoldása az (4) feladatnak.*

Bizonyítás. (1) és (2) Legyen $(\nu, p) \in \mathrm{int} I\!\!R_+ \times \mathrm{int} I\!\!R^n_+$ tetszőleges adott.

[[*Állítás:* Legyen az $f : I\!\!R^n_+ \to I\!\!R$ függvény kvázikonkáv, (ebben az esetben $H(\nu, p) = I\!\!R^n_+ \cap f^{-1}[\nu, \infty)$ konvex halmaz), akkor az $\mathrm{argmin}_{H(\nu,p)} \langle p, .\rangle$ halmaz a $H(\nu, p)$ halmaz extremális halmaza.
Bizonyítás: Legyen $x \in \mathrm{argmin}_{H(\nu,p)} \langle p, .\rangle$ tetszőleges, ekkor ha $u, v \in H(\nu, p)$ olyan, hogy valamely $\lambda \in (0, 1)$ esetén $\lambda u + (1 - \lambda)v = x$, ekkor

$$\lambda\langle p, u\rangle + (1 - \lambda)\langle p, v\rangle = \langle p, \lambda u + (1 - \lambda)v\rangle = \langle p, x\rangle = \lambda\langle p, x\rangle + (1 - \lambda)\langle p, x\rangle,$$

így $\lambda(\langle p, u\rangle - \langle p, x\rangle) + (1 - \lambda)\langle p, v\rangle - \langle p, x\rangle = 0$, mivel $\langle p, u\rangle - \langle p, x\rangle \geq 0$ és $\langle p, v\rangle - \langle p, x\rangle \geq 0$, azért $\langle p, u\rangle = \langle p, x\rangle$, és $\langle p, v\rangle = \langle p, x\rangle$, azaz $u \in \mathrm{argmin}_{H(\nu,p)} \langle p, .\rangle$ és $v \in \mathrm{argmin}_{H(\nu,p)} \langle p, .\rangle$.]]

Ebből következik, hogy ha az f kvázikonkáv, akkor $\mathrm{argmin}_{H(\nu,p)} \langle p, .\rangle$ konvex halmaz. Továbbá az $f : I\!\!R^n_+ \to I\!\!R$ függvény szigorúan kvázikonkáv pontosan akkor, ha $f^{-1}[\nu, \infty) \subset I\!\!R^n_+$ szigorúan konvex halmaz, azaz minden extremális halmaza singleton, ezért a $H(\nu, p) = I\!\!R^n_+ \cap f^{-1}[\nu, \infty)$ halmaz is szigorúan konvex, ezért az $\mathrm{argmin}_{H(\nu,p)} \langle p, .\rangle$ halmaz singleton. □

3.3 Az értékfüggvény tulajdonságai

Ha csupán azt tesszük is fel, hogy létezik az (4) feladatnak megoldása, azaz az f függvény felülről félig folytonos, az értékfüggvénye már akkor is számos szép tulajdonsággal rendelkezik.

3.10 Állítás *Ha az* $f : I\!\!R^n_+ \to I\!\!R_+$ *függvény felülről félig folytonos (azaz az* $f^{-1}[\nu, \infty) \subset I\!\!R^n_+$ *halmaz zárt), akkor*

1. *az* $f^\wedge : \mathcal{R}(f) \times \mathrm{int} I\!\!R^n_+ \to \overline{I\!\!R}$ *értékfüggvény*
   - *(a) nemnegatív,*
   - *(b) véges értékű,*
   - *(c) alulról félig folytonos,*
2. $\forall\ p \in \mathrm{int} I\!\!R^n_+$ *esetén az* $f^\wedge(., p) : \mathcal{R}(f) \to \overline{I\!\!R}$ *függvény*

(a) *monoton növekedő,*

(b) *ha* $0 \in \mathcal{R}(f)$, *akkor* $f^\wedge(0,p) = 0$,

(c) *ha* $\sup f = \infty$, *akkor* $\lim_\infty f^\wedge(.,p) = \infty$,

3. $\forall\ \nu \in \mathcal{R}(f)$ *esetén az* $f^\wedge(\nu,.) : \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+ \to \overline{\mathbb{R}}$ *függvény*

(a) *pozitívan homogén*

(b) *konkáv,*

(c) *monoton növekedő.*

(d) *folytonos.*

Bizonyítás. 1. (a) Mivel $\forall\ (\nu,p) \in \mathcal{R}(f) \times \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+$ esetén $f^\wedge(\nu,p) = \inf_{H(\nu,p)}\langle p,.\rangle$, ahol $H(\nu,p) = \mathbb{R}^n_+ \cap f^{-1}[\nu,\infty)$, azért $f^\wedge(\nu,p) \geq 0$.

(b) és (c) A 3.1 3. szerint $\forall\ (\nu,p) \in \mathcal{R}(f) \times \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+$ pontnak $\exists\ U \times B(p,\delta)$ környezete, hogy $\forall\ (\mu,q) \in U \times B(p,\delta)$ esetén

$$f^\wedge(\mu,q) = \inf_{\hat{H}(\mu,q)}\langle p,.\rangle\,,$$

továbbá ugyanezen 3.1 állítás 2. szerint ebben a környezetben a $\hat{H}$ feltételi leképezés kompakt értékű, felső-Vietoris folytonos. Ezért egyrészt $f^\wedge(\nu,p)$ véges érték. Másrészt a Berge-tétel szerint, mivel infimumot veszünk, $f^\wedge$ alulról félig folytonos ezen a környezeten, így a (ν,p) pontban is, de ez tetszőleges volt, így $f^\wedge$ alulról félig folytonos az értelmezési tartományán.

2. Legyen $p \in \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+$ tetszőleges adott.

(a) Ha $\nu_1 < \nu_2$, akkor $[\nu_1,\infty) \supseteq [\nu_2,\infty)$, így $f^{-1}[\nu_1,\infty) \supseteq f^{-1}[\nu_2,\infty)$, így $H(\nu_1,p) \supseteq H(\nu_2,p)$, ezért $\inf_{H(\nu_1,p)}\langle p,.\rangle \leq \inf_{H(\nu_2,p)}\langle p,.\rangle$, azaz $f^\wedge(\nu_1,p) \leq f^\wedge(\nu_2,p)$.

(b) Egyrészt a fentiek szerint $f^\wedge(0,p) \geq 0$, másrészt $\mathbf{0} \in H(0,p)$, ezért $f^\wedge(0,p) \leq \langle p,\mathbf{0}\rangle = 0$.

(c) Indirekt módon tegyük fel, hogy $\exists\ \nu_k \to \infty$ sorozat, és $\mathcal{K} > 0$, hogy $\forall\ k$ esetén $f^\wedge(\nu_k,p) < \mathcal{K}$. Ekkor $\forall\ k$ esetén $\exists x_k \in H(\nu_k,p)$, amelyre $\langle p,x_k\rangle \leq \mathcal{K}$. Mivel $p > \mathbf{0}$, azért az (x_k) sorozat korlátos (ugyanis $\forall\ k$ és $j = 1,\ldots,n$ esetén $x_k^{(j)} < \mathcal{K}$). Mivel az f felülről félig folytonos, azért az $f(x_k)$ sorozat korlátos, ugyanakkor $f(x_k) \geq \nu_k$ és $\nu_k \to \infty$.

3. Legyen $\nu \in \mathcal{R}(f)$ tetszőleges. Ekkor a $p \mapsto H(\nu,p) = \mathbb{R}^n_+ \cap f^{-1}[\nu,\infty)$ halmazértékű leképezés konstans, jelölje ezért az alábbi bizonyítások során $H(\nu,p_0) := \mathbb{R}^n_+ \cap f^{-1}[\nu,\infty)$ ezt a halmazt, ahol $p_0 \in \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+$, tetszőleges rögzített.

(a) $\forall\ \lambda > 0$ esetén $f^\wedge(\nu,\lambda\cdot p) = \inf_{H(\nu,p_0)}\langle\lambda\cdot p,.\rangle = \lambda\cdot\inf_{H(\nu,p_0)}\langle p,.\rangle = \lambda\cdot f^\wedge(\nu,p)$.

(b) $f^\wedge(\nu,.) = \sigma^\flat(.|H(\nu,p_0))$, és ismert, hogy az alsó támaszfüggvény konkáv. Részletesen: Legyenek $p_1,p_2 \in \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+$, $\lambda \in [0,1]$, ekkor

$f^\wedge(\nu, \lambda p_1 + (1-\lambda)p_2) = \inf_{H(\nu,p_0)}\langle \lambda p_1 + (1-\lambda)p_2, .\rangle \geq \lambda \inf_{H(\nu,p_0)}\langle p_1, .\rangle + (1-\lambda)\inf_{H(\nu,p_0)}\langle p_2, .\rangle = \lambda f^\wedge(\nu, p_1) + \lambda f^\wedge(\nu, p_2)$.

(c) Mivel $\forall\ (\nu, p) \in \mathcal{R}(f) \times \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+$ esetén $f^\wedge(\nu, p) = \inf_{H(\nu,p_0)}\langle p, .\rangle$, azért ha $p_1 \leq p_2$, akkor $f^\wedge(\nu, p_1) \leq f^\wedge(\nu, p_2)$.

(d) Mivel konkáv és véges, azért folytonos $\mathrm{int}\mathbb{R}^n_+$-on. □

3.11 Megjegyzés. Általában az értékfüggvénynek csak a ν-beli alulról félig folytonosságát szokták belátni, de ez a fentiek szerint igaz együttesen is. Sőt az együttes folytonosság is viszonylag gyenge feltételek mellett belátható, amelyet dolgozatunk fő eredményeképpen az alábbi tételben rögzítünk.

3.12 Állítás. *Ha az $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$ függvény felülről félig folytonos, valamint nincs lokális maximuma (például szigorúan monoton növekvő), akkor*

1. *az $f^\wedge : \mathcal{R}(f) \times \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ értékfüggvény folytonos,*
2. *az $\mathcal{X} : \mathcal{R}(f) \times \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+ \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ megoldásleképezés felső-Vietoris-folytonos.*

Bizonyítás. 1. A 3.1 állítás szerint a H feltételi leképezés alsó-Vietoris-folytonos, ezért a Berge-tétel szerint a $-f^\wedge$ alulról félig folytonos, ezért az $f^\wedge$ értékfüggvény felülről félig folytonos. (Most nem szükséges, hogy a H feltételi leképezés kompakt értékű legyen, mert alsó Vietoris-folytonosság esetén ez csak az értékfüggvény végességéhez kell, de az előző állítás ezt már úgyis biztosítja.) Az előző 3.3 állítás szerint pedig $f^\wedge$ alulról félig folytonos is, ezért folytonos.

2. A 3.1 állítás 4. szerint $\forall\ (\nu, p) \in \mathcal{R}(f) \times \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+$ pontnak létezik olyan $U \times B(p, \delta)$ környezete, hogy $\forall\ (\mu, q) \in U \times B(p, \delta)$ esetén $\mathcal{X}(\mu, q) = \{x \in \hat{H}(\mu, q) : \langle q, x\rangle = f^\wedge(\mu, q)\} = \hat{H}(\mu, q) \cap \{x : \langle q, x\rangle = f^\wedge(\mu, q)\}$. Mivel az $f^\wedge$ folytonos, azért a fenti szinthalmaz zárt gráfú, valamint $\hat{H}$ felső Vietoris-folytonos, ezért a metszetük is felső Vietoris-folytonos. □

Végül szeretnék köszönetet mondani Kánnai Zoltánnak a dolgozat megírása során nyújtott támogatásáért.

Irodalom

1. Frank H. Clarke: Optimization and Nonsmooth Analysis, Wiley-Interscience, New York, 1983.
2. J. P. Crouzeix: Duality between Direct and Indirect Utility Functions, *J. Math. Econom.*, 12 (1983), 149–165.
3. W. E. Diewert: Applications of duality theory, in *Frontiers of quantitative economics*, Vol. II., edited by M. D. Intriligator and D. A. Kendrick, 106–171, North-Holland, Amsterdam, 1974.
4. W. E. Diewert: Duality Approches to Microeconomic Theory, in *Handbook of Mathematical Economics*, vol. II., edited by K. J. Arrow and M. D. Intriligator, North-Holland, Amsterdam, 1982.

5. W. E. Diewert: Applications of Generalized Concavity to Economics, in *Generalized Concavity*, edited by M. Avriel, W. A. Diewert, S. Schaible, Plenum Press, New York, London, 1988.
6. A. Ioffe, V. Tichomirov, Theory of Extremal Problems, North Holland, Amsterdam, New York, 1979.
7. Andreu Mas-Colell, Michael D. Whinston and Jerry R. Green: Microeconomic Theory, Oxford University Press 1995.
8. R. T. Rockafellar: Convex Analysis, Princeton Univ. Press 1970.

CONSTRAINT EXTREMAL PROBLEMS IN MICROECONOMICS

Both in production and consumption theory we can describe the behavior of agents of an economy by optimization problems. It turns out that such problems can be formulated simultaneously as maximization and minimization problems in a dual way. According to Marshall's approach the consumer possesses a utility function, and intends to maximize this function subject to his budget set which is determined by the prices of the commodities and the wealth of the consumer. On the other hand Hicks proposed an approach such that the consumer minimizes his/her budget subject to his/her utility level. Our main goal is to examine the mathematical background of the two dual approaches.

ÁRFOLYAMINGADOZÁSOK ÉS KOCKÁZATBECSLÉS A BUDAPESTI ÉRTÉKTŐZSDÉN[1]

PALÁGYI ZOLTÁN
BKÁE Matematika Tanszék, Budapest

Ebben a dolgozatban a Budapesti Értéktőzsde egyik vezető részvényének, a MOL-nak a tranzakciónkénti áringadozásait tanulmányozzuk. Megmutatjuk, hogy az áringadozások empirikus sűrűségfüggvénye jelentősen eltér a normálistól, és a vizsgált időszakban jól közelíthető egy $\alpha = 1.48$ indexű stabil eloszlással. Szemléltetjük, hogy ennek az eredménynek milyen hatása van a részvény kockázatának becslésére.

1 Bevezetés

Az árfolyamingadozások leírására használt legelterjedtebb modell [1] szerint a részvények ára ($P(t)$) Brown-mozgást követ, azaz rögzített T késleltetési idő mellett különböző t értékekre az $\ln P(t+T) - \ln P(t)$ mennyiségek független normális eloszlású valószínűségi változók, amelyek várható értéke zérus, szórásuk pedig arányos a T késleltetési idővel.

Mára világossá vált, hogy a fenti modell nem írja le kielégítően az adatsorokat, mert az áringadozások empirikus eloszlása rendszerint túl csúcsos ahhoz, hogy normális legyen. Pontosabban az áringadozások hisztogrammjai hasonlítanak ugyan egy haranggörbére, de a középső tartomány csúcsosabb, a farokrész levágása pedig lassabb, mint a minta várható értéke és szórása alapján illesztett normális eloszlásé. Mivel a normalitás alapvető feltevése fontos pénzügyi elméleteknek (derivatívák árazása, CAPM), elvetésének komoly elméleti következményei vannak, melyekkel ebben a dolgozatban nem foglalkozunk.

1963-ban Mandelbrot [2] a gyapotárak vizsgálata alapján úgy módosította a fenti modellt, hogy $\ln P(t+T) - \ln P(t)$ stabil (Levy) eloszlást követ. A Levy eloszlások családja (a következő szakaszban áttekintjük tulajdonságaikat) tartalmazza a normálist, de az utóbbi kivételével a Levy eloszlásoknak nincs szórásuk. Emiatt Mandelbrot modelljét sok kritika érte.

Később számos tanulmány [3-7] készült nagy frekvenciájú adatsorokra - így például az S&P500 [5] illetve a CAC40 [7] indexek idősoraira. Ezek a vizsgálatok annyiban megerősítették Mandelbrot modelljét, hogy az empirikus eloszlások sűrűségfüggvényeinek középső tartományára jól illeszkedő $1 < \alpha < 2$ paraméterű stabil eloszlást találtak. A görbe farokrészének "levágása" azonban nem az illető stabil eloszlás aszimptotikus tulajdonságai-

[1] Beérkezett: 1998. szeptember 14.

nak megfelelően, hanem általában gyorsabban, exponenciálisan [8], vagy hatványkitevő szerint [9] történik, így a szórás véges lesz.

Ebben a dolgozatban először áttekintjük a stabil eloszlások néhány tulajdonságát, majd a Budapesti Értéktőzsdén megfigyelt áringadozásokat vizsgáljuk [10-13]. Vizsgálatunk fontos eleme, hogy napon belüli adatokat használunk. Választásunk a MOL részvényre esett, mert a napi tranzakciók számát tekintve ez a papír az elsők között van.

2 A stabil eloszlások néhány tulajdonsága

Az egyváltozós stabil eloszlások elméletét lényegében az 1920-as és 1930-as években P. Levy és A. Y. Hincsin dolgozták ki. A részleteket számos könyvben [14-15] megtalálhatjuk, itt csak néhány eredményt idézünk.

Az $X, X_1, X_2, ...X_n$ független azonos eloszlású valószínűségi változók eloszlását stabilnak mondjuk, ha bármely $n \geq 2$ természetes számhoz találhatók C_n pozitív és D_n valós számok, amelyekre $X_1 + X_2 + ... + X_n$ eloszlása megegyezik $C_nX + D_n$ eloszlásával. Független azonos (stabil) eloszlású valószínűségi változókat összeadva tehát az eloszlás (nyújtástól és eltolástól eltekintve) nem változik.

Mit jelent a stabilitás a pénzügyi idősorokban? Legyen például $P_1, P_2, ...P_n$ egy részvény egymást követő árainak sorozata (napon belüli árakról van szó, tehát az összes megfigyelt árat feljegyezzük). Tegyük fel, hogy $\ln P_{t+1} - \ln P_t$ (ez lényegében a t-edik kötéstől a $t+1$-edik kötésig elért hozam) a fenti X_i-vel azonos (stabil) eloszlású valószínűségi változó. Ekkor

$$\ln P_{t+2} - \ln P_t = (\ln P_{t+2} - \ln P_{t+1}) + (\ln P_{t+1} - \ln P_t)$$

$X_1 + X_2$-vel, azaz $C_2X + D_2$-vel azonos eloszlású. Ehhez hasonlóan $\ln P_{t+n} - \ln P_t$ $C_nX + D_n$-nel azonos eloszlású. Leegyszerűsítve azt mondhatjuk, hogy a hozamokat különböző időskálákon nézve azonos eloszlást kapunk. Szemléletesen, ha az áringadozások grafikonjait először szabad szemmel, majd nagyítóval nézzük, hasonló alakzatot látunk. Megmutatható, hogy $C_n = n^{1/\alpha}$ $(0 < \alpha \leq 2)$, ahol α a stabilitás indexe (karakterisztikus exponens, Levy exponens). Normális eloszlásra $\alpha = 2$, a többi α-ra a stabil eloszlású változónak nincs szórása, $0 < \alpha \leq 1$ esetén pedig még várható értéke sincs. (A pénzügyi idősorokban eddig megfigyelt α értékekre $1 < \alpha \leq 2$, ekkor van várható érték.) A stabil eloszlású változók gyakorlati alkalmazásait nehezíti az a tény, hogy sűrűségfüggvényük (néhány kivételtől, például a normálistól eltekintve) nem írható explicit alakban, karakterisztikus függvényük (az $\alpha \neq 1$ esetben):

$$E \exp i\theta X = \exp(-\sigma^\alpha |\theta|^\alpha (1 - i\beta(\text{sign}\theta)\tan(\pi\alpha/2)) + i\mu\theta),$$

ahol sign a szignum függvény, α a stabilitás indexe, β a ferdeséget (aszimmetriát) méri, μ eltolási, σ pedig skálaparaméter. (X pontosan akkor szimmetrikus, ha $\beta = 0$ és $\mu = 0$. Ha X-nek van várható értéke, akkor az μ-vel egyenlő.) A vizsgált pénzügyi idősorokban β és μ értéke alig tér el nullától. A $\beta = \mu = 0$ esetben X sűrűségfüggvénye:

$$f_\gamma(t) = 1/\pi \int_0^\infty \exp(-\gamma x^\alpha)\cos(tx)\,dx\,,$$

ahol bevezettük a $\gamma = \sigma^\alpha$ paramétert. Az integrál numerikus kiszámításához hasznos észrevenni, hogy

$$f_\gamma(t) = \gamma^{-1/\alpha} f_1(\gamma^{-1/\alpha} t)\,,$$

így elég $f_1(.)$-et kiszámolni. A farokrész (t nagy) becsléséhez jól használható az

$$f_1(t) \approx \Gamma(1+\alpha)\sin(\pi\alpha/2)/\pi t^{1+\alpha}$$

($\alpha < 2$) közelítő formula. Ez utóbbi az úgynevezett "vastag farok" tulajdonság: a sűrűségfüggvény görbéjének farka aszimptotikusan hatványkitevő szerint "vág le" az $\alpha < 2$ esetben, vagyis a normális sűrűségfüggvénynél sokkal lassabban. Ennek a tulajdonságnak a pénzügyi kockázat becslésénél van szerepe, hiszen a szélsőséges események éppen a farokban vannak.

3 Az árfolyamingadozások sűrűségfüggvénye

Az előző szakaszban leírt stabilitás vizsgálatához a MOL részvénynek a Budapesti Értéktőzsdén 1997. január 1-től 1998. június 30-ig megfigyelt árainak sorozatát $(P_1, P_2, ...P_n)$ választottuk. P_1 tehát 1997 első tranzakciójának ára, P_2 a másodiké, stb. A vizsgált időszakban a tranzakciók száma $n = 214392$. Feltesszük, hogy az $\ln P_{t+1} - \ln P_t$ (tick-by-tick) hozamok mintáját szimmetrikus α és γ paraméterű stabil eloszlású változó

$$f(t) = 1/\pi \int_0^\infty \exp(-\gamma x^\alpha)\cos(tx)\,dx$$

sűrűségfüggvénye írja le. Könnyű belátni, hogy n ilyen sűrűségfüggvény konvolúciója:

$$f_n(t) = 1/\pi \int_0^\infty \exp(-n\gamma x^\alpha)\cos(tx)\,dx\,,$$

innen pedig $f_n(0) = n^{-1/\alpha} f(0)$. $f_n(0)$-t n függvényében log-log skálán ábrázolva a kapott egyenes meredekségéből megbecsüljük α-t, a tengelymetszetből pedig $f(0)$-t. Ezután az $f(0) = \Gamma(1/\alpha)/\pi\alpha\gamma^{1/\alpha}$ képletből kiszámítjuk γ-t.

$f_n(0)$ kiszámításához az eredeti $(\ln P_{t+1} - \ln P_t)$ mintából n elemet húzunk véletlenszerűen visszatevéssel és a kihúzott elemeket összeadjuk. A húzások száma félmillió – ez számítástechnikailag még könnyen kezelhető. A kapott összegeket egy 0.0012 ablakszélességű hisztogrammba tesszük és leolvassuk $f_n(0)$ értékét.

Az első ábrán $\log_2 f_n(0)$ értékeit tüntettük fel $\log_2(n)$ függvényében. Látható, hogy a pontokra szépen illeszkedik egy egyenes – α becsült értéke 1.48. A fent leírt módon γ-ra a 0.000011 értéket kapjuk.

