AZ MC^2 PROGRAMOZÁS FELHASZNÁLÁSI LEHETŐSÉGE AZ AGGREGÁLT TERMELÉSTERVEZÉSBEN[1]

GYETVÁN FERENC
PTE Közgazdaságtudományi Kar

A dolgozat egy olyan aggregált termeléstervezési modellt ismertet, amely a döntési alternatívákat több kritérium alapján értékeli, továbbá a kapacitás és a kereslet különböző lehetséges szintjeit is figyelembe veszi. A probléma megoldását szolgáló eljárás a mátrixprogramozás és az MC^2 (Multi-Criteria and Multi-Constraint) programozás elméleti alapjain nyugszik. A megoldás a kapacitás és a keresleti szintek, valamint az értékelő kritériumok súlyainak függvényében a potenciális optimális megoldások halmazát adja. A dolgozat célja annak bemutatása, hogy miként használhatók fel egy aggregált termeléstervezési probléma megoldása során a mátrixprogramozás és az MC^2 programozás elméleti eredményei. Az utolsó fejezet áttekintést nyújt a témához kapcsolódó legfontosabb munkákról.

Kulcsszavak: aggregált termeléstervezés, többkritériumos döntéshozatal, mátrixprogramozás, MC^2 (Multi-Criteria and Multi-Constraint) programozás, szállítási feladat, potenciális optimális megoldás.

1 Bevezetés

Az aggregált termeléstervezés területén az első modellek egyikét Bowman (1956) fogalmazta meg. A termeléstervezési problémát lineáris programozási feladatként formalizálta, és a feladatot szállítási feladatra vezette vissza. Az optimális megoldás előállítására, azaz az összköltség minimalizálására, a szállítási feladat megoldási algoritmusát alkalmazta. Ennek a modellnek nagy hatása volt a modellezés fejlődésére, ugyanis nem csak a matematikai modellezés termeléstervezésre történő alkalmazását mutatta meg, hanem a számítógépes szoftverek megjelenésével utat nyitott bármelyik, valóságos aggregált termeléstervezési probléma gyors gyakorlati megoldásához is.

A lineáris programozás struktúrájának megfelelően Bowman modellje csak egy célfüggvény, a termelés és raktározás együttes költségének figyelembe vételére volt alkalmas. A szélsőérték problémák sokkal árnyaltabb kezelésére adott lehetőséget a célprogramozás (Goodman (1974)), és a többkritériumos vagy többcélfüggvényes programozás módszereinek az alkalmazása, ahol a termeléssel, raktározással vagy a munkaerővel kapcsolatos célokat nem egy összegként kezeljük, hanem egyedi céloknak tekintjük (lásd, pl. Charnes és

[1]Beérkezett: 2001. április 3. E-mail: gyetvan@ktk.pte.hu

Cooper (1962), Lee (1972), Zeleny (1974), Yu és Zeleny (1975), Yu (1985)). A többkritériumos alkalmazások egyik legnagyobb előnye, hogy vizsgálhatjuk a kritériumok közötti átváltási lehetőségeket. Az átváltási mutatók arról adnak felvilágosítást, hogy valamelyik célfüggvény érték egy egységének feláldozása milyen előnyt jelent a többi kritérium célfüggvény értékének vonatkozásában.

Az említett modellekben a szerzők feltételezik, hogy a kapacitás és keresleti szintek adottak. A valóságban azonban a kapacitás és keresleti szintek ingadozást mutathatnak. Shi és Haase (1996) nyomán az aggregált termeléstervezésnek egy olyan modelljét mutatjuk be a mátrixprogramozás és a lineáris MC^2 (Multi-Criteria and Multi-Constraint) programozás keretében, mely több kapacitás és keresleti szintet képes figyelembe venni, és több kritérium segítségével értékeli a lehetséges alternatívákat. A mátrixprogramozás elméletének kidolgozása Gale, Kuhn és Tucker (1951) nevéhez, az MC^2 programozás elméletének kidolgozása pedig Seiford és Yu (1979) nevéhez fűződik. A mátrixprogramozás egy összefoglalása és kiegészítése megtalálható Gyetván (1989) cikkében, a mátrixprogramozás és a lineáris MC^2 programozás ekvivalenciáját Gyetván és Shi (1992) dolgozata tartalmazza. Az aggregált termelésprogramozási probléma megoldása a döntéshozó számára a potenciális optimális megoldások halmazával szolgál a kapacitás és keresleti szintek különböző súlyainak, valamint az értékelő kritériumok súlyainak függvényében.

2 Aggregált termeléstervezés több kapacitás- és keresletszint mellett

Az aggregált termeléstervezés a termelés/szolgáltatás menedzsment legfontosabb fejezeteinek egyike. Egy vállalat vezetése a tervezési folyamat során arra a kérdésre keresi a választ, hogy egy adott tervezési időszak periódusaiban milyen aggregált termelési, raktározási és munkaerő szintek esetén lehet minimális költséggel kielégíteni a keresletet. A kérdés megválaszolásához a matematikai programozást hívhatjuk segítségül.

A vállalati felső vezetés számára az éves üzleti terv elkészítése a tárgyévet megelőző év utolsó hónapjaiban válik aktuálissá. Ekkor kell a befektetett eszközök eredményes működtetését megtervezni. Az eszközök hozadéka csak forgalom útján realizálódhat. A tervezést végző csoportnak tehát jó előre látnia kell a forgalom várható alakulását. Ezért a vállalat szerződéseket igyekszik kötni üzleti partnereivel, és piaci prognózisok révén nyer információt a várható forgalomról. A szerződések és előrejelzések nem termék mélységűek, hanem általában termékcsaládokra vonatkoznak, mert a középtávú (általában egy év időhorizontú) előrelátáshoz mind a termelőnek, mind pedig a fogyasztónak elegendő aggregátumokban gondolkodni (Vörös (1999)). A modellek általában az adott időtávra vonatkozó fix kapacitás és keresleti adatokból indulnak ki, és egy kritérium alapján választják ki az optimális alternatívát.

Ha a probléma matematikai modelljében az erőforrásokra és keresletre vonatkozó korlátokat feltételi egyenlőtlenségek formájában fogalmazzuk meg, akkor a mátrixaritmetika eszközeivel leírt lineáris modellben több jobboldali vektor szerepel. A következő fejezetekben látni fogjuk, hogy a különböző kapacitás és kereslet korlátok vektorainak a súlyozása révén mód nyílik a tradicionális lineáris programozási modell kiterjesztésére különböző kapacitás és keresleti szinteket kezelő modellre.

Egy másik ok, ami miatt a többkritériumos, több kapacitás- és keresletszint problémával foglalkozunk, az a csoportos döntéshozatal (Hwang és Lin (1987)). A gyakorlat azt mutatja, hogy egy termelő cég élén a vezetők, az elnök, a pénzügyi, termelési igazgatók stb. csoportot képeznek és úgy hoznak döntést. A döntéshozóknak azonban a vállalaton belül elfoglalt pozíciója alapján különböző lehet az érdeke a szükséges kapacitások vonatkozásában vagy a kereslet mértékének megítélésében. Az optimális aggregált termelési tervnek vissza kell tükröznie a kompromisszumot a döntéshozók által preferált különböző diszkrét kapacitás és keresleti szintek között.

Az előbbiekben vázolt aggregált termeléstervezési filozófia modelljének leírásához szükséges elméleti keretek rövid ismertetését tartalmazza a következő rész.

