A PARETO HIPOTÉZIS VIZSGÁLATA — ÉRTÉKPAPÍR-PIACI HOZAMOK ÉS AZ EXTREMÁLIS HOZAMOK ELOSZLÁSA[1]
(Német részvényhozamok és a tőzsdeindex empirikus elemzése)

THOMAS LUX – VARGA JÓZSEF
Otto Friedrich Universität Bamberg – JPTE KTK, Pécs

A tanulmányban a DAX tőzsdeindex kialakításában szerepet játszó 30 részvény napi hozamai vizsgálatának néhány eredményét ismertetjük, továbbá vizsgáljuk a tőzsdeindex statisztikai tulajdonságait. A stabil eloszlások paramétereinek becslési eredményei és standard illeszkedési próbák alapján a Pareto hipotézis elfogadhatónak tűnik. Az eloszlások határai (farokrészei) tulajdonságainak vizsgálatára kifejlesztett szemiparametrikus módszer (a Hill-féle farokindex esztimátor felhasználásán alapuló módszer) alkalmazásával nyert eredmények azonban nem kompatibilisek a stabil eloszlástörvényekkel, így ez a Pareto hipotézis elvetését indokolja minden megvizsgált részvény esetében. A fentiek mellett erőteljes hasonlóság észlelhető a vizsgált idősorok extremális viselkedésében, így nem vethető el az a feltevés, hogy az extremális értékek eloszlástulajdonságai megegyeznek.

1. Bevezetés

Tanulmányunkban a DAX tőzsdeindex kialakításában szerepet játszó 30 leggyakrabban vásárolt német részvény árfolyamának statisztikai eloszlását, extremális tulajdonságait, továbbá a tőzsdeindex statisztikai tulajdonságait vizsgáljuk.[2] Az elemzésben felhasznált adatok az 1988. január 1. és 1994. szeptember 9. közötti periódusból valók, ahol a kezdő időpont megegyezik a DAX megformálásának és publikálásának kezdő időpontjával.

Elemzésünk kiindulópontja annak vizsgálata, hogy a stabil eloszlás család (más elnevezéssel a Pareto eloszlások) alkalmasak-e a tőzsdei hozamok modellezésére. Az irodalomban a pénz- és tőkepiaci adatok modellezésére ajánlott eloszlások között hosszú időszakban meghatározó szerepet játszottak az ún. stabil eloszlások. Meg kell jegyeznünk, hogy nem minden ok nélkül, hiszen

[1]Beérkezett 1996. szeptember 24.

[2]A tanulmány MKM és OTKA támogatással készült. (MKM 751 sz. és OTKA T 020451 sz. pályázat).

csak a stabil Pareto eloszlások lehetnek független, azonos eloszlású valószínűségi változók összegeinek határeloszlásai. Ebben az eloszlásosztályban a normális eloszlás az $\alpha_s = 2$ speciális eset, ahol α_s az ún. karakterisztikus kitevő. Független, azonos eloszlású valószínűségi változók összegei eloszlásának a normális eloszláshoz konvergálását a klasszikus központi határeloszlási tétel állítja, feltéve, hogy a valószínűségi változók varianciája létezik. Ha azonban a másodrendű momentumokra vonatkozó feltétel nem teljesül, akkor az összegek határeloszlásai $\alpha_s < 2$ exponenssel jellemzett, a Gauss eloszlástól különböző eloszlások. A normalitás egyértelmű elvetése, továbbá azok a vizsgálatok, amelyek a másodrendű empirikus momentumok nem konvergens voltát támasztották alá azt eredményezték, hogy Mandelbrot (1963) és Fama (1963) az $\alpha_s < 2$ paraméterű stabil eloszlásokat ajánlották a tőkepiaci hozamok releváns modelljeként. A normális eloszlástól különböző stabil eloszlások a fentiek mellett megtartják az adatokban megfigyelt olyan fontos tulajdonságokat, mint a jelentős farokrész és a magas csúcsok a várható értéknél, továbbá az adatok aggregálásakor, vagyis a napi, heti stb. adatok összevonásakor megmutatkozó stabilitás. Az indoklás — amelyet itt nem részletezünk — annyira meggyőzőnek tűnt, hogy a témával foglalkozó kutatók evidenciaként fogadták el az $\alpha_s < 2$ exponensű stabil Pareto eloszlást, mellőzve az illeszkedés-vizsgálatokat. Az irodalomban előforduló számos példából csak néhányat említünk meg: Teichmoeller (1971), Simkowitz és Beedles (1980) részvényhozamokat vizsgálva, McFarland, Pettit és Sung (1980), valamint So (1987a) a devizaárfolyamok vizsgálata során, Cornew, Town és Crowson (1984), továbbá So (1987b) pedig a határidős hozamok vizsgálatakor alkalmaztak Pareto eloszlást, mellőzve a szükséges illeszkedés-vizsgálatok elvégzését. Ugyanakkor más szerzők az adatok aggregációjával szembeni stabilitás elfogadhatatlanságára utaló jeleket véltek felfedezni, amelyek a napi, heti stb. megfigyelések esetében abban jutottak kifejezésre, hogy az α nem maradt állandó a fent említett különböző szintű aggregációk során. Egyes kutatók ezek alapján megkérdőjelezték a stabil eloszlások alkalmazhatóságát a pénzügyi idősorok területén. (Pl.: Hsu, Miller és Wichern (1974), Upton és Shannon (1979), Friedman és Bandersteel (1982), valamint Hall, Brorsen és Irwin (1984).) Azt a gyakorlatot, amely a karakterisztikus kitevőt helyezte a vizsgálatok középpontjába (és a paraméter becslését egy stabil eloszlás feltételezése mellett javasolta végrehajtani) Du Mouchel (1983) bírálta. Ugyancsak ő javasolta szemiparametrikus becslési eljárás alkalmazását a megfigyelések csökkenési arányának vizsgálatára az empirikus eloszlás farokrészében a stabil és más lehetséges eloszlások megkülönböztethetősége érdekében. Amint azt a későbbiekben bemutatjuk, az extremális események határtulajdonságai jól jellemezhetők a farokindex fogalmának bevezetésével. A stabil eloszlások esetében a farokindex egybeesik az α karakterisztikus kitevővel. Ha azonban a valódi eloszlás nem stabil eloszlás, akkor a stabil eloszlás α_s paraméterének felhasználása a határtulajdonságok vizsgálatában félrevezető következtetéseket eredményezhet. Ez különösen abban az esetben fordulhat elő, ha az α_s karakterisztikus kitevő értéke a $(0,2]$ intervallumban van, mert ekkor a farokindexek bármely pozitív értéket felvehetnek. A szemiparametrikus farokindex esztimátor alkalmazásának legfőbb előnye, hogy lehetővé teszi olyan "beágyazott teszt" alkalmazását a különböző eloszlás-alternatívák vizsgálatára, amely alternatívák elkülönítése a farokrész viselkedésének különbözőségén alapul.

A dolgozat további részében azt vizsgáljuk, hogy a stabil eloszlások alkalmasak-e a német részvényhozamok vizsgálatára. Először a stabil eloszlásfüggvény paramétereinek becslésével foglalkozunk, és az illeszkedés jóságát vizsgáljuk χ^2-próba segítségével. Második lépésként szemiparametrikus farokindex esztimátort alkalmazunk az eredmények más módszerrel történő ellenőrzésére. A vizsgálatok erdményei szerint a stabil eloszlás egyértelműen visszautasítható minden vizsgált részvény, továbbá a DAX index esetében is. A farokindexet is vizsgáltuk az alsó és felső farokrész megegyezősége tekintetében, továbbá elemeztük a különböző részvények között is a határtulajdonságok megegyezőségét.

A következő szakaszban az alkalmazott statisztikai módszereket ismertetjük, a harmadik szakaszban bemutatjuk az elemzések eredményeit, végül a negyedik szakaszban az elemzés alapján levonható következtetésekről szólunk.