A második ábrán az $(\ln P_{t+1} - \ln P_t)$ adatokból kapott hisztogrammot (gyémántok), a fenti α és γ paramétereknek megfelelő stabil eloszlás numerikus integrálással kiszámított sűrűségfüggvényét (folytonos vonal), valamint a minta várható értéke és szórása alapján illesztett normális eloszlás sűrűségfüggvényét (szaggatott vonal) látjuk. A függőleges tengelyen tízes alapú logaritmus skálát használunk. Látható, hogy a stabil eloszlás sűrűségfüggvénye négy nagyságrenden át szépen illeszkedik az adatpontokra, az illesztés csak a szélső tartományokban kezd romlani, ahol már nem volt elég adat, így a rögzített hisztogramm ablakszélesség miatt ezek a pontok szétszóródtak – lényegében "zajnak" tekinthetjük őket. Szépen látszik az is, hogy a normális sűrűségfüggvény mennyire távol esik az adatpontoktól.

4 Következtetések

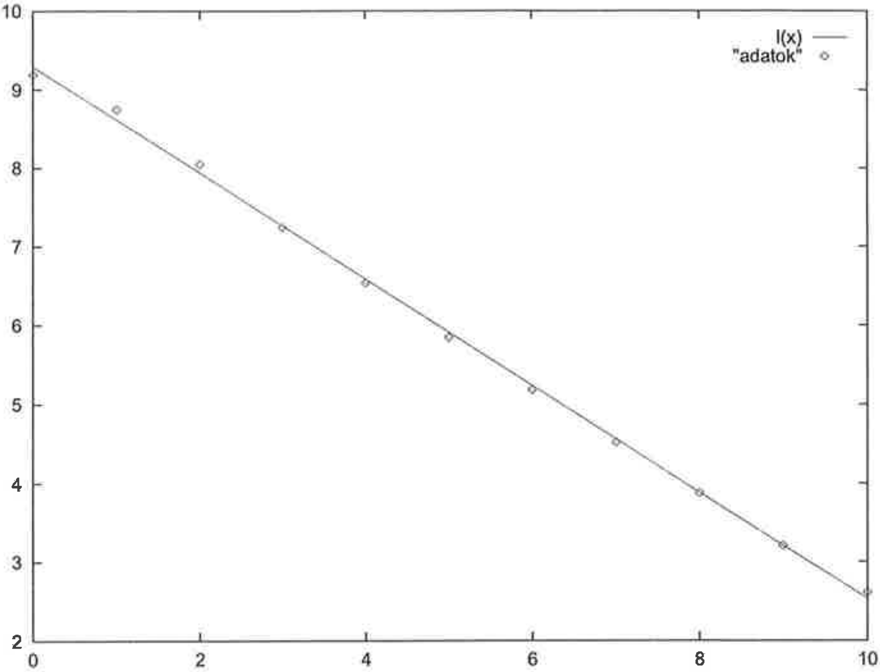
A dolgozatban a MOL részvény Budapesti Értéktőzsdén megfigyelt áringadozásainak empirikus sűrűségfüggvényét vizsgáltuk. Megállapítható, hogy az eredmény lényegesen eltér a normális eloszlás sűrűségfüggvényétől és jól leírható egy $\alpha = 1.48$ exponensű Levy eloszlás sűrűségfüggvényével.

A második ábrán a szaggatott vonal (normális eloszlás) és a vízszintes tengely metszete a minta ötszörös szórásának felel meg. A 0.02 (tízszeres szórás) illetve -0.02 pontoktól jobbra illetve balra normális eloszlás szerint lényegében nem lehetnének adatpontok - nagyjából az univerzum életkorának megfelelő ideig kellene várni, amíg ebben a tartományban figyelnénk meg áringadozást. A vizsgált másfél éves időtartam alatt viszont sok áringadozás esett ebbe a tartományba – ezek a nagy ingadozások jelentik a pénzügyi kockázatot, amelynek mértékét a normális eloszlás nagyságrendekkel alábecsüli. A stabil eloszlás kielégítően írja le az adatokat, a farokrész pontosabb becsléséhez sokkal több adatra lenne szükség, ezért pillanatnyilag nem tudunk jobbat mondani.

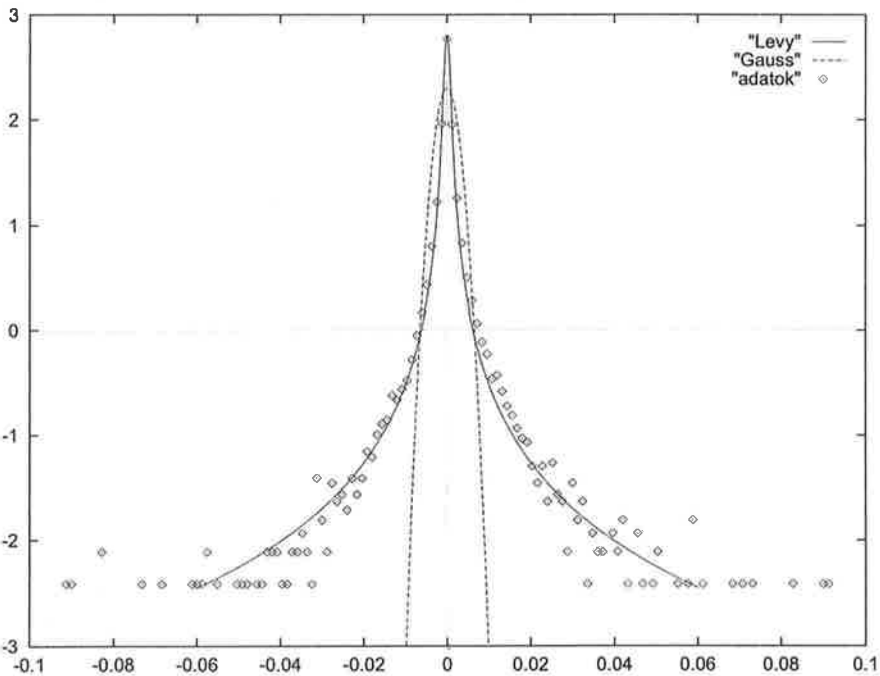
5 Köszönetnyilvánítás

Az adatok megszerzésében Pacsi Zoltán, Schalkhammer Erika és Szerelmy Gábor segítettek - nélkülük ez a munka nem jöhetett volna létre. Köszönettel tartozom a Cashline Broker Rt-nek az anyagi támogatásért.

Végül Medvegyev Péter kollégámnak szeretném megköszönni tanácsait és hasznosútmutatásait.


10
9
8
7
6
5
4
3
2
0
2
4
6
8
10
l(x)
"adatok"

1. ábra


3
2
1
0
-1
-2
-3
-0.1
-0.08
-0.06
-0.04
-0.02
0
0.02
0.04
0.06
0.08
0.1
"Levy"
"Gauss"
"adatok"

2. ábra

Irodalom

1. Hull, J. C.:*Options, Futures, and Other Derivatives, Third Edition* Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1997.
2. Mandelbrot, B. B. (1963), The Variation of Certain Speculative Prices, *J. Business* 36. 392-417.
3. Akgiray, V. (1989) *J. Business* 62. 55.
4. Mantegna, R. N. (1991), Levy Walks and Enhanced Difusion in the Milan Stock Exchange, *Physica* A 179. 232–242.
5. Mantegna, R. N. és H. E. Stanley (1995), Scaling Behavior in the Dynamics of an Economic Index, *Nature* 376. 46–49.
6. Ghashghaie, S., Breymann, W., Peinke, J., Talkner, P. and Dodge, Y. (1996) *Nature* 381. 767.
7. Zajdenweber, D. (1994), Proprietes autosimilaires du CAC40, *Revue d'Economie Politique* 104. 408–434.
8. Cont, R. et al. (1997), Scaling in Stock Market Data: Stable Laws and Beyond, *Science&Finance Working Paper*, Paris
9. Gopikrishnan, P. et al. (1998), Inverse Cubic Law for the Distribution of Stock Price Variations, *The European Physical Journal B* 3. 139–140
10. Lux, T. és Varga J. (1996), A Pareto hipotézis vizsgálata - értékpapír-piaci hozamok és az extremális hozamok eloszlása, *Szigma* XXVII. 157.
11. Varga J. (1998), On distribution for stock returns, *Managing in Uncertainty: Theory and Practice*, 139–151. Kluwer Academic Publishers
12. Rappai G. és Varga J. (1997) Applicability of the CAPM on the Hungarian stock market, *New Operational Approach in Financial Modelling*, 133–143. Physica Verlag, Berlin-New York
13. Varga J. (1996), Tests for randomness in multiple financial time series, *Modelling Techniques for Financial Markets and Bank Management*, 259–271. Physica Verlag Heidelberg
14. Gnyegyenko, B. V., Kolmogorov, A. N.: *Független valószínűségi változók összegeinek határeloszlásai*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1951.
15. Samorodnitsky, G., Taqqu, M. S.: *Stable Non-Gaussian Random Processes*, Chapman & Hall, New York, 1994.

PRICE CHANGES AND RISK ESTIMATION OF THE BUDAPEST STOCK EXCHANGE

We study the empirical density function of tick by tick log price changes of a heavily traded stock (MOL) of the Budapest Stock Exchange. A heavy tailed stable density of index 1.48 seems to describe the data well. This 'heavy tail' phenomenon has been observed in many other markets of the world. The fact that the empirical distribution of price changes is not normal inspires further theoretical research (option pricing, CACPM etc.), and affects our view on modelling and estimating financial risk.

NEMZETKÖZI PORTFÓLIÓ DIVERZIFIKÁCIÓ A MAGYAR ÉS A NÉMET BEFEKTETŐK NÉZŐPONTJÁBÓL[1]

BUGÁR GYÖNGYI – RAIMOND MAURER[2]
Janus Pannonius Tudományegyetem, Pécs - Universität Mannheim

A tanulmányban a magyar és a német befektetők nézőpontjából a szerzők azt vizsgálják, hogy milyen előnyöket kínál, ha befektetéseikkel a hazai részvénypiacról kilépnek a nemzetközi piacra. A német értékpapírpiac – a folyamatosan fejlődő, de kis méretű magyar piaccal szemben – egyike a világ legjelentősebbjeinek. A magyar befektetők számára ex post értelemben a nemzetközi diverzifikáció „jótékony hatása" a vizsgált befektetés-kombinációk kockázatának csökkenésében nyilvánult meg, míg a német befektetők számára nemcsak a kockázat csökkentésében, hanem a magasabb átlaghozamok elérhetőségében rejlő lehetőségek tették vonzóvá a külföldi cégek részvényeinek vásárlását. Valamennyi - a szerzők által vizsgált - portfólió kiválasztási stratégia teljesítményének ex ante módon történő értékelése szintén azt erősíti meg, hogy a nemzetközi portfólió diverzifikáció mindkét ország számára potenciális előnyökkel jár.

1 Bevezetés

A modern portfólió analízis törvényszerűségeit Grubel (1968) alkalmazta először a nemzetközi értékpapírpiacra. Ezt követően több, a nemzetközi portfólió diverzifikációban rejlő lehetőségeket vizsgáló empirikus tanulmány látott napvilágot. A korai tanulmányok (Levy/Sarnat (1970), Lessard (1973, 1976), Solnik (1974)) ex post értelemben hatékony portfóliók teljesítményét vizsgálták és a befektetések nemzetközi kiszélesítésére ható motivációkat a különböző országok tőzsdeindexei közötti alacsony korrelációban találták meg. A későbbi tanulmányok (Jorion (1985), Eun/Resnick (1988, 1994), Levy/Lim (1994) és Liljeblum/Löflund/Krokfors (1997)) ex ante értelemben hatékony portfólió kiválasztási stratégiákat vizsgáltak, finomították az egyes értékpapírok várható megtérülésének becslési módszereit és figyelembe vették a fedezeti ügyletek által az árfolyam kockázat csökkentésére kínált lehetőségeket.

Az e témában megjelent tanulmányok többsége amerikai befektetőkre (vagy legalábbis dollár-alapú befektetésekre) és a nagy tőzsdék által nyújtott befektetési lehetőségekre koncentrált. A végzett elemzések egyöntetű következtetése az volt, hogy az amerikai értékpapírpiac által nyújtott befektetések nemzetközi kiszélesítése potenciális előnyökkel jár. Bár az utóbbi

[1] Beérkezett: 1998. szeptember 14.
[2] A szerzők megköszönik az OTKA (F 023499) és a TEMPUS támogatását.

időben megjelent néhány tanulmány, amely a nemzetközi befektetés kombinációkat más nációk nézőpontjából vizsgálja, mind a mai napig meglehetősen hiányos az arról alkotott kép, hogy a nemzetközi portfólió diverzifikáció milyen lehetőségeket kínál a nem amerikai befektetők számára. Az előbb említett tanulmányokra jó példa Eun/Resnick (1994) munkája, amely vizsgálatait az amerikai befektetők mellett kiterjeszti japán befektetőkre, valamint Adjaouté/Tuchschmid (1996) és Liljeblum/Löflund/Krokfors (1997), akik svájci illetve skandináv befektetőket vesznek alapul. Ez utóbbi tanulmányok —az amerikai befektetőkre koncentráló munkákhoz hasonlóan— a nemzetközi portfólió diverzifikációból származó jelentős előnyöket mutattak ki.

A jelen tanulmány fő célja annak vizsgálata, hogy a magyar és német befektetők számára milyen előnyökkel jár, ha befektetéseikkel a hazai részvénypiac helyett külföldi tőzsdéket céloznak meg.

A cikk a következőképpen tagolódik: a 2. részben az elemzésben használt adatokat írjuk le. A 3. részben azt vizsgáljuk, hogy a nemzetközi részvényhozamok valamint az egyes fizetőeszközök közötti átváltási arány változása milyen hatást gyakorolt a magyar és német befektetések hozamára és kockázatára. A 4. részben a vizsgálatba bevont országok tőzsdeindexeinek hozama közötti kapcsolatot igyekszünk feltárni. Az 5. részben azokat a potenciális előnyöket számszerűsítjük, amelyeket az általunk vizsgált időszakban a nemzetközi portfólió diverzifikáció nyújtott a magyar és a német befektetők számára. A 6. részben néhány ex ante diverzifikációs stratégia teljesítményét értékeljük. A 7. rész a cikk összefoglalását és következtetéseinket tartalmazza.

2 Adatok

A felhasznált adatbázis 17 kiválasztott ország tőzsdeindexének idősorát tartalmazza havi bontásban. A vizsgálatba bevont országok: Ausztrália (AUS), Ausztria (AUT), Belgium (BEL), Kanada (CAN), Svájc (CH), Németország (D), Dánia (DEN), Spanyolország (ESP), Franciaország (FR), Nagy-Britannia (GB), Magyarország (HUN), Olaszország (IT), Japán (JP), Hollandia (NL), Norvégia (NO), Svédország (SW), Egyesült Államok (US). A tőzsdeindexek idősorának forrása (kivéve a magyar tőzsdeindexet) a Morgan and Stanley Capital International (MSCI) adatbázisa. A magyar tőzsdeindex (BUX) idősora a Budapesti Értéktőzsdéről (BÉT) származik. Ez utóbbi indexet nem hivatalos, ideiglenes formában 1991 tavaszán vezették be, 1991. január 2-ai 1000 pontos induló értékkel. A BUX – az MSCI indexekhez hasonlóan – kapitalizáció súlyozású értékindex, amely az árfolyamváltozásból és az osztalékfizetésből származó hozamokat is tartalmazza (A Budapesti Értéktőzsde részvényindexének kézikönyve, 1997).

A vizsgált periódus az 1991. január és 1997. április közötti időintervallum volt (választásunkat a BUX-ra vonatkozó idősor korlátozta). Ez azt jelenti, hogy minden ország tőzsdeidexének hozamsoraként a havi hozamok 76 elemű idősorát használtuk. Az egyes tőzsdeindexek forintban teljes hozamának kiszámításához a forintra és a márkára vonatkozó hó végi deviza középárfolyamokat vettük alapul. A kockázatmentes ráta proxy-jaként a havi pénzpiaci kamatlábakat használtuk. A fenti adatokat a német Bundesbank és az MNB bocsátotta rendelkezésünkre.

3 A vizsgált országok tőzsdeindexeinek és deviza-árfolyamainak hozam és kockázat karakterisztikája

Abból a célból, hogy megállapítsuk, hogy az egyes országok részvénypiaci hozamai és deviza-árfolyam hozamai mekkora részben járulnak hozzá az adott országbeli befektetés teljes hozamához, minden egyes országra vonatkozóan elvégeztük az adott országbeli részvény-befektetésből származó teljes hozam összetevőkre bontását. Amennyiben S_{it} az i-ik ország fizetőeszközének a t-ik időpontban forintban vett árfolyamát jelöli, P_{it} pedig ugyanezen ország tőzsdeindexének árfolyamát, akkor bármely befektetési periódus végén az adott országbeli befektetésből származó teljes hozam egy magyar befektető nézőpontjából a következőképpen számítható ki:

$$R_{i,HUF} = \frac{S_{it}P_{it}}{S_{it-1}P_{it-1}} - 1 = (1 + R_i)(1 + e_i) - 1 = R_i + e_i + R_i e_i \qquad (1)$$

ahol R_i a lokális (helyi) hozam az i-ik tőkepiacon, e_i az i-ik ország fizetőeszközének a forinthoz viszonyított árfolyam-változásából származó hozam.

A fentiek alapján a várható hozam az alábbi módon bontható fel:

$$E(R_{i,HUF}) = E(R_i) + E(e_i) + E(R_i e_i) \qquad (2)$$

A (2) formula értelmében a teljes hozam várható értéke (röviden a várható hozam) a helyi tőzsdeindex várható hozamának, az árfolyam-változásból származó várható hozamnak és az előzőek szorzata várható értékének az összege.

Az előző formulák alkalmazhatók egy német befektető vizsgált országbeli befektetésének teljes hozamára is, azzal a különbséggel, hogy ekkor e_i az adott ország fizetőeszközének a német márkához viszonyított árfolyam-változásából eredő hozamot jelöli.

Az 1. tábla a vizsgált külföldi országokban forintban realizálható havi átlagos teljes hozam összetevőkre bontását mutatja az 1991. január és 1997. április közötti periódusra vonatkozóan. A 2. táblában ugyanezt a felbontást egy német befektető nézőpontjából készítettük el, német márkát alapul véve. Az egyes hozam-komponensek nagysága (az 1. és 2. tábla első négy oszlopa[3]) mellett kiszámítottuk százalékos megoszlásukat (az 1. és 2. tábla utolsó három oszlopa) is.

[3] A táblákban szereplő hozamok egysége %

	$E(R_{i,HUF})$	$E(R_i)$	$E(e_i)$	$E(R_i, e_i)$	$E(R_i)$	$E(e_i)$	$E(R_i, e_i)$
AUS	2.68	1.21	1.52	-0.1	45.15	56.72	-1.87
AUT	1.46	0.19	1.31	0	13.01	89.73	-2.74
BEL	2.73	1.43	1.31	0	52.38	47.99	-0.37
CAN	2.32	1.07	1.23	0.02	46.12	53.02	0.86
CH	3.28	1.95	1.34	0	59.45	40.85	-0.30
D	2.50	1.21	1.31	0	48.40	52.40	-0.80
DEN	2.33	1.04	1.33	0	44.64	57.08	-1.72
ESP	2.75	1.80	0.96	0	65.45	34.91	-0.36
FR	2.53	1.21	1.33	0	47.83	52.57	-0.40
GB	2.62	1.33	1.29	0	50.76	49.24	0
HUN	2.91	2.91	0	0	100.00	0	0
IT	2.13	1.18	0.96	0	55.40	45.07	-0.47
JP	1.70	0.11	1.60	0	6.47	94.12	-0.59
NL	3.13	1.83	1.32	0	58.47	42.17	-0.64
NO	2.27	1.07	1.25	-0.1	47.14	55.07	-2.20
SW	3.14	2.09	1.07	0	66.56	34.08	-0.64
US	2.99	1.49	1.47	0.03	49.83	49.16	1.01

1. tábla. Az egyes országok tőzsdeindexébe történő befektetés havi átlagos teljes hozamának összetevőkre bontása a magyar befektetők nézőpontjából

Magyarország esetében minden deviza árfolyam-változásának hozama pozitív és a teljes hozam viszonylag nagy hányadát teszi ki. A japán tőzsdeindexbe történő befektetés esetén ez utóbbi a teljes hozam több mint 90%-át képezi. A deviza árfolyam-változás hozamának a teljes hozamhoz történő hozzájárulása a Spanyolországba való befektetés esetében a legkisebb (közel 35%), de ez az érték is viszonylag nagy. Megállapítható továbbá, hogy a (2) formulában szereplő harmadik tag (a helyi hozam és a deviza árfolyam-változás szorzatának várható értéke) az összes esetben kicsi, szinte elhanyagolható.

	$E(R_{i,DEM})$	$E(R_i)$	$E(e_i)$	$E(R_i, e_i)$	$E(R_i)$	$E(e_i)$	$E(R_i, e_i)$
AUS	1.53	1.21	0.29	0.03	79.08	18.95	1.97
AUT	0.19	0.19	0	0	100	0	0
BEL	1.43	1.43	0	0	100	0	0
CAN	1.10	1.07	0.01	0.02	97.27	0.91	1.82
CH	1.96	1.95	0.01	0	99.49	0.51	0
D	1.21	1.21	0	0	100	0	0
DEN	1.06	1.04	0.02	0	98.11	1.89	0
ESP	1.48	1.80	-0.35	0.03	121.6	-23.70	2.10
FR	1.23	1.21	0.01	0.01	98.38	0.81	0.81
GB	1.32	1.33	0	-0.01	100.8	0	-0.80
HUN	1.68	2.91	-1.21	-0.02	173.2	-72.1	-1.1
IT	0.95	1.18	-0.32	0.09	124.2	-33.7	9.47
JP	0.44	0.11	0.33	0	25.00	75.00	0
NL	1.84	1.83	0	0.01	99.46	0	0.54
NO	1.03	1.07	-0.10	0.01	103.9	-4.85	0.95
SW	1.85	2.09	-0.20	-0.03	112.9	-10.80	-2.10
US	1.74	1.49	0.25	0	85.63	14.37	0

2. tábla. Az egyes országok tőzsdeindexébe történő befektetés havi átlagos teljes hozamának összetevőkre bontása a német befektetők nézőpontjából

A deviza árfolyam-változás hozamának hatása a befektetés teljes hozamára a német befektetők esetében nem olyan jelentős, mint a magyar befektetők esetében. Az Európai Közösség országaiba történő befektetés esetén a német márka és az adott ország fizetőeszköze közötti árfolyam-változás hozama az esetek többségében elhanyagolható. Kivételt képeznek Spanyolország, Olaszország és Svédország, amelyekre ez utóbbi hozam relatíve nagy negatív értékeket vesz fel, ami a német márka erősödését jelzi a fenti országok fizetőeszközeihez képest a vizsgált időszakban. A deviza árfolyam-változás hozama a többi európai ország esetében sem túl nagy (Svájcra $0,01\%$, Norvégiára vonatkozóan pedig $-0,1\%$). Ez utóbbi országok közül Magyarország kettős „extremális pont", abban az értelemben, hogy a deviza árfolyam-változás hozamaként ebben esetben adódik a legnagyobb abszolút értékű negatív szám, ugyanakkor a lokális tőzsdei hozamokat tekintve pedig a BUX hozama volt a legnagyobb a vizsgálatba bevont 17 ország tőzsdeindexei közül. Megállapítható, hogy a német befektetők szemszögéből a forint jelentős leértékelődése a márkához képest (a deviza árfolyam-változás hozama ez esetben átlagosan havi $-1,21\%$) csökkenti a Budapesti Értéktőzsdén elérhető rendkívül magas lokális hozam (átlagosan havi $2,91\%$) vonzerejét. Ebből nem következik azonban, hogy a magyar tőzsdére való befektetés iránt a német befektetők érdektelenek lennének. Ha a különböző országok részvénypiacaira irányuló befektetés vonzerejét (kizárólag) a befektetés teljes hozamával mérnénk, akkor Magyarország ötödik helyet foglalna el a fenti országok között a német befektetők által készíthető rangsorban. A tengerentúli befektetésekre vonatkozóan (Kanadát kivéve) relatíve magas pozitív deviza árfolyam-hozamot figyelhetünk meg, ami ellentmond az 'erős' német márkáról kialakított elképzelésnek.