3 Mátrixprogramozás és az MC^2 programozás

A termeléstervezés lineáris programozás-alapú modelljeinek egyik hiányossága, hogy csak egy kritérium alapján értékelik az alternatívákat. De a többkritériumos alkalmazások eszközrendszere is kevés, ha emellett még több kapacitás- és keresletszintet kell figyelembe venni. Ezek a problémák a klasszikus lineáris programozás sémájának általánosításával úgy fogalmazhatók meg, hogy a modellben egy célfüggvény helyett több célfüggvény, és a feltételi egyenlőtlenségek egy jobboldali vektora helyett több jobboldali vektor szerepel. A probléma tehát

$$\begin{gathered} Ax \leq By \\ x \geq 0,\ y > 0 \\ Cx \to \max \end{gathered} \tag{1}$$

alakú, ahol A $m\times n$-es, B $m\times p$-s és C $q\times n$-es mátrixok, ezért a vizsgált aggregált termeléstervezési problémát a mátrixprogramozás eszközrendszerével írjuk le. Az elmélet részletes kidolgozását megtalálja az olvasó Gale, Kuhn és Tucker (1951) munkájában, valamint Gyetván (1989) összefoglaló és kiegészítő cikkében. A mátrixprogramozás elméletének kiindulópontja egy primál-duál probléma-pár, melyet a szerzők a következőképpen definiáltak:

$$\max\{\, D \mid Cx \geq Dy,\ Ax \leq By,\ x \geq 0,\ y > 0 \,\}\ , \tag{2}$$

$$\min\{\, D \mid u^T B \leq v^T D,\ u^T A \geq v^T C,\ u \geq 0,\ v > 0 \,\}\ . \tag{3}$$

Ugyanúgy, mint az (1) feladatban, mindkettőben az $m \times n$-es A, $m \times p$-s B és $q \times n$-es C mátrixok a kiinduló információk hordozói. A D $q \times p$ méretű ismeretlen mátrix, és x, y, u, v megfelelő méretű vektorváltozók. Tekintettel arra, hogy a mátrixok halmaza részben rendezett halmaz, a maximum és minimum fogalma a probléma jellegéhez igazodó, egyedi definiálást igényelt.

Ezt a hiányt az efficiencia fogalmának bevezetésével hidalták át a szerzők. Dolgozatunk céljának megfelelően e helyütt eltekintünk a dualitáselmélet eredményeinek ismertetésétől.

Egyszerűen megmutatható, hogy a (2) és (3) általános mátrix problémák speciális esetként kiadják a lineáris vektor probléma és a lineáris skalár probléma primál-duál párját. Ennek alapján logikusnak látszik az eddig önállónak tekintett két programozási feladatot a mátrixprogramozás primál-duál párjának nevezni. Az egzisztencia és dualitási tételek alátámasztják ennek a felfogásnak a helyességét.

A mátrixprogramozási feladat numerikus megoldásához visz közelebb a másik programozási módszer, az ún. MC^2 lineáris programozás, melyet Seiford és Yu (1979) dolgoztak ki. A szerzők a mátrixprogramozáshoz nagyon hasonló megközelítést alkalmaznak, és az alábbi primál-duál feladatpárt definiálják:

$$\max\left\{ v^T Cx \mid Ax \leq By,\ x \geq 0,\ y > 0,\ v > 0 \right\}, \tag{4}$$

$$\min\left\{ u^T By \mid u^T A \geq v^T C,\ u \geq 0,\ y > 0,\ v > 0 \right\}. \tag{5}$$

A különbség a mátrixprogramozás (2)-(3) primál-duál párjához képest az, hogy (4)-(5) ignorálja a D célmátrixot, és mind a primál, mind pedig a duál feladatban szerepelteti a két pozitív előjelű y és v vektort.

A mátrixprogramozás és az MC^2 lineáris programozás között a formai hasonlóságon túl mély belső kapcsolat van. A két probléma ekvivalens abban az értelemben, hogy a két feladat megengedett megoldásai és a két feladat efficiens megoldáspárjai kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők egymásnak. Teljesen analóg dualitási tételek mondhatók ki az MC^2 programozás (4)-(5) primál-duál párja között, mint a mátrixprogramozás (2)-(3) primál-duál párja között, melyeket a továbbiak szempontjából nem tartjuk fontosnak e helyen ismertetni. A mátrixprogramozás és az MC^2 lineáris programozás közötti elméleti kapcsolatok részletes leírása Gyetván és Shi (1992) dolgozatában található. Az MC^2-hez kapcsolódó döntési problémákról Lee, Shi és Yu (1990), továbbá Shi és Yu (1992) értekezik.

A fejezet következő részében a (4) MC^2 primál feladat szimplex alapú megoldó algoritmusát ismertetjük. Az alapötlet az, hogy a korábban vázolt (4) lineáris többkritériumos, több feltételi korlátot tartalmazó feladatot fogjuk fel parametrikus feladatként oly módon, hogy a pozitív $v > 0$, $y > 0$ változókat paramétereknek tekintjük. Hogy jelekben is érzékeltessük a változást, a következőkben a paraméterek jelölésére a görög λ és γ betűket használjuk. Így (4) az alábbi alakot ölti:

$$\max\left\{ \lambda^T Cx \mid Ax \leq B\gamma,\ x \geq 0 \right\}, \tag{6}$$

ahol $C \in I\!R^{q\times n}$, $A \in I\!R^{m\times n}$ és $B \in I\!R^{m\times p}$ $q \times n$, $m \times n$ és $m \times p$ méretű mátrixok, $x \in I\!R^n$ n-elemű döntési változók vektora, $\lambda > 0$, $\lambda \in I\!R^q$ a kritériumok paraméter-súlyai és $\gamma > 0$, $\gamma \in I\!R^p$ a feltételi szintek paraméter-súlyai. Feltételezzük, hogy a paraméterek ismeretlenek és normáltak, azaz teljesülnek az alábbiak:

$$\lambda \in I\!R^q, \quad \lambda > 0, \quad \sum_{k=1}^{q} \lambda_k = 1 \qquad \text{és} \qquad \gamma \in I\!R^p, \quad \gamma > 0, \quad \sum_{k=1}^{p} \gamma_k = 1 .$$

A leírt primál MC^2 lineáris programozási feladatnak q célfüggvénye és p feltételi szintje van. Ha a feltételi szintek γ paramétervektora ismert, akkor (6) többkritériumos lineáris programozási feladatra redukálódik. Továbbá, ha λ a kritériumok paramétervektora is ismert, akkor a klasszikus lineáris programozási feladat áll elő.

Jelölje az $\{x_{j_1}, \ldots, x_{j_m}\}$ bázisváltozók indexhalmazát $J = \{j_1, \ldots, j_m\}$. Nem okoz zavart, ha magát a probléma bázisát is J jelöli. Megjegyezzük, hogy a bázisváltozók slack változókat is tartalmazhatnak. Mivel egy J bázismegoldás a (γ, λ) paraméterpár függvénye, az alábbi módon definiáljuk a primál és duál megengedett megoldás, valamint a potenciális optimális megoldás fogalmát.

i) A J bázismegoldás az MC^2 programozási feladat primál megengedett megoldása, ha létezik olyan $\gamma_0 > 0$, hogy J megengedett megoldása MC^2-nek.

ii) A J bázismegoldás az MC^2 programozási feladat duál megengedett megoldása, ha létezik olyan $\lambda_0 > 0$, hogy J duál megengedett megoldása MC^2-nek.

iii) A J bázismegoldás potenciális optimális megoldása az MC^2 programozási feladatnak, ha létezik olyan $\gamma_0 > 0$ és $\lambda_0 > 0$, hogy J optimális megoldása a lineáris programozási feladatnak.

Legyen $\Gamma(J)$ a feltételi szintek összes olyan γ súlyainak halmaza, melyre J primál megengedett, és legyen $\Lambda(J)$ a kritériumok összes olyan λ súlyainak halmaza, melyre J duál megengedett. Ekkor a J bázis

i) primál megengedett vagy duál megengedett akkor és csakis akkor, ha $\Gamma(J)$ vagy $\Lambda(J)$ nem üres és

ii) potenciális optimális megoldás akkor és csakis akkor, ha $\Gamma(J)$ és $\Lambda(J)$ nem üres.

Egy MC^2 programozási feladatnak természetesen több potenciálisan optimális megoldása is lehetséges, ahogyan a (γ, λ) paraméterpár a döntési szituációnak megfelelően változik. Seiford és Yu (1979) kidolgoztak egy szimplex módszeren alapuló eljárást az összes potenciális optimális megoldás előállítására. Ide kapcsolódik még Yu (1985) és Shi és Yu (1992) munkája. Az algoritmus számítógépes megvalósítását Chien, Shi és Yu (1989) végezte el.

