RELATÍV DEPRIVÁCIÓ ÉS SZEGÉNYSÉG
A szegénység depriváltságérzékeny mérése

HAJDU OTTÓ
Budapesti Közgazdaságtudományi Egyetem

1. Bevezetés

Mivel a szegénység ~~nemcsak~~ az egyének, hanem a társadalom számára is teher, ezért a ~~jövedelmi~~ eloszlás számszerű jellemzése során megkülönböztetett figyelmet kell szentelnünk a szegénység társadalmi szintű mértékének és összetevőinek (kiterjedtségének, intenzitásának, struktúrájának), valamint a szegénység időbeli, területi, társadalmi rétegek, családtípusok stb. szerinti összehasonlításának is. További kérdések, hogy a szegénység jelenléte milyen mértékben csökkenti a társadalmi jólétet, illetve, hogy a szegénység eliminálása mekkora erőfeszítést igényelne a társadalomtól. A szegénység egzakt jellemzése tehát tömör, "beszédes" jelzőszámok használatát is igényli, amely mértékek a szegények létszámaránya és átlagos jövedelmi szintje mellett a jövedelmi eloszlás struktúráját, a jövedelmek szóródását is figyelembe kell, hogy vegyék. Alapvető követelmény, hogy egy ilyen jelzőszám érzékeny legyen a szegények jövedelmeinek az egymáshoz való viszonyában történt elmozdulásokra, s így a szegények által a kevésbé szegények körével szemben érzett relatív depriváltság változására is.[1] Megközelítéstől függően azonban korántsem egyértelmű, hogy a szegények jövedelmi struktúrájának a megváltozása a relatív depriváltságot növelő, vagy csökkentő jellegű. A szerző idézett tanulmányában ugyanis rámutatott, hogy bizonyos helyzetekben a *mindenki máshoz* való viszonylatban értelmezett *egyenlőtlenséget* egyértelműen növelő strukturális változás mellett a társadalmi szintű, de csak egy szűkebb referencia csoporttal szemben értelmezett relatív depriváltság *globális* érzete csökkenhet. Definiálhatunk tehát relatív deprivációs mérőszámot, mely adott szituációban együtt mozog az egyenlőtlenségi mértékkel, és másikat, mely ugyanabban a szituációban — elvileg helyesen — *ellentétesen* alakul. A relatív depriváltságra érzékeny szegénységi index tehát konfliktusba kerülhet az

[1] A relatív depriváció érzete egy referencia csoporttal való összehasonlításban, adott javaktól való megfosztottságból ered. Ismérvei a későbbiekben ismertetésre kerülnek. Fogalmát részletesen lásd Hajdu(1996).

egyenlőtlenségérzékeny követelményekkel attól függően, hogy milyen típusú deprivációs mérőszámot alkalmazunk a szegények jövedelmi szóródásának a jellemzésére. A tanulmány célja, hogy a szegénység számszerűsítését szolgáló statisztikai mérőszámok konstruálásának módszereit, elvi, axiomatikus megalapozását rendszerbe foglalva — a relatív deprivációra való érzékenység újszerű megközelítésére építve — bővítse a rendelkezésre álló mérőszámok körét. Ennek megfelelően a tanulmány elsőként áttekinti a szegénységi mérőszámokkal szemben támasztott általános követelményeket, majd a mutatószámok szerkesztésének elveit keretbe foglalva, egy újszerű axiómából kiindulva néhány újólag bevezetett szegénységi indexet illeszt e keretbe.

2. Az általános szegénységi mérték

A szegénység *átfogó*, társadalmi szintű mérése egy *identifikálási* és egy *aggregálási* lépést foglal magában. Egyrészt ki kell jelölnünk a népességen belül a *szegényeket*, majd az így azonosított személyek egyedi szegénységi jellemzőit aggregálnunk kell egy tömör szegénységi *mérőszámban*.

Tekintsük az $i = 1, 2, ..., n$ személyből álló társadalmat, melyben az i egyén $Y_i \geq 0$ jövedelemmel rendelkezik, és a jövedelmekre vonatkozó rögzített k szegénységi küszöb valamennyiükre nézve adottság.[2] A szegények közé sorolunk ekkor minden olyan személyt, akinek a jövedelme nem haladja meg a szegénységi küszöböt. Ha a teljes népesség rendezett Y jövedelmi vektora

$$Y = (Y_1 \leq ... \leq Y_i \leq ... \leq Y_n)',$$

akkor a szegények körét a $\pi(Y, k)$ halmaz, röviden π, míg a szegények számát p jelöli:

$$i \in \pi(Y, k) \mid Y_i \leq k \quad (i = 1, ..., p).$$

Az *általános* szegénységi mérték a népesség Y jövedelemeloszlásához adott k szegénységi küszöb mellett rendelt $P(Y, k)$ transzformáció, mely a szegénység szintjét egyetlen számértékkel hivatott mérni. Elvárásunk a szegénységi mutatóval szemben, hogy tükrözze a szegénység három fő összetevőjében, nevezetesen: (i) a szegénység *kiterjedtségében*, (ii) a szegénység *intenzitásában* és (iii) a szegények jövedelmi *szóródásában* bekövetkezett változásokat, miközben értéke zérus, ha nincsenek szegények a társadalomban, és 1, mikor a

[2] A szegénységi küszöb meghatározásának módszertani problémáival e tanulmány nem foglalkozik, ezért túllépve e kérdésen az előre rögzített küszöbértéket adottnak feltételezzük. A következőkben tárgyalásra kerülő szegénységi mértékek esetében a szegényeket "objektív" jellegű módon e küszöbérték alapján különítjük el a nem szegényektől. Mindazonáltal leszögezzük, hogy teljesen objektív jellegű elhatárolás nem létezik.

társadalom minden tagjának a jövedelme zérus:

$$0 \leq P(Y,k) = f(p,n,\bar{Y}_\pi,\sigma_\pi) \leq 1 \tag{1}$$

ahol a p/n arány a szegénység kiterjedtségét, a szegények

$$\bar{Y}_\pi = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} Y_i$$

átlagos jövedelme pedig (a küszöbérték viszonylatában) a szegénység intenzitását jellemzi, míg σ_π a szegények jövedelmi eloszlásának a szóródását jellemző paraméter.[3]

A szegénységi mérőszámok viselkedésével szemben támasztott követelményeket *axiómák* formájában rögzítjük. Ezen axiómák olyan ésszerű elvárások, melyek nevezetes jövedelmi változások nyomán *ceteris paribus* a szegénységi mutató konzekvens növekedését, csökkenését, illetve szinten maradását követelik meg. A szakirodalomban kikristályosodott főbb axiómák az alábbiak.[4]

Anonimitási axióma: Ha az X jövedelemeloszlás az Y eloszlás permutációja, akkor $P(X,k) = P(Y,k)$ teljesüljön.

Népesség-szimmetria axióma: Ha két, vagy több azonos népességet egyesítünk, akkor a szegénység mértéke ne változzon.

Függetlenségi axióma:[5] A nem szegények jövedelmeiben történő olyan változások esetében, melyek a szegények körét és jövedelmeit nem érintik, a szegénységi mérőszám értéke ne változzon.

Szegényarány axióma: A szegénységi mérték vegye figyelembe a szegényeknek a népességen belüli részarányát.

Monotonitási axióma: Ceteris paribus, valamely szegény személy jövedelmében bekövetkezett csökkenésnek a szegénység mértékét növelnie kell.

Transzfer axióma: Ceteris paribus, valamely szegény jövedelméből adott nagyságot bármely másik, tőle gazdagabb személyhez átcsoportosítva, a szegénységi mértéknek növekednie kell.

Gyenge transzfer axióma: Ceteris paribus, valamely szegény jövedelméből adott nagyságot egy bármely tőle gazdagabb személyhez átcsoportosítva a szegénységi mértéknek növekednie kell, ha ez a transzfer közben nem csökkenti a szegények számát.

Transzferérzékenységi axióma: Ceteris paribus, valamely szegénytől egy tőle gazdagabbhoz történő, rögzített nagyságú jövedelmi transzfer hatására a

[3] A π alsó index a továbbiakban azt jelzi, hogy az adott jellemző a szegények körére vonatkozik.

[4] Az alábbiakban ismertetésre kerülő axiómák természetesen nem merítik ki az axiómák teljes körét, mivel egy újólag bevezetett szegénységi mérték létjogosultságát általában az adja, hogy valamilyen újszerű axiómának tesz eleget, vagyis axiómatikusan megalapozott.

[5] Eredetileg: "Focus axiom".

szegénységi indexben bekövetkezett növekménynek a transzfert adó jövedelmi szintjének növekedésével csökkennie kell.

Dezaggregálási axióma: Csoportokra bontott népesség esetén a szegénységi mérték a csoporton belüli szegénységi mértékek eredője legyen.