2. Az elemzésben alkalmazott módszerek

A stabil eloszlásosztály csak karakterisztikus függvényével adható meg, amely a következő alakban írható fel:

$$\log E(e^{ixt}) = \begin{cases} i\delta t - |ct|^{\alpha_s}\left[1 - i\beta \operatorname{sgn}(t)\tan\left(\frac{\pi\alpha_s}{2}\right)\right] & \text{ha } \alpha_s = 1; \\ i\delta t - |ct|\left[1 + i\beta\frac{2}{\pi}\operatorname{sgn}(t)\log|t|\right] & \text{ha } \alpha_s = 1. \end{cases} \tag{1}$$

A megoldás zárt alakban csak néhány esetben ismert, például a Gauss-eloszlás ($\alpha_s = 2$), vagy a Cauchy-eloszlás ($\alpha_s = 1$, $\beta = 0$) esetében. Az α_s, β, c és δ paraméterek az eloszlás alakját határozzák meg; az $\alpha_s \in (0,2]$ karakterisztikus kitevő az eloszlás farokrésze mértékét, illetve a farokrészekre eső megfigyelések számának fogyatkozási arányát mutatja meg. Alacsonyabb α érték jelentősebb farokrészt és egyúttal az eloszlás középpontjában magasabb csúcsokat jelez; a $\beta \in [-1,1]$ paraméter az eloszlás ferdeségét határozza meg; $\beta > 0$ jobb oldali, $\beta < 0$ pedig bal oldali ferdeségre utal. Végül c és δ rendre az ún. skálaparaméter, illetve a várható érték. Megjegyezzük, hogy másod- vagy annál magasabb rendű momentumok csak az $\alpha = 2$ (Gauss-eloszlás) határesetben léteznek. Az $\alpha_s \in (1,2)$ esetben a várható érték létezik és megegyezik az eloszlás δ paraméterével, magasabb rendű momentumok azonban nem léteznek. Az $\alpha_s < 1$ esetben azonban még a várható érték sem létezik. A pénzügyi gazdaságtan területén eddig végzett vizsgálatok szerint az α értéke csaknem minden esetben az $(1,2)$ intervallumba esett. Az a lehetőség, hogy bizonyos stabil eloszlások esetében a variancia nem létezik, gondosabb elemzést tett szükségessé a hatékony részvényportfóliók kiválasztása területén is.

Az eloszlás négy paraméterének becslésére azt a finomított fraktálmódszert alkalmaztuk, amelyet McCulloch (1986) dolgozott ki, és amely alkalmas a paraméterek konzisztens becslésére a minta 5%, 25%, 50%, 75% és 95% -os fraktálisaiból. Illeszkedés-vizsgálatra pedig a stabil eloszlásokra alkalmazható Du Mouchet-féle táblázatokat alkalmaztuk. A paraméterbecslést és az illeszkedés-vizsgálatot egy integrált számítógépes program segítségével végeztük el.

Az eloszlások farokrészei elemzésének elméleti hátterét az extremális értékek elmélete szolgáltatja. (Ennek leírása megtalálható például Leadbetter, Lindgren, Rootzen (1983) könyvének 1-3. fejezeteiben.) A további elemzés az alábbi eredményre támaszkodik. Tekintsük az X_1, X_2, ..., X_n független, azonos eloszlású valószínűségi változók egy stacionárius sorozatát, és definiáljuk az

$$M_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n) \tag{2}$$

rendstatisztikát. Megmutatható, hogy M_n határeloszlása alkalmasan skálázott, és az ún. max-stabil eloszlások három típusának egyikéhez konvergál (ld. Leadbetter és mások 1983. p. 10.).

Mivel nem korlátos valószínűségi változó jelentős farokrészekkel rendelkező eloszlásai jöhetnek szóba, a megfelelő eloszlástípus

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0; \\ \exp\left(-x^{-\alpha}\right) & \text{ha } x > 0 \end{cases} \tag{3}$$

eloszlásfüggvénnyel jellemezhető. Ez azt jelenti, hogy $P\{a_n(M_n - b_n) \leq x\}$ (gyenge értelemben) konvergál a $G(x)$ eloszlásfüggvényhez, ahol az a_n és b_n a normáláshoz szükséges állandók.

Már említettük, hogy egy stabil eloszlás karakterisztikus kitevője egybeesik a $G(x)$ határeloszlás farokindexével. A farokindex értéke azonban nem korlátozódik a $(0,2]$ intervallumra, hanem tetszőleges pozitív szám lehet. Ebből az következik, hogy a fraktál módszerrel (vagy az irodalomban fellelhető más módszerrel) becsült karakterisztikus kitevő nem feltétlenül esik egybe a farokindexszel, ha a vizsgált eloszlás nem a stabil eloszláscsaládhoz tartozik. Példaként említhetjük a Student-féle t-eloszlást, amely jelentős farokrészű eloszlás, ugyanakkor olyan extremális eloszláshoz konvergál, amelynek a farokindexe megegyezik a t eloszlás szabadságfokával. Tehát a Studenteloszláscsalád tagjainak farokindexei az 1, 2, ... számok lehetnek. Másik példaként az ARCH folyamatok említhetők, amelyek szintén kielégíthetik a határeloszlási tétel feltételeit 2-nél nagyobb index érték esetében. De Haan és szerzőtársai (1989) a farokindex és az ARCH folyamat paramétereinek kapcsolatát vizsgálták. Ezek mind a farokbecslési eljárásba beágyazott alternatívák, az adott mintán alapuló becslés pedig lehetővé teszi az egyik vagy a másik kizárását. További információ nyerhető a farokindex és a vizsgált eloszlás létező momentumai száma közötti kapcsolat alapján. Pontosabban szólva ismert, hogy a farokindexnél alacsonyabb rendű összes momentum létezik, míg a magasabb rendű momentumok nem konvergensek.

Az α index becslésére javasolt eljárások összehasonlítása alapján a Hill (1975) által bevezetett esztimátort tekintjük a leghatékonyabbnak (v.ö. Hols és de Vries, 1989 eredményeivel). A Hill-féle eljárás az α reciprokának konzisztens becslését adja az alábbi összefüggés felhasználásával :

$$\gamma_H = \frac{1}{\alpha_H} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} \left[\log x_{(i)} - \log x_{(m)}\right] , \tag{4}$$

ahol n a minta elemszáma, m a megfigyelések száma az eloszlás farokrészében, továbbá a minta elemei $x_{(1)} \geq x_{(2)} \geq \ldots \geq x_{(m)} \geq \ldots \geq x_{(n)}$ csökkenő sorba rendezettek.

Megmutatható, hogy $(\gamma_H - \gamma)\sqrt{m}$ aszimptotikusan normális eloszlású zérus várható értékkel és γ^2 varianciával. Ezt a tényt két hipotézis ellenőrzésére használjuk fel. Az egyik a különböző részvények határeloszlás tulajdonságainak megegyezésével, a másik pedig az egyes részvények alsó és felső határeloszlásai megegyezésével kapcsolatos. Ezzel, valamint más esztimátorral kapcsolatban is jelentkező probléma az alkalmas farokrész méretének meghatározása, vagyis az α_H számításához felhasznált m elemszám megállapítása. Az m farokméret megválasztása szükségképpen magába foglal az α valódi értékére vonatkozó bizonyos vélekedést. Nyilvánvaló, hogy minél alacsonyabb (magasabb) az α érték, annál vastagabbak (vékonyabbak) a farokrészek, továbbá annál több (kevesebb) elem tartozik a farokrész tartományhoz, ez pedig befolyásolja a határérték reláció teljesülését is. Ha az m értékét túlságosan nagyra választjuk, akkor a faroktartomány olyan elemekkel "szennyeződik", amelyek inkább az eloszlás középső részéhez tartoznak, feltéve, hogy az α valódi értéke viszonylag magas. Abban az esetben pedig, amikor a faroktartományt túlságosan szűkre választjuk, akkor a következtetés ereje szükségtelenül korlátozódik viszonylag alacsony valódi α érték esetében. Összefoglalva: az m megfelelő értéke attól függ, hogy milyen hipotézist kívánunk ellenőrizni. Itt úgy döntöttünk, hogy különböző farokméreteket vizsgálunk annak eldöntésére, hogy a becsült farokindex állandó marad-e. Azt találtuk, hogy az eredmények jó stabilitást mutatnak a különböző farokméretek esetében és biztosítják a releváns eloszlásfüggvény típus kiválasztását.