Mint ismeretes, egy portfólió-kiválasztási stratégia teljesítménye nem ítélhető meg kizárólag a befektetés jövedelmezősége, azaz teljes hozama alapján, hanem a stratégia kockázatára is tekintettel kell lenni. A Markowitz (1985) által bevezetett hozam-kockázat megközelítés értelmében a hozamok varianciáját használhatjuk a kockázat mérőszámaként. A variancia helyett teljes joggal tekinthető annak négyzetgyöke, a szórás (standard eltérés) is a kockázat mértékének.

A teljes hozam varianciája a következőképpen bontható összetevőire (Eun/Resnick 1994, 145. o.):

$$\mathrm{Var}(R_{i,HUF}) = \mathrm{Var}(R_i) + \mathrm{Var}(e_i) + 2\mathrm{Cov}(R_i, e_i) + \Delta\mathrm{Var}\,, \qquad (3)$$

ahol $\mathrm{Var}(R_i)$ az i-ik ország tőzsdeindexe lokális hozamának varianciája, $\mathrm{Var}(e_i)$ az i-ik ország fizetőeszközének a forinthoz viszonyított árfolyam-változása hozamának varianciája, $\mathrm{Cov}(R_i, e_i)$ és $\Delta\mathrm{Var}$ az előző két változó, illetve azok szorzata közötti kapcsolatból adódó „hozzájárulás" mértéke. A (3) formulát forint-alapú befektetésekre, tehát magyar befektetőkre írtuk fel. Természetesen az előzővel azonos formula érvényes a német befektetőkre is.

A forintban illetve márkában számított teljes hozam varianciájának összetevőkre bontását a 3. illetve 4. tábla mutatja. A táblák utolsó négy oszlopa az egyes komponensek százalékos megoszlását tartalmazza.[4]

[4] A táblában szereplő variancia értékek %-ban értendők.

$Var(R_{HUF})$		Var(R)	Var(e)	2Cov	ΔVar	Var(R)	Var(e)	2Cov	ΔVar
AUS	29.97	14.93	12.22	5.20	-2.39	50	41	17	-8
AUT	30.63	29.79	9.80	-8.99	0.03	97	32	-29	0
BEL	16.65	13.90	9.96	-7.28	0.07	83	60	-44	0
CAN	22.71	10.41	8.71	3.04	0.56	46	38	13	2
CH	22.43	15.20	13.19	-6.48	0.53	68	59	-29	2
D	20.27	17.35	9.75	-7.02	0.19	86	48	-35	1
DEN	20.84	21.63	9.97	-11.00	0.23	104	48	-53	1
ESP	39.60	31.02	12.51	-5.07	1.13	78	32	-13	3
FR	26.73	21.40	9.91	-5.31	0.73	80	37	-20	3
GB	23.29	14.02	11.36	-2.82	0.74	60	49	-12	3
HUN	124.00	124.00	0	0	0	100	0	0	0
IT	56.63	49.44	11.03	-3.77	-0.10	87	19	-7	0
JP	47.62	34.01	15.08	-2.09	0.62	71	32	-4	1
NL	14.13	12.95	9.85	-8.62	0	92	70	-61	0
NO	37.49	40.38	9.70	-13.30	0.70	108	26	-35	2
SW	48.60	45.56	12.04	-9.41	0.42	94	25	-19	1
US	17.73	9.32	6.94	0.89	0.59	53	39	5	3

3. tábla. A teljes hozam varianciájának összetevőkre bontása magyar befektetői nézőpontból

A 3. táblából látható, hogy a magyar befektetők esetében a deviza árfolyam-változás hozamának varianciája a teljes variancia viszonylag nagy hányadát teszi ki, ez utóbbi arány 19% (Olaszország mint befektetési célpont esetében) és 70% (Hollandia esetében) között mozog. A helyi tőzsdeindex és a deviza árfolyam-változás hozama közötti kovariancia az európai országok és Japán esetén negatív és többségben relatíve nagy értéket képvisel. Az utóbbiak miatt a deviza árfolyam-változásból eredő bizonytalanságnak a teljes kockázatra gyakorolt hatását illetően nem állapítható meg egyértelmű és általánosan érvényes tendencia. A 17 ország között csak 5 olyan van, amelyben a helyi tőzsdeindex varianciája a teljes variancián belül 70%-nál kisebb részarányt képvisel, így legfeljebb csak ezekre az országokra vonatkozóan állapítható meg, hogy a deviza árfolyam-változásból eredő bizonytalanság jelentősen növeli az oda irányuló befektetés kockázatát. Dánia és Norvégia esetében a helyi tőzsdeindex hozama varianciájának részaránya 100%-nál nagyobb. Ez azt jelenti, hogy a helyi tőzsdeindex hozama varianciája nagyobb a teljes hozam varianciájánál, ami a helyi tőzsdeindex és a deviza árfolyam-változás hozama közötti nagy negatív kovariancia miatt fordulhat elő.

$Var(R_{DEM})$		Var(R)	Var(e)	2Cov	ΔVar	Var(R)	Var(e)	2Cov	ΔVar
AUS	37.83	14.93	15.85	6.46	0.59	39	42	17	2
AUT	29.84	29.79	0	0.05	0.01	100	0	0	0
BEL	14.42	13.90	0.27	0.24	0.01	96	2	2	0
CAN	28.73	10.41	13.44	4.54	0.34	36	47	16	1
CH	16.30	15.20	1.44	-0.46	0.13	93	9	-3	1
D	17.35	17.35	0	0	0	100	0	0	0
DEN	21.63	21.63	0.65	0.20	-0.85	100	3	1	-4
ESP	41.39	31.02	4.05	6.16	0.16	75	10	15	0
FR	22.13	21.40	0.43	0.28	0.01	97	2	1	0
GB	19.98	14.02	5.02	0.83	0.10	70	25	4	1
HUN	133.50	124.00	8.27	2.37	-1.14	93	6	2	-1
IT	68.91	49.44	6.81	12.29	0.38	72	10	18	1
JP	43.69	34.01	9.86	-0.21	0.04	78	23	0	0
NL	13.02	12.95	0.01	0.06	0	99	0	1	0
NO	43.61	40.38	1.16	2.06	0.02	92	3	5	0
SW	44.50	45.60	6.21	-5.40	-1.90	102	14	-12	-4
US	21.33	9.32	11.41	0.35	0.25	44	53	2	1

4. tábla. A teljes hozam varianciájának összetevőkre bontása a német befektetők nézőpontjából

A német befektetők nézőpontjából (4. tábla) a tengerentúli befektetésekhez kapcsolódó deviza árfolyam-kockázat számottevően növeli a teljes kockázatot. Az előbb említett „kockázat növelő" hatás az európai országok többségére nézve (Magyarországot is beleértve!) kicsi. Ez Magyarország esetében első látásra meglepőnek tűnik. Rögtön érthetővé válik azonban, ha megvizsgáljuk a 4. tábla 2-3. oszlopában található értékeket: látható, hogy a magyar tőzsdeindex (BUX) havi hozamainak varianciája az általunk vizsgált időszakban 124% volt, ami az árfolyam-változás hozamának varianciájához (8,27%) képest rendkívül nagy, ezért az előbbi a teljes variancián belül nagyobb részarányt képvisel, mint az utóbbi. Ha első közelítésben a variációs koefficiens reciprokát használjuk az egyes országokba való befektetés teljesítményének megítélésére, akkor Magyarország a német befektetők számára az így képezett „liga-tábla" alján található. A német tőzsdeindexbe történő befektetés ellenben – ebben az értelemben – nagyon vonzónak tűnne a magyar befektetők számára.

4 A részvénytőzsdék hozamai közötti korreláció hatása a portfóliók hozamára

Annak érdekében, hogy nemzetközileg diverzifikált portfóliók teljesítményét értékelni tudjuk, szükségünk van azokra az összefüggésekre, amelyekkel egy ilyen portfólió megfelelő paramétereit meg tudjuk határozni.

Egy magyar befektető nemzetközileg diverzifikált portfóliójának teljes hozama a befektetés célpontjául választott országokbeli hozamok befektetési hányadokkal súlyozott összege:

$$R_P = \sum_{i=1}^{N} x_i R_{i,HUF}\,, \tag{4}$$

ahol $R_{i,HUF}$ a magyar befektető portfóliójának teljes hozama az i-ik országban, x_i az i-ik ország tőkepiacára invesztált tőkehányad, N a szóbanforgó országok száma.

Az előzővel azonos összefüggés érvényes a teljes hozam várható értékére, azaz:

$$E(R_P) = \sum_{i=1}^{N} x_i E(R_{i,HUF}) \tag{5}$$

A fenti portfólió kockázata, azaz teljes hozamának varianciája a következőképpen számítható ki:

$$\mathrm{Var}(R_P) = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \mathrm{Var}(R_{i,HUF}) + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{N} x_i x_j \mathrm{Cov}(R_{i,HUF}, R_{j,HUF})\,, \tag{6}$$

ahol $\mathrm{Cov}(R_{i,HUF}, R_{j,HUF})$ az i-edik és a j-edik országokbeli, forint-alapú teljes hozamok közötti kovariancia. Természetesen a fenti összefüggések márka-alapú befektetésekre, azaz német befektetőkre is érvényesek, ha a fenti formulákban a forint-alapú teljes hozam helyett márka-alapú teljes hozamot szerepeltetünk.

A vizsgált országok tőzsdeindexei havi teljes hozamainak korrelációs mátrixát az 5. tábla mutatja. A főátló feletti elemek kiszámítása forint-alapú, a főátló alatti elemeké márka-alapú hozamokra épül, tehát az előbbiek a magyar befektetők, míg az utóbbiak a német befektetők nézőpontját tükrözik.

Mint tudjuk, minél kisebbek a korrelációs mátrix elemei, annál nagyobb kockázat-csökkentési lehetőség rejlik egy nemzetközileg diverzifikált portfólió kialakításában. A két korrelációs mátrix elemeinek páronkénti összehasonlítása azt mutatja, hogy a 136 esetből 100 esetben a megfelelő korrelációs együttható Németországra magasabb volt, mint Magyarországra. A részvényárfolyamok közötti kapcsolat erősségének jellemzésére Meric/Meric (1989) és Longin/Solnik (1995) a páronkénti korrelációs együtthatók átlagát használja. Az átlagos korrelációs együttható Németország esetében 0,57, Magyarország esetében pedig 0,51. Ez utóbbi eredmény – a korrelációs együtthatók páronkénti összehasonlításához hasonlóan – azt sejteti, hogy a korrelációs együtthatók közötti különbség szisztematikus. Ennek megállapítása céljából teszteltük azt a nullhipotézist, hogy a teljes hozamok korrelációs mátrixa a két országra egyenlő, azzal az alternatív hipotézissel szemben, hogy a Magyarországra vonatkozó korrelációs együtthatók kisebbek. A fenti célra a Jennrich (1970) tesztet használtuk. Ebben a tesztben a próbafüggvény aszimptotikusan χ^2 eloszlású, esetünkben (azaz 17x17-es korrelációs mátrix esetén) a szabadságfokok száma 136. A χ^2 statisztika értékeként 84,34 adódott, ami nem jelez szignifikáns különbséget a két mátrix között.

	AU	A	B	CA	CH	D	DE	E	F	GB	HU	IT	JP	NL	NO	SW	US
AUS		.40	.30	.46	.30	.17	.27	.32	.32	.31	.27	.11	.26	.34	.21	.28	.36
AUT	.45		.52	.41	.49	.65	.38	.43	.57	.49	.30	.29	.28	.61	.30	.32	.37
BEL	.56	.51		.51	.59	.63	.58	.53	.73	.69	.27	.25	.38	.78	.51	.43	.67
CAN	.73	.46	.60		.42	.39	.34	.47	.51	.55	.42	.33	.38	.55	.39	.48	.75
CH	.46	.45	.49	.45		.51	.42	.45	.58	.64	.34	.06	.38	.66	.37	.51	.53
D	.52	.64	.59	.45	.39		.55	.59	.69	.61	.21	.34	.27	.75	.44	.54	.45
DEN	.45	.40	.62	.46	.38	.55		.65	.47	.57	.24	.40	.32	.54	.52	.56	.38
ESP	.59	.46	.58	.55	.45	.60	.67		.61	.64	.36	.46	.43	.63	.61	.67	.54
FR	.57	.55	.70	.55	.48	.63	.45	.62		.77	.31	.29	.43	.80	.53	.51	.60
GB	.69	.46	.66	.60	.55	.55	.57	.66	.74		.27	.23	.47	.82	.57	.58	.67
HUN	.42	.37	.39	.50	.44	.31	.34	.44	.40	.38		.25	.15	.34	.38	.35	.39
IT	.32	.39	.42	.48	.16	.46	.52	.55	.39	.35	.34		.33	.22	.35	.34	.24
JP	.48	.25	.33	.39	.29	.21	.31	.43	.37	.42	.20	.40		.50	.31	.41	.34
NL	.71	.60	.76	.64	.57	.71	.57	.68	.76	.80	.47	.39	.45		.58	.62	.67
NO	.58	.38	.62	.52	.44	.52	.60	.66	.59	.64	.45	.47	.35	.68		.63	.46
SW	.62	.29	.39	.51	.43	.49	.54	.66	.46	.54	.40	.40	.39	.58	.65		.54
US	.64	.39	.70	.81	.51	.44	.45	.59	.60	.67	.47	.41	.32	.70	.57	.53	

5. tábla. A tőzsdeindexek havi teljes hozamainak korrelációs mátrixa (1991. jan. – 1997. ápr.)[5]

[5] A fenti mátrixban a főátló feletti elemek kiszámításánál forint-alapú, a főátló alatti elemek meghatározásánál pedig márka-alapú hozamokat vettünk alapul.

5 A nemzetközi portfólió diverzifikációból származó előnyök: ex post elemzés

5.1 A portfólió kiválasztási stratégiák leírása

A nemzetközi részvény-befektetésekből származó potenciális előnyök illusztrálása céljából elvégeztük néhány portfólió kiválasztási stratégia ex post értékelését. Jóllehet a portfólió elmélet szakirodalmában több hatékonysági koncepció (például a sztochasztikus dominancia szabályok) ismeretes, mi ebben a tanulmányban a Markowitz-féle hozam-kockázat hatékonysági kritériumot használtuk. Számításaink az 1991. január és 1997. április közötti időszak havi teljes hozamain alapulnak. Összességében mindkét országra vonatkozóan négy nemzetközileg diverzifikált portfóliót vizsgáltunk: az ún. naiv portfóliót (EQW), a minimum-variancia portfóliót (MVP), az ,,érintő" portfóliót (CET) és a hazai tőzsdeindexszel (hazai portfólióval) megegyező kockázatú hatékony portfóliót (ERP).

Az ún. naiv portfólió esetében minden országba ugyanakkora tőkehányadot invesztálunk. Ez a stratégia az értékpapírok hozamaira, kockázatára és az értékpapírok közötti korrelációra vonatkozó információ nélkül igyekszik megragadni a nemzetközi befektetésből származó előnyöket.

A másik három stratégia a hozamokra vonatkozó történeti adatsorok felhasználásával azonosítja a hozam-kockázat hatékony portfóliókat. Az említett adatsorok a befektetői várakozások modellezésére szolgálnak. A minimum-variancia stratégiát konzervatív befektetési stratégiaként tartják számon. Ez a stratégia annak a portfóliónak a meghatározását célozza, amely a legkisebb kockázattal rendelkezik. Jellegzetessége, hogy alkalmazása nem igényli az egyes értékpapírok várható hozamainak előrejelzését. Amennyiben megengedjük a fedezetlen eladásokat, a minimum-variancia portfólió a következő optimalizálási feladat megoldásával nyerhető:

$$\begin{aligned} \min V &= \mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{x} \\ \mathbf{1}^T \mathbf{x} &= 1\,, \end{aligned} \tag{7}$$

ahol: $\mathbf{x}$ az egyes országokba invesztált tőkehányadok vektora, $\mathbf{C}$ a teljes hozamok variancia-kovariancia mátrixa, $\mathbf{1}$ összegező vektor (minden komponense 1), ^{T} a megfelelő vektorok transzponáltját jelöli.

Ha kizárjuk a fedezetlen eladásokat, akkor a modellben szereplő korlátozó feltétel az $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ feltétellel egészül ki. Természetesen ebben az esetben a minimum-variancia portfóliót előállító algoritmus is módosul.

Az ,,érintő" stratégia a Sharpe-féle hányadost – mint célfüggvényt – maximalizáló portfólió kiválasztására törekszik.[6] A Sharpe-féle hányadoshoz úgy jutunk, ha a kockázatmentes hozamon felüli hozam várható értékét elosztjuk a kockázattal. Az előző stratégiához képest ez egy agresszív stratégia, amely közvetlenül felhasználja a portfóliót képező vagyontárgyak várható hozamára

[6] Ezt a stratégiát Eun/Resnick (1994, 148 o.) ,,certainty-equivalence-tangency" névvel illeti, ezért röviden CET stratégiaként hivatkozunk rá.

vonatkozó információt. Az érintő portfólió a következő optimalizálási feladat megoldásával származtatható:

$$\max S = \frac{(\mathbf{E}^T - r_f \mathbf{1}^T)\mathbf{x}}{\sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{x}}}$$
$$\mathbf{1}^T \mathbf{x} = 1 \quad (\mathbf{x} \geq \mathbf{0}) \tag{8}$$

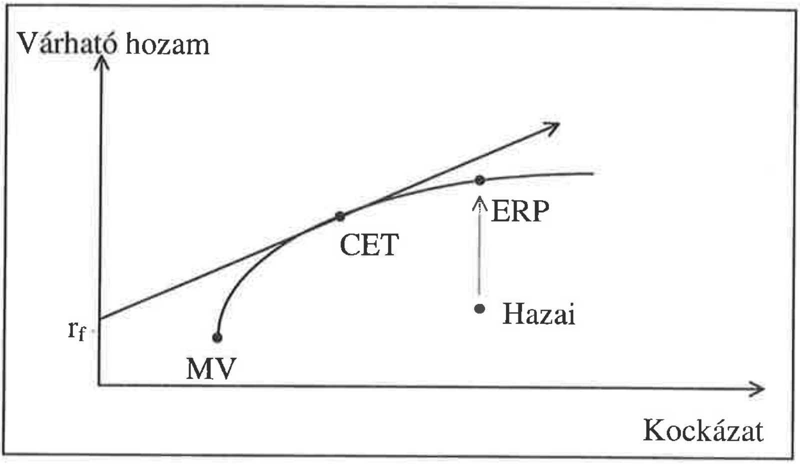
ahol: $\mathbf{E}$ a várható hozamok vektora, r_f a kockázatmentes hozam.

Ahhoz, hogy a nemzetközi portfólió diverzifikációból származó előnyöket értékelni tudjuk, szükségesnek látszik, hogy egy kizárólag hazai részvényekből álló portfólió és egy nemzetközileg diverzifikált portfólió teljesítményét közvetlenül összemérhetővé tegyük. Ez elképzelhető úgy (lásd Haavisto/Hansson (1992)), hogy „a részvények nemzetközi kínálatából" kiválasztjuk azt a hatékony portfóliót, amely a hazaival azonos várható hozammal, de kisebb kockázattal rendelkezik. A fenti célra ebben a tanulmányban mi azt a portfóliót (ERP) igyekszünk azonosítani, amelynek kockázata egyezik meg a hazai portfólióéval. Ha a nemzetközileg hatékony portfóliók között sikerül a fentieknek megfelelő, a hazainál nagyobb várható hozammal rendelkező portfóliót találni, akkor ez egyértelműen bizonyítja, hogy a nemzetközi diverzifikáció jó hatással van a befektetések hozamának növekedésére. Abban az esetben, ha a hatékony portfóliók között nem találunk a hazaival megegyező kockázatút, – ez lehetséges, ha kizárjuk a fedezetlen eladásokat – azaz, ha a hazai portfólió kockázatosabb, mint a legnagyobb várható hozamú nemzetközi befektetés, akkor az ERP helyett ez utóbbit választjuk. Az ERP magasabb kockázattal rendelkezik, mint a minimum-variancia portfólió és a hazai portfólió kockázatától függően alacsonyabb vagy magasabb kockázattal, mint a CET portfólió, így többé-kevésbé agresszív stratégiának könyvelhető el.

Amennyiben $\mathbf{x^e}$ egy hatékony halmazbeli portfóliót jelöl, akkor (magyar nézőpontból) az ERP-nek megfelelő $\mathbf{x}$ portfólió meghatározása a következő maximalizálási probléma megoldását igényli:

$$\max E = \mathbf{E}^T \mathbf{x}$$
$$\mathbf{1}^T \mathbf{x} = 1 \quad \mathbf{x} \in \mathbf{x}^e \quad (\mathbf{x} \geq \mathbf{0}) \tag{9}$$
$$\mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{x} \leq \mathrm{Var}(R_{HUF})$$

ahol $\mathrm{Var}(R_{HUF})$ a hazai portfólió (BUX) varianciája. Az általunk használt ex post hatékony stratégiákat az 1. ábra illusztrálja.



1. ábra. Portfólió kiválasztási stratégiák

Gyakran azt is vizsgálják, hogyan befolyásolja a nemzetközi portfólió-kiválasztási stratégiák teljesítményét az árfolyam-kockázat fedezése. Glen/Jorion (1993), Eun/Resnick (1994) és Liljeblum/Löflund/Krokfors (1997) számításba veszik, hogy a hazai befektető a devizák jövőbeli értékének biztosítása céljából forward vételi szerződést köthet. Napjainkban ezen fedezeti lehetőségek piaca Magyarországon is rendelkezésre áll és folyamatosan fejlődik. Az általunk vizsgált teljes időszakra vonatkozóan ez nem volt érvényes, így tanulmányunkban mind a magyar, mind pedig a német befektetőkre vonatkozóan eltekintettünk az árfolyam-kockázat fedezésének vizsgálatától.

5.2 Empirikus eredmények

Az 1-5. táblában szereplő bemenő paraméterek (várható teljes hozamok, a hozamok varianciája, a hozamok közötti korreláció) felhasználásával meghatároztuk az előző szakaszban említett nemzetközileg diverzifikált portfóliók hozamát és kockázatát mind a magyar, mind a német befektetők nézőpontjából. A portfóliók teljesítményének értékelésére a Sharpe-féle mutatót alkalmaztuk. Számításainkban feltételeztük, hogy a befektetők élhetnek a fedezetlen eladásokkal, és az ebből befolyt jövedelmet szabadon felhasználhatják. Eredményeinket a 6. tábla mutatja.