Látható, hogy a szegénységi, a monotonitási, a transzfer és a transzferérzékenységi axiómák az (1) általános követelmények megfelelői.

Annak az igénynek a teljesítését, hogy a P mérőszám egyidejűleg megfeleljen mind a szegényarány-, mind a függetlenségi axiómának, az Y jövedelmi eloszlás alkalmas "korrekciója" teszi lehetővé. E korrigálás két alapvető módja az eloszlás "*csonkolása*", illetve "*cenzorálása*".[6] A szegénységi küszöbnél csonkoltnak mondjuk az Y_π eloszlást, ha az Y_i jövedelmek közül csak a "k" küszöbnél nem nagyobb jövedelmeket vesszük figyelembe: $Y_\pi = (Y_1 \leq Y_2 \leq \ldots \leq Y_p)'$. Cenzoráltnak mondjuk ezzel szemben az y eloszlást, ha a "k" küszöbnél magasabb jövedelmeket magával a küszöbértékkel *helyettesítjük*:

$$y_i = \min(Y_i, k) \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{2}$$

Az általános P szegénységi mérőszámhoz rendelt konkrét formula vagy a csonkolt, vagy a cenzorált eloszlások használatán alapulhat. A csonkolt eloszlások használata esetén P explicite tartalmazza a szegények arányát, a cenzorált eloszlás viszont ezt implicite magában foglalja.

Míg a szegénység intenzitására való érzékenység követelményét a monotonitási, addig a *szóródásra* való érzékenységét a transzfer és a transzferérzékenységi axiómák rögzítik. Ez utóbbi axiómák ugyanis egy regresszív, tehát az egyenlőtlenséget növelő transzfer eredményeképpen a szegénységi index értékének a növekedését várják el különböző, a transzferben érintettek rangpozícióitól függő mértékben.[7]

3. Szegénység, jólét, depriváció, egyenlőtlenség

Rögzített k szegénységi küszöb mellett, valamely $i \in \pi$ személy jövedelmének a küszöbtől való

$$g_i = k - Y_i$$

eltérését szegénységi résnek nevezzük, amely réseket a rendezett eloszlásra vonatkozóan a $g = (g_1 \geq g_2 \geq \ldots \geq g_p)'$ vektorba foglaljuk. Mivel egy kiragadott személy szegénységét a küszöbtől való eltérésével — *abszolút* jellegű

[6] Az angol nyelvű terminológiában "truncated" és "censored distribution".

[7] Regresszív a jövedelmi transzfer, ha egy adott pozitív jövedelmi tételt valamely személytől egy másik, tőle gazdagabb egyénhez csoportosítunk át, növelve ezáltal közöttük az egyenlőtlenség mértékét.

deprivációjával — jellemezhetjük a legjobban, ezért g_i a szegénység aggregált mérése során alapvető jelentőséggel bír. Ha az egyedi szegénységi rések összegzése útján képezzük a $\sum_{i=1}^{p} g_i$ *aggregált* szegénységi rést, akkor e mutató arról tájékoztat, hogy mekkora összegű jövedelem szétosztásával lehetne valamennyi szegényt a küszöb szintjére emelni. E jövedelem egy szegényre jutó értékét az *átlagos* szegénységi rés számszerűsíti:

$$\bar{g} = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} g_i .$$

Az egyedi, aggregált és átlagos szegénységi rések vizsgálatán túlmenően ugyanakkor az is természetes, hogy valamely személy szegénysége nem ítélhető meg függetlenül attól, hogy mások mennyire szegények. Ugyanis adott szegénységi rés mellett is valakit relatíve szegényebbnek tarthatunk, ha az összes többi szegény az övénél kisebb, és kevésbé szegénynek, ha az övénél nagyobb rést kénytelen elviselni. A szegénység számszerűsítése tehát nemcsak az abszolút, hanem a *relatív* depriváltság figyelembevételét is igényli.[8]

A relatív deprivációs megközelítés lényege, hogy az egyének nem a társadalom egészéhez, hanem inkább valamely *referencia* csoporthoz viszonyítják magukat. Ha a relatív depriváció tárgya magának a jövedelemnek egy szintje, akkor az i személy deprivált minden olyan j egyénnel szemben, aki legalább Y_i jövedelmet birtokol.[9] Ezt a relációt a későbbiekben az

$$i \preceq (j \neq i) \mid Y_i \leq Y_j \tag{3}$$

szimbólum jelöli. A "referencia" csoport rögzítése után a szegények relatív depriváltságának számszerű jellemzésére többféle mód is kínálkozik.

A *jóléti* alapú megközelítés szerint a szegények ***aktuális***, aggregált R_π relatív depriváltsága a W_π aggregált jólétüknek – az adott összjövedelmük mellett – *maximálisan* elérhető $W_{\pi_{\max}}$ jóléti szinttől való elmaradása:[10]

$$R_\pi = W_{\pi_{\max}} - W_\pi . \tag{4}$$

A szegények jövedelmi egyenlőtlenségét a *Dalton* nevéhez fűződő

$$D_\pi = 1 - \frac{W_\pi}{W_{\pi_{\max}}} . \tag{5}$$

[8] A relatív depriváció az egyenlőtlenségnél tágabb jelenség, melynek érzete adott jószágtól való megfosztottságból fakad. Ennek *Runciman*-féle kritériumai a következők: (1) nem rendelkezik az illető jószággal, (2) más személyeket lát, akik ennek birtokában vannak, (3) birtokolni akarja ezt a jószágot, (4) megvalósíthatónak tartja, hogy e jószág birtokába jusson.

[9] A jelen idejű öndepriváltságot nem értelmezzük, vagyis $i \neq j$, és az azonos jövedelműekkel szembeni depriváltság mértéke zérus.

[10] Ez természetesen egy feltételes maximum, hiszen a szegények által elérhető feltétel nélküli maximális jólétet a minden szegénynek a k küszöbértéket juttató elosztás nyújtja. Az (4) általánosítás az alábbiakban ismertetésre kerülő Yitzhaki-féle mérték kiterjesztése.

mutatóval mérve a szegények relatív depriváltságára

$$R_\pi = W_{\pi_{\max}} D_\pi \tag{6}$$

adódik, ahol az aggregált relatív depriváltságot és jólétet a szegények D_π jövedelmi egyenlőtlenségének a függvényében definiáltuk. Ha az aggregált relatív depriváltságot ily módon származtatjuk, és $W_{\pi_{\max}}$ *invariáns* a regresszív jövedelmi transzferre, akkor valamely szegénytől egy kevésbé szegényhez átcsoportosított $d > 0$ jövedelmi transzfer mindig növeli R_π értékét, hiszen az egyenlőtlenség foka nő.

Tekintsük a $W(Y)$ jóléti függvények azon körét, amelyekre – adott $\sum_{i=1}^{p} Y_i$ összjövedelem mellett – $W(Y_\pi)$ a jövedelmek zérus egyenlőtlensége esetén veszi fel maximumát, vagyis a szegények rendelkezésre álló összjövedelmének egyenletes, mindenkinek az átlagos $\bar{Y}_\pi$ szintet juttató elosztása *maximálja* a szegények aggregált jóléti szintjét.[11]

Fordítsuk figyelmünket elsőként a fenti körbe tartozó

$$W(Y_\pi) = W_\pi = \sum_{i=1}^{p} w_i Y_i$$

Gini-típusú jóléti függvény felé, ahol a jövedelmek nemcsökkenő sorba vannak rendezve, a hozzájuk csatolt w_i súlyok pedig nemnövekvők. Ha ugyanekkor a szegények jövedelmi egyenlőtlenségeit a G_π *Gini*-koefficienssel mérjük, akkor a szegények relatív deprivációjának *Yitzhaki*-féle aggregált mértéke az

$$R_\pi = \bar{Y}_\pi G_\pi$$

formát ölti,[12] ahol

$$0 \leq G_\pi = \frac{1}{2\bar{Y}_\pi p^2} \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} |Y_i - Y_j| \tag{7}$$

$$= 1 - \frac{\frac{1}{p^2} \sum_{i=1}^{p} (2p + 1 - 2i) Y_i}{\bar{Y}_\pi} \leq 1 - \frac{1}{p}. \tag{8}$$

Felhasználva továbbá ezen a ponton, hogy az $\bar{Y}_\pi G_\pi$ kifejezés invariáns a $g = k - Y$ transzformációra, a

$$\bar{g} G(g) = \bar{Y}_\pi G_\pi \tag{9}$$

azonosságot nyerjük, ahol $G(g)$ a szegénységi rések Gini-koefficiense. Mivel rögzített küszöbérték mellett $G(g)$ értékét a jövedelmek egyenlőtlensége és

[11] $W(\bar{Y}_\pi, \bar{Y}_\pi, \ldots, \bar{Y}_\pi) = \max$.