4 Az MC^2 programozás egy alkalmazási lehetősége az aggregált termeléstervezésben

Az aggregált termeléstervezés matematikai modelljéhez a klasszikus szállítási feladat szolgál alapul, mely speciális lineáris programozási feladat. Haase (1994) és Shi (1995) ennek általánosításaként kidolgozta az MC^2 programozás elméleti keretein belül az MC^2 szállítási feladat modelljét. Az általunk tárgyalt aggregált termeléstervezési probléma modelljének általános formája az MC^2 szállítási feladat. Ez a dolgozat Shi és Haase (1996) felépítését követi. Megjegyezzük, hogy a továbbiakban a klasszikus szállítási feladat terminológiáját használjuk.

Tegyük fel, hogy a tervezési időszakot n periódusra bontottuk, és az egyes periódusokban becslések alapján ismertek a szezonális ingadozásoknak megfelelően az aggregált keresleti szintek alternatívái. Ismertnek tételezzük fel továbbá a kereslet szezonális ingadozásainak megfelelő kapacitásszintek alternatíváit.

Jelölje $P_1, P_2, \ldots, P_n$ a periódusokat, és $b_{11}, \ldots, b_{1p}$; $b_{21}, \ldots, b_{2p}$; $\ldots$; b_{n1}, $\ldots$, b_{np} az n periódusban a keresleti szinteket. Tegyük fel továbbá, hogy m erőforrás áll rendelkezésre, melyek kapacitása szintén a szezonális ingadozásoknak megfelelően változik. Jelölje $E_1, E_2, \ldots, E_m$ az erőforrásokat, és $a_{11}, \ldots, a_{1p}$; $a_{21}, \ldots, a_{2p}$; $\ldots$; $a_{m1}, \ldots, a_{mp}$ a megfelelő kapacitásszinteket. Az alternatívák értékelése q kritérium alapján történik. Az i-edik erőforrás felhasználásával a j-edik periódusban jelentkező kereslet kielégítésére történő termelés fajlagos költsége c^1_{ij}, $\ldots$, c^q_{ij}. A leírt modell szemléltethető az *1. táblázaton* látható disztribúciós táblán.

Periódus / Erőforrás	P_1	$\cdots$	P_n	Kapacitásszint
E_1	$c^1_{11}, \ldots, c^q_{11}$	$\cdots$	$c^1_{1n}, \ldots, c^q_{1n}$	$a_{11}, \ldots, a_{1p}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
E_i	$c^1_{i1}, \ldots, c^q_{i1}$	$\cdots$	$c^1_{in}, \ldots, c^q_{in}$	$a_{i1}, \ldots, a_{ip}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
E_m	$c^1_{m1}, \ldots, c^q_{m1}$	$\cdots$	$c^1_{mn}, \ldots, c^q_{mn}$	$a_{m1}, \ldots, a_{mp}$
Keresletszint	b_{11} $\vdots$ b_{1p}	$\cdots$	b_{n1} $\vdots$ b_{np}	

1. táblázat: A többcélfüggvényes, több kapacitás-kereslet szintű aggregált termelési feladat disztribúciós táblája

A probléma matematikai modellje a következő alakot ölti.

$$\min(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q,) \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^1 x_{ij} \\ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^2 x_{ij} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^q x_{ij} \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ip}) \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_p \end{pmatrix}, \qquad i = 1, \ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = (b_{j1}, b_{j2}, \ldots, b_{jp}) \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_p \end{pmatrix}, \qquad j = 1, \ldots, n$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad \text{minden } (i, j) \text{ párra},$$

ahol

c_{ij}^k - az i-edik forrás felhasználásával a j-edik periódusban jelentkező kereslet kielégítésére előállított termék fajlagos költsége, ha a tevékenységet a k-adik célfüggvény értékeli, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, q$;

a_{is} - az i-edik erőforrás s-edik kapacitás szintje, $i = 1, \ldots, m$, $s = 1, \ldots, p$;

b_{js} - a j-edik periódusban az s-edik keresletszint, $j = 1, \ldots, n$, $s = 1, \ldots, p$;

x_{ij} - az i-edik erőforrás felhasználásával a j-edik periódusban jelentkező kereslet kielégítésére előállított termékmennyiség, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$;

$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q)^T$ - a célfüggvények súlyainak vektora és

$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p)^T$ - a kapacitás- és keresletszintek súlyainak vektora.

Annak érdekében, hogy lássuk, hogy a fenti modell hogyan választja ki a potenciális optimális megoldásokat, ismertetnünk kell néhány alapvető tételt. Az MC^2 szállítási feladatra vonatkozó állítások bizonyítását Shi (1995) dolgozatában, és az MC^2 lineáris programozás elméletének részletes tárgyalását Yu (1985) munkájában találja meg az olvasó.

Ha érvényesek a

$$\sum_{i=1}^{m} a_{is} = \sum_{j=1}^{n} b_{js}, \qquad (s = 1, 2, \ldots, p)$$

feltételek, akkor az MC^2 szállítási feladatra igazak az alábbi állítások:

i) Adott $\gamma^0 > 0$-hoz létezik az MC^2 szállítási feladatnak primál megengedett megoldása.

ii) Ha adott egy J primál megengedett bázis, akkor a megfelelő $x(J)$ bázisváltozók legfeljebb $m + n - 1$ darab pozitív komponenst tartalmaznak, ahol minden x_{ij} a γ függvénye.

Legyen adott a (7) feladat egy $x(J)$ bázismegoldása, és legyen

$$c_{ij} = (c_{ij}^1, c_{ij}^2, \ldots, c_{ij}^q)^T$$

a q célfüggvény együttható-vektora, ha x_{ij} az i-edik erőforrásból a j-edik periódusban felmerült kereslet kielégítésére termelt mennyiség. Jelölje $u_i(\lambda)$ az i-edik erőforráshoz tartozó duál együtthatót, $v_j(\lambda)$ pedig a j-edik keresléthez tartozó duál együtthatót. Megjegyezzük, hogy mind az $u_i(\lambda)$, mind pedig a $v_j(\lambda)$ a λ függvénye. Ekkor igaz a következő tétel:

Tétel. *Egy J bázis duálmegengedett, ha*

i) $u_i(\lambda) + v_j(\lambda) - \lambda^T c_{ij} = 0$ *minden olyan (i, j) párra, melyre x_{ij} bázisváltozó, és*

ii) $u_i(\lambda) + v_j(\lambda) - \lambda^T c_{ij} \leq 0$ *minden olyan (i, j) párra, melyre x_{ij} nem bázisváltozó.*

Az iménti tételek lehetőséget nyújtanak egy eljárás megalkotására, mivel az i) állítás alapján ki lehet számítani a J bázishoz tartozó $u_i(\lambda)$ és $v_j(\lambda)$ duálváltozók értékét, és ha a feltételi súlyok $\Gamma(J)$ halmaza nem üres, akkor az ii) állítás alapján tesztelni lehet, hogy egy megengedett megoldás potenciális optimális megoldás-e. Az algoritmus ennek alapján két fázisból áll.

Az első fázisban

i) keresünk egy J induló megengedett bázismegoldást;

ii) egy iteráció során a be- és kilépő bázisváltozók kiválasztása annak megfelelően, hogy a J bázismegoldás potenciálisan optimális-e, vagy sem.

A második fázisra csak akkor fut az algoritmus, ha J nem potenciális optimális megoldás. Ekkor

i) pivot transzformációval, előállítja a szomszédos K bázist, és megismétli az első fázis ii) részét;

ii) egyébként pedig a J bázist elhelyezi a potenciális optimális megoldások halmazába, és egy pivot lépéssel átlép egy szomszédos Q bázisra, és megismétli az első fázis ii) részét.