Farokindex becslési módszer alkalmazásával foglalkozó dolgozatok csak az utóbbi időben jelentek meg a közgazdasági irodalomban. Ilyen munka például Koedijk, Schafgans és de Vries (1990), valamint Kähler (1993) dolgozata, amelyekben devizaárfolyamok vizsgálatáról számolnak be. Eredményeik oly mértékben különböznek, hogy például Koedijk et al. vizsgálatai alapján nem utasítható el az a feltevés, hogy a farokindex a stabil eloszlásra jellemző tartományban helyezkedik el, míg Kähler elemzése szerint a becsült értékek a $(3,5)$ intervallumba esnek, ez utóbbi eredmény pedig az $\alpha < 2$ feltevés elutasíthatóságát jelenti. Dewachter és Gielens (1991) megmutatják, hogy a Koedijk et al. dolgozatban ismertetett becslések torzítottak, és közlik a farokindex becslések (felfelé) korrigált értékeit. A devizapiacokkal kapcsolatos alkalmazásról számol be Koedijk és Kool (1993) a kelet-európai fizetőeszközök és az amerikai dollár közötti devizaárfolyamokat vizsgálva 2 és 3 közötti α értékeket kapnak. Akgiray, Booth és Seifert (1988), és Koedijk, Stork és de Vries (1992) a latin-amerikai feketepiac devizaárfolyamait vizsgálták. Az első szerzőcsoport kevésbé hatékony maximum-likelihood esztimátort alkalmazott, és 0.5 és 7 közötti értékeket kapott, a másodikként említett dolgozatban ugyanazokat az adatokat elemezték, mint az elsőben, de a Hill esztimátort alkalmazták, és egy jóval szűkebb intervallumot (1.2 és 3.2 közötti értékeket) kaptak. Amerikai és német tőzsdei árfolyam hozamok elemzése található Akgiray, Booth (1988), valamint Akgiray, Booth és Loistl (1988) dolgozataiban. Az utóbbi tanulmányokban szintén maximum-likelihood módszer alkalmazásáról számolnak be, a kapott α értékek 3 és ∞, illetve 3 és 13 közöttiek. Végül Jansen és de Vries (1991) 10 amerikai részvény napi hozamait vizsgálták, a kapott α értékek 3.2 és 5.2 közötti intervallumba esnek.

3. Számítási eredmények

Az 1. táblázatban a 30 legfontosabb német részvény hozamának néhány statisztikai jellemzőjét, valamint a DAX tőzsdeindex fontosabb jellemzőit mutatjuk be.[3]

A hozamokat a Frankfurti Értéktőzsde napi záróárai logaritmusainak felhasználásával számoltuk az egyes részvények 1 675 megfigyelt értéke alapján.

[3] A DAX tőzsdeindex kompozíciója nem volt állandó a vizsgált időperiódusban. Nevezetesen a Feldmühle és a Nixdorf árfolyamait (amelyek itt az elemzésben nem szerepelnek) a Metallgesellschaft és a Preussag árfolyamai váltották fel 1990 szeptemberében. Emellett többször megváltoztak az egyes részvények súlyai is a DAX-ot előállító lineáris kombinációban. Ezeket a változásokat azonban figyelembe vették a DAX értékeiben, ezért ezek hatását szükségtelen külön is vizsgálni.

(Pontosan a

$$\Delta \log x_t = \log x_t - \log x_{t-1} = \log \frac{x_t}{x_{t-1}} \approx \frac{x_t}{x_{t-1}} - 1 = \frac{\Delta x_t}{x_{t-1}}$$

összefüggés alapján történt az árfolyam-hozam számítása). A táblázatból kiolvasható, hogy kis mértékű baloldali ferdeséget mutat mindegyik minta. A csúcsosság értéke is minden esetben a normális eloszlásra jellemző érték feletti. A normalitás feltevés itt is, mint csaknem minden pénzpiaci idősor esetében, határozottan elutasítható. (A normalitás vizsgálat eredményének ismertetését mellőzzük.)

A 2. táblázat a stabil eloszlás paramétereinek becsült értékeit és az illeszkedés-vizsgálatok eredményeit foglalja össze. A karakterisztikus kitevő 1.423 és 1.748 között változik, míg az eloszlás ferdeségére jellemző β paraméter a -0.05 és 0.22 értékek közé esik. Az a tény, hogy a β értéke a 31-ből 28 esetben pozitív, ellentmondani látszik az 1. táblázatból kiolvasható, és valamennyi mintára jellemző ferdeségnek. Ennek a feltűnő eltérésnek a részletesebb elemzése arra enged következtetni, hogy azt az 1989. októberi "mini tőzsdekrach" következtében adódó negatív harmadrendű momentumok okozták. Ezt támasztja alá, hogy a fenti eseménnyel kapcsolatos adatok eltávolítása után a ferdeség a legtöbb esetben pozitívvá válik. Mivel a fraktál módszer az átlagtól leginkább eltérő adatokat nem veszi figyelembe, ezért az empirikus eloszlás középső részében csekély pozitív ferdeség mutatkozik.

Az empirikus eloszlások illeszkedés-vizsgálatára 10 és 25 cellás χ^2 próbát alkalmaztunk.[4] A 25 cellás próba szerint 12, illetve 16 esetben visszautasítható a Pareto-eloszlásra vonatkozó hipotézis 1%, illetve 5% szignifikancia szinten. A DAX tőzsdeindex esetében azonban ez a feltevés nem utasítható el. A 10 cellás próba még további 8 esetben a hipotézis elvetését támasztja alá 1%, illetve 5% szignifikancia szinten, és ugyanilyen szinten elutasítható a stabil eloszlás feltételezése a DAX esetében is. A 10 cellás próba végrehajtásakor néhány elutasítást eredményező eset a δ paraméter becslési hibájának a következménye lehet. Ezért a 25 cellás változat alkalmasabbnak látszik következtetések levonására.

Az eredmények értelmezése ennél a standard próbánál eléggé bizonytalan: egyrészről az összes eset több mint egyharmadában 1% szinten elvethető a stabil eloszlással kapcsolatos hipotézis, amely eredmény értelmezhető rossz

[4] Az a szabály, amely szerint a fokszámot csökkenteni kell a becsült paraméterek számával, itt nem alkalmazható, mert a becsléseknek a χ^2 minimumbecslésekkel való aszimptotikus megegyezése feltétel nem teljesül (bővebben ld. Moore, 1986). Az egzakt kritikus pontok például a 25 cellás próba esetében $\chi^2(24)$ és $\chi^2(20)$ közé esnek. Mivel becsléses illeszkedés-vizsgálatot végeztünk, amely az elméleti eloszlás szabadságfokát módosítja, ezért 5, illetve 20 szabadságfokkal számoltunk.

hírként is a Pareto-eloszlás feltételezését támogatók számára, másrészről viszont úgy is értelmezhető ez az eredmény, hogy az empirikus eloszlások egy jelentős része egészen jól leírható stabil eloszlásként. A 2. táblázatban összefoglalt eredmények tehát megerősítik azt az egyébként több más tanulmányból is kirajzolódó képet, amely szerint: (1) van bizonyos általános hasonlóság az empirikus eloszlások és a Pareto-eloszlások alakja között; (2) a becsült karakterisztikus kitevők az 1.5 érték körüli viszonylag szűk intervallumba esnek.