[12] A mérőszám tulajdonságait bővebben lásd Yitzhaki (1979).

az átlagos jövedelem befolyásolja, és egyező irányban, ezért $G(g)$ a relatív depriváció olyan mérőszáma, mely az $\bar{Y}_\pi$ jövedelmi szint növekedésével gyorsabban nő, mint $\bar{Y}_\pi G_\pi$.

Tételezzük fel ezt követően, hogy a szegények *aggregált* jólétét számszerűsítő W függvény a jövedelmek egyéni hasznosságainak az átlaga:

$$W(Y_\pi) = W_\pi = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} u(Y_i) \tag{10}$$

ahol $u(.)$ a jövedelem valamennyi szegényre *közös, konkáv*, legalább háromszor differenciálható hasznossági függvénye.[13] Ekkor a Dalton-mutatót *Atkinson* módszerével a *jövedelmi* skálára konvertálhatjuk feltéve, hogy létezik egy a W formulájától függő olyan konstans, *reprezentatív* $\bar{Y}_{W_\pi}$ jövedelmi szint, amelyre a szegények jövedelmi eloszlásának $W(Y_\pi)$ jóléti szintje változatlan marad, ha valamennyi szegény jövedelmét ezzel az értékkel helyettesítjük.[14] Ennek felhasználásával a szegények jövedelmi egyenlőtlenségét mérő Atkinson-mérőszám:

$$A_\pi = 1 - \frac{u^{-1}(W(Y_\pi))}{u^{-1}(u(\bar{Y}_\pi))} = 1 - \frac{\bar{Y}_{W_\pi}}{\bar{Y}_\pi} \tag{11}$$

ahol $u(.)$ konkávitása miatt $\bar{Y}_{W_\pi} \leq \bar{Y}_\pi$ és $\bar{Y}_{W_\pi}$ meghatározása a hasznossági függvény formulájának a definiálását igényli.[15] Természetesen az Atkinson-mutatót is alkalmazhatjuk a szegénységi résekre a relatív depriváltság jellemzése érdekében. Szem előtt tartva, hogy a jólét komplementereként értelmezendő szegénységi rés esetében az alacsonyabb rés preferálandó a magasabbal szemben, *negatív* egyenlőtlenség averzió mellett a relatív depriváció mértéke:

$$-A(g) = \frac{\bar{g}_W}{\bar{g}} - 1$$

ahol $\bar{g}_W \geq \bar{g}$ a reprezentatív szegénységi rés.[16]

A fentiekkel ellentétben, ha a relatív deprivációt egy *másik elv* szerint a

$$\bar{Q}_\pi = \frac{2}{p(p-1)} \sum_{i \preceq j \in \pi} \left(1 - \frac{Y_i}{Y_j}\right) \tag{12}$$

[13] $u' > 0, u'' < 0, u''' > 0$.

[14] $W(Y_1, Y_2, ... Y_p) = W(\bar{Y}_{W_\pi}, \bar{Y}_{W_\pi}, ..., \bar{Y}_{W_\pi})$.

[15] Bevezetve az egyenlőtlenséggel szembeni averzió ε paraméterét, az egyedi jövedelmek hasznosságának értékelésére Atkinson az $u(Y_i) = \frac{1}{1-\varepsilon} Y_i^{1-\varepsilon}$ függvényt javasolta, amelyből a szegények parametrikus reprezentatív jövedelme: $\bar{Y}_{W_\pi} = \left(\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} Y_i^{1-\varepsilon}\right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}$. Pozitív ε, vagyis konkáv haszonfüggvény esetében például $\bar{Y}_{W_\pi(\varepsilon=2)} = \bar{Y}_{\pi(harmonikus)}$.

[16] Ha az i szegény deprivációs függvénye $d(g_i) = \frac{1}{1-\varepsilon} g_i^{1-\varepsilon}$, akkor $\bar{g}_W = \left(\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} g_i^{1-\varepsilon}\right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}$ és $\varepsilon \leq 0$ egyenlőtlenséggel szembeni averzió mellett például $\bar{g}_{W(\varepsilon=-1)} = \bar{g}_{(quadratikus)} \geq \bar{g}_{W(\varepsilon=0)} = \bar{g}$.

deprivációs jövedelmi hányaddal mérjük, akkor $\bar{Q}_\pi$ az aggregált relatív depriváltság *csökkenését* is jelezheti olyan jövedelmi változások mellett, amelyek esetében a deprivációt csökkentő hatások az egyenlőtlenség *növekedése* ellenére túlszárnyalják a depriváltágot növelő hatásokat.[17]

A fentieket összegezve láthatóan eleget teszünk a transzfer axiómának, ha σ_π mérésére valamely, a transzfer axiómát kielégítő E_π egyenlőtlenségi mérőszámot, vagy valamely jóléti alapú (Yitzhaki-típusú) relatív deprivációs mutatót használjuk. Ha azonban a szegények jövedelmi eloszlásában végbement változást kifejezetten a *relatív depriváció* oldaláról kívánjuk jellemezni, akkor sem a monotonitási, sem a transzfer axiómák teljesülésének követelménye nem egyértelmű, mivel a szóródás növekedése ellenére a lecsökkent jövedelemmel szembeni, és a megnövekedett jövedelem által érzett depriváltság csökken, és ez adott körülmények között összességében túlszárnyalhatja az ellentétes hatást.[18] Ha ezt a jelenséget a szegénységi mértékben érvényesíteni akarjuk, akkor olyan R_π relatív deprivációs mérőszámot kell alkalmaznunk σ_π számszerűsítésekor, amely a fenti jelenségre érzékeny.

4. A szegénység aggregált jelzőszámai

A *szegények* $H = p/n$ *aránya* az össznépességen belül a legegyszerűbb mérőszám, mellyel a szegénység *kiterjedtségét* átfogóan jellemezhetjük.[19] A másik gyakran használt parciális szegénységi mutató a *relatív szegénységi rés*, mely az átlagos rés normált változataként arra ad választ, hogy a szegények jövedelmei átlagosan, a szegénységi küszöb százalékában kifejezve mennyire maradnak el magától a k küszöbértéktől:[20]

$$I = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}\frac{g_i}{k} = \frac{\bar{g}}{k} = 1 - \frac{\bar{Y}_\pi}{k} = 1 - \bar{r} \tag{13}$$

ahol

$$\bar{r} = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}\frac{Y_i}{k} = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} r_i \tag{14}$$

és r_i az i szegény *küszöbarányos jövedelme.*

I azt méri tehát, hogy a szegények mennyire szegények, vagyis a szegénység *intenzitásának* egyféle jellemzésére alkalmas.

[17] A mutatónak a relatív depriváció mérésében való bevezetését és e jelenségre való érzékenységének elemzését lásd Hajdu(1996).

[18] A regresszív transzferek problémájának a relatív depriváció oldaláról való közelítését lásd Hajdu(1996).

[19] "Head count ratio"

[20] "Income gap ratio"

A fentiekből kitűnik, hogy I és H olyan tulajdonságokkal rendelkeznek, amelynek a másik nem felel meg. Kézenfekvőnek látszik tehát a két mértéket valamilyen kombinációban alkalmazni. Abban a speciális esetben támaszkodhatunk pusztán e két mutatóra, ha valamennyi szegény jövedelme *egyenlő*. Ilyenkor az abszolút depriváció jellemzőjeként a szegénység fokmérője lehet önmagában a

$$H \cdot I = \frac{p}{n} \cdot \frac{\bar{g}}{k} \tag{15}$$

normalizált szegénységi rés.[21]

Amennyiben a szegények jövedelmei szóródnak, úgy a szegénység fenti két dimenziója mellett elengedhetetlen a szóródásnak a figyelembevétele is. Ilyen mutatók létrehozásakor — mint arra az előzőekben már utaltunk — a jövedelmi eloszlás kétféle *transzformációjával* biztosíthatjuk, hogy az általános szegénységi index egyidejűleg megfeleljen mind a szegényarány-, mind a függetlenségi axiómának:

- Egyrészt a *csonkolt* jövedelemeloszlás alkalmazásával, ha P csak a szegények szegénységi réseinek és a szegények arányának a függvénye:

$$P = f(H, g_i \mid i = 1, ..., p).$$

- Másrészt a *cenzorált* jövedelemeloszlás alkalmazásával, ha P az egész társadalom cenzorált jövedelmeinek a függvénye:

$$P = f(y_i \mid i = 1, ..., n).$$

Szóródásérzékeny szegénységi mérőszámokat ezután az alábbi főbb elvek alapján konstruálhatunk.