Ez a két lépés ismétlődik mindaddig, míg az algoritmus teljesen be nem futja a (γ, λ) minden lehetséges értékpárját. Az eljárás eredményeként megkapjuk az MC^2 szállítási feladat összes potenciális optimális megoldását (lásd Yu (1985)).

5 Egy példa

Mint a korábbi fejezetekben láttuk, a többkritériumos és több kapacitás-keresletszinttel rendelkező aggregált termeléstervezési modellek MC^2 szállítási feladatként interpretálhatók. A probléma egy lehetséges megoldásának illusztrálására bemutatjuk Singhal és Adlakha (1989), három célfüggvényt és három kapacitás-kereslet szintet kezelő modelljét. A három célfüggvény: a termelési költség, a tárolási költség és a hiány okozta veszteség. A kapacitás és kereslet szintjeit három, a döntéshozatalban résztvevő vezető adja meg. Tegyük fel továbbá, hogy a termelési időszak három periódusból áll. Minden termelési periódusban alap munkaidőben és túlórában folyhat a termelés. Egy adott periódusbeli termelést a termelési költségen túl tárolási költség is terheli, ha későbbi periódusokban jelentkező igények kielégítésére szolgál. Ha azonban korábbi periódus számára történik a termelés, azaz a hiányt is megengedjük, akkor a hiány által elszenvedett veszteség lép fel. A feladat adatait a *2. táblázat* mutatja.

Legyen r - a termelés egységköltsége alap munkaidőben; v - a termelés egységköltsége túlórában; h - az egy periódus során felmerülő tárolási egységköltség; s - a hiány egységköltsége periódusonként; a_{ik} - az i-edik periódusban a k-adik termelési kapacitásszint, b_{jk} - a j-edik periódusban a k-adik keresletszint, és b_{4k} kiegészítő (slack) változó ($i = 1, \ldots, 7,\ j, k = 1, 2, 3$).

Periódusok	$P1$	$P2$	$P3$	Slack	Kapacitásszintek
Kezdő raktárkészlet	$0, 0, 0$	$0, h, 0$	$0, 2h, 0$	$0, 0, 0$	$a_{11}\ a_{12}\ a_{13}$
$A1$	$r, 0, 0$	$r, h, 0$	$r, 2h, 0$	$0, 0, 0$	$a_{21}\ a_{22}\ a_{23}$
$T1$	$v, 0, 0$	$v, h, 0$	$v, 2h, 0$	$0, 0, 0$	$a_{31}\ a_{32}\ a_{33}$
$A2$	$r, 0, s$	$r, 0, 0$	$r, h, 0$	$0, 0, 0$	$a_{41}\ a_{42}\ a_{43}$
$T2$	$v, 0, s$	$v, 0, 0$	$v, h, 0$	$0, 0, 0$	$a_{51}\ a_{52}\ a_{53}$
$A3$	$r, 0, 2s$	$r, 0, s$	$r, 0, 0$	$0, 0, 0$	$a_{61}\ a_{62}\ a_{63}$
$T3$	$v, 0, 2s$	$v, 0, s$	$v, 0, 0$	$0, 0, 0$	$a_{71}\ a_{72}\ a_{73}$
Keresletszintek	b_{11} b_{12} b_{13}	b_{21} b_{22} b_{23}	b_{31} b_{32} b_{33}	b_{41} b_{42} b_{43}	

2. táblázat. Aggregált termeléstervezési feladat disztribúciós táblája három célfüggvény valamint három kapacitás- és keresletszint esetén

termelési	periódusok	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	slack	kapacitások	
															1. vezető	2. vezető
0	raktárkészl.	$0, 0$	$0, h$	$0, 2h$	$0, 3h$	$0, 4h$	$0, 5h$	$0, 6h$	$0, 7h$	$0, 8h$	$0, 9h$	$0, 10h$	$0, 11h$	0, 0	100	100
1	főmunkaidő	$r, 0$	r, h	$r, 2h$	$r, 3h$	$r, 4h$	$r, 5h$	$r, 6h$	$r, 7h$	$r, 8h$	$r, 9h$	$r, 10h$	$r, 11h$	0, 0	800	900
1	túlóra	$v, 0$	v, h	$v, 2h$	$v, 3h$	$v, 4h$	$v, 5h$	$v, 6h$	$v, 7h$	$v, 8h$	$v, 9h$	$v, 10h$	$v, 11h$	0, 0	320	400
2	főmunkaidő	X	$r, 0$	r, h	$r, 2h$	$r, 3h$	$r, 4h$	$r, 5h$	$r, 6h$	$r, 7h$	$r, 8h$	$r, 9h$	$r, 10h$	0, 0	760	600
2	túlóra	X	$v, 0$	v, h	$v, 2h$	$v, 3h$	$v, 4h$	$v, 5h$	$v, 6h$	$v, 7h$	$v, 8h$	$v, 9h$	$v, 10h$	0, 0	304	400
3	főmunkaidő	X	X	$r, 0$	r, h	$r, 2h$	$r, 3h$	$r, 4h$	$r, 5h$	$r, 6h$	$r, 7h$	$r, 8h$	$r, 9h$	0, 0	840	800
3	túlóra	X	X	$v, 0$	v, h	$v, 2h$	$v, 3h$	$v, 4h$	$v, 5h$	$v, 6h$	$v, 7h$	$v, 8h$	$v, 9h$	0, 0	336	420
4	főmunkaidő	X	X	X	$r, 0$	r, h	$r, 2h$	$r, 3h$	$r, 4h$	$r, 5h$	$r, 6h$	$r, 7h$	$r, 8h$	0, 0	880	700
4	túlóra	X	X	X	$v, 0$	v, h	$v, 2h$	$v, 3h$	$v, 4h$	$v, 5h$	$v, 6h$	$v, 7h$	$v, 8h$	0, 0	352	400
5	főmunkaidő	X	X	X	X	$r, 0$	r, h	$r, 2h$	$r, 3h$	$r, 4h$	$r, 5h$	$r, 6h$	$r, 7h$	0, 0	840	800
5	túlóra	X	X	X	X	$v, 0$	v, h	$v, 2h$	$v, 3h$	$v, 4h$	$v, 5h$	$v, 6h$	$v, 7h$	0, 0	336	350
6	főmunkaidő	X	X	X	X	X	$r, 0$	r, h	$r, 2h$	$r, 3h$	$r, 4h$	$r, 5h$	$r, 6h$	0, 0	800	770
6	túlóra	X	X	X	X	X	$v, 0$	v, h	$v, 2h$	$v, 3h$	$v, 4h$	$v, 5h$	$v, 6h$	0, 0	320	340
7	főmunkaidő	X	X	X	X	X	X	$r, 0$	r, h	$r, 2h$	$r, 3h$	$r, 4h$	$r, 5h$	0, 0	800	770
7	túlóra	X	X	X	X	X	X	$v, 0$	r, h	$v, 2h$	$v, 3h$	$v, 4h$	$v, 5h$	0, 0	320	340
8	főmunkaidő	X	X	X	X	X	X	X	$r, 0$	r, h	$r, 2h$	$r, 3h$	$r, 4h$	0, 0	760	700
8	túlóra	X	X	X	X	X	X	X	$v, 0$	v, h	$v, 2h$	$v, 3h$	$v, 4h$	0, 0	304	300
9	főmunkaidő	X	X	X	X	X	X	X	X	$r, 0$	r, h	$r, 2h$	$r, 3h$	0, 0	840	800
9	túlóra	X	X	X	X	X	X	X	X	$v, 0$	v, h	$v, 2h$	$v, 3h$	0, 0	336	350
10	főmunkaidő	X	X	X	X	X	X	X	X	X	$r, 0$	r, h	$r, 2h$	0, 0	880	820
10	túlóra	X	X	X	X	X	X	X	X	X	$v, 0$	v, h	$v, 2h$	0, 0	352	400
11	főmunkaidő	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	$r, 0$	r, h	0, 0	840	800
11	túlóra	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	$v, 0$	v, h	0, 0	336	350
12	főmunkaidő	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	$r, 0$	0, 0	800	750
12	túlóra	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	$v, 0$	0, 0	320	300
kereslet	1. vezető	1100	500	1200	1300	1500	1000	800	500	1000	1200	1400	1400	976	13876	
kereslet	2. vezető	1200	400	1500	1000	1600	900	900	450	900	1300	1500	1500	510		13660