	NÉMETORSZÁG			MAGYARORSZÁG		
	Átlagos hozam	Hozam szórása	Sharpe-mutató	Átlagos hozam	Hozam szórása	Sharpe-mutató
EQW	1.30	4.07	0.186	2.56	3.80	0.248
MVP	1.64	2.83	0.388	2.93	2.85	0.458
CET	3.72	4.48	0.711	4.92	4.31	0.764
ERP	3.45	4.14	0.704	9.48	11.06	0.711
Hazai Portfólió	1.21	4.14	0.162	3.28	11.06	0.349

6. tábla. Portfóliók ex post teljesítménye az 1991. január és 1997. április közötti időszakban (az átlagos hozam és a szórás havi érték, egysége %.)

Magyar nézőpontból az EQW, MVP és CET stratégiák alkalmazásából – így a befektetések nemzetközi diverzifikációjából származó előnyök – a kockázat (a hozam szórásának) csökkenésében öltenek testet. E kockázat csökkenés mértéke még a naiv portfólió (EQW) esetében is magas. Az EQW stratégia alkalmazása esetén csökken a kapott portfólió havi átlagos hozama is és – a hazai portfólióhoz viszonyítva – a Sharpe-féle mutató értékében is csökkenés tapasztalható. Német nézőpontból a naiv portfólió domináns a hazai portfólióval szemben, mert az előbbi nagyobb átlagos hozammal és kisebb kockázattal rendelkezik. Ennek eredményeként azonban csak enyhe javulás mutatkozik a teljesítményben (a Sharpe-féle mutató értékében).

Magyarországra vonatkozóan az MVP hozamának szórása közel 75%-kal kisebb, mint a hazai portfólióé (amit a BUX jelképez). Ez a hozam mérsékelt csökkenésével együtt is azt eredményezi, hogy e portfólió teljesítménye nagymértékben növekszik a hazai portfólió teljesítményéhez képest. Németország esetében szintén jelentős növekedés tapasztalható a Sharpe-féle mutató értékében az MVP stratégia alkalmazása során. Ez annak köszönhető, hogy az MVP havi átlagos hozama kb. 35%-kal magasabb, kockázata pedig 30%-kal alacsonyabb mint a hazai portfólióé. Nem meglepő, hogy az összes stratégia közül a CET-re adódott a legnagyobb Sharpe-féle mutató, hiszen a CET portfólió éppen ez utóbbi mutató értékét maximalizáló értékpapír-kombináció. Magyarország esetében a CET portfoliónak nagyobb az átlagos hozama és egyúttal kisebb a kockázata mint a hazai portfólióé. Az ERP Magyarország esetében a hazai portfóliónál 290%-kal, míg Németország esetében 285%-kal magasabb átlaghozamot biztosít ugyanakkora kockázat mellett.

A fenti eredmények azt mutatják, hogy a részvény-befektetések nemzetközi diverzifikációja mindkét ország számára hasznos lehet. Ex post vizsgálatoknál (amikor az optimális portfóliók előállítása és teljesítményének értékelése ugyanazon mintaperiódus alapján történik) az előállított portfóliók teljesítménye azáltal javul, ha nő a portfóliót alkotó értékpapírok száma. Statisztikai szempontból felmerül a kérdés, hogy ez a teljesítmény növekedés elég nagy-e ahhoz, hogy ne csupán a véletlennek legyen tulajdonítható. Ennek megítélésére Gibbons/Ross/Shanken (1989) kifejlesztett egy tesztet. Ha T a megfigyelések száma, N_1 a kezdetben rendelkezésre álló értékpapír-minta elemszáma, N a kibővített (teljes) értékpapír-minta elemszáma és $N_2 = N - N_1$, akkor a Gibbons/Ross/Shanken (1989) tesztben szereplő próbafüggvény a következő alakú:

$$F = \frac{T - N}{N_2} \cdot \frac{\theta_N^2 - \theta_{N_1}^2}{1 + \theta_{N_1}^2} \tag{10}$$

ahol θ_{N_1} és θ_N a Sharpe-féle mutató maximális értéke az N_1 és N elemszámú értékpapír-mintában. A próbafüggvény $(T - N, N_2)$ szabadságfokú F-eloszlást követ. Magyarország esetében a próbafüggvény értéke 1,518, az ehhez tartozó valószínűség 0,179, ami nem jelez statisztikailag szignifikáns növekedést a nemzetközileg diverzifikált portfólió teljesítményében. Németországra a teszt statisztika értéke 1,722, a hozzá tartozó valószínűség pedig 0,114, ami szintén nem jelent statisztikailag szignifikáns különbséget a hazai és a nemzetközi portfólió között.

Az egyes stratégiák által szolgáltatott optimális portfólióban szereplő befektetési hányadokat a 7. tábla mutatja.

	Német befektetők			Magyar befektetők		
	MVP	CET	ERP	MVP	CET	ERP
AUS	-13.50	7.88	5.05	17.95	29.01	54.47
AUT	-5.16	-55.10	-48.50	-9.51	-59.50	-175.00
BEL	16.20	9.16	10.09	-13.40	-23.00	-45.20
CAN	2.48	-30.40	-26.00	1.63	-23.10	-79.90
CH	30.23	67.52	62.59	17.75	48.61	119.60
D	26.64	-4.32	-0.23	26.82	4.60	-46.50
DEN	17.87	1.00	3.23	20.07	-2.69	-56.50
ESP	-18.40	-6.93	-8.45	-16.40	-3.15	27.44
FR	-2.01	-10.90	-9.74	-13.40	-22.90	-44.70
GB	-1.54	-39.50	-34.50	-19.60	-45.30	-104.00
HUN	-4.47	-5.05	-4.97	-3.45	-3.82	-4.67
IT	0	19.11	16.58	10.99	26.54	62.33
JP	10.14	-22.20	-18.00	1.84	-27.10	-93.60
NL	37.62	178.00	159.50	56.77	192.70	505.30
NO	-11.00	-36.70	-33.30	8.06	-15.00	-68.10
SW	2.50	8.15	7.40	-18.70	11.20	5.91
US	12.45	20.40	19.35	31.93	35.28	42.97

7. tábla. Az optimális ex post portfóliókhoz tartozó befektetési arányok (%-ban)

A magyar befektetők minimum-variancia portfóliójában a legnagyobb súllyal Hollandia (56,77%), USA (31,93%) és Németország (26,82%) szerepel. Az előző portfólióban Nagy-Britannia és Svédország viszonylag nagy negatív súlyt kapnak, ami azt jelenti, hogy ez utóbbiakban végrehajtott fedezetlen eladások finanszírozási forrást képezhetnek az előbbi országokbeli befektetésekhez. A német befektetők MVP stratégiája esetében Hollandiára (37,62) adódik a legnagyobb pozitív, míg Spanyolországra a legkisebb negatív súly. A CET portfólió szerkezetét a vizsgált országok tőzsdeindexeinek Sharpe-mutatója határozza meg. Így mind a magyar, mind a német befektetők CET portfóliójában Hollandia képviseli a legnagyobb súlyt (hiszen a Sharpe-mutató Hollandiára a legnagyobb), Svájcot és az USA-t megelőzve. Említésre érdemes, hogy az ERP-ben a magyar (német) befektetők esetében a vizsgált 17 ország közül csak 7 (9) országra adódott pozitív súly és a kapott súlyok szélsőségesen szóródnak. A magyar ERP-ben például Hollandia rendkívül nagy pozitív súlyt képez ($505,3\%$), míg Ausztriára nagy negatív arány adódik (-175%). A fentiek német nézőpontból is érvényesek, azzal a különbséggel, hogy a német ERP-ben Hollandia $159,5\%$-os, míg Ausztria $-48,5\%$-os súlyt képvisel. Mindkét ország vonatkozásában Magyarország, mint befektetési célország szerepe szinte elhanyagolható, ugyanis Magyarországra mindkét esetben kis (negatív) súlyokat kaptunk. A fentiek Németországra nem érvényesek, amely – mint befektetési célország – mind a magyar, mind a német befektetők minimum-variancia portfóliójában fontos szerepet játszik.

6 Nemzetközi portfólió diverzifikáció: ex ante elemzés

6.1 Módszertan

Az előző szakaszbeli eredmények azt mutatják, hogy az 1991. január és 1997. április közötti időszakban a nemzetközileg diverzifikált portfóliók jobb teljesítményt mutattak, mint a hazai portfólió. Az alkalmazott ex post elemzés hátránya, hogy az optimális portfóliót meghatározó befektetési arányok csak utólag tárhatók fel. Felvetődik a kérdés, hogy a részvény-befektetések nemzetközi diverzifikációja által kínált előnyök akkor is mutatkoznak-e, ha a befektetési döntés kizárólag a döntést megelőző információkra épül.

A befektetési döntéshozásnak egy valóságos döntési szituációt tükröző megközelítési módja, hogy a különböző portfóliók teljesítményének értékelésére egy ex ante „visszatesztelési" módszert alkalmazunk (lásd Eun/Resnick (1988,1994), Glen/Jorion (1993), Levy/Lim (1994) és Liljeblum/Löflund/ Krokfors (1997)). Ennek megvalósításához két különböző időhorizont használatos: egy becslési és egy előrejelzési periódus. Vizsgálatainkban mi egy 24 hónapból álló becslési periódust alkalmaztunk, amelyet – az általunk feltételezett egy hónapos tartási (előrejelzési) periódusnak megfelelően – havi csúszásokkal „továbbgörgettünk". Így az első becslési periódus 1991 januárjától 1992 decemberéig tartott, a második 1991 februárjától 1993 januárjáig és így tovább; az első tartási periódus 1993 januárja, a második 1993 februárja és így tovább. A becslési periódus segítségével meghatározott paraméterek (teljes hozamok, a hozamok szórása, a hozamok közötti korreláció) – amelyek a portfólió kiválasztási probléma bemenő paraméterei – felhasználásával a becslési periódust követő egy hónapos tartási periódusra vonatkozóan előállítottuk az egyes stratégiák alkalmazásának megfelelő optimális portfóliókat (befektetési arányokat). A kialakított befektetési arányokat minden tartási periódus (hónap) végén – az egy hónappal „továbbgörgetett", új becslési periódusbeli statisztikai információknak (új paramétereknek) megfelelően – felülvizsgáltuk. Összességében, ezzel a módszerrel minden egyes stratégiára vonatkozóan 52 (76-24) egymást követő, havi hozamot tudtunk előrejelezni.

Minden tartási periódusban – az egyes stratégiák által szolgáltatott optimális befektetési arányok meghatározásához – becsülni szükséges a vizsgált értékpapírok teljes megtérülésének variancia-kovariancia mátrixát ($\mathbf{V}$). Tanulmányunkban az említett mátrix becslésére a Jorion (1986, 286. o.) által javasolt mátrixot használtuk, amely a következőképpen állítható elő:

$$\mathbf{V} = \mathbf{S} \cdot \frac{T-1}{T-N-2} \tag{11}$$

ahol $\mathbf{S}$ az idősori értékekből becsült (torzítatlan) variancia-kovariancia mátrix, T a becslési periódus hossza, N az értékpapírok száma. Esetünkben $T = 24$ és $N = 17$. A (11) formulából megállapítható, hogy a $(T-1)/(T-N-2)$ szorzótényező „emelő" hatást fejt ki a mátrix elemeire és ez a hatás a becslési periódus hosszának rövidülésével és az értékpapírok számának növekedésével erősödik. Így a módosított mátrix segítségével a portfóliók kockázata magasabb lesz, mint amit **S** felhasználásával kapnánk.

A fentiek birtokában, az 52 tartási periódus mindegyikére meghatározhatók a minimum-variáncia portfóliónak megfelelő befektetési arányok, ha megoldjuk a (7) optimalizálási problémát. Ezek után a kapott portfóliók hozama előrejelezhető.

Az „érintő" portfólió, valamint az ERP meghatározásához – a variancia-kovariancia mátrix mellett – szükség van az egyes értékpapírok várható hozamainak becslésére. Ennek a legegyszerűbb módja, ha a hozamok idősoraiból számított átlagértékeket használjuk a fenti célra (ahogy az ex post elemzésnél tettük). Ez a megközelítés kizárólag az idősorban meglévő, értékpapír-specifikus, múltbeli információt használja a hozam becslésére. Jorion (1985,1986) rámutatott, hogy ennek a módszernek az a problémája, hogy az így számított átlagérték nagyon instabil, becslési kockázatot hordoz. Ez az „érintő" portfólió esetében igen érzékenyen érinti a kapott befektetési arányokat, azok instabilitásához vezet. Ez az instabilitás szélsőségesen változó portfólió-hozamokban ölt testet.[7]

A hozamok varianciája és a hozamok közötti korreláció szintén ki van téve a becslési kockázatnak, de amint azt Merton (1980), Jorion (1986), Kaplanis (1988) kimutatták, ezek a paraméterek általában időben stabilabbak, mint a várható hozamok. A teljes hozamok korrelációs mátrixa időbeli stabilitásának teszteléséhez a vizsgált időszakot két részperiódusra bontottuk: 1991. jan. – 1994. febr. és 1994. márc. – 1997. ápr. közötti időszakra. A két időszak korrelációs mátrixának összehasonlítására a Jennrich-tesztet alkalmaztuk, amelynek próbafüggvénye aszimptotikusan χ^2 eloszlású, ami esetünkben 136 szabadságfokkal rendelkezik. A tesztelés során az adódott, hogy a két korrelációs mátrix egyenlőségére vonatkozó nullhipotézis sem Magyarország, sem Németország esetében nem vethető el a szokásos 5%-os szignifikancia szinten.[8] A részvénypiacok együttmozgásának a fentiekben tapasztalt stabilitása összhangban van más kutatók empirikus eredményeivel (lásd Meric/Meric (1988), Kaplanis (1988), Longin/Solnik (1995) vagy Liljeblum/Löflund/Krokfors (1997)). Az említett tanulmányok kimutatták, hogy a kovariancia mátrix nem tekinthető időben stabilnak azzal összefüggésben, hogy a hozamok varianciái nem mutatnak időbeli stabilitást. A választott két időszak kovariancia mátrixai egyenlőségének tesztelésére szintén a Jennrich-tesztet alkalmaztuk. A szabadságfokok száma ebben az esetben 153, mert a mátrix diagonális elemei időben változhatnak (Longin/Solnik, 1995, 5. o.). Számításaink során azt kaptuk, hogy a kovariancia mátrixok egyenlőségére vonatkozó nullhipotézis Németország esetében 11%-os, Magyarország esetében pedig 13%-os szignifikancia szinten utasítható el, tehát —a korrelációs mátrix stabilitásához hasonlóan— a kovariancia mátrix stabilitására vonat-

---

[7] Fedezetlen eladások megengedése esetén például szélsőségesen magas (200% fölötti) befektetési arányok (short vagy long pozíciók) adódhatnak bizonyos országokra. Egy itt nem közölt – a tanulmányban használt adatokon és stratégiákon alapuló – elemzésben a szerzők a becslési periódus hosszának változtatása során néha kiugróan magas, néha pedig „katasztrófálisan" alacsony portfólió-hozamokat tapasztaltak.

[8] A részletes eredmények elérhetők a szerzőknél.

kozó hipotézis sem vethető el a szokásos 5%-os szignifikancia szinten.

Jorion (1985) szerint az egyes értékpapírok várható hozamára, azaz a várható hozam vektorára jó becslést szolgáltat a következő formula:

$$\mathbf{e}^* = (1-w)\mathbf{e} + w\mathbf{1}e_0\,, \tag{12}$$

ahol $\mathbf{e}$ a hozamok idősoraiból becsült várható hozamok vektora, $\mathbf{1}$ összegző-vektor (minden eleme 1), e_0 pedig az ex post minimum variancia portfólió átlagos hozama. A w paraméter tulajdonképpen egy „összehúzó" tényező, amely $\mathbf{e}$ elemeit e_0-hoz közelíti. Jorion (1985) w meghatározására az alábbi összefüggést javasolja:

$$w = \frac{(N+2)(T-1)}{(N+2)(T-1) + (\mathbf{e}-e_0\mathbf{1})^T T\mathbf{S}^{-1}(T-N-2)(\mathbf{e}-e_0\mathbf{1})} \tag{13}$$

Ha a kovariancia mátrix becslésére a (11) formulát, a várható hozamok becslésére pedig a (12) formulát alkalmazzuk és ezek után megoldjuk a (8) optimalizálási problémát, akkor az ún. Bayes-Stein-féle érintő portfólióhoz jutunk. A (12) becslőformula – speciális esetként – $w = 0$ ill. $w = 1$ értékekre a klasszikus érintő portfóliót ill. a minimum-variancia portfóliót szolgáltatja. A Bayes-Stein-féle érintő portfólió agresszívebb befektetési stratégia „termékének" tekinthető, mint a minimum-variancia portfólió és kevésbé agresszívének, mint az érintő portfólió. Ez annak a következménye, hogy $0 < w < 1$ esetén a (12) formulának megfelelően az egyes értékpapírok becsült várható hozama a minimum variancia portfólió és a klasszikus érintő portfólió átlagos hozama közé esik.[9]

Az ERP stratégia esetében a fent bemutatott Bayes-Stein-féle becslési eljárással (transzformációval) ugyanazokhoz a befektetési arányokhoz jutottunk, mint amikor a várható hozam vektort az idősorból becsültük, azaz a Bayes-Stein transzformáció nem eredményezett javulást az ERP stratégia teljesítményében.

A portfólió havi felülvizsgálata —az alkalmazott portfólió kiválasztási stratégiától függően— a befektetési arányok változását eredményezi. A befektetési arányok módosításának a gyakorlatban költségvonzata van, amelynek a hozam csökkenése a következménye. Ennek figyelembe vétele céljából a portfólió súlyok —egyik periódusról a másikra történő— összváltozásának a 0.25%-át kitevő „tranzakciós költségekkel" számoltunk, azaz az ennek megfelelő hányadot levontuk a kapott portfólió hozamából.

A fedezetlen eladások megengedése a portfólió kiválasztási problémákban szélsőséges pozitív illetve negatív befektetési arányokhoz vezethet. Számos tőzsdén az ilyen tranzakciók nem megengedettek illetve bizonyos befektetők számára tiltott vagy erősen korlátozott ez a lehetőség. A német befektetési alapok és biztosítási cégek – amelyek az egyéni befektetők részére fontos

[9] Azokban a periódusokban – a Liljeblum/Löflund/Krokfors (1997) tanulmányhoz hasonlóan – amikor az érintő portfólió várható hozamára alacsonyabb értéket kaptunk mint a kockázatmentes hozam, úgy tekintettük, hogy a befektető pénzét teljes egészében a kockázatmentes befektetésbe invesztálja.

közvetítőt jelentenek egy nemzetközileg diverzifikált portfólió kialakításában – számára a felügyeleti szervek tiltják az ilyen tranzakciókban való részvételt. A fentiek a magyar befektetőkre is érvényesek, így az ex ante stratégiák vizsgálatánál kizártuk a fedezetlen eladások lehetőségét.

6.2 Empirikus eredmények

Minden általunk alkalmazott stratégiára kiszámítottuk az 52 tartási periódusra vonatkozó átlagos hozamot, a hozamok szórását és a Sharpe-féle mutató értékét. Ez utóbbit használtuk a portfólió kiválasztási stratégiák teljesítményének értékelésére. A kapott eredményeket a 8. tábla mutatja. A nemzetközileg diverzifikált portfóliók és a hazai portfólió teljesítménye közötti különbséget a Jobson/Korkie (1981) által kidolgozott z-statisztikával teszteltük. A 8. táblában azt is szerepeltetjük, hogy a különböző stratégiák alkalmazása esetén mekkora volt a havi rendszeres portfólió-felülvizsgálat eredményeként a befektetési arányokban bekövetkezett átlagos változás ($\overline{\Delta}$).

	NÉMETORSZÁG					
	Átlagos hozam (%)	A hozam szórása (%)	Sharpe-mutató	JK-stat.	Valószínűség	$\overline{\Delta}$
EQW	1.69	3.99	0.320	-0.250	0.40	0
MVP	1.98	4.02	0.387	-0.760	0.22	37.39
CET	1.49	3.84	0.278	0.027	0.49	48.72
BST	1.41	3.61	0.274	0.014	0.49	62.01
ERP	1.75	4.07	0.326	-0.240	0.41	50.02
Hazai p.	1.61	4.09	0.290	-	-	0

	MAGYARORSZÁG					
	Átlagos hozam (%)	A hozam szórása (%)	Sharpe-mutató	JK-stat.	Valószínűség	$\overline{\Delta}$
EQW	3.06	3.42	0.460	-4.630	0	0
MVP	3.03	3.15	0.485	-4.648	0	30.23
CET	2.65	3.52	0.327	-2.868	0	52.09
BST	3.00	3.34	0.449	-4.067	0	51.99
ERP	3.42	6.68	0.286	-1.287	0.13	73.08
Hazai p.	4.33	12.81	0.221	-	-	0

8. tábla. Az ex ante portfólió kiválasztási stratégiák teljesítményének összehasonlítása

Az ex post elemzés során tapasztaltakhoz hasonlóan a részvény befeketések nemzetközi diverzifikációjából származó előnyök a magyar befektetők számára a kockázat csökkenésében öltenek testet. Az EQW, MVP, CET és BST stratégiák alkalmazása esetén a kapott portfóliók hozamának szórása több mint 70%-kal kisebb mint a hazai portfólió (BUX) hozamának szórása. Az ex post elemzéssel összhangban a minimum-variancia portfóliónak a legkisebb a kockázata. A fent említett stratégiák egyúttal csökkenést eredményeznek az általuk szolgáltatott portfólió átlagos hozamában. E csökkenés mértéke 30% (EQW) és 40% (CET) között mozog. A fedezetlen eladásokra vonatkozó korlátozás miatt a hazai portfólió a legkockázatosabb nemzetközileg hatékony portfóliónál is nagyobb kockázattal bír. Ezzel magyarázható, hogy az ERP kockázata alacsonyabb a hazai portfólióénál (közel 50%-kal). Ugyanakkor a fenti portfólió átlagos hozama 21%-kal alacsonyabb a BUX átlaghozamánál. Az ERP stratégia kivételével az összes nemzetközi portfólió-kiválasztási stratégia teljesítménye szignifikánsan magasabb a hazai portfólió teljesítményénél (lásd a Sharpe-mutatók egyenlőségére vonatkozó Jobson/Korkie stat. értékét és a hozzá tartozó valószínűséget). Magyarország esetében az egyes tőzsdeindexek várható hozamai becslésének „finomítása", azaz a Bayes-Stein-féle hozambecslési eljárás javulást eredményezett a kapott portfólió teljesítményében. A BST stratégia ugyanis domináns a CET stratégiával szemben, mert kisebb kockázat mellett nagyobb átlagos hozamot biztosít. Figyelemre méltó, hogy a CET stratégiára kaptunk a második legkisebb Sharpe-féle mutatót, ami nem felel meg az ex post elemzés alapján kialakított várakozásainknak. A befektetési arányokban bekövetkezett átlagos változás (ami a havonkénti portfólió felülvizsgálattal jár) 30,23% (MVP) és 73,08% (ERP) között változott.