1. A csonkolt jövedelemeloszlásból kiindulva a szegénységi mértéket mint a szegénységi *rések normált, súlyozott összegét* definiáljuk:

$$P_\Sigma = N \sum_{i=1}^{p} w_i f(g_i) \tag{16}$$

ahol $g_1 \geq g_2 \geq ... \geq g_p$ és N a normálási faktor. Ez az eljárás a Sen-féle *háromlépés-eljárás*, amelynek során rögzíteni kell a w_i súlyrendszert, a szegénységi réseket kiértékelő $f(.)$ függvény formuláját, végül a normálási tényezőt. Mivel e három tényezőt úgy választjuk meg, hogy a

[21] E mutató értelme, hogy azon $n \cdot k$ jövedelemtömegnek, amely éppen elégséges a társadalom minden tagja számára biztosítani a küszöb szintjét, mekkora hányadát kellene a nem szegényektől a szegényekhez átcsoportosítani, hogy valamennyi szegény a küszöb szintjére emelkedjen.

szegénységi index megfeleljen az előre rögzített axiómáknak, ezért az ilyen típusú mutatókat axiómatikusan megalapozott mérőszámoknak nevezzük.

2. A csonkolt jövedelemeloszlásból kiindulva a másik lehetőség a szegénységi mértéket *szóródásérzékeny normalizált szegénységi résként* definiálni, mely akkor szóródásérzékeny, ha a relatív szegénységi rés szóródásérzékeny:[22]
$$P_{HI} = (HI)^{(\sigma)} = H \cdot I^{(\sigma)}. \tag{17}$$
A P_{HI} elv egyféle alkalmazását eredményezi, ha az $I^{(\sigma)}$ szóródásérzékeny relatív szegénységi rés nagysága egy $W(.)$ társadalmi jóléti függvény értékítéletén alapul: bevezetve a szegények által elérhető maximális jóléti szinthez viszonyító, minimális relatív jóléti rést számszerűsítő
$$I^{(W_{\max})} = 1 - \frac{W_{\pi_{\max}}}{u(k)} \tag{18}$$
mutatót, $H \cdot I^{(W_{\max})}$ a szegények relatív jólétében elérhető minimális veszteséget jelenti. A P_{HI} elv egyik alapvető megjelenési formája szerint a szegénységi mérték a H szegénységi aránynak és a $H \cdot I^{(W_{\max})}$ jóléti alapú normalizált szegénységi résnek a súlyozott átlaga, súlyként a szegények jövedelmi egyenlőtlenségének valamely $0 \leq E_\pi \leq 1$ mértékét és annak komplementerét használva:[23]
$$P_{H,HI} = \overline{H_{(E_\pi)}, (H \cdot I^{(W_{\max})})_{(1-E_\pi)}}. \tag{19}$$
Ha ez utóbbi elvben egyenlőtlenségi mértékként a Dalton-mutatót, az átlagoláshoz pedig számtani átlag formulát alkalmazunk, akkor a P_{HI} elv egy másik megjelenési formája szerint az $I^{(\sigma)}$ szóródásérzékeny relatív szegénységi rés nagysága a szegények tényleges relatív jóléti rését méri:
$$\begin{aligned} P_{HI^{(W)}} &= H \cdot D_\pi + H \cdot I^{(W_{\max})}(1 - D_\pi) && (20)\\ &= H\left(1 - \frac{W(Y_\pi)}{u(k)}\right) = H \cdot I^{(W)}. \end{aligned}$$
A $P_{HI^{(W)}}$ elvnek a jövedelmek skáláján értelmezett, a szegények reprezentatív jövedelmi szintjén alapuló megfelelője:
$$P_{HI_W} = H\left(1 - \frac{\bar{Y}_{W_\pi}}{k}\right) = H \cdot A_\pi + (H \cdot I)(1 - A_\pi). \tag{21}$$

[22] A szóródásérzékenységre a (σ) fölső index utal.

[23] Amennyiben az egyenlőtlenség nem a szegények jövedelmeire, hanem pl. a szegénységi résekre, vagy a cenzorált jövedelmekre vonatkozik, úgy ezt $E(.)$ argumentumában föltüntetjük: $E(g)$, illetve $E(y)$. Az átlagforma rögzítése nem szükségszerű, a fölülhúzás pedig az átlagolást jelenti.

A P_{HI} elv harmadik alapvető megjelenési formája szerint a szóródásérzékeny relatív szegénységi rés értékének a relatív szegénységi réséhez való relatív, konstans viszonyát a szegénységi rések egyenlőtlensége fejezi ki:

$$P_{HIg} = H \cdot I \cdot f(E(g)) \tag{22}$$

ahol $f(E(g)) > 1$.

3. A cenzorált jövedelemeloszlásból kiindulva egyrészt definiálhatjuk a szegénységi mértéket mint a *cenzorált jövedelmek egyenlőtlenségi indexét*:

$$P_{E(y)} = E(y). \tag{23}$$

4. Másrészt képezhetjük a szegénységi mutatót, mint a *cenzorált* jövedelmek *szóródásérzékeny relatív szegénységi rését*: (i) egyfelől a jóléti függvény skáláján, (ii) másfelől a jövedelmi skálán értelmezve. A *jóléti skálán* a

$$P_{I(W)} = I^{(W)}(y) = 1 - \frac{W(y)}{u(k)} \tag{24}$$

Dalton-típusú szegénységi indexet definiálhatjuk, mely a (10) típusú jóléti függvényt alkalmazva a

$$P_{I(W)} = I^{(W)}(y) = 1 - \frac{W(y)}{u(k)} = H \sum_{i=1}^{p} \frac{u(k) - u(Y_i)}{p \cdot u(k)}$$

formát ölti, s így a szegénységi aránynak és a szegények átlagos relatív jóléti résének a szorzata.[24] Ebben az értelemben jólétérzékeny normalizált szegénységi résként is interpretálható. A mutató alapgondolata abból fakad, hogy akkor nem beszélhetünk szegénységről, ha a cenzorált eloszlásban mindenkinek a jövedelme a *küszöbértékkel* egyenlő. Ezért a szegények jólétében bekövetkezett relatív *veszteséget* méri. A *jövedelmek skálájára* az *Atkinson* módszerrel áttérve

$$P_{I_W} = 1 - \frac{\overline{y}_W}{k} \tag{25}$$

adódik, ahol $\overline{y}_W$ a teljes cenzorált jövedelemeloszlásra vonatkozó reprezentatív jövedelem.[25] Ebben a megközelítésben tehát a szegénységi

[24] Ekkor ugyanis a cenzorált jövedelmekre $W(y) = \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{p} u(Y_i) + (n-p)u(k)\right]$ — definíció szerint —.

[25] Az egyedi cenzorált jövedelmek hasznosságát $\varepsilon \geq 0, \varepsilon \neq 1$ egyenlőtlenség averzió mellett az $u(Y_i) = \frac{1}{1-\varepsilon}(\min(k, Y_i))^{1-\varepsilon}$ formulával értékelve a szegénységi mértékek egy speciális csoportjához jutunk.

mérték a cenzorált jövedelmek jólétérzékeny relatív szegénységi rése.[26]

5. A Sen-féle szegénységi index

A szegénység mérésére kifejlesztett első komplex jellegű mérőszám, mely a relatív depriváció aspektusából közelíti meg a számszerűsítés problémáját. A Sen-indexet a szegénységi rések normált, súlyozott összegeként definiáljuk az $f(g_i)=g_i$, $w_i=(p+1-i)$ és $N = 2/[nk(p+1)]$ választással:[27]

$$P_{Sen} = \frac{2}{nk(p+1)} \sum_{i=1}^{p} (p+1-i) g_i. \tag{26}$$

ahol $g_1 \geq \ldots \geq g_i \geq \ldots \geq g_p$ és p a *legkevésbé szegény* rangszámát jelöli a szegénységi rangsorban. A Sen-index *a "rangsorolt relatív depriváció"* axiómáján nyugszik, miszerint a szegénységi résekhez csatolt súly megegyezik azon szegényeknek a számával, akiknek a jövedelme nem kisebb mint Y_i, vagyis a Runciman-féle referencia csoport számosságával. Az axióma mondanivalója, hogy minél szegényebb egy szegény, annál nagyobb súllyal vegyük számításba, s így a nagyobb súllyal magasabb személyes deprivációt tudunk kifejezésre juttatni. A *nemnövekvő* sorba rendezett g_i résekhez ugyancsak *nemnövekvő* w_i súlyokat rendelő súlyrendszer biztosítja, hogy a j szegénytől az i szegényhez átcsoportosított, a relatív depriváció Yitzhaki-mértékét növelő, de a szegények számát érintetlenül hagyó jövedelmi transzfer esetén P_{Sen} értéke is nő.

A normálási tényező fenti megválasztása biztosítja, hogy ha valamennyi szegény jövedelme egyenlő, akkor $P_{Sen} = H \cdot I$ teljesül. Ekkor ugyanis a szegények közti jövedelemegyenlőtlenség zérus, és a szegénység mértékéről a normalizált szegénységi rés kellően informál.