1. táblázat Német tőzsdei hozamok néhány statisztikai jellemzője

Tőzsdeindex, részvények	Átlag $\cdot 10^2$	Szórás $\cdot 10^2$	Ferdeség	Csúcsosság
DAX	0.047	1.201	-0.974	15.990
Allianz	0.046	1.579	-0.166	12.801
BASF	0.015	1.361	-0.551	7.326
Bayer	0.021	1.326	-0.041	4.672
Bayr. Hypobank	0.013	1.479	-1.233	14.175
Bayr. Vereinsbank	0.021	1.511	-0.659	11.350
Commerzbank	0.026	1.473	-0.959	10.436
Continental	0.009	1.773	-0.112	3.173
Daimler	0.023	1.589	-0.421	9.245
Dt. Babcock	0.029	2.090	-1.252	24.801
Deutsche Bank	0.038	1.372	-0.544	9.980
Degussa	0.026	1.692	-0.846	19.227
Dresdner Bank	0.034	1.377	-0.535	6.929
Henkel	0.013	1.320	-1.548	30.991
Hoechst	0.020	1.401	-0.248	6.099
Karstadt	0.023	1.596	-1.170	24.786
Kaufhof	0.013	1.654	-0.466	8.344
Lufthansa	0.022	2.218	-0.123	4.499
Linde	0.035	1.248	-1.119	15.152
MAN	0.067	1.818	-1.186	23.720
Metallges.	-0.009	2.335	-1.002	16.268
Mannesmann	0.087	1.808	-0.622	12.728
Preussag	0.086	1.805	-0.947	12.125
RWE	0.048	1.423	-0.753	13.089
Schering	0.059	1.333	-0.004	4.689
Siemens	0.039	1.302	-0.426	8.882
VEBA	0.044	1.364	-1.096	22.268
VIAG	0.064	1.484	-1.330	24.844
VW	0.047	1.767	-0.627	10.869

A számítások alapját képező adatok az 1988.04.01–1994.09.09 periódusbeli napi hozamok, minden esetben 1 675 adat.

2. táblázat A Pareto-eloszlás paraméterei és az illeszkedés-vizsgálat eredményei

Tőzsdeindex, részvények	α_S	β	$c \cdot 10^2$	$\delta \cdot 10^2$	χ^2-próba 10 cellás	χ^2-próba 25 cellás
DAX	1.737	-0.181	0.651	0.024	19.60**	27.70
Allianz	1.632	0.107	0.807	0.039	6.09	35.07*
BASF	1.663	0.079	0.735	0.023	8.89	29.43
Bayer	1.561	-0.043	0.708	-0.018	4.65	28.18
Bayr. Hypobank	1.589	0.116	0.753	0.046	14.12*	55.31**
BMW	1.623	0.096	0.789	0.035	10.58	31.40
Bayr. Vereinsbank	1.602	0.039	0.812	0.016	28.23**	37.10*
Commerzbank	1.632	-0.010	0.795	-0.003	42.49**	58.66**
Continental	1.640	0.066	1.006	0.029	30.34**	29.85
Daimler	1.549	0.083	0.827	0.043	6.84	31.22
Dt. Babcock	1.580	0.120	1.053	0.069	50.71**	67.55**
Deutshe Bank	1.515	0.013	0.692	0.006	20.92**	43.04**
Degussa	1.550	0.183	0.865	0.098	49.59**	54.27**
Dresdner Bank	1.585	0.054	0.732	0.021	21.53**	27.58
Henkel	1.624	0.147	0.664	0.045	36.87**	56.12**
Hoechst	1.566	0.139	0.723	0.025	7.73	27.64
Karstadt	1.748	0.136	0.871	0.032	18.39**	27.01
Kaufhof	1.561	0.085	0.893	0.045	18.76**	28.54
Lufthansa	1.514	0.119	1.175	0.098	43.29**	101.37**
Linde	1.628	0.179	0.663	0.054	35.44**	68.03**
MAN	1.624	0.219	0.931	0.094	13.46*	11.79
Metallges.	1.501	0.089	1.071	0.070	22.89**	32.60
Mannesm.	1.677	0.184	0.977	0.067	21.66**	23.34
Preussag	1.507	0.224	0.906	0.146	32.96**	45.88**
RWE	1.423	0.066	0.658	0.044	17.07**	42.12**
Schering	1.500	0.046	0.674	0.023	30.50**	35.13*
Siemens	1.626	0.083	0.703	0.058	12.53*	36.69*
Thyssen	1.663	0.102	0.939	0.081	17.19**	42.80**
VEBA	1.521	0.010	0.645	0.042	11.38*	56.06**
Viag	1.501	0.202	0.716	0.106	9.40	29.82
VW	1.716	0.145	0.994	0.045	23.90**	26.33

Megjegyzés: * és ** a feltevés elutasítását jelöli 5%, illetve 1% szinten. A χ^2 eloszlás kritikus értékei: $\chi^2_{95\%}(5) = 11.1$, $\chi^2_{99\%}(5) = 15.1$ az 5 szabadságfok esetén, és $\chi^2_{95\%}(20) = 31.4$, $\chi^2_{99\%}(20) = 37.6$ a 20 szabadságfok esetén.

Ellenpróbaként megvizsgáljuk az empirikus eloszlások farokrészeit. Ha a stabil eloszlások alkalmasak az empirikus eloszlások leírására, akkor ez a feltevés a farokindex becslések alapján megerősíthető. Először azt vizsgáljuk, hogy az eloszlások alsó illetve felső farokrészei megegyező határtulajdonságokat mutatnak-e. Ebben az esetben ugyanis a két farokrészből származó megfigyelések egyesíthetők az abszolút értékeik segítségével, és ilyen módon megnövelhető a becslésekhez felhasználható megfigyelések m száma. (Egy baloldali farokrészben megfigyelt mintaelem abszolút értéke egy a jobboldali farokrészben megfigyelt értéknek tekinthető, és értelemszerűen járhatunk el a jobboldali farokrészben megfigyelt hozamértékekkel.) A farokrészek eloszlása tekintetében megmutatkozó aszimmetria természetesen alapot szolgáltathat arra, hogy a stabil-eloszlás feltételezést visszautasítsuk, hiszen ezek az eloszlások a farokrészeikben azonos határtulajdonságot mutatnak. Annak eldöntésére, hogy a felső, illetve az alsó farokrészek statisztikai szempontból megegyezőknek tekinthetők-e, a Hill-esztimátort alkalmaztuk a megfigyelések legalsó, illetve legfelső 5%-ára. Az α^+ és α^- ($\alpha^+ = 1/\gamma^+$ és $\alpha^- = 1/\gamma^-$) pontbecsléseit a 3. táblázat tartalmazza. Az $\alpha^+ = \alpha^-$ hipotézis ellenőrzésekor azt használjuk fel, hogy az $1/\gamma_H$ közelítőleg normális eloszlású. Ebből következőleg a

$$Q = \left(\frac{\gamma^+ - \gamma}{\sigma_\gamma}\right)^2 + \left(\frac{\gamma^- - \gamma}{\sigma_\gamma}\right)^2 = \left(\frac{\alpha}{\alpha^+} - 1\right)^2 m + \left(\frac{\alpha}{\alpha^-} - 1\right)^2 m$$

összeg 2 szabadságfokú χ^2 eloszlású ($\sigma_\gamma^2 = \gamma^2/m$).