3. táblázat. Aggregált termeléstervezési feladat disztribúciós táblája két célfüggvény és két kapacitás- és keresletszint esetén (Forrás: Shi és Haase (1996))

6 Potenciális optimális megoldások és azok kapcsolata

Ebben a fejezetben egy irodalmi illusztratív példát mutatunk be. Az általánosított szállítási feladat tulajdonságait kihasználva Haase és Shi (1994) egy számítógépes programot fejlesztett ki a probléma megoldására. Ennek felhasználásával a potenciális optimális megoldások illusztrálására azt a két célfüggvényes, két kapacitás-keresletszinttel rendelkező problémát mutatjuk be, melyet először Menipaz (1984) publikált. Legyen $r = 120$, $v = 180$, $h = 3$ és a kezdeti tárolt mennyiség 100-100 egység mindkét kapacitásszint esetén. A modell adatait a *3. táblázat* mutatja. A kapacitásszintek az utolsó oszlopokban, a keresleti szintek az utolsó sorban láthatók. A táblázat belső adatai a termelés és raktározás költségei a megfelelő relációkban. Hiány nem megengedett, ezért bizonyos relációkat letiltunk. Ennek jelölésére az X jel szolgál.

Az előző fejezetben vázolt megoldó algoritmust alkalmazva, a számítógépes futtatás eredményeként potenciális optimális megoldásnak $\{J_1, J_2, J_3, J_4\}$ adódott, mely részletesen a 4., 5. és 6. táblázatban látható.

A *4. táblázat* a potenciális optimális megoldások halmazát tartalmazza. A táblázat sorai a J_k bázishoz tartozó $\Gamma(J_k)$ kapacitás és keresleti szint súlyok halmazát, a $\Lambda(J_k)$ kritérium súlyok halmazát és a hozzájuk tartozó $TC(J_k)$ összköltséget mutatják.

	$\Gamma(J_k)$	$\Lambda(J_k)$	$TC(J_k)$
J_1	$0.71 \leq \gamma_1 < 1$	$0.05 \leq \lambda_1 < 1$	$\lambda^T \begin{pmatrix} 1713600 & 1796400 \\ 10116 & 14220 \end{pmatrix} \gamma$
J_2	$0.46 \leq \gamma_1 < 1$	$0.17 \leq \lambda_1 < 1$	$\lambda^T \begin{pmatrix} 1713600 & 1796400 \\ 10116 & 14220 \end{pmatrix} \gamma$
J_3	$0.60 \leq \gamma_1 < 1$	$0.08 \leq \lambda_1 \leq 0.09$	$\lambda^T \begin{pmatrix} 1713600 & 1796400 \\ 10116 & 14220 \end{pmatrix} \gamma$
J_4	$0.60 \leq \gamma_1 < 1$	$0 < \lambda_1 \leq 0.02$	$\lambda^T \begin{pmatrix} 1750800 & 1827100 \\ 8052 & 12570 \end{pmatrix} \gamma$

4. táblázat. Potenciális optimális megoldások (Forrás: Shi és Haase (1996))

Az *5. és 6. táblázat* a bázismegoldások x_{ij} értékeit tartalmazzák. Mind a bázismegoldások x_{ij} értékei, mind pedig a $TC(J_k)$, $k = 1, 2, 3, 4$ összköltség a (γ, λ) paraméterpár függvénye, ahol $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ és $0 < \gamma_1, \gamma_2, \lambda_1, \lambda_2 < 1$.

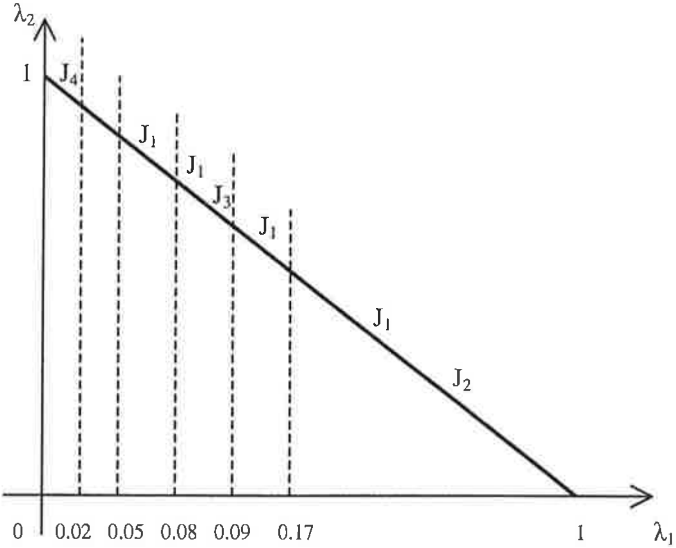
A potenciális optimális megoldások egymás közötti kicserélési lehetőségeinek vizsgálatát három szempont alapján végezzük el. Megvizsgáljuk, milyen kicserélési lehetőségek vannak a potenciális optimális megoldások között a célok vonatkozásában a termelési és raktározási költség tekintetében, a kapacitás-kereslet vonatkozásában a két döntéshozó által javasolt két különböző szintje között, valamint a termelési költség és az 1. döntéshozó által javasolt kapacitás- keresletszint között. Ezeken kívül további három vonatkozásban végezhető vizsgálat, de annak leírását az olvasóra bízzuk.