Fölhasználva a Gini-koefficiens értékét, a Sen-index egyszerű átalakítások után a

$$P_{Sen} = H\left(I + \frac{p(1-I)G_\pi}{p+1}\right) \approx$$

[26] Vegyük észre, hogy a cenzorált jövedelmek Atkinson-féle egyenlőtlenségi mértéke $A(y) = 1 - \bar{y}_W/\bar{y}$. A fentiek összevetéséből kiolvasható, hogy míg a P_{I_W} mérőszám a cenzorált reprezentatív jövedelemnek a szegénységi küszöbtől való százalékos elmaradását, addig a cenzorált jövedelmek $A(y)$ egyenlőtlenségi mértéke az átlagos cenzorált jövedelemtől való százalákos elmaradást számszerűsíti.

[27] Bár a Sen-indexet a szegénységi rések normált, súlyozott összegeként definiáljuk, megfelelő átalakítással a fenti elvek többségével levezethető. Mivel a tanulmányban ismertetésre kerülő újszerű indexeket is a Sen-mutató inspirálta, ezért e mérőszámot részletesen bemutatjuk.

$$H\left(I+(1-I)G_{\pi}\right)=H\left(I(1+\frac{G_{\pi}}{I}-G_{\pi})\right) \tag{27}$$

formát ölti.[28] P_{Sen} utóbbi képletéből kiolvashatjuk, hogy e mutató szerint a szegénység három fő összetevője: a szegények aránya (H), a szegénység intenzitása (I) és a szegények közötti egyenlőtlenség foka (G_{π}), ezért P_{Sen} (27) képletét ***komponensekre*** bontott formának hívjuk.

A komponensekre bontott forma átrendezésével nyerjük P_{Sen} *átlagformáját*, miszerint a Sen-index a szegénységi aránynak és a normalizált szegénységi résnek a súlyozott számtani átlaga, súlyként a Gini-koefficienst, és annak komplementerét használva:

$$P_{Sen}=(1-G_{\pi})HI+G_{\pi}H.$$

Ebből következően P_{Sen} alsó és felső határai:

$$HI\leq P_{Sen}\leq H.$$

A Sen-mérőszám a P_{HI} elvnek megfelelően a

$$P_{Sen}=H\cdot I_{Sen}^{(\sigma)}$$

formában is írható, az alábbi módokon.

- Egyrészt a (9) és (27) formulák alapján az

  $$I_{Sen}^{(\sigma)}=I\cdot(1+G(g))$$

  helyettesítéssel a P_{HI_g} elvnek megfelelően

  $$P_{Sen}=H\cdot I\cdot(1+G(g)) \tag{28}$$

  adódik, ahol $G(g)$ a szegénységi résekből számított Gini-koefficiens.[29] Ebben a formulában is szerepet kap természetesen a szegények egyenlőtlensége, számszerűsítésekor azonban nem a jövedelmek, hanem a szegénységi rések között mutatkozó egyenlőtlenséget mérjük. Más megközelítésben tehát a Sen-mérték a relatív depriváció fokát veszi figyelembe harmadik tényezőként a szegények aránya és a szegénység intenzitása mellett, ***multiplikatív*** kapcsolatot teremtve e ***komponensek*** között.[30]

[28] Lásd Amartya Sen(1976): 224-225. old.
[29] Egy másik levezetést lásd: Clark-Hemming-Ulph (1981): 519.old.
[30] Vagyis ez a forma is tekinthető komponensekre bontott formulának.

- Másrészt a P_{HI} elvet követve a

$$H \cdot I_{Sen}^{(\sigma)} = H\left(1 - \frac{\bar{Y}_{w_\pi}}{k}\right)$$

formula is a Sen-indexet eredményezi a $P_{HI(W)}$ elv alapján, ha

$$\bar{Y}_{w_\pi} = \frac{\sum_{i=1}^{p} w_i Y_i}{\sum_{i=1}^{p} w_i}.$$

Végül a szegények küszöbarányos $r_i = Y_i/k$ $(i = 1, ..., p)$ jövedelmeinek a felhasználásával, a Sen-index a

$$H \cdot I_{Sen}^{(\sigma)} = H(1 - \bar{r}_w)$$

formában is írható, ahol

$$\bar{r}_w = \frac{\bar{Y}_{w_\pi}}{k}$$

az *egységnyi szegénységi küszöbhöz* viszonyítandó (súlyozott) átlagos jövedelem.

A Sen-index eleget tesz a monotonitási és a *gyenge* transzfer axiómáknak, viszont sérti a transzfer és a transzferérzékenységi axiómákat. A szegénység mérésével foglalkozó nemzetközi irodalomban több kísérlet is történt olyan mutatók kidolgozására, amelyek a Sen-mérték módosítása révén annak valamely hiányosságát hivatottak kiküszöbölni. E mérőszámokat az 1. tábla közli.[31]

Láthatóan a Hagenaars-3 mutatónak a Thon-index speciális esete a $w_i = (n+1-i)/n$ súlyokkal, vagy pl. a Takayama-index a $w_i = (2n - 2i + 1)/n$ választással.

[31] E mutatókkal a tanulmányban nem foglalkozunk. Tulajdonságaikról, jellemzőikről részletesen lásd pl. Hajdu(1997).

1.tábla: Szegénységi mérőszámok

Mutató	Formula	Elv
Anand	$kP_{Sen}/\bar{Y}$	P_Σ
Thon	$\frac{2}{nk(n+1)}\sum_{i=1}^{p}(n+1-i)g_i$	P_Σ
Kakwani$_{(q)}$	$\frac{p}{nk\sum_{i=1}^{p} i^q}\sum_{i=1}^{p}(p+1-i)^q g_i$	P_Σ
robusztus	$H^{G_\pi}(HI)^{1-G_\pi} = HI^{1-G_\pi}$	$P_{H,HI}$
Blackorby et al.	$H(1-\frac{\bar{Y}_{W_\pi}}{k}) = A_\pi H + (1-A_\pi)HI$	P_{HI_W}
Clark et al.-1$_{(\varepsilon)}$	$HI\frac{\bar{g}_W}{\bar{g}} = HI(1-A(g \mid \varepsilon < 0))$	P_{HI_g}
Takayama	$G(y) = 1+\frac{1}{n}-\frac{2}{\bar{y}n^2}\sum_{i=1}^{n}(n+1-i)y_i$	$P_{E(y)}$
Foster et al.$_{(\alpha)}$	$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p}(\frac{g_i}{k})^\alpha = 1-\frac{1}{nk^\alpha}\sum_{i=1}^{n}(k^\alpha-(k-y_i)^\alpha)$	$P_\Sigma, P_{I(W)}$
Clark et al.-2$^*_{(\varepsilon)}$	$1-\frac{1}{k}\left(H(\bar{Y}_{W_\pi})^{1-\varepsilon}+(1-H)k^{1-\varepsilon}\right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}$	P_{I_W}
Hagenaars-1**	$1-\frac{\sum_{i=1}^{n}\ln y_i}{\sum_{i=1}^{n}\ln k} = H\left(\frac{\ln k - \ln \bar{Y}_{m_\pi}}{\ln k}\right)$	$P_{I(W)}$
Hagenaars-2**	$1-\frac{1}{k}\exp\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln y_i\right) = 1-\left(\frac{\bar{Y}_{m_\pi}}{k}\right)^H$	P_{I_W}
Hagenaars-3	$1-\frac{\sum_{i=1}^{n} w_i y_i}{k\sum_{i=1}^{n} w_i}$	$P_{I(W)}$

* $\varepsilon > 0, \varepsilon \neq 1$

** $\bar{Y}_{m_\pi}$: a szegény jövedelmek mértani átlaga

6. Deprivációérzékeny, újszerű mérőszámok

A deprivációérzékeny szegénységi mértékek is vagy a csonkolt, vagy a cenzorált eloszláson alapulhatnak, miközben a depriváció fokára való érzékenységet *személyes*, illetve *globális* szinten is értelmezhetjük. Axiómatikusan megfogalmazva e követelményeket:

- *A gyorsuló ütemben csökkenő személyes depriváltság* axiómája szerint a jövedelmi szint növekedésével a relatív depriváltság érzetének gyorsuló ütemben kell csökkennie, vagyis egy magasabb, de még reálisan elérhető jövedelmi szint megszerzésével depriváltságunk túlnyomó hányadát el kell vesztenünk.
- A *csökkenő globális depriváltság* axiómája szerint pedig a globális depriváltság csökkenésének csökkentőleg kell hatni a szegénységi index értékére.

Tekintsük elsőként a *csonkolt* eloszlás használatának az esetét. Csonkolt eloszlásra építkezve az új index(ek)et a Sen-féle P_Σ elv alapján vezetjük be. Kiindulásképpen tekintsük a szegénységi rések

$$\Sigma_P = N \sum_{i=1}^{p} w_i g_i \tag{29}$$

normalizált, súlyozott összegét, miközben a súlyozási rendszer és a normalizálási faktor megválasztásakor az alábbi szempontok teljesülését várjuk el.