A táblázat utolsó oszlopából leolvasható, hogy mindegyik vizsgált esetben megadható az α értékek olyan széles tartománya, amelyre az $\alpha^+ = \alpha^-$ hipotézis 1% szinten nem utasítható el. A bal- és jobboldali farokrészek azonos eloszlása feltételezhetőségével kapcsolatos kétségeket ébreszthet az, hogy 30-ból 25 esetben $\alpha^+ > \alpha^-$ figyelhető meg. Miután az $\alpha^+ = \alpha^-$ feltevés maga után vonja $P(\alpha^+ > \alpha^-) = P(\alpha^+ < \alpha^-) = 0.5$ teljesülését, egyszerű szimmetriapróba alkalmazható: feltéve, hogy $\alpha^+ = \alpha^-$, azoknak a megfigyeléseknek a k száma, amelyekre $\alpha^+ > \alpha^-$ teljesül, binomiális eloszlású $n = 30$ és $p = 0.5$ paraméterekkel, ahol 30 a vizsgálatban szereplő részvények száma, a DAX tőzsdeindexet természetesen nem vizsgáljuk, hiszen az őt alkotó részvényárfolyamok lineáris kombinációjaként áll elő. Annak valószínűsége, hogy $k \geq 25$ vagy $k \leq 5$ 0.003-mal egyenlő. Ennélfogva, annak ellenére, hogy az egyedi részvények esetében nem utasítjuk el az $\alpha^+ = \alpha^-$ feltevést, a harminc részvény egészét tekintve jelentős aszimmetria mutatkozik az alsó, illetve felső farokindexekben. Ennek magyarázatát keresve, a korábban már említett 1989. októberi "mini krach" tekinthető az aszimmetria okozójának. A megfelelő adatokat eltávolítva és újraszámolva az alsó és felső 5%-os farokindexeket, az aszimmetria csökken, így a 30-ból már csak 20 esetben áll fenn az $\alpha^+ > \alpha^-$ egyenlőtlenség, ami statisztikailag nem szignifikáns. Az aszimmetriát tehát egy olyan extrém esemény okozta, amely mindegyik részvényre hatott és a hatása is többnyire ugyanolyan volt.

(A DAX zuhanása 13%-os, míg az egyes részvényárfolyamok csökkenése 6 és 25% közötti volt az említett napon. Ezért arra a következtetésre jutottunk, hogy nincsen szisztematikus eltérés a két farokrész extremális viselkedésében.) Az alsó és felső farokrészeket együtt vizsgáljuk úgy, hogy a hozam megfigyelt értékéből kivonjuk a várható értékét és a különbség abszolút értékét vesszük.

3. táblázat Az eloszlások alsó és felső farokrészeinek összehasonlítása

Tőzsdeindex, részvények	a^+	a^-	a^+ és a^- megegyezésének intervallumai
DAX	2.744	2.693	(2.078, 3.358)
Allianz	2.855	2.507	(2.055, 3.262)
BASF	3.011	2.351	(2.073, 3.129)
Bayer	2.983	2.834	(2.224, 3.585)
Bayr.Hypobank	2.931	2.301	(2.022, 3.061)
BMW	2.543	2.607	(1.969, 3.180)
Bayr.Vereinsbank	3.299	2.981	(2.404, 3.844)
Commerzbank	3.284	2.785	(2.330, 3.657)
Continental	3.313	2.887	(2.377, 3.765)
Daimler	3.282	2.902	(2.370, 3.768)
Dt.Babcock	2.919	2.737	(2.163, 3.481)
Deutsche Bank	2.870	3.050	(2.264, 3.645)
Degussa	3.454	2.857	(2.427, 3.772)
Dresdner Bank	3.068	2.612	(2.181, 3.427)
Henkel	3.119	2.807	(2.269, 3.624)
Hoechst	2.733	2.717	(2.099, 3.390)
Karstadt	2.566	2.922	(2.103, 3.339)
Kaufhof	3.820	3.121	(2.672, 4.129)
Lufthansa	3.464	2.911	(2.449, 3.830)
Linde	2.969	2.662	(2.156, 3.441)
MAN	2.927	2.817	(2.196, 3.544)
Metallges.	2.964	2.258	(2.025, 3.009)
Mannesm.	2.743	3.009	(2.202, 3.526)
Preussag	3.177	2.564	(2.212, 3.399)
RWE	3.154	2.707	(2.249, 3.544)
Schering	2.862	2.824	(2.173, 3.512)
Siemens	3.030	2.832	(2.242, 3.606)
Thyssen	3.515	2.562	(2.373, 3.412)
VEBA	2.889	2.579	(2.094, 3.339)
Viag	3.260	2.681	(2.286, 3.543)
VW	3.187	3.016	(2.372, 3.821)
Mintaelemszám	83	83	

Megjegyzés: a harmadik oszlopban azok az intervallumok találhatók, amelyekben az $a^+ = a^-$ feltevés 1%-os szinten nem utasítható vissza.

A pontbecslések előállítása, valamint annak megvizsgálása, hogy ezek a becslések hogyan változnak a minta elemszámával, a kétoldalú Hill-esztimátor segítségével történt, valamennyi részvény és a DAX index esetében 15%, 10%, 5% és 2.5% farokrész méretek (vagyis 15%, 10%, 5% és 2.5%-os kvantilisek) mellett. (Ha a megfelelő százalékpont nem egész szám, akkor az egészrészét vesszük.) A számítási eredményeket a 4. táblázat foglalja össze. A témával foglalkozó más szerzők Monte Carlo szimulációs eredményeit figyelembe véve, hozzávetőleg a 15%-os kvantilis méret látszik alkalmasnak a stabil eloszláscsalád azon tagjai esetében, amelyek karakterisztikus kitevője az $(1,2)$ intervallumba esik, míg a vékonyabb farokrészek a 3 és 5 közötti szabadságfokú Student-féle t-eloszlás esetében megfelelőek. A számítási eredmények azt mutatják, hogy a pontbecslések nem változnak a farokrészbeli megfigyelések számának változásával, vagy ha igen, akkor csekély mértékű növekedést mutatnak. Tekintettel az utóbbi esetre, nem zárható ki, hogy a valódi farokindexek még nagyobbak, mint a 4. táblázatbeli becsült értékek. Nyilvánvaló azonban, hogy a pontbecslések minden esetben a Pareto-eloszlás családra jellemző tartományon kívül esnek. A hipotézis-ellenőrzés eredményei alapján az alábbi következtetések vonhatók le a vizsgált eloszlások természetét illetően:

A 10% és 5% farokrészeket tekintve, a becslések alapján kizárható a Pareto-eloszlások érvényessége valamennyi részvény, valamint a DAX tőzsdeindex esetében is. Ennek belátása céljából a pontbecslések körüli x%-os megbízhatóságú konfidenciaintervallumokat határoztunk meg az $\alpha_H \pm f_{x\%}\alpha_H/\sqrt{m}$ formulával, ahol $f_{x\%}$ a normális eloszlás x%-os kvantilise.(Felhasználjuk, hogy az $1/\alpha_H$ közelítőleg normális eloszlású). Az $\alpha < 2$ feltevés egyértelmű visszautasíthatóságát támasztja alá a 4. táblázatban található farokindex becslések 95%-os megbízhatóságú konfidencia-intervallumainak vizsgálata 10%-os és 5%-os farokrész méretek esetében. Egyetlen esetben sem tartalmazzák ezek az intervallumok a stabil eloszlások tartományát, vagyis az $\alpha < 2$ hipotézis egyértelműen visszautasítható 5% és 10% méretek esetében. Kevésbé meggyőzőek az eredmények, amikor a kisebb (2.5%) vagy nagyobb (15%) farokrész méreteket tekintjük. Az utóbbi esetben csak egy részvény (Preussag) konfidencia-intervalluma terjed ki a stabil eloszlás tartományára, míg a vékony (2.5%) farokrészt vizsgálva a Pareto eloszláscsalád néhány tagja a 95%-os megbízhatóságú konfidencia-intervallumba kerül 7 részvény és a DAX tőzsdeindex esetében. Az utóbbi eredmény természetesen annak a következménye, hogy a redukált farokméret következtében erősen csökken a megfigyelések száma és ezért növekszik a konfidencia-intervallum.