J_1			J_2		
x_{11}	=	$32\gamma_1 + 200\gamma_2$	x_{19}	=	$100\gamma_1 + 100\gamma_2$
x_{14}	=	$68\gamma_1 - 100\gamma_2$	x_{21}	=	$780\gamma_1 + 800\gamma_2$
x_{21}	=	$800\gamma_1 + 900\gamma_2$	x_{22}	=	$20\gamma_1 + 100\gamma_2$
x_{31}	=	$268\gamma_1 + 100\gamma_2$	x_{31}	=	$320\gamma_1 + 400\gamma_2$
$x_{3,13}$	=	$52\gamma_1 + 300\gamma_2$	x_{42}	=	$176\gamma_1 - 100\gamma_2$
x_{42}	=	$196\gamma_1$	x_{43}	=	$192\gamma_1 + 350\gamma_2$
x_{43}	=	$240\gamma_1 + 150\gamma_2$	x_{44}	=	$392\gamma_1 + 350\gamma_2$
x_{45}	=	$324\gamma_1 + 450\gamma_2$	x_{52}	=	$304\gamma_1 + 400\gamma_2$
x_{52}	=	$304\gamma_1 + 400\gamma_2$	x_{63}	=	$840\gamma_1 + 800\gamma_2$
x_{63}	=	$840\gamma_1 + 800\gamma_2$	x_{73}	=	$168\gamma_1 + 350\gamma_2$
x_{73}	=	$120\gamma_1 + 550\gamma_2$	$x_{7,13}$	=	$168\gamma_1 + 70\gamma_2$
$x_{7,13}$	=	$216\gamma_1 - 130\gamma_2$	x_{84}	=	$556\gamma_1 + 250\gamma_2$
x_{84}	=	$880\gamma_1 + 700\gamma_2$	x_{85}	=	$324\gamma_1 + 450\gamma_2$
x_{94}	=	$352\gamma_1 + 400\gamma_2$	x_{94}	=	$352\gamma_1 + 400\gamma_2$
$x_{10,5}$	=	$840\gamma_1 + 800\gamma_2$	$x_{10,5}$	=	$840\gamma_1 + 800\gamma_2$
$x_{11,5}$	=	$336\gamma_1 + 350\gamma_2$	$x_{11,5}$	=	$336\gamma_1 + 350\gamma_2$
$x_{12,6}$	=	$800\gamma_1 + 770\gamma_2$	$x_{12,6}$	=	$800\gamma_1 + 770\gamma_2$
$x_{13,6}$	=	$200\gamma_1 + 130\gamma_2$	$x_{13,6}$	=	$200\gamma_1 + 130\gamma_2$
$x_{13,13}$	=	$120\gamma_1 + 210\gamma_2$	$x_{13,13}$	=	$120\gamma_1 + 210\gamma_2$
$x_{14,7}$	=	$732\gamma_1 + 340\gamma_2$	$x_{14,7}$	=	$604\gamma_1 + 620\gamma_2$
$x_{14,12}$	=	$68\gamma_1 + 430\gamma_2$	$x_{14,8}$	=	$196\gamma_1 + 150\gamma_2$
$x_{15,7}$	=	$68\gamma_1 + 560\gamma_2$	$x_{15,7}$	=	$196\gamma_1 + 280\gamma_2$
$x_{15,13}$	=	$252\gamma_1 - 220\gamma_2$	$x_{15,13}$	=	$124\gamma_1 + 60\gamma_2$
$x_{16,8}$	=	$388\gamma_1 + 580\gamma_2$	$x_{16,9}$	=	$216\gamma_1 - 130\gamma_2$
$x_{16,9}$	=	$160\gamma_1 + 100\gamma_2$	$x_{16,10}$	=	$320\gamma_1 + 480\gamma_2$
$x_{16,12}$	=	$212\gamma_1 + 20\gamma_2$	$x_{16,11}$	=	$224\gamma_1 + 350\gamma_2$
$x_{17,8}$	=	$112\gamma_1 - 130\gamma_2$	$x_{17,8}$	=	$304\gamma_1 + 300\gamma_2$
$x_{17,11}$	=	$192\gamma_1 + 40\gamma_2$	$x_{18,9}$	=	$684\gamma_1 + 930\gamma_2$
$x_{18,9}$	=	$840\gamma_1 + 800\gamma_2$	$x_{18,12}$	=	$156\gamma_1 - 130\gamma_2$
$x_{19,13}$	=	$336\gamma_1 + 350\gamma_2$	$x_{19,13}$	=	$336\gamma_1 + 350\gamma_2$
$x_{20,10}$	=	$848\gamma_1 + 900\gamma_2$	$x_{20,10}$	=	$880\gamma_1 + 820\gamma_2$
$x_{20,11}$	=	$32\gamma_1 - 80\gamma_2$	$x_{21,12}$	=	$352\gamma_1 + 400\gamma_2$
$x_{21,10}$	=	$352\gamma_1 + 40\gamma_2$	$x_{22,11}$	=	$840\gamma_1 + 800\gamma_2$
$x_{22,11}$	=	$840\gamma_1 + 800\gamma_2$	$x_{23,11}$	=	$336\gamma_1 + 350\gamma_2$
$x_{23,11}$	=	$336\gamma_1 + 350\gamma_2$	$x_{24,12}$	=	$800\gamma_1 + 750\gamma_2$
$x_{24,12}$	=	$800\gamma_1 + 750\gamma_2$	$x_{25,12}$	=	$92\gamma_1 + 480\gamma_2$
$x_{25,12}$	=	$320\gamma_1 + 300\gamma_2$	$x_{25,13}$	=	$228\gamma_1 - 180\gamma_2$

5. táblázat: A J_1 és J_2 bázishoz tartozó potenciális optimális megoldások (Forrás: Shi és Haase (1996))

J_3			J_4		
x_{16}	$=$	$100\gamma_1 + 100\gamma_2$	$x_{1,13}$	$=$	$100\gamma_1 + 100\gamma_2$
x_{21}	$=$	$800\gamma_1 + 900\gamma_2$	x_{21}	$=$	$800\gamma_1 + 900\gamma_2$
x_{31}	$=$	$300\gamma_1 + 300\gamma_2$	x_{31}	$=$	$300\gamma_1 + 300\gamma_2$
$x_{3,13}$	$=$	$20\gamma_1 + 100\gamma_2$	$x_{3,13}$	$=$	$20\gamma_1 + 100\gamma_2$
x_{42}	$=$	$344\gamma_1 - 30\gamma_2$	x_{42}	$=$	$344\gamma_1 - 30\gamma_2$
x_{43}	$=$	$24\gamma_1 + 280\gamma_2$	x_{43}	$=$	$24\gamma_1 + 280\gamma_2$
x_{44}	$=$	$68\gamma_1 - 100\gamma_2$	x_{44}	$=$	$68\gamma_1 - 100\gamma_2$
x_{45}	$=$	$324\gamma_1 + 450\gamma_2$	x_{45}	$=$	$324\gamma_1 + 450\gamma_2$
x_{52}	$=$	$156\gamma_1 + 430\gamma_2$	x_{52}	$=$	$156\gamma_1 + 430\gamma_2$
$x_{5,13}$	$=$	$148\gamma_1 - 30\gamma_2$	$x_{5,13}$	$=$	$148\gamma_1 - 30\gamma_2$
x_{63}	$=$	$840\gamma_1 + 800\gamma_2$	x_{63}	$=$	$840\gamma_1 + 800\gamma_2$
x_{73}	$=$	$336\gamma_1 + 420\gamma_2$	x_{73}	$=$	$336\gamma_1 + 420\gamma_2$
x_{84}	$=$	$880\gamma_1 + 700\gamma_2$	x_{84}	$=$	$880\gamma_1 + 700\gamma_2$
x_{94}	$=$	$352\gamma_1 + 400\gamma_2$	x_{94}	$=$	$352\gamma_1 + 400\gamma_2$
$x_{10,5}$	$=$	$840\gamma_1 + 800\gamma_2$	$x_{10,5}$	$=$	$840\gamma_1 + 800\gamma_2$
$x_{11,5}$	$=$	$336\gamma_1 + 350\gamma_2$	$x_{11,5}$	$=$	$336\gamma_1 + 350\gamma_2$
$x_{12,6}$	$=$	$800\gamma_1 + 770\gamma_2$	$x_{12,6}$	$=$	$800\gamma_1 + 770\gamma_2$
$x_{13,6}$	$=$	$100\gamma_1 + 30\gamma_2$	$x_{13,6}$	$=$	$200\gamma_1 + 130\gamma_2$
$x_{13,13}$	$=$	$220\gamma_1 + 310\gamma_2$	$x_{13,13}$	$=$	$120\gamma_1 + 210\gamma_2$
$x_{14,7}$	$=$	$480\gamma_1 + 560\gamma_2$	$x_{14,7}$	$=$	$480\gamma_1 + 560\gamma_2$
$x_{14,8}$	$=$	$36\gamma_1 + 380\gamma_2$	$x_{14,13}$	$=$	$320\gamma_1 + 210\gamma_2$
$x_{14,13}$	$=$	$284\gamma_1 - 170\gamma_2$	$x_{15,7}$	$=$	$320\gamma_1 + 340\gamma_2$
$x_{15,7}$	$=$	$320\gamma_1 + 340\gamma_2$	$x_{16,8}$	$=$	$500\gamma_1 + 450\gamma_2$
$x_{16,8}$	$=$	$464\gamma_1 + 70\gamma_2$	$x_{16,10}$	$=$	$72\gamma_1 + 280\gamma_2$
$x_{16,10}$	$=$	$72\gamma_1 + 280\gamma_2$	$x_{16,11}$	$=$	$188\gamma_1 - 30\gamma_2$
$x_{16,11}$	$=$	$224\gamma_1 + 350\gamma_2$	$x_{17,11}$	$=$	$36\gamma_1 + 380\gamma_2$
$x_{17,13}$	$=$	$304\gamma_1 + 300\gamma_2$	$x_{17,13}$	$=$	$268\gamma_1 - 80\gamma_2$
$x_{18,9}$	$=$	$664\gamma_1 + 550\gamma_2$	$x_{18,9}$	$=$	$664\gamma_1 + 550\gamma_2$
$x_{18,10}$	$=$	$176\gamma_1 + 250\gamma_2$	$x_{18,10}$	$=$	$176\gamma_1 + 250\gamma_2$
$x_{19,9}$	$=$	$336\gamma_1 + 350\gamma_2$	$x_{19,9}$	$=$	$336\gamma_1 + 350\gamma_2$
$x_{20,10}$	$=$	$600\gamma_1 + 370\gamma_2$	$x_{20,10}$	$=$	$600\gamma_1 + 370\gamma_2$
$x_{20,12}$	$=$	$280\gamma_1 + 450\gamma_2$	$x_{20,12}$	$=$	$280\gamma_1 + 450\gamma_2$
$x_{21,10}$	$=$	$352\gamma_1 + 400\gamma_2$	$x_{21,10}$	$=$	$352\gamma_1 + 400\gamma_2$
$x_{22,11}$	$=$	$840\gamma_1 + 800\gamma_2$	$x_{22,11}$	$=$	$840\gamma_1 + 800\gamma_2$
$x_{23,12}$	$=$	$336\gamma_1 + 350\gamma_2$	$x_{23,12}$	$=$	$336\gamma_1 + 350\gamma_2$
$x_{24,12}$	$=$	$800\gamma_1 + 750\gamma_2$	$x_{24,12}$	$=$	$800\gamma_1 + 750\gamma_2$
$x_{25,12}$	$=$	$320\gamma_1 + 300\gamma_2$	$x_{25,12}$	$=$	$320\gamma_1 + 300\gamma_2$