- A súlyrendszer megválasztása a *gyorsuló ütemben csökkenő személyes depriváltság* axiómáján alapul. E követelmény kielégítésére rögzített i személy esetén - többek között - a g_i szegénységi réshez csatolandó

$$w_i = \sum_{Y_i \le Y_j \in \pi} \frac{1}{Y_j} = \frac{1}{Y_i} + \sum_{i \prec j \in \pi} \frac{1}{Y_j} \tag{30}$$

  súlyrendszer alkalmas, hiszen w_i mindazon szegények jövedelmeinek a súlyozott reciprokösszegét jelenti, akik legalább Y_i jövedelemmel bírnak.[32] Így egyre magasabb jövedelmi szintre kerülve a w_i súly egyre kevesebb, és hiperbolikusan csökkenő tagból áll.

[32] Vegyük észre, hogy a referencia csoport (3) szerinti meghatározásával ellentétben a fenti súlyrendszerben a w_i súly az öndeprivációt is tartalmazza, ezért értékét az i egyén jövedelmének a nagysága is befolyásolja. Ezt az a megfontolás indokolja, hogy a legkevésbé szegény rése pozitív súlyt kapjon akkor is, ha e jövedelmi szinthez csak egyedül ő tartozik.

- A normalizálási faktor meghatározásakor szintén elfogadva Sen normalizálási kritériumát, az új index értéke a normalizált szegénységi réssel egyezik meg akkor, ha valamennyi szegény jövedelme egyenlő. A (30) súlyokat a (29) alapformába írva, és csupa egyenlő jövedelmet feltételezve:[33]

$$\Sigma_P = N\frac{\bar{g}}{\bar{Y}_\pi}\frac{p(p+1)}{2} = HI = H\frac{\bar{g}}{k}$$

amelyből

$$N = H\frac{\bar{Y}_\pi}{S\cdot k} \tag{31}$$

ahol $S = p(p+1)/2$.

A (31) normalizálási tényezőt a (29) alapformába helyettesítve, és felhasználva, hogy $g_i = k - Y_i$ és a küszöbarányos jövedelem $r_i = Y_i/k$, a szegénységi mérték:

$$\Sigma_P = H\frac{\bar{Y}_\pi}{S\cdot k}\left(\sum_{Y_i\leq Y_j}\frac{k}{Y_j} - \sum_{Y_i\leq Y_j}\frac{Y_i}{Y_j}\right) = H\frac{\frac{\bar{Y}_\pi}{\bar{r}_{h(+)}} - \bar{Y}_\pi(1-\bar{Q}'_\pi)}{k}$$

ahol

$$\bar{r}_{h(+)} = \frac{S}{\sum_{Y_i\leq Y_j}\frac{1}{r_j}} = \frac{S}{\sum_{j=1}^{p} j\frac{k}{Y_j}} \tag{32}$$

a szegények küszöbarányos jövedelmeinek súlyozott *harmonikus átlaga*[34], és

$$\bar{Q}'_\pi = 1 - \frac{1}{S}\sum_{Y_i\leq Y_j}\frac{Y_i}{Y_j}$$

a deprivációs jövedelmi hányadnak egy olyan változata, mely a jelen idejű öndepriváltságot is figyelembe veszi. Mivel a relatív depriváltság mérésekor a jelen idejű öndepriváció figyelembevételének nincs tárgyi értelme, ezért a továbbiakban $\bar{Q}'_\pi$ helyén a deprivációs jövedelmi hányadnak a már korábban bevezetett, (12) szerinti $\bar{Q}_\pi$ változatát szerepeltetjük.[35]

Mivel $\bar{r}_{h(+)}$ a küszöbarányos jövedelmek súlyozott harmonikus átlaga, ezért a szegénység intenzitásának egyféle fordított jellegű mutatójaként a *relatív küszöbközeliség* jellemzésére alkalmas. Átörökítve az értéke által képviselt

[33] Mivel a súlyok a jelen idejű öndepriváltságot is tartalmazzák, ezért az összehasonlítások száma: $p(p+1)/2$.

[34] A (+) fölső index arra utal, hogy az átlagoláskor a transzfert kapó kevésbé szegény nagyobb súlyt kap, mint a transzfert adó.

[35] Ez természetesen a (30) súlyrendszer némi módosulását vonja maga után.

arányt a szegények átlagjövedelmének a küszöbhöz való viszonyára, a

$$\tilde{k} = \frac{\bar{Y}_\pi}{\bar{r}_{h(+)}}$$

hányados egy olyan kalkulált, *reprezentatív* szegénységi küszöböt eredményez, mely ugyanezt az arányt reprezentálja a küszöb és a szegények átlagos jövedelme viszonylatában. Hasonlóan, mivel $(1-\bar{Q}_\pi)$ az alacsonyabb jövedelmek által a magasabb jövedelmekkel szemben átlagosan *eliminált* deprivációs hányad, ezért kalkulálhatjuk a legszegényebb szegényeket reprezentáló azon tipikus $\tilde{Y}_a$ jövedelmi szintet is, mely ugyanilyen arányban *eliminált* depriváltságot reprezentál a szegények *átlagos* jövedelmével szemben:

$$\tilde{Y}_a = \bar{Y}_\pi(1-\bar{Q}_\pi).$$

A reprezentatív küszöb és a reprezentatív legszegényebb szegény jövedelme közötti távolság felhasználása ezután az alábbi újszerű szegénységi indexet eredményezi:

$$\tilde{P} = H\frac{\tilde{k}-\tilde{Y}_a}{\tilde{k}} = H\left(\frac{\bar{r}}{\bar{r}_{h(+)}} - \frac{\bar{Y}_\pi(1-\bar{Q}_\pi)}{\tilde{k}}\right) = H\left(\frac{\bar{r}}{\bar{r}_{h(+)}} - \bar{r}(1-\bar{Q}_\pi)\right) = H\tilde{I}$$

ahol $\bar{r}$ a küszöbarányos jövedelmek (14) szerinti *egyszerű számtani* átlaga. Nyilvánvalóan

$$0 \leq \tilde{I} \leq \frac{\bar{r}}{\bar{r}_{h(+)}}$$

és

$$0 \leq \tilde{P} = H\tilde{I} \leq H\frac{\bar{r}}{\bar{r}_{h(+)}}.$$

Láthatóan H értékének növekedésével $\tilde{P}$ is növekszik, továbbá $\tilde{P}$ annál magasabb, minél nagyobb az $\tilde{I}$ relatív rés a reprezentatív szegénységi küszöb és a reprezentatív legszegényebb szegény jövedelme között. Ugyanakkor az is látható, hogy e ralatív rés $\frac{\bar{r}}{\bar{r}_{h(+)}}$ fölső határa lehet nagyobb is mint 1, és a szegények átlagos jövedelmi szintjének az emelkedésével növekedhet és csökkenhet is attól függően, hogy $\bar{r}$ vagy $\bar{r}_{h(+)}$ növekszik gyorsabban. A reprezentatív legszegényebb szegény $\bar{r}(1-\bar{Q}_\pi)$ jövedelmi szintjére viszont a relatív depriváltság növekedése és az átlagos jövedelmi szint csökkenése is egyértelműen csökkentőleg hat.

Ha ezután az $\tilde{I}$ relatív rést osztjuk lehetséges maximumával, akkor az ily módon (0,1) intervallumra való normálása révén *egyrészt* kiszűrjük a szegénységi indexnek az $\bar{r}/\bar{r}_{h(+)}$ arányra való érzékenységét, *másrészt* magának a szegénységi indexnek is a (0,1) intervallumra normált változatát képezzük:

$$0 \leq P^+ = H\frac{\tilde{I}}{\bar{I}_{\max}} = H\frac{\tilde{I}}{\frac{\bar{r}}{\bar{r}_{h(+)}}} = HI^+$$

$$= H\left(1 - \bar{r}_{h(+)}(1 - \bar{Q}_\pi)\right) \leq 1. \tag{33}$$

A P^+ indexben szereplő I^+ relatív szegénységi rés fölső határa mindig 1, ami az *egységnyi* szegénységi küszöböt reprezentálja. I^+ annál kisebb, minél közelebb vannak relatíve a szegény jövedelmek átlagosan a küszöbhöz, illetve minél alacsonyabb a szegények körében a relatív depriváltság foka.

Kihasználva $\bar{r}_{h(+)}$ és $(1-\bar{Q}_\pi)$ jelentését, a (33) indexet az alábbi módon is interpretálhatjuk. Egyrészt az egységnyi szegénységi küszöb értékéből kiindulva kalkuláljuk a szegényeknek az *egységnyi* küszöbbel szemben reprezentatív $\bar{r}_{h(+)}$ átlagos jövedelmét, majd a vele szemben reprezentatív legszegényebb szegény jövedelmének $\bar{r}_{h(+)}(1 - \bar{Q}_\pi)$ szintjét. Így a P^+ indexben I^+ jelentése nem más, mint az egységnyi szegénységi küszöb és a vele szemben reprezentatív legszegényebb szegény jövedelmének a távolsága.