A 4. táblázatbeli pontbecslések és konfidencia-intervallumok erős érvként szolgálnak ugyan a stabil eloszlások érvényességének elutasítása mellett, hasznosnak látszik azonban azt is megvizsgálni, hogy a különböző farokrész méretek megválasztása megfelelő-e. Ez pedig ekvivalens annak ellenőrzésével, hogy a vizsgált farokrészek a (3)-ban leírt extremális érték eloszlást követik-e. A feladat végrehajtását megkönnyíti Hill egy eredményének felhasználása (Hill, 1975), amely szerint a (3) eloszlás érvényességének feltételezése mellett a

$$v_i = \alpha \cdot i \log \frac{x_{(i+1)}}{x_{(i)}}$$

változó 1 paraméterű exponenciális eloszlást követ, vagyis eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{ha } x < 0; \\ 1 - \exp(-x)\,, & \text{ha } x \geq 0. \end{cases}$$

$x_{(i)}$ $(i = 1, \ldots, m)$ az m legnagyobb megfigyelt értéket jelöli, tehát

$$x_{(1)} \geq x_{(2)} \geq \ldots \geq x_{(m)}\,.$$

Ha az m értékét elegendően kicsire választjuk, a v_i változó egy egységnyi várható értékű és szórású exponenciális eloszlásból vett véletlen mintaelemnek tekinthető. A farokrész méret megválasztásának helyessége a v_i illeszkedésvizsgálatával ellenőrizhető. Ha nem fogadható el a v_i exponencialitására vonatkozó feltételezés, akkor ez maga után vonja annak elutasítását, hogy a vizsgált farokrész méret esetében a minta eloszlása a (3) eloszláshoz közelít. Ezt a vizsgálatot 20, 16, 10 és 8 cellás standard χ^2-próba alkalmazásával hajtottuk végre 15%, 10%, 5% és 2.5% farokrész méretekre. A 4. táblázatban * és ** jelöli azokat az eredményeket, amelyek a hipotézis elutasítását jelentik 5, illetve 1% szinten. Amint az a táblázatból látható, csak néhány esetben vethető el az exponenciális eloszlásra vonatkozó feltevés. A próba eredményének részletes elemzése valóban azt mutatja, hogy az egyes cellafrekvenciák nagyon közel esnek a hipotetikus értékekhez mindegyik vizsgált farokrész méret esetében. Az extremális értékek eloszlására javasolt közelítés tehát elfogadhatónak mondható.[5]

[5]Kísérletet végeztünk farokindex becslésre 3 szabadságfokú Student-féle t-eloszlásból származó véletlen mintákon. Az eredmények nagyon hasonlóak voltak a megfigyelt adatokból nyert eredményekhez. Először is 20, egyenként 1 675 elemű mintában csak néhány esetben volt elutasítható a faroktartományok konvergenciájára vonatkozó feltevés becsült α értéket alkalmazva. (A 20 esetből csak egy volt szignifikáns 5% szinten 15% és 10% farokrészek mellett, egy sem volt szignifikáns a vékonyabb 5% és 2.5% farokrészek esetében). Másodszor, a farokindexek általában szintén növekednek a farokrész méretek csökkenésével: az α_H átlaga a 20 mintában 2.277-től (15% farokrész), 2.484-en (10%) és 2.734-en (5%) keresztül 2.927-ig (2.5%) változik. Megjegyezzük, hogy annak ellenére, hogy az extremális érték eloszláshoz való illeszkedés nem utasítható el, a farokindexek általában alulbecsültek minden vizsgált farokrész méret esetében.

4. táblázat. A farokindex becsült értékei

Részvények	$\alpha_{15\%}$	$\alpha_{10\%}$	$\alpha_{5\%}$	$\alpha_{2.5\%}$
DAX	2.654	2.723	2.964	2.622
	(2.326, 2.982)	(2.310, 3.137)	(2.327, 3.602)	(1.819, 3.425)
Allianz	2.601	2.746	2.766	2.446
	(2.279, 2.923)	(2.330, 3.163)	(2.171, 3.137)	(1.697, 3.194)
BASF	2.508	2.641	2.670	2.961
	(2.198, 2.819)	(2.241, 3.042)	(2.119, 3.281)	(2.055, 3.868)
Bayer	2.571	2.845	3.320	2.879
	(2.253, 2.889)	(2.413, 3.276)	(2.606, 4.034)	(1.998, 3.760)
B. Hypobank	2.456*	2.598**	3.266	3.696
	(2.153, 2.760)	(2.204, 2.993)	(2.563, 3.968)	(2.565, 4.828)
BMW	2.494	2.501	2.753	2.784
	(2.186, 2.803)	(2.122, 2.881)	(2.161, 3.346)	(1.932, 3.636)
B. Vereinsbank	2.602	3.101	3.380	2.852
	(2.280, 2.924)	(2.631, 3.571)	(2.653, 4.107)	(1.979, 3.726)
Commerzbank	2.849	2.996	3.018	2.896
	(2.497, 3.202)	(2.541, 3.450)	(2.369, 3.667)	(2.010, 3.783)
Continental	2.829	3.062	3.312	3.565
	(2.479, 3.179)	(2.598, 3.527)	(2.599, 4.024)	(2.474, 4.656)
Daimler	2.732*	3.094	2.882	3.099
	(2.394, 3.070)	(2.625, 3.563)	(2.262, 3.502)	(2.150, 4.047)
Dt.Babcock	2.622	2.848	3.211	3.141
	(2.298, 2.946)	(2.416, 3.279)	(2.520, 3.902)	(2.179, 4.102)
Deutshe Bank	2.698	2.917	3.132	3.096
	(2.365, 3.032)	(2.474, 3.359)	(2.458, 3.806)	(2.148, 4.044)
Degussa	2.836	3.119	3.294	3.131
	(2.485, 3.187)	(2.646, 3.592)	(2.585, 4.002)	(2.173, 4.090)
Dresdner Bank	2.450	2.818	2.786*	3.625
	(2.191, 2.809)	(2.390, 3.245)	(2.186, 3.385)	(2.515, 4.734)
Henkel	2.699	2.899	3.113	2.768
	(2.339, 2.999)	(2.459, 3.338)	(2.443, 3.783)	(1.921, 3.616)
Hoechst	2.544	2.832	2.708	3.777
	(2.229, 2.858)	(2.403, 3.262)	(2.125, 3.291)	(2.621, 4.933)
Karstadt	2.647	2.772	2.830	3.365
	(2.320, 2.975)	(2.351, 3.192)	(2.221, 3.439)	(2.335, 4.395)
Kaufhof	2.887	3.374**	3.597	3.852
	(2.529, 3.243)	(2.823, 4.370)	(2.823, 4.370)	(2.673, 5.031)
Lufthansa	2.503	3.073	3.335	4.011
	(2.194, 2.813)	(2.607, 3.539)	(2.617, 4.052)	(2.783, 5.238)
Linde	2.652	2.845	3.941	3.510
	(2.324, 2.980)	(2.414, 3.277)	(3.093, 4.789)	(2.435, 4.584)
MAN	2.691	2.913	3.054	3.136
	(2.358, 3.024)	(2.471, 3.355)	(2.397, 3.711)	(2.176, 4.096)

Részvények	$\alpha_{15\%}$	$\alpha_{10\%}$	$\alpha_{5\%}$	$\alpha_{2.5\%}$
Metallges.	2.371	2.682	2.563	2.422
	(2.078, 2.664)	(2.275, 3.089)	(2.011, 3.114)	(1.680, 3.163)
Mannesm.	2.654	2.865	2.858	2.756
	(2.326, 2.983)	(2.430, 3.299)	(2.243, 3.472)	(1.193, 3.600)
Preussag	2.207	2.753	3.210	3.462
	(1.934, 2.480)	(2.335, 3.170)	(2.519, 3.900)	(2.402, 4.522)
RWE	2.526	2.829	3.044	3.286
	(2.213, 2.838)	(2.400, 3.259)	(2.389, 3.699)	(2.280, 4.292)
Schering	2.495	2.819	3.094	3.891
	(2.187, 2.804)	(2.391, 3.246)	(2.429, 3.760)	(2.700, 5.082)
Siemens	2.450	2.947	2.901	3.031
	(2.147, 2.753)	(2.450, 3.394)	(2.277, 3.525)	(2.103, 3.959)
Thyssen	2.805	3.006	3.365	3.524
	(2.458, 3.152)	(2.550, 3.462)	(2.641, 4.089)	(2.445, 4.602)
VEBA	2.550	2.707	2.842	3.140
	(2.235, 2.865)	(2.297, 3.118)	(2.230, 3.453)	(2.179, 4.102)
Viag	2.460	2.789	3.179	3.274
	(2.156, 2.765)	(2.366, 3.212)	(2.495, 3.863)	(2.272, 4.276)
VW	3.033	3.016	3.121	3.160
	(2.658, 3.409)	(2.559, 3.474)	(2.450, 3.792)	(2.193, 4.128)
Mintaelem-szám a farok-részben	251	167	83	41

A * és ** a (3) extremális érték eloszlás hipotézisének elutasítását jelzi 5%, illetve 1% szinten.

