

A LEONTIEF-MÁTRIXOK MÁSODIK SAJÁTÉRTÉKÉRŐL¹

BRÓDY ANDRÁS
MTA Közgazdaságtudományi Intézet

1. Bevezetés

Leontief és Neumann modellekkel dolgozva feltűnt, hogy az egyensúlyi pálya kiszámítása nagy rendszerekben kevesebb mátrixszorzást igényel. Ezért vizsgáltam e mátrixok szubdomináns sajátértékét, mivel ez határozza meg a konvergencia sebességét.

Bodewig (1959) az ilyen iterációt elemezve abból indult ki, hogy bármely \mathbf{v} vektor leírható az \mathbf{A} mátrix sajátvektorainak lineáris kombinációjaként, azaz

$$\mathbf{v} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{x}_n . \quad (1)$$

A kombinációban az összes sajátvektor egységnyi koefficienssel szerepel, ez a sajátvektorok hosszának szabad megválasztása miatt mindig elérhető. (Feltettük, hogy a mátrix diagonalizálható, azaz szimpla szerkezetű, és a \mathbf{v} vektornak valóban minden sajátvektor irányában van komponense).

Ha most k -szor iterálunk, akkor a szorzat az alábbi alakot ölti

$$\mathbf{A}^k \mathbf{v} = \lambda_1^k \mathbf{x}_1 + \lambda_2^k \mathbf{x}_2 + \dots + \lambda_n^k \mathbf{x}_n , \quad (2)$$

ahol λ a megfelelő vektorhoz tartozó sajátérték. A sajátértékeket abszolút értékben csökkenő nagyságrendben indexeltem, az első index a legnagyobb sajátértékhez tartozik. λ_1 az egyszerű újratermelést leíró Leontief mátrix esetében egységnyi nagyságú. Frobenius tétele alapján ehhez és csak ehhez tartozik teljesen pozitív sajátvektor. Ez szabja meg az egyensúlyi termelés arányait.

Ha növeljük az iterációk számát, akkor a többi sajátérték hatványai egyre jobban eltörpülnek a legnagyobb sajátérték hatványaihoz képest. A többi sajátvektorból származó befolyás egyre kevésbé "zavarja" az egyensúlyi megoldást, amely így egyre pontosabbá válik. Az iteráció aszimptotikusan stabil.

¹ Az OTKA 15.345 szám alatt támogatott kutatása. Köszönetet mondok Kőrösi Gábor, Molnár György és Simonovits András kollégáimnak, valamint az Economic Systems Research két ismeretlen referensének értékes észrevételeikért.

A szükséges iterációk számát nyilván a szubdomináns sajátérték szabja meg, mert ez tűnik el a leglassabban a számítás folyamán.

Összefoglalóan azt mondhatjuk, hogy az iteráció, tehát a

$$\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{v}_k \quad (3)$$

művelet annál gyorsabban vezet eredményhez, mennél kisebb a második sajátérték az elsőhöz képest. A konvergencia geometriai és sebességét a geometriai sor quotiense adja meg. Mennél közelebb van ez zérushoz, annál gyorsabb a konvergencia.

Ha például a mátrix rangja 1, tehát ha a mátrix egyetlen diádból áll, akkor az összes "kisebb" sajátérték zérus. Ilyenkor egyetlen szorzás azonnal szabatosan megadja a keresett vektort. Ez a lehető leggyorsabb konvergencia, amit el lehet képzelni. Azt szeretném megmutatni, hogy ha egy pozitív és véletlen számokkal kitöltött mátrix sorainak és oszlopainak száma növekszik, akkor struktúrája határértékben egyetlen diád felé tart, és ezt a diádot a mátrix bal- illetve jobboldali pozitív sajátvektora határozza meg.

2. A két legnagyobb sajátérték viszonya

Tekintsük az $n \times n$ méretű \mathbf{A} mátrix oszlopait olyan n elemű független mintáknak, amik egy nemnegatív és folytonos valószínűségi változó eloszlásából erednek. Legyen a változó várható értéke $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \mu$ és szórásnégyzete $\sigma^2 = \mathbf{E}((\mathbf{x} - \mu)^2)$.

Minden egyes minta (oszlop) szórása $\sigma\sqrt{n}$, az elemek összegének (az oszlop összegének) várható értéke pedig $n\mu$. E két érték hányadosa $\sigma\sqrt{n}/n\mu = \sigma/(\mu\sqrt{n})$. Ez a hányados tehát a mintavétel ismert szabálya szerint n növekedtével zérushoz tart. A minta elemszámát növelve a minta átlaga az eloszlás várható értékéhez konvergál. Ha a minta elemszáma végtelenné válik, akkor teljesen "lefedí" az eloszlást. Ekkor a minta átlaga és az eloszlás várható értéke azonossá válik.