Vizsgáljuk meg ezután a P^+ mutató értékét alakító, a küszöbközeliséget jellemző $\bar{r}_{h(+)}$ mérőszám (32) súlyrendszerének a struktúráját. Mivel meghatározásakor a legkevésbé szegény r_p küszöbarányos jövedelme p súllyal, a legszegényebb szegény r_1 küszöbarányos jövedelme pedig egységnyi súllyal szerepel, ezért:

- egyrészt a relatív küszöbközeliség globális megítélésekor a legszegényebb szegények helyzete nem kap kellő hangsúlyt, miközben a leggazdagabb szegények helyzete túlhangsúlyozott,

- másrészt nincs biztosítva, hogy egy regresszív transzfer nyomán $\bar{r}_{h(+)}$ értéke mindig csökken.

A regresszív transzfer kérdését vizsgálva kívánatos lenne, hogy a transzfer hatására — ceteris paribus — $\bar{r}_{h(+)}$ értéke mindig csökkenjen, vagyis összességében a küszöbtől való relatív távolodást jelezzen. Tegyük fel, hogy a nemcsökkenő jövedelmi rangsorban $Y_i < Y_j$ és az i személytől egy $0 \leq d \leq Y_i$ nagyságú jövedelmet átcsoportosítunk a $j > i$ egyénhez. Ennek nyomán $\bar{r}_{h(+)}$ (32) szerinti értékében a $k/(Y_i - d)$ arány i súllyal, a $k/(Y_j + d)$ arány pedig j súllyal szerepel, tehát a két érintett személy együttes hatása a relatív küszöbközeliség megítélésekor:

$$\Delta(d) = k\left(i(\frac{1}{Y_i - d} + \frac{1}{Y_j + d}) + (j - i)\frac{1}{Y_j + d}\right) = k\left(\Delta_1(d) + \Delta_2(d)\right)$$

hiszen a regresszív transzfer mindig szegényebbtől kevésbé szegényhez történő átcsoportosítás, és a kevésbé szegények nagyobb súllyal szerepelnek. Látható, hogy $\Delta(d) - \Delta(0)$ előjele tetszőleges lehet attól függően, hogy a mindig pozitív $\Delta_1(d) - \Delta_1(0)$ túlszárnyalja-e a mindig negatív $\Delta_2(d) - \Delta_2(0)$ értékét. Természetesen a küszöbtől való relatív távolság növekedését, vagyis $\bar{r}_{h(+)}$ csökkenését a $\Delta(d) - \Delta(0)$ különbség pozitív volta jelzi. Ez a pozitív előjel annál inkább várható, minél közelebb van egymáshoz a transzfert adó és kapó rangszáma a jövedelmi rangsorban, miközben minél nagyobb a jövedelmeik közötti különbség.

Lényeges tulajdonsága az $\bar{r}_{h(+)}$ mérőszámnak, hogy regresszív transzfer hatására értéke a küszöbközeliség javulását is jelezheti, a transzfert kapó küszöbközeli helyzetének a javulása következtében. Előfordulhat tehát, hogy $\bar{Q}_\pi$ csökkenése ***erősíti*** $\bar{r}_{h(+)}$ növekedését, de az is lehetséges, hogy $\bar{Q}_\pi$ csökkenése pusztán ***tompítja*** $\bar{r}_{h(+)}$ csökkenését.

Továbblépve, ha elengedhetetlen kívánalom, akkor a relatív küszöbközeliséget mérő mutatót az

$$\bar{r}_{h(-)} = \frac{S}{\sum_{i=1}^{p}(p-i+1)\frac{k}{Y_i}}$$

formában definiálva kényszeríthetjük arra, hogy egy regresszív transzfer nyomán értéke mindenkor csökkenjen. Ekkor ugyanis a legszegényebbek jövedelmei kapják a legnagyobb hangsúlyt, és így a transzfert adó küszöbarányos jövedelme nagyobb súlyt kap, mint a transzfert kapóé. Ugyanakkor, mivel a transzfert adó jövedelme alacsonyabb a transzfert kapóénál, ezért $\bar{r}_{h(-)}$ értéke a regresszív transzfer nyomán — egyéb feltételek változatlansága esetén — biztosan csökken. Értékét P^+ formulájában $\bar{r}_{h(+)}$ helyére helyettesítve egy alternatív szegénységi indexhez jutunk:

$$P^- = H\left(1 - \bar{r}_{h(-)}(1 - \bar{Q}_\pi)\right). \tag{34}$$

A P^- index értékét a szegények arányának a növekedése, a relatív küszöbközeliség romlása és a relatív depriváltság növekedése egyértelműen növeli. Regresszív transzfer hatására a relatív küszöbközeliség az $\bar{r}_{h(-)}$ mutató szerint mindig romlik, viszont a relatív depriváltság globális érzete a $\bar{Q}_\pi$ index szerint növekedhet, de csökkenhet is attól függően, hogy a transzfert adóval szembeni depriváltság csökkenése összességében túlszárnyalja-e a transzfert kapó által érzett depriváltság csökkenését.[36] Regresszív transzfer hatására a P^- index értékében tehát $\bar{Q}_\pi$ csökkenése csupán ellensúlyozza $\bar{r}_{h(-)}$ csökkenését.

Végül, ha elvárjuk a szegénységi indextől, hogy értéke biztosan csökkenjen ha a regresszív transzfer ellenére csökkent a globális relatív depriváltság

[36] Lásd Hajdu(1996).

érzete, akkor érdemes a szegénységi mértéket a cenzorált jövedelmi eloszlás

$$P^* = \bar{Q}(y)$$

deprivációs arányaként definiálni, hiszen — mint erre már többször utaltunk — e mutató érzékeny a fenti kívánalomra.

7. Modell példa

Az alábbiakban illusztratív céllal, modell példán keresztül számszerűsítjük a tanulmányban szereplő legfontosabb kategóriákat és mérőszámokat. Tételezzünk föl egy populációt amelyben mindig 5 személy kerül a $k = 50$ szegénységi küszöb alá, és így 25% a szegények létszámaránya. Az egyes jövedelemeloszlásokat, illetve azok különböző szegénységi jellemzőit a 2. tábla közli. Az A eredeti eloszlásból a B, C és D eloszlások átlagmegőrző egyedi regresszív transzfer útján származnak, míg az E eloszlás esetében csak a negyedik szegény jövedelmét növeltük az A eloszláshoz képest, tehát ez esetben az átlag is emelkedett.

2.tábla: Jövedelemeloszlások szegénységi jellemzői (H=0.25)

Szegénységi jellemző	Csonkolt jövedelmi eloszlások				
	A	B	C	D	E
$Y_{1\in\pi}$	1	1	1	1	1
$Y_{2\in\pi}$	4	1	4	4	4
$Y_{3\in\pi}$	10	13	10	4	10
$Y_{4\in\pi}$	20	20	10	26	34
$Y_{5\in\pi}$	35	35	45	35	35
$\bar{Y}_\pi$	14	14	14	14	16.8
$\bar{r}_{h(+)}$	0.1400	0.0839	0.1298	0.1178	0.1456
$\bar{r}_{h(-)}$	0.0467	0.0320	0.0460	0.0438	0.0470
$\bar{Q}_\pi$	0.7500	0.7096	0.7194	0.7154	0.7409
$\bar{P}$	*0.4825*	0.8135	0.5196	0.5743	0.5552
P^+	*0.2412*	0.2439	**0.2409**	0.2416	**0.2406**
P^-	*0.2471*	0.2477	**0.2468**	**0.2469**	**0.2470**
P^*	*0.3237*	**0.3216**	**0.3221**	**0.3219**	**0.3011**
Sen	0.2080	0.2090	0.2113	0.2100	0.1987
Takayama	0.1749	0.1752	0.1761	0.1756	0.1610
Kakwani$_{(q=1)}$	0.2496	0.2508	0.2536	0.2520	0.2384
Blackorby et al.$_{(\varepsilon=2)}$	0.2325	0.2384	0.2330	0.2340	0.2322
Foster et al.$_{(\alpha=2)}$	0.1448	0.1459	0.1548	0.1487	0.1320

A táblában az újszerű szegénységi indexek esetében az eredeti eloszlásra számított értékeikhez viszonyított csökkenésre vastagbetűs szedés hivja fel a figyelmet. Ennek megfelelően a $\tilde{P}$ mutató értéke egyetlen esetben sem csökkent, a P^+ index értéke a C és az E eloszlások esetében csökkent, a P^- mérőszám értéke csak a B eloszlás esetében nem csökkent, míg a P^* mutató értéke valamennyi eloszlás esetében csökkent az A eloszláshoz képest.