Ami pedig azokat az eseteket illeti, amelyekben az 5% farokrész méretnél a stabil eloszlások tartományába került néhány egyed, a fenti próba eredményei alapján megengedhető, hogy a nagyobb farokrészekből levonható erősebb következtetésre hivatkozzunk. Így tehát határozottan állítható, hogy az adatok egyértelműen ellentmondanak a Pareto-hipotézisnek mindegyik vizsgált részvény és a DAX tőzsdeindex esetében. A McCulloch (1986) fraktál algoritmusával számított hipotetikus karakterisztikus kitevők minden esetben a 95%-os megbízhatóságú konfidencia-intervallumokon kívülre esnek. Az $\alpha < 2$ feltevés elutasítása — a korábban említettek alapján — maga után vonja, hogy 5% szinten állítható a másodrendű momentumok létezése.

A szélsőséges események előrejelzésében megmutatkozó különbségek megvilágítására kiszámítottuk annak valószínűségeit, hogy a hozamok abszolút értékei bizonyos küszöbértékeket meghaladnak egy egyéves időtartam alatt. Az említett valószínűségeket a stabil eloszlás feltételezésével és a szemiparametrikus farokindex becslések felhasználásával is meghatároztuk. Az 5. táblázatban a DAX indexszel kapcsolatos néhány eredmény található, amelyeket az $\alpha_S = 1.737$ becsült stabil eloszlás paraméter, a 2. táblázatbeli $c = 0.651$ paraméterérték, valamint a 4. táblázatban található 2.5% és 5%-os farokindex becslések, $\alpha_{2.5\%} = 2.622$ és $a_{5\%} = 2.964$ felhasználásával nyertünk. (Az egyszerűség kedvéért feltettük, hogy $\beta = 0$ az eloszlás szimmetriája céljából, valamint azért, hogy az eredmények összehasonlíthatók legyenek a szimmetria feltételezésével vizsgált többi esettel). A stabil eloszlás esetében annak valószínűségét, hogy legalább egy szélsőséges esemény bekövetkezik, vagyis, hogy legalább egyszer a hozam abszolút értéke meghalad egy bizonyos küszöbértéket, a Du Mouchel (1971) táblázatból interpolációval számítottuk. A táblázat szerint annak valószínűsége, hogy például a hozam abszolút értéke nagyobb 0.006-nál, 0.0056. Ennélfogva annak valószínűsége, hogy legalább egy ilyen esemény előfordul egy év alatt, $1 - 0.9944^{250} = 0.6595$, ahol 250 az egy év alatti nyitvatartási napok átlagos száma a részvénypiacokon. A szemiparametrikus farokindex becslésekkel kapcsolatban a felső kvantilisek konzisztens esztimátora (Deckers és Haan, 1989) alkalmazható a nagy hozamok valószínűségének becslésére. Ezt az esztimátort a következő összefüggés írja le:

$$x_p = \frac{\left(\frac{k \cdot m}{2 \cdot p \cdot n}\right)^{\gamma_H} - 1}{1 - 2^{-\gamma_H}} \left(x_{(n-m/2)} - x_{(n-m)}\right) + x_{(n-m/2)}\,, \tag{5}$$

k a megfigyelések száma (itt $k = 250$, vagyis az évenkénti nyitvatartási napok átlagos száma a pénzpiacokon), n és m pedig rendre a vizsgált empirikus idősorok elemeinek számát, illetve a faroktartománybeli megfigyelések számát jelöli. γ_H az α_H farokindex reciproka. Adott x_p mellett annak valószínűsége, hogy a hozam ezt a küszöböt meghaladja az (5) egyenletből meghatározható.

Az 5. táblázatból jelentős eltérések olvashatók ki az extremális események értékelését illetően. Ezek az eltérések közvetlen következményei annak, hogy az α_S stabil eloszlás paraméter alacsonyabb csillapodási arányt implikál, mint a Hill-módszerrel becsült, jóval magasabb farokindex értékek. Sokkal fontosabb azonban az, hogy mindkét módszer lehetővé teszi a valószínűség-eloszlások közelítését a vizsgált időintervallumban megfigyelt, az átlagostól leginkább eltérő eseményekkel kapcsolatos értékekre (vagyis az $|r| > 0.15$ feltételt kielégítő esetekre), de rendkívül eltérő eredmények adódnak a két módszerrel a még nem észlelt hozamszintekkel kapcsolatban.

Például, annak valószínűsége, hogy a hozam abszolút értéke meghaladja a 0.20 értéket, 0.1479 a stabil eloszlás esetében. (Emlékeztetőül: az illeszkedésvizsgálat alapján ez a modell nem utasítható el). Az $\alpha_{2.5\%} = 2.622$ farokindex becslés alkalmazásával kapott megfelelő valószínűség 0.0396, míg az $\alpha_{5\%} = 2.964$ mellett csak 0.0135. A Pareto-hipotézis elfogadása esetében ilyen magnitudójú hozamokra az a következtetés adódik, hogy várhatóan hat-hét évente egyszer fordul elő ilyen extremális hozam, míg a Hill-indexek alapján számított előrejelzés szerint csak huszonöt évente, vagy még inkább csak hetvenöt évente egyszer várható ilyen esemény bekövetkezése. A stabil eloszlások feltételezésével a nagy hozamok előfordulása gyakoriságával kapcsolatban levonható következtetések nagyon félrevezetőek. Amellett, hogy ez az eredmény megerősíti Du Mouchel (1983) kritikai észrevételeit a farokrészekre vonatkozó valószínűségek stabil eloszlások karakterisztikus exponensei alapján történő meghatározásával kapcsolatban, érdemes azt is megjegyezni, hogy az adott hozamszintek meghaladásának valószínűségei a farokrész becslések felhasználásával számítva, különösen pedig a 2.5% farokrész méret esetében egészen jó megegyezést mutatnak az 1988 és 1994 közötti periódus megfigyelt értékeivel.

Ugyancsak meglepő eredmény, hogy a 4. táblázatbeli pontbecslések adott farokrész méret és különböző részvények esetében mind egy viszonylag szűk tartományba esnek. Ez felveti azt a kérdést, hogy van-e egyáltalán szignifikáns eltérés ezen részvények extremális hozamértékeinek eloszlásában. Nyilvánvaló, hogy *az extremális hozamok valószínűségeinek homogenitásával vagy heterogenitásával kapcsolatos bármiféle következtetés rendkívüli jelentőségű a kockázatértékelésben és a portfólió kiválasztásban.*

Formálisan fogalmazva, ellenőrizni kellene az $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{30} = \alpha$ hipotézist. Az $1/\alpha_H$ normalitásának felhasználásával a következő próbastatisztika alkalmazható:[6]

$$Q = \sum_{i=1}^{30} \left(\frac{\alpha}{\alpha_{H,i}} - 1 \right)^2 \cdot m \,,$$

amely közelítőleg χ^2 eloszlású 30 szabadságfokkal, az α_i $(i = 1, 2, \ldots, 30)$ értékek megegyezésének nullhipotézise mellett. A táblázatba foglalt eredmények azt mutatják, hogy az extremális értékek eloszlásának azonossága nem utasítható el 5% szinten, függetlenül a farokrészbeli megfigyelések számától. A 6. táblázatban megadott alsó és felső korlátok azok a feltételezett közös farokindex értékek, amelyek mellett az extremális értékek eloszlásának megegyezése még nem utasítható el.