A német befektetőkre vonatkozóan szintén „regisztrálhatunk" a nemzetközi portfólió kiválasztási stratégiák alkalmazásából adódóan bizonyos mértékű kockázatcsökkenést, de ez közel sem akkora, mint a magyar befektetők esetében. Az ERP stratégiára a hozam szórása közelítőleg megegyezik a hazai portfólióéval, az előbbi átlagos hozama viszont magasabb, mint az utóbbié, ami összhangban van az ex post elemzés során kialakított várakozásainkkal. A hazai portfóliónál magasabb átlagos hozammal rendelkezik a naiv portfólió valamint a minimum-variancia portfólió is. Említésre érdemes, hogy a minimum-variancia portfólió paraméterei nem igazolják előzetes várakozásainkat, ugyanis ennek a portfóliónak a CET és a BST portfóliónál is nagyobb az átlagos hozama és egyúttal magasabb a kockázata is. Németország esetében a bemenő paraméterek becslésével járó kockázat kontrollálása nem vezetett a teljesítmény növekedéséhez, ugyanis a BST stratégiára alacsonyabb a Sharpe-mutató értéke, mint a CET stratégiára. Ezen kívül ez utóbbi stratégiák teljesítménye alacsonyabb a hazai portfólió teljesítményénél (DAX). A további három stratégiára (EQW, MVP, ERP) a Sharpe-mutató értéke magasabb a hazai portfólióra kapott értéknél, ez a különbség azonban egyik esetben sem tekinthető statisztikailag szignifikánsnak. A befektetési arányokban bekövetkezett átlagos változás az MVP stratégiára a legalacsonyabb, míg a BST stratégiára a legmagasabb.

Az ex ante stratégiákra kapott átlagos befektetési arányokat a 9. tábla mutatja.

A magyar MVP stratégia alkalmazása esetén a létrehozott portfólióban nagy arányt kap a dán (22,65%) és az amerikai (20,03%) részvénypiacra irányuló befektetés. Hollandia az említett portfólióban elveszti az ex post elemzésben megfigyelt domináns szerepét. A CET portfólióban Svájc (35,8%) és az USA (17,25%) magas részesedését figyelhetjük meg. Hollandia ebben a portfólióban is kisebb szerepet játszik, mint az ex post elemzés során. A magyar ERP-ben Svédország képviseli a legnagyobb átlagos súlyt (34,61%),

	Német befektetők				Magyar befektetők			
	MVP	CET	BST	ERP	MVP	CET	BST	ERP
AUS	0	0	3.85	0.17	9.49	5.59	11.70	5.77
AUT	2.63	0	0	0	0.15	0	0.10	0
BEL	14.60	1.38	6.84	0	4.61	2.77	3.71	0
CAN	0	0	0	0.04	2.05	0.13	0.10	0
CH	19.10	59.20	45.10	55.20	11.20	35.80	26.20	23.10
D	11.20	1.19	4.56	0	10.40	2.48	7.56	0
DEN	7.22	0.10	1.67	0	22.65	6.01	15.96	0
ESP	0	0.08	0.01	0.79	0.80	0.56	0.22	0
FR	0.41	0	0	0	0	0.10	0.07	0
GB	6.31	3.10	4.02	1.58	0.79	1.52	1.20	0
HUN	2.79	0.05	0	1.20	3.68	0.32	0.10	19.23
IT	1.42	2.22	1.41	1.68	6.72	6.73	6.78	1.92
JP	6.87	3.26	2.86	4.13	1.62	1.10	0.59	7.69
NL	7.35	16.65	15.29	3.44	1.83	8.66	3.84	0
NO	0.50	1.60	0.92	2.76	3.69	1.88	1.95	1.92
SW	0.40	4.07	4.39	19.74	0.99	9.07	3.51	34.61
US	19.96	7.11	9.14	9.24	20.03	17.25	16.40	5.77

9. tábla. Az optimális ex ante portfóliókhoz tartozó átlagos befektetési arányok (%-ban)

Említésre érdemes, hogy az ERP stratégia az 52 részperiódus közül 18 esetben szolgáltatta (100%-os részesedéssel) optimális portfólióként a hazai portfóliót (a BUX-ot). Ez azzal magyarázható, hogy minden részperiódusban a BUX rendelkezett a legmagasabb becsült kockázattal. Az említett 18 eset közül 10 esetben – a 17 tőzsdeindex közül – a BUX biztosította a legnagyobb várható hozamot, ami az 1996-os évben a Budapesti Értéktőzsdén végbement rendkívül intenzív Hausse-nak köszönhető. Ex ante elemzésünkben német nézőpontból, az ex post eredményekhez hasonlóan, Svájc – mint befektetési célország – mind az MVP, mind pedig az érintő stratégiák által szolgáltatott optimális portfóliókban fontos szerepet játszik. Megfigyelhető, hogy az ERP-ben egyáltalán nem kap szerepet a német befektetők esetében a hazai befektetés. Ez azzal magyarázható, hogy a nemzetközi részvénypiac – azonos kockázat mellett – minden tartási periódusban magasabb hozammal „kecsegtetett", mint a hazai.

7 Összefoglalás és következtetések

Tanulmányunkban két európai ország – Magyarország és Németország – befektetőinek nézőpontjából vizsgáltuk a nemzetközi portfólió diverzifikációból származó potenciális előnyöket. Empirikus elemzésünk 17 ország tőzsdeindexe által reprezentált részvény-portfóliókra terjedt ki. A vizsgált időszak az 1991. január és 1997. április közötti periódus volt. A nemzetközi portfólió-kiválasztási stratégiák teljesítményét mind ex post mind ex ante alapon értékeltük. Eun/Resnick (1994) és Liljeblum/Löflund/Krokfors (1997) munkáját követve megvizsgáltuk az ún. naiv, a minimum-variancia és az érintő portfóliókat szolgáltató stratégiákat. Az egyes tőzsdeindexek várható hozamai becslésének „finomítására" elvégeztük a Bayes-Stein transzformációt. Ezen kívül elméletileg és empirikusan azt a nemzetközi stratégiát is elemeztük, amely a Markowitz-i értelemben hatékony portfóliók közül a hazaival megegyező kockázatút választja ki. Ez utóbbi portfóliót ERP-nek neveztük. Az ex ante stratégiák értékelésénél figyelembe vettük a havi rendszeres portfólió felülvizsgálat hozamcsökkentő hatását. Elemzésünk főbb eredményei a következőkben összegezhetők:

1. Az ex post elemzés során feltártuk, hogy a nemzetközi portfólió diverzifikációból származó potenciális előnyök a magyar befektetők számára a kockázat csökkenésében, míg a német befektetők számára mind a kockázat csökkenésében (bár ez utóbbi kisebb volumenű volt, mint a magyar befektetők esetében) mind magasabb átlaghozamok elérhetőségében öltöttek testet. Annak ellenére, hogy az említett hatások közgazdaságilag jelentősnek látszanak, a nemzetközi portfóliók teljesítményében bekövetkezett növekedés nem bizonyult statisztikailag szignifikánsnak.

2. A vizsgált portfólió-kiválasztási stratégiák teljesítményének ex ante módon történő értékelése során azt az eredményt kaptuk, hogy a magyar befektetők számára —ex post vizsgálatainkkal megegyezően— a nemzetközi portfólió diverzifikáció által nyújtott előnyök a kockázat csökkenésében jelentkeznek. Annak ellenére, hogy minden vizsgált nemzetközi stratégia esetében az átlaghozam kisebb volt, mint a hazai portfólió (BUX) átlagos hozama, minden esetben javulás mutatkozott a Sharpe-mutatóval mért teljesítményben. A nemzetközi stratégiák teljesítményében bekövetkezett növekedés —az ERP stratégia kivételével— statisztikailag szignifikánsnak adódott. A magyar befektetők esetében a várható hozamok becslésének a Bayes-Stein módszer segítségével történő „finomítása" jó eredményeket hozott, hiszen —ahogy a 8. táblából leolvasható— a BST stratégia teljesítményében felülmúlja a CET stratégiát. A fentiek alapján levonható az a következtetés, hogy a részvénybefektetések nemzetközi kiszélesítése —a hazai részvénypiacon tapasztalható kockázat nagyarányú csökkenése és a portfóliók teljesítményének növekedése miatt— előnyös a magyar befektetők számára. Az előbb említett hatás nem ilyen pozitív a német befektetők szempontjából. A vizsgált öt nemzetközi stratégia közül csak háromnak az esetében kaptunk a hazai portfólióhoz (DAX) képest nagyobb Sharpe-mutatót, de a növekedés ez utóbbi esetekben sem bizonyult statisztikailag szignifikánsnak. Említésre méltó, hogy mindkét ország esetében az MVP stratégia mutatta a legjobb teljesítményt és erre a stratégiára regisztrálhattuk a rendszeres havi portfólió felülvizsgálattal járó, a befektetési arányokban bekövetkezett legkisebb átlagos változást.

Irodalom

1. A Budapesti Értéktőzsde részvényindexének (BUX) kézikönyve (1997).
2. Adjaouté, K.; N. S. Tuchschmid (1996): Exchange Rate Dynamics, Currency Risk and International Portfolio Strategies, Finanzmarkt und Portfolio Management 10, 445–461.

3. Eun, C. S.; B. G. Resnick (1988): Exchange Rate Uncertainty, Forward Contracts, and International Portfolio Selection, The Journal of Finance, Vol. 43, 197–215.
4. Eun, C. S.; B. G. Resnick (1994): International Diversification of Investment Portfolios: U.S. and Japanese Perspectives, Management Science 40, 140–160.
5. Gibbons, M.; S. Ross; J. Shanken (1989): A test of the Efficiency of a Given Portfolio, Econometrica 57, 1121–1152.
6. Glen, J.; P. Jorion (1993): Currency Hedging for International Portfolios, Journal of Finance 48, 1865–1886.
7. Grubel, H. G. (1968): Internationally Diversified Portfolios, American Economic Review 58, 1299–1314.
8. Haavisto, T.; B. Hansson (1992): Risk Reduction by Diversification in the Nordic Stock Markets, Scandinavian Journal of Economics 94, 581–588.
9. Jennrich, R. I. (1970): An Asymptotic χ^2 Test for the Equality of Two Correlation Matrices, Journal of American Statistical Association, Vol. 65, 904–912.
10. Jobson, J. D.; B. M. Korkie (1981): Performance Hypothesis Testing with the Sharpe and Treynor Measures, The Journal of Finance Vol. 36, 889–908.
11. Jorion, P. (1985): International Portfolio Diversification with Estimation Risk, Journal of Business, Vol. 58, 259–278.
12. Jorion, P. (1986): Bayes-Stein Estimation for Portfolio Analysis, Journal of Financial and Quantitative Analysis 21, 279–292.
13. Kaplanis, E. C. (1988): Stability and Forecasting of the Comovement, Measures of International stock Market Returns, Journal of International Money and Finance 7, 63-75.
14. Lessard, D. R. (1973): International Portfolio Diversification: Multivariate Analysis for a Group of Latin American Countries, Journal of Finance 28, 619-633.
15. Lessard, D. R. (1976): World, Country, and Industry Relationships in Equity Returns: Implications for Risk Reduction through International Diversification, Financial Analysts Journal 32, 32–38.
16. Levy, H.; M. Sarnat (1970): International Diversification of Investment Portfolios, American Economic Review, 668–675.
17. Levy, H.; K. C. Lim (1994): Forward Exchange Bias, Hedging and the Gains from International Diversification of Investment Portfolios, Journal of International Money and Finance 13, 159–170.
18. Liljeblom, E.; A. Löflund; S. Krokfors (1997): The Benefits from International Diversification for Nordic Investors, Journal of Banking and Finance 21, 469–490.
19. Longin, F.; B. Solnik (1995): Is the Correlation in International Equity Returns constant: 1960 - 1990? Journal of International Money and Finance, Vol. 14, 3–26.
20. Markowitz, H. M. (1985): Mean-Variance Efficient Sets: Their Shapes, Properties and Computation, Draft.
21. Meric, I.; Meric G. (1989): Potential Gains from International Portfolio Diversification and Inter-Temporal Stability and Seasonality in International Stock Market Relationships, Journal of Banking and Finance 13, 627–640.

22. Merton, R. (1980): On estimating the expected return on the market, Journal of Financial Economics 8, 323–361.
23. Solnik, B. (1974): Why not Diversify Internationally Rather Than Domestically?, Financial Analysts Journal, July-August, 30, 48–54.

INTERNATIONAL DIVERSIFICATION OF STOCK PORTFOLIOS

In this paper we study the benefits derived from the international diversification of stock portfolios from Hungarian as well as German point of view. The Hungarian Stock Exchange is an emerging market in contrast to the German capital market which is one of the largest markets in the world. In an ex post perspective the benefits from internationally diversified portfolios for Hungarian investors accrue only in terms of reduction in risk while for German investors also in terms of higher expected returns. By examining the performance of several ex ante strategies the paper also presents evidence on the benefits from international diversification for both countries.

NEMZETKÖZI JÖVEDELEMEGYENLŐTLENSÉGEK VÁLTOZÁSI TENDENCIÁI

Empirikus vizsgálat bootstrap módszerrel[1]

MAJOR KLÁRA
Magyar Nemzeti Bank, Budapest

A nemzetközi jövedelemegyenlőtlenségek időbeni alakulása számos újabb vizsgálat tárgyát képezi. A jelen dolgozatban jövedelem alatt az egy főre jutó reál GDP-t fogjuk érteni, és azok különbözőségeit vizsgáljuk.

A nemzetközi jövedelemegyenlőtlenségek vizsgálatának egyik lehetséges módja egyenlőtlenségi mutatók számításán keresztül vezet. Az irodalomban több különböző mutató is létezik, melyek az egyenlőtlenségek különböző aspektusát ragadják meg és jellemzik. A mutatók egy része paraméterek függvénye is lehet, ily módon nem csak egyszerűen egyenlőtlenségi mutatókról, de valójában mutatócsaládokról érdemes beszélni. Az egyenlőtlenségek mutatószámokkal történő jellemzése esetén felmerül az egyes mutatók statisztikai jellemzőinek kérdése is, nevezetesen hogy a következtetések levonása során milyen mértékben lehet építeni a kapott eredményekre.

Az egyenlőtlenségek mértékének kérdését is elhalványítóan az irodalom elsődleges hangsúlyt fektet a változási tendenciák feltárására, arra, hogy indokolt-e az egy főre jutó jövedelmek különbözőségében csökkenésről beszélni az elmúlt közel három évtizedben vagy inkább növekedés, esetleg „stagnálás" figyelhető meg. PhD dolgozatom témájaként választva egy ilyen szerteágazó és több részkérdést is tartalmazó problémát, a továbbiakban ennek csak egy kis szeletére fogok koncentrálni. A dolgozatban a jövedelmek egyenlőtlenségét egyenlőtlenségi mutatók számításával mérjük a vizsgálati periódus minden egyes évére vonatkozóan. A különböző időpontbeli számított értékek alapján kirajzolódó tendenciát az egyenlőtlenségi mutatók köré szerkesztett konfidencia-intervallumokkal kívánjuk alátámasztani, mely utóbbi jelentős módszertani apparátus igénybevételét jelenti. A dolgozat első felében így az alkalmazott módszertan részletes kifejtésére törekszünk.

Az empirikus elemzéshez a Summers-Heston féle Penn World Table (PWT) adatbázis 1995-ös, 5.6-os verzióját használtuk fel. Az adatbázisban szereplő egy főre jutó GDP adatok 1985-ös US dollárban vannak megadva, nemzetközi összehasonlító áron. A vizsgálati periódus 1960-1992 éveket átfogó intervallum, melyben mintegy 111-128 ország reál GDP adata állt rendelkezésre a számítások elvégzésére.[2] Felmerülhet kérdésként, hogy mennyire releváns

[1]Beérkezett: 1998. szeptember 14.

[2]Az Alan Heston és Robert Summers által 1991-ben publikált Penn World Table adatbázis, mely akkor az 5-ös sorszámot kapta (*Mark 5*) a vizsgált országok nemzeti számla rendszerének adatbázisára építve nemzetközi összehasonlító árakon számított, azonos pénznemben megadott jövedelmi adatokat tartalmaz, így azok tisztán reál nagyságoknak

egy olyan adatbázis használata a fenti kérdések esetén, melyből „mindössze" egy harminc éves periódust lehet vizsgálódás alá vonni, s melynek legutolsó adata közel tíz éves. A nemzetközi jövedelemegyenlőtlenségek változása azonban igen lassan, hosszabb távon figyelhető meg, s a kérdés teljes körű elemzése valójában nem harminc, de kétszáz éves idősor ismeretét igényelné. Az előbbi gondolatmenetnek megfelelően az idősor hossza jelenthet problémát, nem pedig az, hogy az tíz éves. Az adatbázis mellett szóló további érvek között igen súlyosan esik latba annak teljeskörűsége (összehasonlítva más, pl. világbanki adatbázisokkal), illetve elkészítésének speciális mivolta (ld. 2. lábjegyzet).

Jelen kutatás korábbi munkánk[3] – melyben számos egyenlőtlenségi mutató (a relatív szórás, a Gini koefficiens, különböző entrópia indexek, Atkinsoni mutatók) értékét számítottuk ki a világ országaira az egy főre jutó GDP egyenlőtlenségének vizsgálata céljából – szerves folytatása. Az akkori vizsgálatban mindössze az 1961–1986-os vizsgálati periódusra végeztünk számításokat módszertani megfontolásokból.[4] Ebben a szűkebb intervallumban többé kevésbé egyértelműen a jövedelemegyenlőtlenségek növekedése figyelhető meg a vizsgálati periódusban az összes számított mutató tekintetében. Kérdésként merült fel azonban, hogy az egyetlen mintából számított pontbecslés eredményei mennyire tartalmaznak egyedi hatásokat és mennyire alkalmasak dinamikus (valójában komparatív statikai) összefüggések levonására. Ezért a kutatás egy további lépéseként konfidencia-intervallumot számítottunk, mely vizsgálat képezi a jelen dolgozat tárgyát.

1 Számított egyenlőtlenségi mutatók

A jövedelmi egyenlőtlenségek mérésére definiált egyenlőtlenségi mutatókra vonatkozó kutatások során kialakult két különböző megközelítés egyike társadalmi jóléti rendezés definiálásán és jellemzésén keresztül jut el az egyenlőtlenséget mérő mutatókig, míg a másik irányzat közvetlenül magukból a már definiált egyenlőtlenségi mutatókból indul ki és próbálja axiomatizálni őket (az axiomatizálás egyik lehetséges módját adja pl. *Krtscha [1994]*). A jelen dolgozatban nem kívánjuk az egyenlőtlenségi mutatók megválasztásának kérdését elemezni, hanem – korábbi munkánkhoz szervesen kötődően – három

tekinthetők, azaz függetlenek mind az egyes országok árszínvonalainak, mind valutaárfolyamainak alakulásától. Az adatbázist széles körben tekintik a jövedelmi különbségek empirikus vizsgálatai alapjának, különösen a növekedéselméleti irodalomban elmúlt években erősen kutatott konvergencia témájában alkalmazták ld. például *Lucas [1993], Quah [1993], Romer [1994], Solow [1994], Durlauf-Quah [1998]*. Az 1991-ben publikált *Mark 5* jelű PWT adatbázisban 1950-1988-as évekre vonatkozó adatok találhatók. Ezt az adatbázist a National Bureau of Economic Research (NBER) publikálta és elérhető minden kutató számára. Az adatbázis újabb, 5.6-os verzióját 1995 januárjában publikálta az intézet, melyben a legtöbb országra vonatkozóan 1992-ig találhatók meg adatok. Kutatásunkban az 5.6 verzió adatait használtuk fel számításainkhoz.

[3] Major, [1998]

[4] A vizsgálati periódus kiválasztásának szempontjairól a Felhasznált adatbázis és számítások c. fejezetben még bővebben lesz szó.

előre meghatározott egyenlőtlenségi mutató értékét fogjuk kiszámítani; ezek rendre a relatív szórás, a Gini koefficiens és az egyenlőtlenség Atkinson féle mutatója. Az atkinsoni mutató az előbb említett társadalmi jóléti megközelítés egy – tulajdonságai alapján igen széles körben alkalmazott – mutatója. *Ebert [1988]* dolgozatában részletesen elemzi az előbbi irányvonalat és megadja a különböző társadalmi jóléti függvények esetén definiált egyenlőtlenségi mutatók tulajdonságait. A relatív szórás az előzőekkel szemben társadalmi jóléti függvényből nem származtatható mutató, azonban az egyenlőtlenségek mérésének igen gyakran alkalmazott, hagyományos mutatója. A Gini koefficiens igen szemléletes geometriai jelentése mellett (bár eredetét tekintve nem a jóléti irányzat mutatója), felírható társadalmi jóléti koncepciónak megfelelő alakban.

A kérdés további részletezése nélkül egyetlen kérdést szeretnénk itt kiemelni, az egyenlőtlenségi mutató relatív avagy abszolút jellegének a kérdését. Egy egyenlőtlenségi mutatót relatívnak hívunk, ha minden jövedelem pl. megkétszereződése esetén a mutató értéke változatlan marad. Abszolút egy egyenlőtlenségi mutató, ha minden jövedelemnek egy adott, abszolút nagyságú növekedése esetén a mutató értéke változatlan marad. A továbbiakban az egyes országok között létező relatív különbségek vizsgálatára koncentrálunk és ennek érdekében *relatív* egyenlőtlenségi mutatókat fogunk számítani. *Hajdú [1997]* alapján röviden ismertetjük a számított egyenlőtlenségi mutatókat és az empirikus eloszlás meghatározására használt statisztikai módszertant.

1.1 Relatív szórás

A relatív szórás a szórás és az átlag hányadosa, vagyis képletben

$$\text{Relatív szórás} = \frac{1}{\overline{y}}\sqrt{\frac{\sum_i (y_i-\overline{y})^2}{n}},$$

(ahol $\overline{y}$ jelöli az empirikus jövedelmi értékek átlagát).

1.2 Gini együttható

A Gini együttható a Lorenz görbe és az átló által határolt terület, valamint a teljes átló alatti terület arányát mutatja meg. A konkrét számításokhoz a Gini együttható következő felírási formáját használtuk fel:

$$\text{Gini együttható} = \frac{1}{2\overline{y}n^2}\sum_i\sum_j |y_i-y_j|\,.$$

1.3 Atkinsoni mutató

Atkinson egyenlőtlenségi mutatója társadalmi jóléti függvény koncepciójára épül. Az elmélet szerint a társadalmi jólét a jövedelemeloszlás alábbi lineáris funkcionáljával adható meg:

$$W(F) = \int u(y)\,dF(y)\,, \tag{1}$$

ahol F a jövedelem eloszlásfüggvénye. A társadalmi jólét értékét az empirikus eloszlás-függvényből a következő formula alapján lehet számítani:

$$\tilde{W}(F) = \frac{1}{n}\sum_i u(y_i)\,.$$

Egy lehetséges módja a társadalmi jóléti koncepcióból egyenlőtlenségi mutató kialakításának az ún. egyenletes eloszlással ekvivalens jövedelemszint definiálásán keresztül lehetséges. *Atkinson [1980]* alapján ezt a jövedelemszintet a következő implicit összefüggés definiálja:

$$u(y_{EDE}) = \int u(y)\,dF(y)\,.$$

Az y_{EDE} jövedelemszint az empirikus jövedelemeloszlásból az alábbi képlet szerint számítható:

$$u(\tilde{y}_{EDE}) = \frac{1}{n}\sum_i u(y_i)\,.$$

Számításainkhoz az

$$u(y) = \begin{cases} \frac{y^{1-\varepsilon}-1}{1-\varepsilon}, & \text{ha } \varepsilon \neq 1; \\ \ln y, & \text{egyébként} \end{cases} \tag{2}$$

hasznossági függvényt használtuk, ahol ε az ún. egyenlőtlenség-elutasítási paraméter. A fenti, (2) kifejezésben használt hasznossági függvény használatát a következő szemléletes tulajdonsága indokolja: ha minden jövedelem megkétszereződne, akkor a fenti hasznossági függvény esetén az egyenletes eloszlással ekvivalens jövedelemszint is duplájára fog emelkedni.[5] Ezen tényt figyelembe véve könnyen látható, hogy az Atkinsoni egyenlőtlenségi mutató, képletben:

$$\text{Atkinsoni mérték} = 1 - \frac{\tilde{y}_{EDE}}{\overline{y}}$$

az egyenlőtlenségek relatív mutatója. A mutató azt fejezi ki, hogy milyen mély szakadék létezik a megfigyelt eloszlás átlagjövedelme és azon jövedelmi szint között, ami ugyanazt társadalmi jóléti szintet eredményezné egyenletes jövedelemelosztás esetén, mint a jelenlegi jövedelemelosztás.