A fenti tendenciák magyarázata abban rejlik, hogy — 25%-os rögzített szegénységi arány mellett — a szegénységi mérték további komponensei az alábbiak szerint alakultak a módosított eloszlások esetében:

- A relatív küszöbközeliség mindhárom transzferált eloszlás esetében romlott az eredeti A eloszláshoz képest, de a B eloszlás esetében romlott a leginkább, és a C eloszlás esetében a legkevésbé.
- A $\bar{Q}_\pi$ deprivációs jövedelmi hányad szerint a relatív depriváltság mértéke valamennyi transzferált eloszlás esetében csökkent a szegények körében az A eloszláshoz viszonyítva, mégpedig a B eloszlás esetében a leginkább, és a C eloszlás esetében a legkevésbé.
- A negyedik szegény jövedelmét növelő E eloszlás esetében a relatív küszöbközeliség javult, viszont a depriváltság mértéke csökkent.

Vegyük észre továbbá, hogy míg $P_D^+ > P_A^+$, addig $P_D^- < P_A^-$, vagyis mikor ugyanazon regresszív transzfer hatására a relatív küszöbközeliség romlik, a relatív depriváltság viszont csökken, e két mutató eltérően jelezheti a szegénység fokának a változását attól függően, hogy melyik hatás erősebb. Mivel $\bar{r}_{h(-)}$ a transzfert adóra helyezi a nagyobb súlyt, és a transzfernek a transzfert adót a küszöbtől távolító k/Y hatása erősebb, mint a transzfert kapót a köszöbhöz közelítő hatása, ezért egy regresszív transzfer esetén P^- csökkenése akkor is várható, mikor P^+ növekszik.

8. Összefoglalás

A tanulmány a szegénységi mérőszámok relatív deprivációra való érzékenysége kapcsán a mérőszámok szerkesztésének újszerű szempontjával, s e szempontnak megfelelő néhány újszerű szegénységi indexszel foglalkozik. A vizsgált szempont szerint a szegénységi index értékére regresszív jövedelmi transzfer esetén is csökkentőleg hat a relatív depriváltság globális érzetének esetleges csökkenése. Ilymódon a szegénységi index értéke akár csökkenhet is egy regresszív jövedelmi transzfer nyomán, sértve ezáltal a klasszikus transzfer axiómákat, viszont eleget téve a csökkenő relatív depriváltság axiómáinak.

A tanulmányban bevezetésre került mutatószámok közül a $\tilde{P}$ index csak egy közbülső lépcső a P^+ és P^- mutatók levezetéséhez. A gyakorlati felhasználást illetően a P^+ indexet akkor érdemes használni, ha a csökkenő *személyes* relatív depriváltság követelményének a kielégítése az elsődleges szempont, a P^- indexet pedig akkor, ha olyan depriváltság-érzékeny mutatót akarunk alkalmazni, melyben a relatív küszöbközeliség biztosan *romlik* egy regresszív transzfer nyomán. Végül a P^* mérőszám használatát arra az esetre javasoljuk, mikor a csökkenő *globális* depriváltság követelményének való megfelelés az alapvető szempont.

Irodalom

1. Anand, S. (1977): Aspects of poverty in Malaysia. Review of Income and Wealth, 23. k., 1. sz., 1–16. old.
2. Atkinson, A. B. (1970): On the measurement of inequality. Journal of Économic Theory. 2., 244–263. old.
3. Atkinson, A. B. (1987): On the measurement of poverty. Econometrica, 55. k., 4. sz., 749–764. old.
4. Atkinson, A. B. (1991): Comparing Poverty Rates Internationally: Lessons from Recent Studies in Developed Countries. World Bank Economic Review, 1. sz., 3–21. old.
5. Atkinson, A. B. (1992): Measuring poverty and differences in family composition. Economica, 233. 1–16. old.
6. Blackorby, C. – Donaldson, D. (1980a): Ethical indices for the measurement of poverty. Econometrica, 48. k., 4. sz., 1053–60. old.
7. Clarck, S. – Hemming, R. – Ulph, D. (1981): On indices for the measurement of poverty. The Economic Journal, 91., 515–526. old.
8. Dalton, H. (1920): The measurement of inequality of incomes. The Economic Journal, Sept., 348–361. old.
9. Éltető, Ö. – Frigyes, E.(1968): New inequality measures as efficient tools for causal analysis and planning. Econometrica, 36. k., 2. sz., 383-396. old.
10. Foster, J. E. (1984): On economic poverty: A survey of aggregate measures. Advances in Econometrics, 3. k., 215–251. old.
11. Foster, J. E. – Greer, I. – Thorbecke, E. (1984): A class of decomposable poverty measures. Econometrica, 52. k., 3. sz., 761–776. old.
12. Foster, J. E. – Shorrocks, A. F. (1988): Poverty orderings. Econometrica, 56. k., 1. sz. Január, 173–177. old.
13. Foster, J. E. – Shorrocks, A. F. (1987): Transfer sensitive inequality measures. Review of Economic Studies, 54. k., 485–497. old.
14. Gastwirth, J. L. (1973): A new index of income inequality. Proceedings of The International Statistical Institute, Vienna, 437–441. old.

15. Hagenaars, A. (1987): A Class of Poverty Indices. International Economic Review, Vol. 28, No. 3, October, 583–607. old.

16. Hajdu, O. (1990): A szegénység mérhetőségéről. Statisztikai Szemle, 6. sz., 477–494. old.

17. Hajdu, O. (1996): Relatív depriváció és szegénység: A jövedelmi transzfer deprivációs hatása. Szigma, 1-2. sz. 45–66.old.

18. Hajdu, O. (1997): A szegénység mérőszámai. KSH, Budapest, Könyvtár és Dokumentációs Szolgálat, Témadokumentáció.

19. Hamada, K. – Takayama, N. (1978): Censored income distributions and the measurement of poverty. Bulletin of the International Statistical Institute, 47. k., 1. könyv, 617–632. old.

20. Kakwani, N. C. (1980a): On a class of poverty measures. Econometrica, 48.k., 2.sz., 437–446.

21. Kakwani, N. C. (1980b): Income inequality and poverty. Oxford University Press. Published for the World Bank. 398. old.

22. Kakwani, N. C. (1984a): Issues in measuring poverty. Advances in Econometrics, 3. k., 253–282. old.

23. Kakwani, N. C. (1984b): Welfare Ranking of Income Distributions. Advances in Econometrics, 3. k., 191–213. old.

24. Kakwani, N. C. (1993): Statistical inference in the masurement of poverty. Review of Economics and Statistics. 4. sz., 632–639. old.

25. Kerékgyártó Györgyné (1991): Szegénységi küszöbszámok, avagy kik a szegények. Aula, 1. sz, 57–76. old.

26. Kundu, A. – Smith, T. E. (1983): An impossibility theorem on poverty indices. International Economic Review, 24. k., 2. sz., 423–434. old.

27. Runciman, W, E. (1966): Relative deprivation and social justice: A study of attitudes to social inequality in twentieth-century England. Berkely University of California Press. 10. old.

28. Sen, A. (1976): Poverty: an ordinal approach to measurement. Econometrica, 44. k., 2. sz., 219–231. old.

29. Sen, A. (1979): Issues in the measurement of poverty. Scandinavian Journal of Economics, 81., 285–307. old.

30. Sen, P. K. (1986): The Gini coefficient and poverty indexes: Some reconciliations. Journal of the American Statistical Association, 81. k., 396. sz., 1050–57. old.

31. Sheshinski, E. (1972): Relation between a social welfare function and the Gini index of income inequality. Journal of Economic Theory, 4., 98–100. old.

32. Stark, O. – Taylor, J. E. (1989): Relative Deprivation and International Migration. Demography, 26. k., 1. sz., Február. 1–15.old.

33. Stark, O. – Taylor, J. E. – Yitzhaki, S. (1988): Migration, remittances, and inequality. A sensitivity analysis using the extended Gini index. Journal of Development Economics, 28, 309–322.old.

34. Takayama, N. (1979): Poverty, income inequality, and their measures: professor Sen's axiomatic approach reconsidered. Econometrica, 47. k, 3. sz., 747–759. old.

35. Thon, D. (1979): On measuring poverty. Review of Income and Wealth, 25. k., 4. sz., 429–440. old.

36. Yitzhaki, S. (1979): Relative deprivation and the Gini coefficient. The Quarterly Journal of Economics, május, 321–324. old.

37. Yitzhaki, S. (1982): Relative deprivation and economic welfare. European Economic Review, 17. 99–113. old.

RELATIVE DEPRIVATION AND POVERTY: DEPRIVATION SENSITIVE MEASURES OF POVERTY

Considering relative deprivation sensitive poverty indices the paper deals with a newly introduced point of view of constructing such poverty indices. According to this requirement the decrease in the overall degree of relative deprivation must force the poverty index to decrease as well, moreover, allowing its value to decrease due to a regressive transfer despite the increase in the degree of income inequality.