6. táblázat: A J_3 és J_4 bázishoz tartozó potenciális optimális megoldások
(Forrás: Shi és Haase (1996))

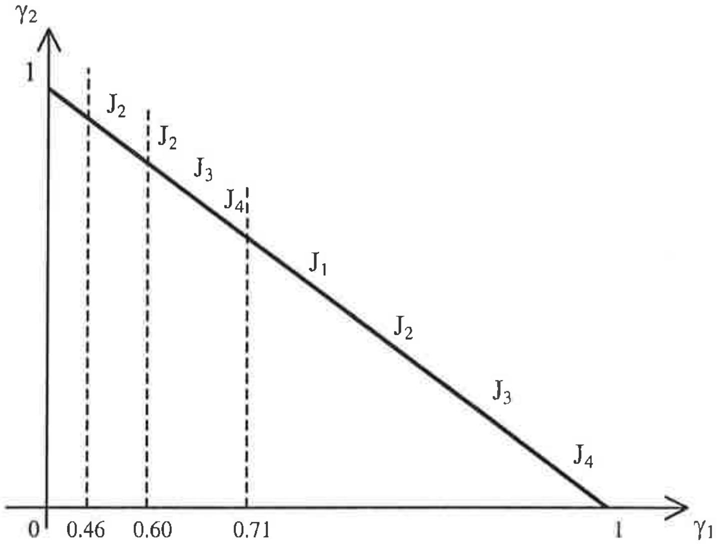


1. ábra. Termelési költség (λ_1) versus raktározási költség (λ_2) (Forrás: Shi és Haase (1996))

Mivel négy potenciális optimális megoldás van, $\{J_1, J_2, J_3, J_4\}$, a kicserélési lehetőségeket ezek segítségével írjuk le. A két cél, a termelési költség (λ_1) és a raktározási költség (λ_2) közötti kicserélési viszonyok:

- Ha $0 < \lambda_1 \leq 0.02$, akkor J_4 az optimális termelési terv.
- Ha $0.02 < \lambda_1 \leq 0.05$, akkor nincs optimális termelési terv.
- Ha $0.05 < \lambda_1 \leq 0.08$, akkor J_1 az optimális termelési terv.
- Ha $0.08 < \lambda_1 \leq 0.09$, akkor J_1 és J_3 az optimális termelési terv.
- Ha $0.09 < \lambda_1 \leq 0.17$, akkor J_1 az optimális termelési terv.
- Ha $0.17 < \lambda_1 \leq 1$, akkor J_1 és J_2 az optimális termelési terv.

A célfüggvény-együtthatók grafikus megjelenítése látható az 1. ábrán. Ha a vastagon rajzolt vonalon választjuk a termelési költség λ_1 és a raktározási költség λ_2 súlyát, akkor a megfelelő szakasz fölé írt potenciális optimális megoldáshoz jutunk, vagy nincs optimális megoldás, a választástól függően. A következőkben a két kapacitás-keresletszint, (γ_1) és (γ_2) közötti kicserélési viszonyokat vizsgáljuk.

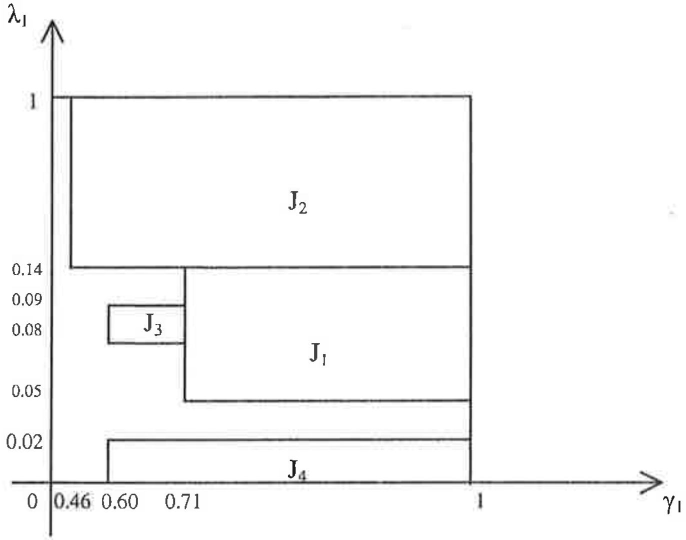


2. ábra: Az első és második kapacitás-keresletszint kapcsolata (Forrás: Shi és Haase (1996))

- Ha $0 < \gamma_1 \leq 0.46$, akkor nincs optimális termelési terv.
- Ha $0.46 < \gamma_1 \leq 0.60$, akkor J_2 az optimális termelési terv.
- Ha $0.60 < \gamma_1 \leq 0.71$, akkor J_2, J_3 és J_4 az optimális termelési terv.
- Ha $0.71 < \gamma_1 \leq 1$, akkor J_1, J_2, J_3 és J_4 az optimális termelési terv.

A két kapacitás-keresletszint együtthatóinak grafikus megjelenítése a *2. ábrán* látható. Ha a γ_1 és γ_2 súlyokat a vastagon kihúzott vonalon választjuk, és a megfelelő kapacitás-keresletszinteket ezekkel súlyozzuk, akkor a megfelelő szakasz fölé írt potenciális optimális megoldáshoz jutunk, vagy nincs optimális megoldás, a választástól függően.

A termelési költség (λ_1) és az első vezető által preferált kapacitás- és keresletszint (γ_1) közötti kicserélési kapcsolat viszonyai láthatók a *3. ábrán*. Ha a (γ_1, λ_1) paraméterpár értékeit a J_1, J_2, J_3 vagy J_4 jelek valamelyikével jelölt $\Gamma(J_k) \times \Lambda(J_k)$, $k = 1, 2, 3, 4$ halmazokon választjuk, akkor van potenciális optimális termelési terv, egyébként pedig nincs optimális megoldás. További három kicserélési lehetőség vizsgálatát kínálja a két célfüggvény és a két kapacitás- és keresletszint közötti kapcsolat. A 3. ábrához hasonló módon lehet képet kapni a termelési költség (λ_1) és a második kapacitás- és keresletszint (γ_2), a raktározási költség (λ_2) és az első kapacitás- és keresletszint (γ_1), valamint a raktározási költség (λ_2) és a második kapacitás- és keresletszint (γ_2) kicserélési kapcsolatáról.