[5]Ez az összefüggés látható az alábbi átalakításból. A fenti hasznossági függvény esetében az egyenletes jövedelemelosztással ekvivalens jövedelemszintet a következő implicit egyenlet határozza meg

$$\frac{\tilde{y}_{EDE}^{1-\varepsilon}}{1-\varepsilon} = \frac{1}{n}\sum_i \frac{y_i^{1-\varepsilon}}{1-\varepsilon}\,,$$

amelyből azt kifejezve az alábbi, $\forall i$-re y_i-ben első fokon homogén kifejezés adódik:

$$\tilde{y}_{EDE} = \left[\frac{1}{n}\sum_i y_i^{1-\varepsilon}\right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}}$$

Konkrét számításaink során ésszerűnek tűnt egyetlen konkrét ε értéket választani. Ennek egyrészt technikai okai voltak: a vizsgálat rendkívül erőforrás-igényes, ezért három választott mutatóra vonatkozóan kívántuk elvégezni. A relatív szórás és a Gini koefficiens jól definiált mutatók, mellettük egy, a jóléti koncepcióra épülő egyenlőtlenségi mutató számítása indokoltnak tűnt. A fent definiált Atkinson mutató esetén ez az előbbi paraméter megválasztását igényli. Másrészt a fent definiált mutató ε-nak monoton függvénye, azaz minél nagyobb ε mértéke, annál nagyobb egyenlőtlenséget fog mutatni (feltéve, hogy nem egyenlő minden adat, mely szélsőséges esetet nyugodtan kizárhatunk, mint empirikusan teljesen irrelevánsat). Megmutatható, hogy amint ε tart a végtelenbe, úgy a hasznossági függvény tart a $\min y_i$ függvényhez, s az Atkinsoni mutató értéke az 1-hez. A paraméter tehát az egyenlőtlenséggel szembeni elutasítás mértékét adja meg, s minél nagyobb, annál nagyobb súlyt kapnak a számítás során az alacsony jövedelmi értékek. Ez azonban azt is jelenti, hogy a mutató annál kevésbé válik robusztussá, annál érzékenyebbé válik az adatvételi és mérési hibákra. A fenti okok miatt ésszerű kompromisszumnak tűnt ε értékét 1-nek választani, azaz ennek megfelelően logaritmikus hasznossági függvénnyel dolgozni. A logaritmikus hasznossági függvény meglehetősen általános a közgazdasági irodalomban.

Az atkinsoni mutatóval szemben felhozott érv leggyakrabban a társadalmi jóléti függvény koncepciójából fakad, nevezetesen az, hogy annak explicit meghatározásával mintegy kívülről adjuk meg a társadalom egyenlőtlenséggel szembeni preferenciáit amely nagy valószínűséggel önkényes és feltételezhető, hogy inkább a kutató saját elképzeléseit tükrözi, vagyis kevéssé ad objektív alapot az egyenlőtlenség megítélésére. Ezen érv természetesen igen súlyosan érinti az egyenlőtlenség mértékének megítélését célzó kutatásokat, ugyanakkor fontos, hogy szem előtt tartsuk, hogy ez *valójában minden más mutatóval szemben felhozható.* Minden egyenlőtlenségi mutató *teljes rendezést* ad meg az eloszlások halmaza felett és így implicit maga is feltételez egy "társadalmi jóléti függvényt". Ugyanakkori az atkinsoni mutató mellett szóló érv, hogy a fent említett "társadalmi jóléti függvény" az egyetlen olyan függvény, melynek (1)-ben megadott lineáris funkcionálja relatív egyenlőtlenségi koncepciót testesít meg, azaz minden jövedelem pl. megkétszereződése esetén az általa számított egyenlőtlenség mértéke változatlan marad.

2 Konfidenciaintervallum számítása bootstrap mintavétellel

Az egyes mutatók pontbecsléseinek statisztikai vizsgálatához konfidencia intervallumokat számítottunk. Ehhez a mutatók empirikus eloszlását ún. folytonos bootstrap (smoothed bootstrap) módszerrel határoztuk meg. Bootstrap mintavétel esetén az eredeti n elemű mintából visszatevéssel generálunk újabb n elemű mintákat és mindegyikre kiszámítjuk a kérdéses mutató értékét. Kellően nagy számú bootstrap minta esetén a mutató mintabeli eloszlása megfelelő pontossággal meghatározható. A folytonos bootstrap annyiban tér el az előző eljárástól, hogy nem az eredeti adatokból generálja az új mintákat, hanem azok eloszlásának folytonos becsléséből. Erre azért lehet szükség, mert visszatevéses mintavétel esetén a generált új mintákban szükségszerűen lesznek ismétlődő elemek. Olyan esetekben, amikor az eredeti adatok természetük szerint folytonosak (pl. valamely intervallumon vehetnek fel értékeket) és a kérdéses mutató érzékeny az ismétlődő adatokra, hasznos lehet a folytonos bootstrap eljárás, amelynek során a generált új mintában 0 valószínűséggel lesznek csak azonos adatok. A folytonos bootstrap klasszikus útja lehet az eloszlás paraméteres becslése majd az abból való mintavétel. Nem-paraméteres statisztikai módszerek is rendelkezésre állnak az eloszlás folytonos becslésére és az abból való mintavételre. Jelen dolgozatban a nem-paraméteres eljárást választottuk a következő megfontolások miatt. Paraméteres eljárás esetén a kutató nullhipotézist állít fel az eloszlás jellegét illetően és a rendelkezésre álló adatokból becsüli az eloszlás néhány, ismeretlen paraméterét. Ez az eljárás a jelen problémában több okból sem tűnt alkalmazhatónak:

- az adatbázisból korábban készített nem-paraméteres jövedelemeloszlás-becslések alapján az nem sorolható be egyetlen ismertebb eloszláscsaládba sem. A kapott eloszlás – korábbi tapasztalatokkal összecsengően – közel lognormális alakú, azonban hosszan elnyúló farokkal rendelkezik, melyen további (két, három) csúcs található, melyek alapján az eloszlás lokális tulajdonságai erősen különböznek a lognormális eloszlástól;
- a vizsgálat célja az eloszlások néhány jellemzőjének (az egyenlőtlenségi koncepciónak megfelelő mutatószámok értékének) mintabeli viselkedésének meghatározása. Ha a paraméteres eljárást választottuk volna, az eloszlás típusának specifikációja és a paraméterértékek becslése után azok analitikusan is kiszámíthatóakká válnak. A jelen dolgozatban felvetett kérdés azonban a mutatók mintabeli viselkedését kívánta feltárni és ezért hasznosnak tűnt, hogy semmilyen kiinduló hipotézissel ne éljünk az eloszlás jellegére vonatkozóan, és azt az eloszlást tekintsük kiindulópontnak, melyet az adatok rajzolnak ki.

A nem-paraméteres sűrűségfüggvénybecslés metódusa megadja a lehetőséget, hogy eltekintsünk a fent említett feltevések megfogalmazásától, ugyanakkor számos további problémát vet fel maga is, beleértve a kernelfüggvény és a sávszélességi paraméter megválasztását.[6] A hivatkozott dolgozat szerint az eljárás robusztusnak tekinthető a kernelfüggvény megválasztása tekintetében. A sűrűségfüggvény nem-paraméteres becslésének alapgondolata az, hogy az adatok által kirajzolt naiv becslőfüggvényre[7] (mely lépcsős, azaz nem folytonos) lokálisan illesztünk sűrűségfüggvényeket, s az így kirajzoló becsült sűrűségfüggvény folytonos lesz. A kernel megválasztása lényegében arról szól, hogy lokálisan "kis haranggörbéket" vagy "kis parabolákat" illesztünk-e a

[6] A nem-paraméteres sűrűségfüggvény becslés módszertanáról kiváló áttekintést nyújt a sokat hivatkozott Silverman [1986] illetve az újabb Wand – Jones [1995]. A folytonos bootstrap elvégzéséhez algoritmust javasol Silverman [1986], 143. old.

[7] Ún. naiv estimator, ld. Silverman [1986] 11-12. old.

naiv becslőfüggvényre (mely maga a hisztogram általánosítása). Tehát a sűrűségfüggvény folytonos becslése az adatoknak és a kernelfüggvénynek a konvolúciójaként jön létre. A folytonos bootstrap algoritmusa erre a koncepcióra épül; oly módon hozza létre az új mintákat, hogy az eredeti minta egy véletlenszerűen kiválasztott elemét és a becsléshez használt kernelfüggvényből vett véletlen elem "konvolúcióját" hozza létre. A folytonos bootstrap eljárás implementálása magának a sűrűségfüggvény becslésének megvalósítását nem igényli.

Az eloszlás sűrűségfüggvényének a becsléséhez gaussi kernelt használtunk, melynek használata azonban további módszertani problémákat vetett fel. Ebben az esetben a mintaadatoknak a normális eloszlás sűrűségfüggvényével alkotott „konvolúciója" adja a sűrűségfüggvény becslését. A jövedelmi adatok azonban tipikusan csak pozitív értékeket vehetnek fel, míg a normális eloszlás értelmezési tartománya a valós számok halmaza. Ebből fakadóan a sűrűségfüggvény becslése a nulla egy környezetében torzított lesz. A bootstrap becslés során azonban az jelentette a problémát, hogy a fenti említettek miatt a gaussi kernellel számított folytonos eloszlásfüggvényből generált új minták tartalmaztak negatív elemeket is. Ezek egyrészt közgazdaságilag értelmezhetetlenek, másrészt bizonyos egyenlőtlenségi mutatókat (pl. az Atkinsoni mutatót is) negatív adatokra nem lehet értelmezni. Ezt a problémát úgy oldottuk fel, hogy a folytonos sűrűségfüggvénybecslést nem az eredeti adatokra, hanem azok logaritmusára végeztük el, majd visszatranszformálás után számítottuk a mutatókat. Mindazonáltal ahol ez matematikailag kivitelezhető volt, ott mind a két módszerrel (logaritmizált adatokból való mintavétel illetve az eredetiből) készítettünk bootstrap konfidenciaintervallumot. A fent említett probléma megnyugtató megoldása azonban az lesz, ha a sűrűségfüggvény folytonos becslését a speciálisabb, de kompakt értelmezési tartományú pl. Epanechnikov kernellel végezzük el. Az algoritmus implementálása még folyamatban van. A fent leírt mintavétel ismételt alkalmazásával nagy számú „új mintára" tehetünk szert, és minden egyes mintára ki lehet számítani a kérdéses egyenlőtlenségi mutató értékét. A nagy számú bootstrap mintából számított egyenlőtlenségi mutató-értékekre illesztett empirikus eloszlásfüggvényt lehet felhasználni a konfidencia-intervallum meghatározására.[8]

2.1 Naiv módszer

A naiv módszer szerint a konfidenciaintervallum alsó és felső határát 2α megbízhatósági szinten[9]

$$\theta_{LO}(\alpha) = (F^*)^{-1}(\alpha)$$
$$\theta_{UP}(\alpha) = (F^*)^{-1}(1-\alpha)$$

[8] A következő rövid kifejtés erősen támaszkodik Vinod [1993] tárgyalására.

[9] A továbbiakban F^*-gal fogjuk jelölni a kérdéses mutató bootstrap eljárással nyert mintabeli empirikus eloszlásfüggvényét. A jelölést az elméleti tárgyalás kedvéért vezetjük be, az algoritmus implementálása során csak a kritikus értékek meghatározására volt szükség.

fejezi ki, ahol F^* jelöli a mutató bootstrap eljárással nyert empirikus eloszlásfüggvényét (a továbbiakban *-gal jelöljük a bootstrap becsléseket). A naiv módszer arra a feltevésre épít, hogy ha $\theta_{*j} \approx \theta$, ahol $\approx$ a közel egyenlő jele és θ_{*j} jelöli a j-edik bootstrap becslést ($j = 0, \dots, J$), akkor

$$P^*[\theta_{LO}(\alpha) \leq \theta_{*j} \leq \theta_{UP}(\alpha)] = P^*[\theta_{LO}(\alpha) \leq \theta \leq \theta_{UP}(\alpha)] = 1 - 2\alpha .$$

2.2 Torzítás korrigált módszer

A naiv módszer azonban megbízhatatlan eredményekre vezethet, ha a becslőfüggvény torzított. A torzítás korrekcióját eredményezi bizonyos esetekben, ha a fenti feltevés helyett a kevésbé megszorító $\theta_{*j} - \theta_p \approx \theta_p - \theta$ feltevéssel élünk, ahol θ_p az eredeti mintából nyert pontbecslés. Ez a feltevés azt jelenti, hogy a bootstrap mintából nyert becslés és a pontbecslés viszonya körülbelül ugyanaz, mint a pontbecslés és a sokasági érték viszonya. Ilyenkor a következő konfidencia-intervallum adódik θ-ra:[10]

$$\begin{aligned} &P^*[\theta_{LO}(\alpha) - \theta_p \leq \theta_{*j} - \theta_p \leq \theta_{UP}(\alpha) - \theta_p] = \\ &= P^*[2\theta_p - \theta_{UP}(\alpha) \leq \theta \leq 2\theta_p - \theta_{LO}(\alpha)] = 1 - 2\alpha \end{aligned}$$

2.3 Normalizált torzítás korrigált módszer

A normalizált torzítás korrigált (normalized bias corrected NBC) módszer lényegében az empirikus eloszlásfüggvényt felhasználva a megbízhatósági (valószínűségi) szint korrekcióján keresztül próbálja kezelni a torzítás problémáját. Az eljárás során az előző pontban végrehajtott tükrözéshez hasonló korrekciót végzünk, csak azt most megfelelő normalizálási transzformáció után végezzük el.

A módszer feltevése szerint, ha létezik olyan $\phi = g(\theta)$ monoton növekedő normalizáló transzformáció, amelyre[11]

$$\phi_p - \phi \sim N(-z_0\sigma, \sigma^2) \quad \text{és} \quad \phi_{*j} - \phi_p \sim N(-z_0\sigma, \sigma^2) ,$$

ahol a fenti kifejezésben szereplő z_0 és σ ismeretlen paraméterek, akkor a konfidencia-intervallum meghatározásához elégséges z_0 paraméter értékét becsülni. Ehhez az empirikus eloszlásfüggvényből meghatározzuk a bootstrap minták azon hányadát, amelyre $\theta_{*j} \leq \theta_p$. Ekkor

$$F^*(\theta_p) = P^*[\theta_{*j} \leq \theta_p] = P[\phi_{*j} \leq \phi_p] = P[(\phi_{*j} - \phi_p + z_0\sigma)/\sigma \leq z_0] .$$

A módszer fent említett feltevései miatt $(\phi_{*j} - \phi_p + z_0\sigma)/\sigma \sim N(0,1)$, ezért z_0-ra az alábbi becslés adódik:

$$z_0 = \Phi^{-1}(F^*(\theta_p)) ,$$

[10] Ez a módszer torzítás korrigált (bias corrected, BC) elnevezést kapta Vinod [1993] összefoglaló művében. Több más irodalomban azonban az itt harmadikként tárgyalásra kerülő módszert hívják torzítás korrigált módszernek.

[11] Az alábbi kifejtés elsősorban Garthwaite, Jolliffe, Jones [1995] munkáján alapszik.

ahol Φ a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényét jelöli. Mivel feltevés szerint $\phi_p - \phi \sim N(-z_0\sigma, \sigma^2)$ az $1-2\alpha$ valószínűségi konfidenciaintervallum θ-ra

$$[g^{-1}(\phi_p + z_0\sigma - z_\alpha\sigma), g^{-1}(\phi_p + z_0\sigma + z_\alpha\sigma)] ,$$

ahol $\Phi(z_\alpha) = 1 - \alpha$. Az alsó határ megállapításához tekintsük a következő átalakítást

$$P^*[\phi_{*j} \leq \phi_p + z_0\sigma - z_\alpha\sigma] = P^*[(\phi_{*j} - \phi_p + z_0\sigma)/\sigma \leq 2z_0 - z_\alpha] = \Phi(2z_0 - z_\alpha) .$$

A konfidenciaintervallum alsó határa $1-2\alpha$ szignifikanciaszinten tehát azon $\theta_{LO}(\alpha)$ érték lesz, amelyik éppen a bootstrap becslés $\Phi(2z_0 - z_\alpha)$- ik kvantilis értéke. Hasonlóképpen elvégezve a megfelelő számításokat az intervallum felső határára, az NBC módszer szerint adódó konfidenciaintervallum θ-ra a fentiek alapján a következő:

$$P^* \left[(F^*)^{-1}\left(\Phi(2z_0 - z_\alpha)\right) \leq \theta \leq (F^*)^{-1}\left(\Phi(2z_0 + z_\alpha)\right)\right] = 1 - 2\alpha .$$

Ha θ_p becslőfüggvény nem torzított, akkor z_0 értéke 0, és a metódus szerint számolva a naiv módszerrel azonos konfidenciaintervallum adódik θ-ra. Az eljárás során a konfidenciaintervallum számításához használt megbízhatósági szintet módosítjuk attól függően, hogy a megfigyelt empirikus eloszlás milyen mértékű torzítást mutat. Torzítatlan becslés esetén a pontbecslésnek a mintabeli eloszlás átlagával kell egybeesnie, ekkor a korrekció mértéke nulla.

2.4 Empirikus torzítás

Az alábbi kifejezéssel megkaphatjuk az eljárás torzításának mértékét:

$$\text{empirikus torzítás} = \frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J} \theta_{*j} - \theta_p .$$

Ha a fenti kifejezés 0-tól különbözik, az azt jelenti, hogy az elsőként tárgyalt naiv módszer által adott konfidenciaintervallumok torzítottak és szükségessé válik a módszertani korrekció alkalmazása. A normalizált torzítás korrigált módszer alkalmazása kiszűri ezt a torzítást, és valóban, ha a fenti képlettel számított empirikus torzítás értéke 0, akkor a normalizált torzítás korrigált módszer az eredeti naiv intervallumokat adja vissza.

3 Felhasznált adatbázis és számítások

Az empirikus elemzés céljaira a PWT 5.6 adatbázist használtam fel. Az adatbázisból 111-128 ország egy főre jutó GDP adatainak egyenlőtlenségeit számítottam 1960-1992 évekre. Az adatbázis összeállítását nehezítette, hogy bizonyos országokra vonatkozó adatok csak a megadott intervallum egy részére voltak elérhetők. A számítások alapját képezhető adatbázis összeállítására ily módon két út látszott lehetségesnek. Egyrészt kiválasztani az országok egy olyan csoportját illetve meghatározni úgy a vizsgálati periódust, hogy abban ne legyenek hiányzó adatok. Korábbi munkámban ezt az utat követtem,[12] ez azonban többnyire igen rövid vizsgálati periódust tesz lehetővé. Jelen esetben a vizsgálati periódus és a vizsgálatba bevonható országok számának emelése céljából az összes, a fenti intervallumba eső adatot felhasználtam. Ez azzal a hátránnyal járt, hogy az egyes években számított egyenlőtlenségi mutatók mögött különböző számú megfigyelés áll. Ez természetesen felveti az összevethetőség kérdését.

Ebert [1988] tanulmányában foglalkozik a különböző népességszám melletti egyenlőtlenségi mutatók összehasonlíthatóságának kérdésével. Ebben megmutatja, hogy a Gini együttható és az atkinsoni mutatók kielégítik az ún. 'népesség elv'-et (Principle of Population), amely kimondja azt, hogy ha két jövedelmi vektor, x és y azonos egyenlőtlenséget képvisel, akkor azok m-szeres ismétléséből álló $x^{(m)}$ és $y^{(m)}$ vektorok is azonos egyenlőtlenséget képviselnek. Ezen elv alapján lehet különböző népességszám (illetve jelen esetben különböző számú országok esetén) számított egyenlőtlenségi mutatókat összehasonlítani. A relatív szórásra hasonló összefüggés nem érvényes, de a relatív szórás az egyenlőtlenségeknek igen széles körben elterjedt és számított mértéke, időbeni alakulása fontos része lehet a dolgozat alapját képező kérdés megválaszolásában.

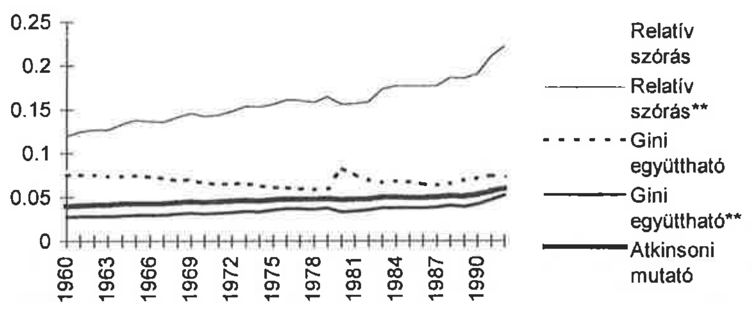
Az egyenlőtlenségi mutatók értékeire kapott pontbecslések idősorát összevetve a korábbi munkákkal láthatjuk, hogy a fenti adatszelekció nem változtatta meg lényegesen a kialakuló képet: az egyenlőtlenségi mutatók pontbecsléseinek idősora továbbra is enyhén emelkedő tendenciát mutat. Most azonban megfigyelhető abban egy "csúcspont", "kiemelkedés" 1980 körül. Ennek okát a fenti adatszelekciós eljárásban látjuk. 1980-ban öt országgal növekedett a vizsgálatban szereplő országok száma, ebből két ország közel a világátlaghoz hasonló, annál kicsit alacsonyabb jövedelemmel rendelkezett. A másik három ország (Kuvait, Egyesült Arab Emírségek és Katar) egy főre jutó jövedelme egyenként is az adott évi világátlag 5, 8 illetve 8,5 szerese volt, melyek együttes hatása látványos ugrást hozott az egyenlőtlenség mértékében. Ez a kiugrás a következő években eltűnt, ami részben annak volt köszönhető, hogy az előbb említett országok esetében az 80-as évtized első felében kiugró jövedelmi szint átmenetinek bizonyult ('79-es olajválság hatása), és később abszolút értékében is, ily módon az egyre növekedő világátlag százalékában kifejezve is töredékére (közel felére) esett vissza.