Ha egy nemnegatív mátrix oszlopösszegei egyenlőek, akkor ez az összeg azonos a mátrix legnagyobb sajátértékének nagyságával. Véletlen elemekből álló mátrixunk oszlopösszegei azonban nem egyenlőek egymással, amíg véges nagyságú a mátrix. Várható értékük mégis azonos és $n\mu$ nagyságú. Mivel egy nemnegatív mátrix legnagyobb sajátértéke mindig a legnagyobb és a legkisebb oszlopösszeg között van, ezért ez a várható érték jó becslést ad erre a sajátértékre.

A mátrix n növekedtével egyre nagyobbá válik. Elemeinek összege az $n^2\mu$ értékhez tart, az oszlopösszegek várható értékének n -szereséhez. Ennek az n számú mintából álló "hipermintának" a szórása $n\sigma$. Mindkét érték

végtelemné válik, de arányuk most már n "sebességgel" tart zérushoz. Minden oszlopösszeg \sqrt{n} értékével tart saját várható értékéhez, és az oszlopösszegek összege újabb \sqrt{n} "sebességgel" tart a várható $n^2\mu$ értékhez. A legnagyobb sajátérték becslése az oszlopösszegek várható értékével tehát egyre "javul" és a végtelenben teljesen szabatosá válik.

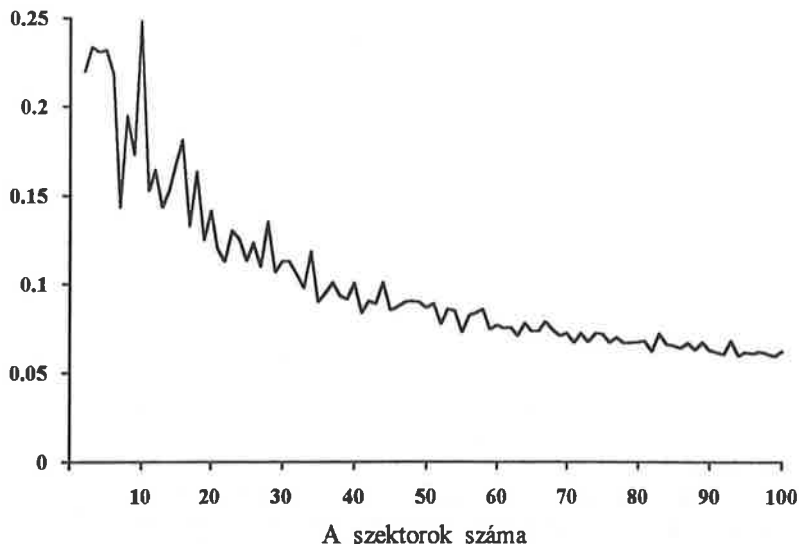
Válasszunk most le az eredeti A mátrixból egy olyan diádot, amelynek minden eleme egyenlő az alapul vett x valószínűségi változó $E(x) = \mu$ várható értékével. Ami — negatív és pozitív előjelekkel — megmarad, az nem más, mint a mátrix egyes elemeinek eltérése a várható értéktől. E maradékmátrix legnagyobb sajátértékére (amely az eredeti mátrix szubdomináns sajátértéke) jó becslést ad az egyes oszlopokban található abszolút eltérések összege. A valószínűségi változó ingadozásának ez a mértéke, amelyet Rényi várható eltérésnek nevezett (i. m. 298) általában kisebb, és legfeljebb akkora, mint a változó szórása. A mátrix szubdomináns és domináns sajátértékének aránya ezért közel lesz a szórás és a várható érték hányadosához, a $\sigma\sqrt{n}/n\mu = \sigma/(\mu\sqrt{n})$ értékhez. (Mivel a várható eltérés nem haladhatja meg a szórás mértékét, e hányados esetleg valamelyest túlbecsüli a második sajátérték viszonylagos nagyságát.) A két sajátérték aránya ezért a zérushoz tart n növekedtével.

Míg egy kis, mondjuk 3×3 nagyságú mátrix esetében néha 9 - 10 lépésre is szükség lehet négy tizedesnyi pontosság eléréséhez, addig egy $10^3 \times 10^3$ mátrix minden lépésben 1-2 újabb megbízható jegyet ad. A $10^6 \times 10^6$ mátrix, amely már kezdi leképezni a valóságban található termékek és szolgáltatások tényleges bőségét (vagy, ha úgy tetszik, a piac szereplőinek valóságos számát) esetleg már egyetlen szorzás után megadja ezt a pontosságot. Az meglehetősen biztos, hogy a gyakorlatban tapasztalható maximálisan 10-20 százalékos egyensúlyhiányt, "hibát", már egyetlen iteratív lépés is jelentéktelenné és elhanyagolhatóvá tesz.