3. ábra: Az első kapacitás-keresletszint és a termelési költség kapcsolata (Forrás: Shi és Haase (1996))

7 Összefoglalás

A dolgozatban bemutattunk egy modellt, mely az aggregált termeléstervezés problémájának megoldására szolgál olyan gazdasági környezetben, amikor feltételezzük, hogy a keresleti szintek szezonális vagy egyéb okból fakadóan fluktuálnak, és az egyes alternatívákat több kritérium alapján értékeljük. A probléma megoldására a mátrix programozás és az MC^2 programozás elméleti kereteit használtuk fel. A megoldó algoritmus a szállítási feladat több célfüggvény, több kapacitás-keresletszint irányú kiterjesztése révén született. A megoldás egy rendszerezett áttekintést szolgáltat az értékelő kritériumok, valamint a kapacitás- és keresletszintek súlyaitól függő összes potenciális optimális aggregált termelési tervről. A potenciális optimális megoldások és azok kicserélési lehetőségei széles mozgásteret biztosítanak a döntéshozónak az adott gazdasági környezethez igazodó optimális aggregált termelési terv kialakításához, vagy az aktuális termelési terv menet közbeni módosításához.

Köszönetnyilvánítás

Végül szeretnék köszönetet mondani Vörös Józsefnek, a Pécsi Tudományegyetem professzorának, a dolgozat elkészítése során nyújtott értékes instrukcióiért.

Irodalom

1. Bergstrom, G. L. and B. E. Smith, Multi-item Production Planning – An Extension of the HMMS Rules, *Management Science*, 16, 1970, B614-629.
2. Bitran, G. R. and A. C. Hax, On the Decision of Hierarchical Production Planning Systems, *Decision Sciences*, 8, 1977, 28-55.
3. Bowman, E. H., Consistency and Optimality in Managerial Decision Making, *Management Science*, 9, 1963, 310-321.
4. Bowman, E. H., Production Scheduling by the Transportation Method of Linear Programming, *Operations Research*, 4, 1956, 100-103.
5. Brown, R. G., *Decision Rules for Inventory Management*, Dryden Press, Hinsdale, Illinois, 1967.
6. Buffa, E. S., *Modern Production Management* (2nd ed.), Wiley and Sons, New York, 1965.
7. Charnes, A. and W. W. Cooper, *Management Models and Industrial Applications of Linear Programming*, Wiley and Sons, New York, 1962.
8. Chien, I. S., Y. Shi and P. L. Yu, MC^2 Program: *A Pascal Program Run on PC or VAX* (revised version), Unpublished Computer Software, School of Business, University of Kansas, 1989.
9. Current, J. and H. Min, Multiobjective Design of Transportation Networks: Taxonomy and Annotation, *European Journal of Operational Research*, 26, 1986, 187-201.
10. Dantzig, G. B., *Linear Programming and Extensions*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1963.
11. Davidson, P. and E. Smolensky, *Aggregate Supply and Demand Analysis*, Harper and Row, New York, 1964.
12. Gale, D., H. W. Kuhn, and A. W. Tucker, Linear Programming and the Theory of Games, in T. C. Koopmans (ed.), *Activity Analysis of Production and Allocation*, John Wiley and Sons, New York, 1951, 317-329.
13. Goodman, D. A., A Goal Programming Approach to Aggregate Planing of Production and Work Force, *Management Science*, 20, 1974, 1569-1579.
14. Gyetván, F. and Y. Shi, Weak Duality Theorem and Complementary Slackness Theorem for Linear Matrix Programming Problems, *Operations Research Letters*, 11, 1992, 249-252.
15. Gyetván, F., Dualitás a mátrixmaximum és a vektormaximum problémánál és azok kapcsolata, *Alkalmazott Matematikai Lapok* 14, 1989, 377-387.
16. Haase, C. and Y. Shi, *TPMC2 Program: ANSI Program for IBM and Compatible PC Running on UNIX Machine*, Unpublished Computer Software, College of Business Administration, University of Nebraska-Omaha, 1994.
17. Heizer, J. and B. Render, *Production and Operations Management* (3-rd ed.), Allyn and Bacon, Boston, Massachusetts, 1993.
18. Henderson, H. D., *Supply and Demand*, Harcourt Brace Jovanovich, New York, 1922.
19. Holt, C. C., F. Modigliani, J. F. Muth and H. F. Simon, *Planing Production Inventories and Work Force*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1960.
20. Hwang, C. L. and M. J. Lin, *Group Decision Making under Multiple Criteria: Methods and Applications*, Springer-Verlag, Heidelberg, Germany, 1987.

21. Keynes, J. M., *The General Theory of Employment, Interest and Money*, Harcourt Brace Jovanovich, New York, 1938.

22. Lee, S. M., *Goal Programming for Decision Making*, Auerbach, Philadelphia, Pennsylvania, 1972.

23. Lee, Y. R., Y. Shi and P. L. Yu, Linear Optimal Designs and Contingency Plans, *Management Science*, 36, 1990, 1106-1119.

24. Menipaz, E., *Essentials of Production and Operations Management*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1984.

25. Nagasawa, H., N. Nishiyama and K. Hitomi, Decision Analysis for Determining the Optimum Planning Horizon in Aggregate Production Planning, *International Journal of Production Research*, 20, 1982, 243-254.

26. Oliff, M. D. and G. K. Leong, A Discrete Production Switching Rule for Aggregate Planning, *Decision Sciences*, 18, 1987, 582-597.

27. Phelps, D. M., *Planning and Products*, Irwin, Chicago, Illinois, 1947.

28. Saad, G., An Overview of Production Planning Models: Structural Classification and Empirical Assessment, *International Journal of Production Research*, 20, 1982, 105-114.

29. Seiford, L. and P. L. Yu, Potential Solutions of Linear Systems: The Multicriteria Multiple Constraint Level Program, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 69, 1979, 283-303.

30. Shi, Y. and C. Haase, Optimal Trade-offs of Aggregate Production Planning With Multi-Objective and Multi-Capacity-Demand Levels, *International Journal of Operations and Quantitative Management*, 2, 1996, 127-143.

31. Shi, Y. and P. L. Yu, Selecting Optimal Linear Production Systems in Multiple Criteria Environments, *Computer and Operations Research*, 19, 1992, 585-608.

32. Shi, Y., A Transportation Model with Multiple Criteria and Multiple Constraint Levels, *Mathematical and Computer Modelling*, 21, 1995, 13-28.

33. Singhal, K. and V. Adlakha, Cost and Shortage Trade-offs in Aggregate Production Planning, *Decision Sciences* 20, 1989, 158-165.

34. Starr, M. K., *Management Production and Operations*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1989.

35. Vergin, R. C., Production Scheduling under Seasonal Demand, *Journal of the Industrial Engineering*, 17, 1966, 260-266.

36. Vörös, J., *Termelés management*, Harmadik kiadás, Janus Pannonius Egyetemi Kiadó, Pécs, 1998.

37. Vörös, J., *Termelési-szolgáltatási rendszerek vezetése*, Janus Pannonius Egyetemi Kiadó, Pécs, 1999.

38. Yu, P. L. and M. Zeleny, The Set of All Nondominated Solutions in the Linear Cases and A Multicriteria Simplex Method, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 49, 1975, 430-458.

39. Yu, P. L., *Multiple Criteria Decision Making: Concepts, Techniques and Extensions*, Plenum, New York, 1985.

40. Zeleny, M., *Linear Multiobjective Programming*, Springer-Verlag, New York, 1974.

41. Zeleny, M., Trade-Off-Free Management via De Novo Programming, *International Journal of Operations and Quantitative Management*, 1, 1995, 3-13.

THE POSSIBILITY OF APPLICATION OF MC^2 PROGRAMMING IN THE AGGREGATE PRODUCTION PLANNING

This paper gives a summary of aggregate production planning with multiple objective and multiple capacity-demand levels, using matrix programming and MC^2 (Multi-Criteria and Multi-Constraint level) linear programming. The model provides a scenario about all possible potential optimal solution of aggregate production planning, depending on parameters (as weights) of multiple capacity-demand levels and multiple criteria. These potential optimal production plans provide a basis for managers to consider the consequences of possible fluctuations in capacity and demand data.