A függelékben hét táblázatban foglaltuk össze a számítási eredményeket. Az egyes táblázatok tartalmát mutatja az *1. táblázat.* A függelékben szereplő táblázatokban a számított konfidenciaintervallumokon kívül megadtuk az empirikus torzítás mértékét is. Az *1. ábrán* láthatjuk a hét számítás esetében az empirikus torzítás nagyságát. Az empirikus torzítás minden esetben jelentős, ami indokolja a normalizált torzítás korrekciós módszer alkalmazását a konfidenciaintervallumok számítása során. A kutatások során mind a három konfidenciaintervallum számítása indokoltnak tűnt a torzítás várható mértékére vonatkozó információk hiányában.

[12] Major, [1998].

Függelék sorszáma	Számított mutató	Számítási módszer	Bootstrap minták száma	Megbízható-sági szint
1	relatív szórás	eredeti adatok	10000	0.05
2	relatív szórás	logaritmizált adatok	10000	0.05
3	Gini koefficiens	eredeti adatok	10000	0.05
4	Gini koefficiens	logaritmizált adatok	10000	0.05
5	atkinsoni mutató	logaritmizált adatok	10000	0.01
6	atkinsoni mutató	logaritmizált adatok	10000	0.05
7	atkinsoni mutató	logaritmizált adatok	10000	0.10

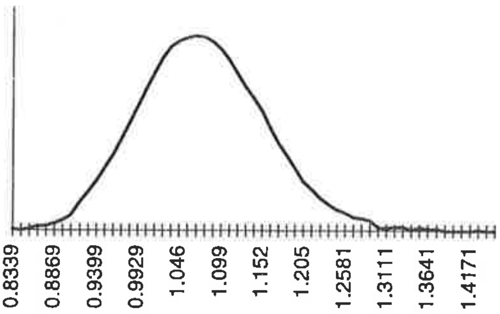
1. táblázat. A függelékben szereplő számítások paraméterei



1. ábra. Az egyenlőtlenségi mértékek empirikus torzítása A ** jelölt esetekben az adatok logaritmusából történt az ismételt mintavételezés.

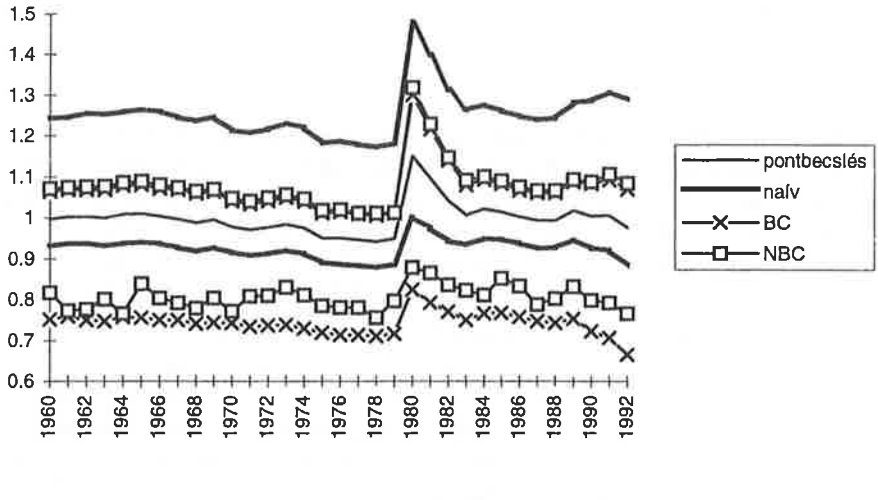
Az eredmények alapján a naiv módszer nem vezet megbízható eredményekre a konfidencia-intervallumok számítása során és így igazolja a torzítás korrigált módszerek számítását. Az eredmények értékelése kapcsán ennek megfelelően az NBC módszer által adott intervallumokat fogjuk figyelembe venni. Mindazonáltal az egyik mutató, a relatív szórás példáján érdemes megvizsgálni a három módszer által adott konfidenciaintervallumok viszonyát.

Annak érdekében, hogy az empirikus eloszlás torzítására rámutassunk, egy konkrét számítási esetben elvégeztük az empirikus eloszlás folytonos becslését, ezt mutatja a *2. ábra*. A 2. ábrán a relatív szórás mutató empirikus eloszlását lehet látni az 1960. évi adatok alapján. Látható, hogy az eloszlás nem szimmetrikus, enyhén balra dől. A pontbecslés a mintaátlagnál kisebb, melyek különbsége megadja az empirikus torzítás nagyságát. A becsült sűrűségfüggvény nem szimmetrikus, enyhén balra ferde. Ennél is jellemzőbb tulajdonsága, hogy az eloszlás nem rendelkezik hosszan elnyúló farokkal.



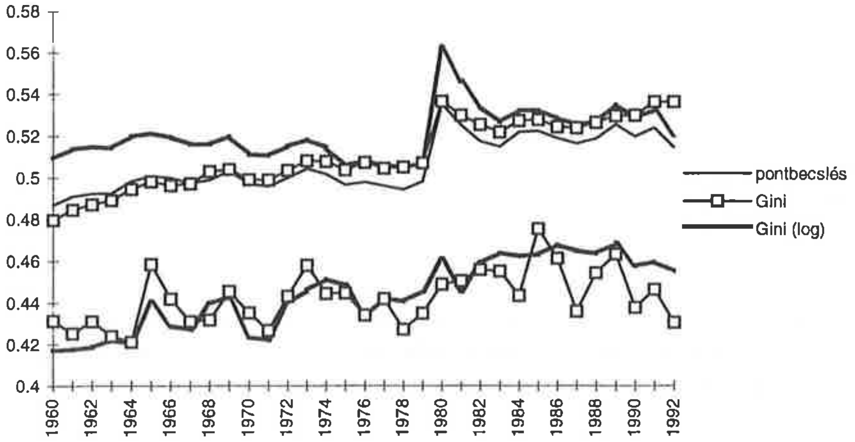
2. ábra A relatív szórás mintabeli eloszlása az 1960. évi adatok alapján, pontbecslés = 0.9981, bootstrap átlag = 1.0759, torzítás = 0.0778.

A *3. ábrán* láthatjuk a relatív szórás mutatóhoz készített konfidenciaintervallumokat a három különböző konfidenciaintervallum számítási módszer esetében. Láthatjuk, hogy a torzítás korrigált és a normalizált torzítás korrigált módszer esetében az intervallum felső határai közel egybeesnek, és jelentősen eltérnek a naiv módszer eredményétől. Ennek is az az oka, hogy a mutató mintabeli eloszlásából számított várható érték és az eredeti pontbecslés eltérnek egymástól. Az empirikus torzítás előjele mutatja, hogy a pontbecslés lefelé torzított, ennek megfelelően kellett a konfidenciaintervallumokat korrigálni. A korrekció hatására a számított konfidenciaintervallumok határai lefelé tolódtak el, azaz a pontbecslésre majdnem szimmetrikus intervallum adódott. Figyelembe véve a torzításra kapott eredményeket, a továbbiakban a normalizált torzítás korrigált módszer eredményeivel fogunk foglalkozni.

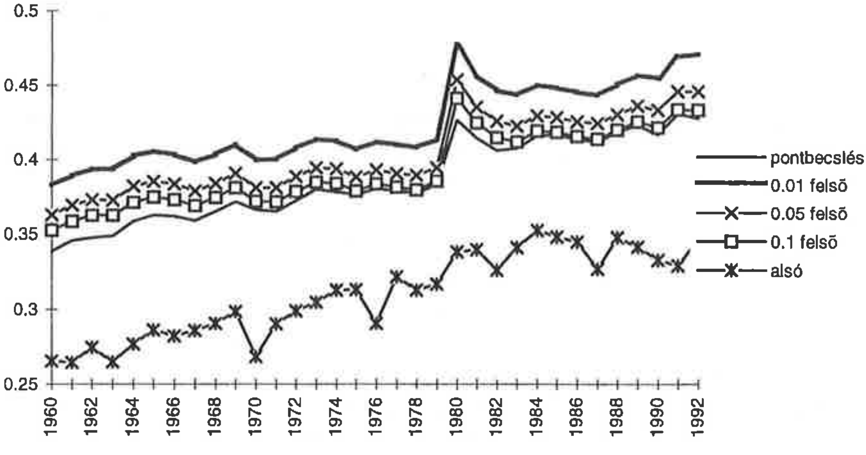


3. ábra. Bootstrap konfidenciaintervallumok relatív szórás mutatóhoz naiv, torzítás korrigált és normalizált torzítás korrigált módszerrel 5%-os megbízhatósági szinten. [A mintavételezés

A *4. ábrán* a Gini koefficiens konfidenciaintervallumait láthatjuk normalizált torzítás korrigált módszert alkalmazva. A két ábrázolt intervallum közül az egyike az eredeti adatokból történt mintavételezés esetén készült, a másik a pedig már említett logaritmizálási transzformáció után. Maga a mutató matematikai formulája értelmezhető negatív adatokra is, így ezen mutató esetében lehetséges összehasonlítani a két eljárás közti különbséget. Azt láthatjuk, hogy a tendencia megítélésében (mely jelenleg a legfőbb kérdések egyike) hasonló eredményekre vezetnek, mindazonáltal további megoldásokat kell keresni a fent említett probléma megoldására.



4. ábra. Bootstrap konfidenciaintervallumok Gini koefficiens mutatóhoz az eredeti adatokból történt mintavételezés illetve logaritmizált mintavételezés esetén 5%-os megbízhatósági szinten. [Az intervallumokat normalizált torzításkorrigált módszerrel számítottuk (ld. 3-4. Függelék).]



5. ábra. Bootstrap konfidenciaintervallumok Atkinsoni mutatóhoz 1%, 5% és 10%-os megbízhatósági szinteken. [Logaritmizált adatok, normalizált torzítás korrigált módszer (ld. 5-7. Függelékek).]

Az *5. ábra* esetében az atkinsoni mutatóhoz számított konfidenciaintervallumokat láthatjuk különböző megbízhatósági szintek mellett. Az intervallumokat a normalizált torzítás korrigált módszerrel számítottuk és ennek köszönhető az az eredmény, hogy a torzítás korrekciójának eredményeképpen a konfidenciaintervallum alsó határa mind a három vizsgált szignifikanciszint esetében egybeesik. Ennek az az oka, hogy a pontbecslés a bootstrap minták igen alacsony hányadában helyezkedik el, pl. az 1960-ik évben a 10000 elemű bootstrap mintában nagyság szerint az 1115-ik, 1961-ben 1077-ik, és végignézve az eredményeket általában elmondható, hogy a pontbecslés a bootstrap minta első 5-10%- ában helyezkedik el, vagyis igen messze a minta átlagától. Ezért a normalizált torzítás korrigált módszer mind a három vizsgált valószínűségi szinten a bootstrap minta *első* elemét adta meg a konfidenciaintervallum alsó határának. Ha összevetjük ezt az eredményt a relatív szórás esetében bemutatott három különböző módszerrel készített konfidencia intervallummal, akkor jól látható, hogy a naiv módszer esetében a pontbecslés a konfidenciaintervallum alsó határához közel helyezkedik el, amit az előbb említett eredmény jól magyaráz. A naiv intervallum azonban túl magasra helyezi az egyenlőtlenségi mutatók lehetséges értékeit, s ezt a torzítást korrigálja a két említett korrekciós módszer. A számított konfidenciaintervallumok esetében azt láthatjuk, hogy az egy főre jutó jövedelmek egyenlőtlenségei – a pontbecslésekből adódó következtetésekhez hasonlóan – a vizsgált mutató függvényében inkább enyhén növekedő, esetleg stagnáló tendenciát mutatnak.

4 Következtetés és további kutatás

A kapott eredmények megerősítik azt a korábbi – pontbecslések alapján felállított – hipotézist, miszerint az egy főre jutó jövedelmek, illetve az egy főre jutó GDP közti különbségek tendenciájának ilyen, komparatív statikai eszközökkel való elemzése az egyenlőtlenségek tartós jelenlétét vagy enyhe növekedését sugallja. Az irodalomban ettől ellentétesnek látszó eredmények, melyek az egy főre jutó jövedelmek különbözőségének csökkenéséről, illetve a fejlettségbeli lemaradás felzárkózásáról szólnak, a különböző megközelítésnek és módszertannak tudjuk be. A kiindulásul megfogalmazott probléma számos különböző megközelítést rejt magában, és a kérdés pontos felvetésétől függ a kérdésre adott válasz is. Jelenlegi dolgozatban arra a kérdésre kerestem a választ, hogy figyelembe véve a rendelkezésre álló adatokat, mit mondhatunk az egy főre jutó jövedelmek *egyenlőtlenségének tendenciájáról.* Két fogalmat emelnék ki az előző mondatból: egyenlőtlenség és tendencia. Egyrészt a vizsgálatot azokra az évekre lehetett elvégezni, melyekre rendelkezésre állnak adatok, és ezek alapján azt mondhatjuk, hogy a vizsgált periódusban (az elmúlt 30 évben) az egyenlőtlenségek mértéke nem változott számottevően. Jövőre vonatkozóan következtetéseket levonni belőle igen korlátozottan lehet: a felvetett probléma természetét illetően nem harminc éves távlatokban, inkább évszázadokban mérhető a meghatározó folyamatok lefutásának ideje.

Másrészt az egyenlőtlenségi mutató koncepciója azt a feltevést rejti magában, hogy a jövedelmek nemzetek közötti megoszlásának *egyenlőtlenségét* egyetlen mutatószámmal ki tudjuk fejezni. Ennek számos módja van és ez felveti az egyenlőtlenségi koncepció kérdését, nevezetesen hogy hogyan értelmezzük azt. Továbbá ennek a mutatónak az értékében bekövetkező változásnak sokféle különböző oka lehet, ezért pusztán az egyenlőtlenségi mutató csökkenéséből nem lehet következtetni arra, hogy mi lehetett annak az oka, hogy mondjuk javultak a felzárkózási esélyei a szegényebb országoknak, vagy ténylegesen nivellálódás ment végbe, mely lehetett recesszió következménye is. További kutatási célkitűzésként lehet meghatározni a téma fenti irányokban megjelölt vizsgálatát. Vagyis meghatározni azt, hogy mi az oka az egyenlőtlenség globális mutatói változatlanságának, milyen folyamatok eredményezték ezt, mennyiben beszélhetünk felzárkózási esélyek javulásáról/romlásáról, a világszinten "változatlan" egyenlőtlenség mögött esetleg területileg különböző differenciálódási/nivellálódási folyamat húzódik-e meg, melyek kiegyenlítő hatása okozza a globális (az egész nemzetközösségre számított) mutatók változatlanságát.

További kérdésként merülhet fel a dinamika és komparatív statika viszonya. Az alkalmazott módszertanból levonható következtetéseket erősen korlátozza a dinamika, vagyis az időbeni kapcsolatok modellezésének hiánya. Ennek vizsgálata azonban szintén túlmutatott a jelen dolgozat keretein.

1. Függelék

Év	Orsz. száma	Pont-becslés	Naiv alsó	Naiv felső	BC alsó	BC felső	NBC alsó	NBC felső	Emp. torzítás
1960	111	0.9981	0.9312	1.2437	0.7525	1.0651	0.8170	1.0714	0.0778
1961	112	1.0027	0.9369	1.2457	0.7598	1.0686	0.7743	1.0744	0.0790
1962	112	1.0032	0.9378	1.2559	0.7504	1.0685	0.7775	1.0769	0.0802
1963	112	1.0000	0.9317	1.2527	0.7472	1.0683	0.8015	1.0772	0.0785
1964	112	1.0088	0.9378	1.2596	0.7581	1.0799	0.7672	1.0863	0.0787
1965	112	1.0106	0.9409	1.2653	0.7558	1.0802	0.8392	1.0890	0.0799
1966	112	1.0050	0.9380	1.2598	0.7502	1.0720	0.8048	1.0803	0.0792
1967	113	0.9981	0.9269	1.2460	0.7501	1.0692	0.7935	1.0746	0.0785
1968	113	0.9893	0.9189	1.2368	0.7419	1.0598	0.7798	1.0664	0.0780
1969	114	0.9958	0.9269	1.2477	0.7439	1.0648	0.8048	1.0709	0.0795
1970	119	0.9787	0.9158	1.2144	0.7430	1.0416	0.7718	1.0481	0.0756
1971	119	0.9709	0.9078	1.2078	0.7339	1.0339	0.8089	1.0415	0.0760
1972	119	0.9772	0.9125	1.2169	0.7375	1.0419	0.8100	1.0500	0.0760
1973	119	0.9846	0.9195	1.2309	0.7384	1.0498	0.8313	1.0570	0.0772
1974	119	0.9757	0.9119	1.2207	0.7306	1.0394	0.8111	1.0473	0.0762
1975	120	0.9513	0.8902	1.1827	0.7198	1.0123	0.7859	1.0195	0.0751
1976	120	0.9509	0.8862	1.1875	0.7143	1.0156	0.7818	1.0206	0.0762
1977	120	0.9464	0.8831	1.1793	0.7134	1.0096	0.7815	1.0124	0.0751
1978	120	0.9424	0.8793	1.1730	0.7117	1.0055	0.7557	1.0121	0.0736
1979	120	0.9492	0.8865	1.1813	0.7172	1.0120	0.7974	1.0138	0.0762
1980	125	1.1515	1.0012	1.4779	0.8251	1.3018	0.8797	1.3183	0.0780
1981	125	1.0960	0.9751	1.3988	0.7933	1.2169	0.8657	1.2294	0.0772
1982	125	1.0421	0.9435	1.3128	0.7715	1.1408	0.8364	1.1476	0.0758
1983	125	1.0083	0.9352	1.2655	0.7511	1.0814	0.8239	1.0925	0.0779
1984	127	1.0216	0.9494	1.2764	0.7668	1.0938	0.8115	1.1013	0.0790
1985	128	1.0154	0.9474	1.2626	0.7682	1.0833	0.8522	1.0906	0.0793
1986	127	1.0027	0.9378	1.2481	0.7574	1.0677	0.8335	1.0763	0.0780
1987	124	0.9938	0.9265	1.2400	0.7475	1.0611	0.7878	1.0673	0.0768
1988	122	0.9940	0.9270	1.2450	0.7430	1.0611	0.8038	1.0680	0.0801
1989	119	1.0177	0.9469	1.2825	0.7529	1.0885	0.8330	1.0938	0.0824
1990	102	1.0041	0.9253	1.2860	0.7223	1.0830	0.7980	1.0881	0.0856
1991	92	1.0066	0.9209	1.3071	0.7061	1.0923	0.7926	1.1070	0.0895
1992	83	0.9774	0.8844	1.2895	0.6653	1.0705	0.7666	1.0855	0.0901

Konfidencia intervallum becslés eredményei *relatív szórás* pontbecsléséhez. A bootstrap mintavétel az ismételt mintavételt az *eredeti adatokra illesztett* folytonos sűrűségfüggvényből vette gaussi kernelt használva. Az adatbázisban szereplő összes ország száma: 132. Bootstrap minták száma: 10000, szignifikanciaszint: 0.05.

2. Függelék

Év	Orsz. száma	Pont-becslés	Naiv alsó	Naiv felső	BC alsó	BC felső	NBC alsó	NBC felső	Emp. torzítás
1960	111	0.9981	0.9432	1.3389	0.6574	1.0530	0.7968	1.0560	0.1197
1961	112	1.0027	0.9515	1.3550	0.6504	1.0539	0.8006	1.0602	0.1248
1962	112	1.0032	0.9520	1.3609	0.6454	1.0543	0.8079	1.0588	0.1270
1963	112	1.0000	0.9498	1.3520	0.6479	1.0501	0.8260	1.0515	0.1265
1964	112	1.0088	0.9625	1.3819	0.6358	1.0552	0.8191	1.0618	0.1334
1965	112	1.0106	0.9700	1.3902	0.6309	1.0511	0.8491	1.0597	0.1374
1966	112	1.0050	0.9635	1.3788	0.6312	1.0465	0.8257	1.0469	0.1363
1967	113	0.9981	0.9544	1.3646	0.6315	1.0417	0.8190	1.0441	0.1352
1968	113	0.9893	0.9573	1.3516	0.6271	1.0213	0.8425	1.0262	0.1411
1969	114	0.9958	0.9666	1.3667	0.6250	1.0251	0.8379	1.0253	0.1455
1970	119	0.9787	0.9551	1.3364	0.6210	1.0023	0.8084	0.9987	0.1416
1971	119	0.9709	0.9491	1.3271	0.6146	0.9926	0.7904	0.9936	0.1432
1972	119	0.9772	0.9545	1.3406	0.6138	0.9999	0.8190	0.9984	0.1480
1973	119	0.9846	0.9673	1.3633	0.6059	1.0019	0.8418	1.0042	0.1538
1974	119	0.9757	0.9594	1.3505	0.6009	0.9919	0.8529	0.9912	0.1524
1975	120	0.9513	0.9465	1.3108	0.5917	0.9560	0.8558	0.9554	0.1558
1976	120	0.9509	0.9466	1.3278	0.5740	0.9552	0.8360	0.9562	0.1605
1977	120	0.9464	0.9423	1.3175	0.5752	0.9504	0.8434	0.9509	0.1601
1978	120	0.9424	0.9395	1.3088	0.5759	0.9453	0.8201	0.9455	0.1580
1979	120	0.9492	0.9503	1.3268	0.5717	0.9482	0.8204	0.9471	0.1640
1980	125	1.1515	1.0222	1.7792	0.5238	1.2808	0.9026	1.3346	0.1554
1981	125	1.0960	1.0064	1.6477	0.5444	1.1856	0.8488	1.2061	0.1560
1982	125	1.0421	0.9891	1.5098	0.5745	1.0952	0.8623	1.1017	0.1582
1983	125	1.0083	0.9916	1.4619	0.5547	1.0250	0.8814	1.0285	0.1732
1984	127	1.0216	1.0121	1.4630	0.5802	1.0311	0.8634	1.0316	0.1766
1985	128	1.0154	1.0145	1.4273	0.6035	1.0162	0.8678	1.0165	0.1765
1986	127	1.0027	1.0060	1.4142	0.5913	0.9995	0.8838	0.9992	0.1767
1987	124	0.9938	0.9980	1.3970	0.5906	0.9896	0.8752	0.9878	0.1768
1988	122	0.9940	1.0044	1.4157	0.5724	0.9837	0.8516	0.9831	0.1859
1989	119	1.0177	1.0205	1.4474	0.5880	1.0149	0.9132	1.0153	0.1850
1990	102	1.0041	1.0029	1.4559	0.5524	1.0054	0.8844	1.0049	0.1905
1991	92	1.0066	1.0109	1.5019	0.5113	1.0023	0.8696	1.0017	0.2104
1992	83	0.9774	0.9870	1.4902	0.4646	0.9678	0.8342	0.9674	0.2220

Konfidencia intervallum becslés eredményei *relatív szórás* pontbecsléséhez. A bootstrap mintavétel az ismételt mintavételt az *eredeti adatok logaritmusára* illesztett folytonos sűrűségfüggvényből vette gaussi kernelt használva. Az adatbázisban szereplő összes ország száma: 132. Bootstrap minták száma: 10000, szignifikanciaszint: 0.05.