Ellenőrizzük a következtetést számítógépes szimulációval. Tegyük fel, hogy a mátrix elemeit a $(0, 1)$ intervallumban egyenletesen eloszló valószínűségi változók adják. A mátrix legnagyobb sajátértéke ekkor körülbelül $n/2$, szubdomináns sajátértéke pedig, mivel az eloszlás szórása $1/(2\sqrt{3})$, legfeljebb $\sqrt{n}/(2\sqrt{3})$ lesz. A két érték aránya tehát $1/\sqrt{3n}$. (Ha a véletlen mátrixot egységnyi legnagyobb sajátértékre "normáljuk", mint Leontief-mátrixot, akkor az utóbbi érték ennek szubdomináns sajátértékét adja meg.)

Az 1. ábra mutatja a számítógépi szimuláció adatait. 100×100 mátrixig bezárólag számítottam ki a fenti véletlen mátrix két legnagyobb sajátértékének arányát.

1. ábra: A domináns és szubdomináns sajátérték aránya



Figyeljük meg, hogy a tapasztalt ingadozás az elméleti érték körül szintén csökken, mégpedig (ahogyan azt az elmélet előírja) szintén zérushoz tart $1/\sqrt{n}$ értékével.

Ez talán túlságosan is optimista becslés, mert a Leontief mátrixok koefficienseinek eloszlása nem közelíthető meg jól az egyenletes eloszlással. A gyakorlati mátrixokban igen sok a kicsi, zérushoz közeli elem, és csak szórva-nyosan mutatkozik néhány nagyobb, a tíz százalékot meghaladó koefficiens. A tényleges eloszlást jobban leírják a zérus várható értékű és $1/n$ szórású normális eloszlásból vett és négyzetre emelt változók. E valószínűségi eloszlás várható értéke értelemszerűen $1/n$ (tehát az alapul vett eloszlás szórása) szórása pedig éppen kétakkora. Ez esetben is zérushoz tart a két sajátérték aránya, csak valamivel lassabban. Arányuk elméleti értéke ebben az esetben $2/\sqrt{n}$ lesz.

3. Összefoglalás

A piac ereje méretében van. A nagyobb terjedelmű piac gyorsíthatja a mennyiségi alkalmazkodást. Ennek okát végső fokon a centrális határeloszlás

tétele adja meg. Bármilyen eloszlások összege a normális eloszlás felé tart.

Az $\mathbf{x}' = (\mathbf{A} - \mathbf{1})\mathbf{x}$ differenciálegyenlet, ha \mathbf{A} nemnegatív és legnagyobb sajátértéke egységnyi, aszimptotikusan stabil. Minden sajátértéke negatív, a kereslet és kínálat egyensúlyát adó zérus sajátértéken kívül. Ebből azonban hiba volna a piac hasonlóan aszimptotikusan stabil viselkedésére következtetni. A nyereséget leíró $\mathbf{p}(\mathbf{1} - \mathbf{A})$ szorzat például már nem "stabil", mert az \mathbf{A} mátrix lehetséges negatív sajátértéke miatt az $(\mathbf{1} - \mathbf{A})$ mátrixnak egynél nagyobb sajátértéke is lehet, sőt általában szokott is lenni. Ekkor a differenciál- és differencia-egyenlet egyaránt destabilizáló, mert nem az egyensúly felé vezet.

Az \mathbf{A} mátrix legnagyobb negatív sajátértékét is vizsgálni kellene. Tapasztalatom szerint az ehhez tartozó vektor a folyó- és a tőkeráfordítások egyenlegét adja meg, ahol a munkaráfordítás is az utóbbiak közé kerül, mintegy emberi tőkeként. Matematikailag itt talán a nagyobb és a kisebb elemek különbsége a döntő.

Valószínűségekről lévén szó, óvatosságra kell inteni. Ha az alapul vett eloszlásnak nincs, vagy nem véges a várható értéke és szórása (mint például a normális eloszlás reciprokának, vagy a Pareto eloszlásnak, bizonyos paramétertartományokon kívül), akkor a fenti gondolatmenet nem alkalmazható. Nem lesz szabatos akkor sem, ha a mátrixnak sajátos és maradandó struktúrája van (például, ha a mátrix ciklikus). Végül pedig, mint minden ilyen következtetés, nem az egyes, hanem nagyobb számú esetre, az előforduló esetek átlagára vonatkozik.

Irodalom

1. BODEWIG, E. (1959) *Matrix Calculus*. (Amsterdam, North-Holland).
2. FROBENIUS, G. (1908) Über Matrizen aus positiven Elementen. *Zeitschrift für reine und angewandte Mathematik*. pp. 417–476.
3. RÉNYI, A. (1954) *Valószínűségszámítás*. (Budapest, Tankönyvkiadó).

ON THE SECOND LARGEST EIGENVALUE OF LEONTIEF MATRICES

The relation of the dominant and subdominant eigenvalue of nonnegative random matrices is inspected. This relation determines the speed of convergence of the power method, used to compute the equilibrium eigenvector. It is found that the first and second moment of the random distribution (that is: the mean and the dispersion) asymptotically approximate these eigenvalues. Under fairly general conditions this relation tends toward zero if the size of the matrix increases. Therefore the larger the matrix the faster the convergence.