3. Függelék

Év	Orsz. száma	Pont-becslés	Naiv alsó	Naiv felső	BC alsó	BC felső	NBC alsó	NBC felső	Emp. torzítás
1960	111	0.4869	0.4938	0.6399	0.3339	0.4800	0.4315	0.4799	0.0750
1961	112	0.4910	0.4976	0.6422	0.3398	0.4845	0.4253	0.4846	0.0750
1962	112	0.4924	0.4985	0.6465	0.3384	0.4863	0.4314	0.4872	0.0749
1963	112	0.4926	0.4960	0.6452	0.3400	0.4893	0.4242	0.4892	0.0738
1964	112	0.4985	0.5022	0.6512	0.3458	0.4948	0.4213	0.4946	0.0738
1965	112	0.5009	0.5039	0.6557	0.3460	0.4978	0.4585	0.4982	0.0741
1966	112	0.5001	0.5039	0.6542	0.3460	0.4962	0.4420	0.4964	0.0728
1967	113	0.4973	0.4979	0.6483	0.3464	0.4967	0.4312	0.4971	0.0716
1968	113	0.4991	0.4959	0.6488	0.3494	0.5023	0.4320	0.5031	0.0689
1969	114	0.5034	0.5030	0.6548	0.3521	0.5039	0.4456	0.5040	0.0702
1970	119	0.4973	0.4959	0.6398	0.3548	0.4987	0.4353	0.4992	0.0657
1971	119	0.4958	0.4929	0.6375	0.3542	0.4987	0.4269	0.4990	0.0648
1972	119	0.5000	0.4966	0.6441	0.3558	0.5033	0.4434	0.5037	0.0649
1973	119	0.5043	0.5001	0.6491	0.3594	0.5085	0.4579	0.5083	0.0655
1974	119	0.5018	0.4966	0.6452	0.3585	0.5070	0.4446	0.5078	0.0637
1975	120	0.4967	0.4902	0.6327	0.3607	0.5032	0.4449	0.5038	0.0605
1976	120	0.4979	0.4886	0.6367	0.3590	0.5071	0.4344	0.5076	0.0604
1977	120	0.4961	0.4869	0.6325	0.3598	0.5054	0.4420	0.5047	0.0593
1978	120	0.4944	0.4841	0.6289	0.3599	0.5047	0.4275	0.5052	0.0582
1979	120	0.4981	0.4897	0.6351	0.3611	0.5065	0.4351	0.5071	0.0599
1980	125	0.5351	0.5331	0.7139	0.3563	0.5371	0.4491	0.5365	0.0826
1981	125	0.5251	0.5201	0.6900	0.3603	0.5302	0.4506	0.5297	0.0760
1982	125	0.5173	0.5089	0.6695	0.3652	0.5258	0.4560	0.5255	0.0694
1983	125	0.5150	0.5086	0.6638	0.3661	0.5214	0.4551	0.5218	0.0660
1984	127	0.5217	0.5168	0.6721	0.3714	0.5267	0.4437	0.5272	0.0674
1985	128	0.5223	0.5178	0.6704	0.3741	0.5267	0.4754	0.5278	0.0669
1986	127	0.5190	0.5135	0.6636	0.3744	0.5246	0.4613	0.5244	0.0649
1987	124	0.5165	0.5090	0.6616	0.3714	0.5240	0.4362	0.5239	0.0638
1988	122	0.5188	0.5110	0.6664	0.3711	0.5266	0.4543	0.5264	0.0652
1989	119	0.5253	0.5206	0.6817	0.3689	0.5300	0.4634	0.5296	0.0693
1990	102	0.5198	0.5100	0.6853	0.3542	0.5295	0.4378	0.5297	0.0717
1991	92	0.5239	0.5114	0.7030	0.3448	0.5364	0.4465	0.5360	0.0745
1992	83	0.5145	0.4934	0.6995	0.3296	0.5357	0.4308	0.5361	0.0725

Konfidencia intervallum becslés eredményei *Gini koefficiens* pontbecsléséhez. A bootstrap mintavétel az ismételt mintavételt az *eredeti adatokra illesztett* folytonos sűrűségfüggvényből vette gaussi kernelt használva. Az adatbázisban szereplő összes ország száma: 132. Bootstrap minták száma: 10000, szignifikanciaszint: 0.05.

4. Függelék

Év	Orsz. száma	Pont-becslés	Naiv alsó	Naiv felső	BC alsó	BC felső	NBC alsó	NBC felső	Emp. torzítás
1960	111	0.4869	0.4623	0.5627	0.4110	0.5114	0.4172	0.5095	0.0273
1961	112	0.4910	0.4679	0.5679	0.4141	0.5142	0.4176	0.5137	0.0279
1962	112	0.4924	0.4698	0.5690	0.4158	0.5150	0.4186	0.5148	0.0281
1963	112	0.4926	0.4691	0.5700	0.4153	0.5162	0.4222	0.5144	0.0281
1964	112	0.4985	0.4772	0.5759	0.4210	0.5198	0.4204	0.5199	0.0290
1965	112	0.5009	0.4792	0.5792	0.4225	0.5225	0.4406	0.5214	0.0296
1966	112	0.5001	0.4811	0.5784	0.4217	0.5191	0.4290	0.5194	0.0294
1967	113	0.4973	0.4772	0.5753	0.4193	0.5174	0.4274	0.5162	0.0297
1968	113	0.4991	0.4816	0.5794	0.4187	0.5166	0.4398	0.5162	0.0307
1969	114	0.5034	0.4871	0.5818	0.4251	0.5198	0.4431	0.5201	0.0314
1970	119	0.4973	0.4823	0.5748	0.4198	0.5123	0.4236	0.5114	0.0313
1971	119	0.4958	0.4803	0.5741	0.4175	0.5114	0.4224	0.5109	0.0320
1972	119	0.5000	0.4843	0.5792	0.4207	0.5156	0.4399	0.5152	0.0327
1973	119	0.5043	0.4905	0.5853	0.4232	0.5181	0.4462	0.5182	0.0335
1974	119	0.5018	0.4880	0.5825	0.4212	0.5157	0.4512	0.5147	0.0333
1975	120	0.4967	0.4860	0.5778	0.4156	0.5074	0.4485	0.5060	0.0356
1976	120	0.4979	0.4864	0.5821	0.4137	0.5093	0.4336	0.5082	0.0365
1977	120	0.4961	0.4853	0.5793	0.4130	0.5070	0.4422	0.5058	0.0365
1978	120	0.4944	0.4839	0.5758	0.4130	0.5049	0.4409	0.5053	0.0363
1979	120	0.4981	0.4893	0.5823	0.4139	0.5069	0.4456	0.5065	0.0376
1980	125	0.5351	0.5099	0.6289	0.4413	0.5603	0.4608	0.5622	0.0331
1981	125	0.5251	0.5055	0.6166	0.4336	0.5448	0.4457	0.5459	0.0340
1982	125	0.5173	0.5002	0.6044	0.4303	0.5345	0.4589	0.5341	0.0350
1983	125	0.5150	0.5028	0.6026	0.4273	0.5271	0.4637	0.5263	0.0376
1984	127	0.5217	0.5112	0.6088	0.4347	0.5323	0.4623	0.5320	0.0374
1985	128	0.5223	0.5132	0.6047	0.4398	0.5313	0.4631	0.5321	0.0371
1986	127	0.5190	0.5095	0.6038	0.4342	0.5285	0.4677	0.5283	0.0375
1987	124	0.5165	0.5080	0.6009	0.4321	0.5251	0.4650	0.5254	0.0382
1988	122	0.5188	0.5113	0.6066	0.4309	0.5262	0.4635	0.5265	0.0403
1989	119	0.5253	0.5168	0.6125	0.4381	0.5338	0.4681	0.5349	0.0388
1990	102	0.5198	0.5106	0.6121	0.4275	0.5290	0.4576	0.5287	0.0416
1991	92	0.5239	0.5159	0.6243	0.4235	0.5319	0.4595	0.5321	0.0466
1992	83	0.5145	0.5076	0.6244	0.4047	0.5215	0.4552	0.5205	0.0519

Konfidencia intervallum becslés eredményei *Gini koefficiens* pontbecsléséhez. A bootstrap mintavétel az ismételt mintavételt az *eredeti adatok logaritmusára illesztett* folytonos sűrűségfüggvényből vette gaussi kernelt használva. Az adatbázisban szereplő összes ország száma: 132. Bootstrap minták száma: 10000, szignifikanciaszint: 0.05.

5. Függelék

Év	Orsz. száma	Pont-becslés	Naiv alsó	Naiv felső	BC alsó	BC felső	NBC alsó	NBC felső	Emp. torzítás
1960	111	0.3385	0.2902	0.4626	0.2145	0.3869	0.2655	0.3828	0.0397
1961	112	0.3455	0.2997	0.4697	0.2212	0.3913	0.2645	0.3893	0.0405
1962	112	0.3475	0.3029	0.4731	0.2220	0.3921	0.2747	0.3937	0.0410
1963	112	0.3485	0.3041	0.4721	0.2250	0.3929	0.2651	0.3934	0.0411
1964	112	0.3582	0.3164	0.4831	0.2332	0.3999	0.2769	0.4027	0.0422
1965	112	0.3623	0.3185	0.4890	0.2356	0.4061	0.2863	0.4055	0.0428
1966	112	0.3617	0.3225	0.4862	0.2372	0.4009	0.2822	0.4032	0.0427
1967	113	0.3587	0.3141	0.4843	0.2331	0.4033	0.2859	0.3983	0.0426
1968	113	0.3648	0.3258	0.4928	0.2368	0.4038	0.2909	0.4032	0.0436
1969	114	0.3715	0.3328	0.4940	0.2491	0.4102	0.2986	0.4102	0.0444
1970	119	0.3659	0.3307	0.4892	0.2425	0.4011	0.2684	0.3998	0.0437
1971	119	0.3646	0.3283	0.4877	0.2416	0.4010	0.2903	0.4000	0.0444
1972	119	0.3720	0.3346	0.4960	0.2480	0.4094	0.2992	0.4077	0.0453
1973	119	0.3798	0.3477	0.5060	0.2536	0.4120	0.3049	0.4134	0.0462
1974	119	0.3779	0.3406	0.5035	0.2523	0.4152	0.3130	0.4123	0.0457
1975	120	0.3762	0.3451	0.4995	0.2529	0.4072	0.3133	0.4066	0.0469
1976	120	0.3801	0.3461	0.5094	0.2508	0.4141	0.2906	0.4115	0.0476
1977	120	0.3786	0.3466	0.5069	0.2502	0.4106	0.3216	0.4097	0.0477
1978	120	0.3767	0.3459	0.4988	0.2546	0.4075	0.3127	0.4079	0.0474
1979	120	0.3832	0.3539	0.5114	0.2549	0.4124	0.3169	0.4131	0.0486
1980	125	0.4261	0.3773	0.5757	0.2764	0.4748	0.3381	0.4765	0.0470
1981	125	0.4141	0.3725	0.5558	0.2724	0.4557	0.3394	0.4565	0.0473
1982	125	0.4058	0.3677	0.5420	0.2696	0.4439	0.3258	0.4458	0.0475
1983	125	0.4072	0.3756	0.5414	0.2731	0.4389	0.3407	0.4428	0.0496
1984	127	0.4158	0.3831	0.5480	0.2836	0.4484	0.3521	0.4494	0.0498
1985	128	0.4164	0.3860	0.5441	0.2887	0.4468	0.3476	0.4476	0.0493
1986	127	0.4133	0.3826	0.5418	0.2847	0.4439	0.3445	0.4448	0.0489
1987	124	0.4115	0.3806	0.5399	0.2831	0.4424	0.3268	0.4424	0.0494
1988	122	0.4181	0.3869	0.5496	0.2865	0.4492	0.3475	0.4499	0.0512
1989	119	0.4224	0.3901	0.5579	0.2870	0.4548	0.3413	0.4560	0.0506
1990	102	0.4163	0.3784	0.5584	0.2742	0.4542	0.3326	0.4542	0.0526
1991	92	0.4301	0.3876	0.5811	0.2791	0.4725	0.3290	0.4684	0.0565
1992	83	0.4272	0.3852	0.5855	0.2688	0.4692	0.3462	0.4701	0.0597

Konfidencia intervallum becslés eredményei *atkinsoni mutató* pontbecsléséhez. A bootstrap mintavétel az ismételt mintavételt az *eredeti adatok logaritmusára illesztett* folytonos sűrűségfüggvényből vette gaussi kernelt használva. Az adatbázisban szereplő összes ország száma: 132. Bootstrap minták száma: 10000, szignifikanciaszint: 0.01.

6. Függelék

Év	Orsz. száma	Pont-becslés	Naiv alsó	Naiv felső	BC alsó	BC felső	NBC alsó	NBC felső	Emp. torzítás
1960	111	0.3385	0.3118	0.4427	0.2344	0.3653	0.2655	0.3625	0.0397
1961	112	0.3455	0.3207	0.4501	0.2409	0.3703	0.2645	0.3692	0.0405
1962	112	0.3475	0.3226	0.4522	0.2428	0.3725	0.2747	0.3729	0.0410
1963	112	0.3485	0.3250	0.4532	0.2438	0.3721	0.2651	0.3724	0.0411
1964	112	0.3582	0.3350	0.4642	0.2522	0.3814	0.2769	0.3819	0.0422
1965	112	0.3623	0.3384	0.4695	0.2552	0.3862	0.2863	0.3853	0.0428
1966	112	0.3617	0.3407	0.4683	0.2551	0.3826	0.2822	0.3833	0.0427
1967	113	0.3587	0.3373	0.4641	0.2533	0.3801	0.2859	0.3788	0.0426
1968	113	0.3648	0.3454	0.4729	0.2567	0.3842	0.2909	0.3837	0.0436
1969	114	0.3715	0.3530	0.4774	0.2656	0.3901	0.2986	0.3906	0.0444
1970	119	0.3659	0.3499	0.4693	0.2624	0.3818	0.2684	0.3807	0.0437
1971	119	0.3646	0.3482	0.4698	0.2595	0.3811	0.2903	0.3808	0.0444
1972	119	0.3720	0.3554	0.4774	0.2666	0.3886	0.2992	0.3886	0.0453
1973	119	0.3798	0.3653	0.4873	0.2723	0.3944	0.3049	0.3944	0.0462
1974	119	0.3779	0.3630	0.4848	0.2709	0.3928	0.3130	0.3934	0.0457
1975	120	0.3762	0.3637	0.4806	0.2717	0.3886	0.3133	0.3881	0.0469
1976	120	0.3801	0.3663	0.4892	0.2709	0.3938	0.2906	0.3927	0.0476
1977	120	0.3786	0.3663	0.4861	0.2710	0.3908	0.3216	0.3904	0.0477
1978	120	0.3767	0.3641	0.4828	0.2706	0.3893	0.3127	0.3890	0.0474
1979	120	0.3832	0.3726	0.4918	0.2745	0.3937	0.3169	0.3944	0.0486
1980	125	0.4261	0.4006	0.5491	0.3030	0.4516	0.3381	0.4532	0.0470
1981	125	0.4141	0.3933	0.5322	0.2960	0.4349	0.3394	0.4350	0.0473
1982	125	0.4058	0.3865	0.5184	0.2932	0.4252	0.3258	0.4255	0.0475
1983	125	0.4072	0.3936	0.5207	0.2938	0.4208	0.3407	0.4222	0.0496
1984	127	0.4158	0.4020	0.5292	0.3024	0.4296	0.3521	0.4291	0.0498
1985	128	0.4164	0.4054	0.5252	0.3076	0.4274	0.3476	0.4282	0.0493
1986	127	0.4133	0.4011	0.5226	0.3039	0.4254	0.3445	0.4251	0.0489
1987	124	0.4115	0.4000	0.5216	0.3014	0.4230	0.3268	0.4240	0.0494
1988	122	0.4181	0.4052	0.5311	0.3050	0.4309	0.3475	0.4300	0.0512
1989	119	0.4224	0.4098	0.5365	0.3084	0.4351	0.3413	0.4355	0.0506
1990	102	0.4163	0.4008	0.5362	0.2964	0.4318	0.3326	0.4329	0.0526
1991	92	0.4301	0.4128	0.5568	0.3034	0.4474	0.3290	0.4451	0.0565
1992	83	0.4272	0.4096	0.5617	0.2927	0.4448	0.3462	0.4453	0.0597

Konfidencia intervallum becslés eredményei *atkinsoni mutató* pontbecsléséhez. A bootstrap mintavétel az ismételt mintavételt az *eredeti adatokra illesztett* folytonos sűrűségfüggvényből vette gaussi kernelt használva. Az adatbázisban szereplő összes ország száma: 132. Bootstrap minták száma: 10000, szignifikanciaszint: 0.05.

7. Függelék

Év	Orsz. száma	Pont-becslés	Naiv alsó	Naiv felső	BC alsó	BC felső	NBC alsó	NBC felső	Emp. torzítás
1960	111	0.3385	0.3235	0.4324	0.2447	0.3535	0.2655	0.3523	0.0397
1961	112	0.3455	0.3318	0.4402	0.2508	0.3592	0.2645	0.3585	0.0405
1962	112	0.3475	0.3334	0.4414	0.2536	0.3616	0.2747	0.3622	0.0410
1963	112	0.3485	0.3351	0.4433	0.2538	0.3619	0.2651	0.3622	0.0411
1964	112	0.3582	0.3451	0.4548	0.2616	0.3712	0.2769	0.3711	0.0422
1965	112	0.3623	0.3500	0.4594	0.2653	0.3746	0.2863	0.3746	0.0428
1966	112	0.3617	0.3514	0.4582	0.2652	0.3720	0.2822	0.3728	0.0427
1967	113	0.3587	0.3473	0.4543	0.2631	0.3701	0.2859	0.3689	0.0426
1968	113	0.3648	0.3563	0.4615	0.2681	0.3732	0.2909	0.3742	0.0436
1969	114	0.3715	0.3631	0.4678	0.2752	0.3799	0.2986	0.3807	0.0444
1970	119	0.3659	0.3591	0.4606	0.2711	0.3727	0.2684	0.3716	0.0437
1971	119	0.3646	0.3579	0.4607	0.2686	0.3714	0.2903	0.3714	0.0444
1972	119	0.3720	0.3653	0.4694	0.2746	0.3787	0.2992	0.3781	0.0453
1973	119	0.3798	0.3746	0.4787	0.2809	0.3850	0.3049	0.3846	0.0462
1974	119	0.3779	0.3723	0.4756	0.2802	0.3835	0.3130	0.3837	0.0457
1975	120	0.3762	0.3741	0.4716	0.2807	0.3782	0.3133	0.3788	0.0469
1976	120	0.3801	0.3767	0.4787	0.2814	0.3834	0.2906	0.3832	0.0476
1977	120	0.3786	0.3759	0.4759	0.2812	0.3813	0.3216	0.3810	0.0477
1978	120	0.3767	0.3744	0.4734	0.2800	0.3790	0.3127	0.3793	0.0474
1979	120	0.3832	0.3816	0.4817	0.2846	0.3847	0.3169	0.3850	0.0486
1980	125	0.4261	0.4105	0.5370	0.3151	0.4416	0.3381	0.4407	0.0470
1981	125	0.4141	0.4045	0.5209	0.3073	0.4238	0.3394	0.4244	0.0473
1982	125	0.4058	0.3981	0.5092	0.3025	0.4136	0.3258	0.4145	0.0475
1983	125	0.4072	0.4031	0.5097	0.3048	0.4114	0.3407	0.4116	0.0496
1984	127	0.4158	0.4126	0.5185	0.3131	0.4190	0.3521	0.4190	0.0498
1985	128	0.4164	0.4144	0.5163	0.3165	0.4184	0.3476	0.4182	0.0493
1986	127	0.4133	0.4110	0.5126	0.3139	0.4155	0.3445	0.4153	0.0489
1987	124	0.4115	0.4092	0.5118	0.3112	0.4138	0.3268	0.4136	0.0494
1988	122	0.4181	0.4165	0.5211	0.3150	0.4196	0.3475	0.4196	0.0512
1989	119	0.4224	0.4193	0.5255	0.3194	0.4256	0.3413	0.4251	0.0506
1990	102	0.4163	0.4112	0.5243	0.3082	0.4214	0.3326	0.4210	0.0526
1991	92	0.4301	0.4260	0.5473	0.3128	0.4341	0.3290	0.4333	0.0565
1992	83	0.4272	0.4212	0.5517	0.3026	0.4331	0.3462	0.4327	0.0597

Konfidencia intervallum becslés eredményei *atkinsoni mutató* pontbecsléséhez. A bootstrap mintavétel az ismételt mintavételt az *eredeti adatok logaritmusára illesztett* folytonos sűrűségfüggvényből vette gaussi kernelt használva. Az adatbázisban szereplő összes ország száma: 132. Bootstrap minták száma: 10000, szignifikanciaszint: 0.10.

Irodalom

1. Atkinson, A. B.(1980): On the Measurement of Inequality in: Wealth, Income and Inequality ed. by A. B. Atkinson, Oxford Univ. Press
2. Ebert, U. (1988): Measurement of Inequality: An Attempt at Unification and Generalization in: Gaertner W. – Pattanaik P. K. (eds): Distributive Justice and Inequality, Springer-Verlag Berlin Heidelberg pp. 59-81

3. Garthwaite, Paul H. - Jolliffe, Ian T. - Jones, Byron (1995): Statistical Inference, Prentice Hall, London.
4. Hajdú Ottó (1997): A szegénység mérőszámai, KSH Budapest
5. Hall, Peter (1988): Theoretical Comparison of Bootstrap Confidence Intervals, *The Annals of Statistics*, Vol. 16, No. 3, 927-953
6. Hall, Peter - DiCiccio, Thomas J. - Romano, Joseph P. (1989): On Smoothing and the Bootstrap *The Annals of Statistics*, Vol. 17, No. 2, 692-704
7. Durlauf, Steven N. - Quah, Danny (1998): The New Empirics of Economic Growth, NBER Working Paper No. 6422
8. Krtscha, Manfred (1994): A New Compromise Measure of Inequality in: Eichorn, Wolfgang ed. Models and Measurement of Welfare and Inequality, Springer-Verlag Berlin pp. 111-119.
9. Lucas, Robert E. Jr. (1993): Making a Miracle, *Econometrica*, Vol. 61, No. 2 (March) pp. 251-272
10. Major Klára (1998): Nemzetközi jövedelemegyenlőtlenségek változási tendenciái, in: A jövő a jelenben – átalakuló társadalom, új tudományos problémák. PhD hallgatók előadásai az első nemzetközi konferencián, BKE Posztgraduális Kar, Budapest.
11. Quah, Danny (1993): Galton's Fallacy and Tests of the Convergence Hypothesis, *Scandinavian Journal of Economics* Vol. 95, No. 4, pp. 427-443
12. Romer, Paul M. (1994): The Origins of Endogenous Growth, *Journal of Economic Perspectives* Vol. 8, No. 1 (Winter) pp. 3-22
13. Silverman, B. W. (1986): Density Estimation for Statistics and Data Analysis, Chapman & Hall, London
14. Silverman, B. W. - Young, G. A. (1987): The Bootstrap: To smooth or not to smooth? *Biometrika*, Vol. 74, No. 3, 469-479
15. Solow, Robert M. (1994): Perspectives on Growth Theory, *Journal of Economic Perspectives* Vol. 8, No. 1 (Winter) pp. 45-54
16. Summers, Robert - Heston, Alan (1991): The Penn World Table (Mark 5): An Expanded Set of International Comparisons *Quaterly Journal of Economics* vol. 106 May pp. 327-368
17. Vinod, H. D. (1993): Bootstrap Methods: Applications in Econometrics, Handbook of Statistics, Vol. 11, 629-661 Elsevier Science Publishers B. V.
18. Wand, M. P. - Jones, M. C. (1995): Kernel Smoothing, Chapman & Hall, London