Megfigyelhető, hogy a potenciálisan azonos farokindexek intervallumai szélesednek a farokrész méretek csökkenésével, ami annak a következménye, hogy a rendelkezésre álló megfigyelések száma csökken. A hozam folyamat nagy (pozitív vagy negatív) realizációinak gyakoriságai ezért nem mutatnak lényeges eltérést a vizsgált 30 részvény között. Az extremális értékek eloszlásával kapcsolatos vizsgálataink alapján az is kijelenthető, hogy nincsenek

[6] Ez megköveteli a részvényárfolyamok függetlenségét, ami természetesen szigorúan nem teljesülő feltétel, hiszen a megfigyelések szerint az árfolyam emelkedések és a krachok minden részvényre hatással vannak. Figyelembe kell vennünk ugyanakkor azt is, hogy az alsó és felső farokrészek szimmetriájának vizsgálatát a részvénypiacok volatilitási klasztereinek létezése megnehezíti.

olyan részvények, amelyek kifejezetten nagyobb hajlandóságot mutatnak az átlagostól jelentősen eltérő változásokra. Ez pedig arra enged következtetni, hogy a cégek hasonló kockázati tényezőkkel állnak szemben, például a makrogazdasági megrázkódtatások a hozamaik alakulására hasonlóan hatnak. Másrészről a mintába került cégek közötti intenzív gazdasági és intézményi kapcsolatok az egyébként cégspecifikus kockázati tényezők széles körű szétosztódásához vezethetnek.

5. táblázat Adott szintet meghaladó hozam abszolút érték előfordulási valószínűségei

	$\alpha_{5\%} = 2.964$	$\alpha_{2.5\%} = 2.622$	Stabil eloszlás $\alpha_S = 1.737$	Mintaelemek száma
$\|r\| > 0.006$	0.5254	0.8734	0.7544	6
$\|r\| > 0.10$	0.1101	0.2372	0.4405	1
$\|r\| > 0.15$	0.0323	0.0834	0.2329	0
$\|r\| > 0.20$	0.0136	0.0396	0.1479	0

Megjegyzés: Az adott szintet meghaladó hozam abszolút értékek előfordulásának valószínűségeit a becsült farokindexek felhasználásával a Deckers és de Haan-féle felső kvantilis becslő formulával számítottuk, míg a stabil eloszlás feltételezésével adódó valószínűségeket Du Mouchel táblázatából interpolációval határoztuk meg a 2. táblázatbeli $c = 0.651$ paraméter értékkel, és az összehasonlíthatóság biztosítása érdekében $\beta = 0$ választásával.

6. táblázat Az eloszlások határainak megegyezésére vonatkozó próba eredménye

Farokrész méret	15%	10%	5%	2.5%
Alsó korlát	2.460	2.629	2.699	2.618
Felső korlát	2.722	3.089	3.364	3.610

Az alsó és felső korlátok az α azon intervallumainak végpontjai, amelyekre az $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{30}$ feltevés 1% szinten nem utasítható el.

7. táblázat A v_i változó illeszkedés-vizsgálata χ^2-próbával

	15% (20 cella)	10% (16 cella)	5% (10 cella)	2.5% (8 cella)
DAX	16.49	12.83	11.34	2.90
Allianz	24.94	16.09	6.04	4.07
BASF	22.39	8.62	8.20	4.85
Bayer	19.20	16.66	5.07	4.07
Bayr. Hypobank	32.11	30.65	10.13	6.02
BMW	17.92	20.88	11.10	4.46
Bayr. Vereinsbank	17.76	13.98	6.04	4.85
Commerzbank	18.40	14.75	4.35	1.73
Continental	21.43	19.16	11.58	8.76
Daimler	31.95	22.80	16.88	6.41
Dt.Babcock	16.81	19.16	7.24	7.20
Deutsche Bank	19.36	19.92	6.28	6.02
Degussa	19.20	11.49	9.41	6.02
Dresdner Bank	15.37	12.45	17.36	7.20
Henkel	16.17	11.11	2.96	2.90
Hoechst	14.10	12.83	4.59	4.85
Karstadt	24.78	12.26	10.37	5.24
Kaufhof	23.98	34.10	13.99	6.80
Lufthansa	9.96	13.60	10.13	8.76
Linde	10.91	17.43	5.80	6.02
MAN	12.67	15.71	10.31	11.10
Metallges.	25.89	8.81	7.48	7.20
Mannesmann	17.45	13.02	11.82	4.07
Preussag	15.69	14.37	9.17	3.68
RWE	13.94	15.90	6.04	4.85
Schering	4.22	11.11	4.35	1.73
Siemens	14.42	9.00	6.52	3.68
Thyssen	17.92	13.98	11.10	4.46
VEBA	26.21	12.26	9.41	7.98
VIAG	12.98	6.51	12.30	11.10
VW	10.27	12.64	10.86	2.12
95%	30.14	25.00	16.92	14.07
99%	36.19	30.58	21.67	18.48

4. A következtetések összefoglalása

Tanulmányunkban azt vizsgáltuk, hogy a leggyakrabban vásárolt német részvények hozamainak eloszlása közelíthető-e a stabil eloszlásokkal. Arra a következtetésre jutottunk, hogy a részvények fele-kétharmada esetében úgy tűnik, hogy standard próbákat alkalmazva a stabil eloszlás feltételezése elfogadható. Ha azonban ellenpróbát végzünk az extremális értékek eloszlásának szemiparametrikus vizsgálatával, akkor a Pareto-hipotézis a vizsgált esetek többségében határozottan visszautasítható. Ez az eredmény megerősíti azt a korábbi szakirodalom alapján kirajzolódó képet, amely szerint a részvény hozamok empirikus eloszlásának az alakja első pillantásra nagyon hasonlít a stabil eloszlásokéra, az elemzés finomabb módszereinek alkalmazásával azonban kitűnik, hogy ezt a feltételezést el kell vetni. Arra következtethetünk, hogy más típusú eloszlások, mint például a Student-féle t-eloszlás, vagy az ARCH folyamatok alkalmasabbak a pénzpiaci adatok leírására. Mások (ld. például Lux, 1994a) a hozamok eloszlásának származtatására spekulatív folyamatok nemlineáris determinisztikus modelljeit ajánlják, amelyekkel megmagyarázhatók az adatok olyan ismert jellemzői, mint a leptokurtozitás. Továbbá, mivel az extremális értékek eloszlása megegyezésének hipotézise a vizsgált részvények esetében nem vethető el, arra következtethetünk, hogy a DAX megformálásában részt vevő cégek integrációja nagyon magas fokú.

A vizsgálatunk eredményét összevetve a német tőzsdei hozamok korábbi, az 1973 és 1982 közötti periódus vizsgálatának eredményeivel (Akgiray, Booth és Loistl, 1989) azt látjuk, hogy a farokindex becsléseink egy szűkebb intervallumba esnek, neveztesen a $(2,4)$ intervallumba, míg Akgiray et al. arról számolnak be, hogy a farokindex becsléseik tartománya a $(3,13)$ intervallum. Ennek az eltérésnek a legvalószínűbb oka, hogy az általuk alkalmazott maximum likelihood esztimátor kevésbé hatékony.

Ha az itt bemutatott eredményeket olyan részvénypiaci vizsgálatokkal vetjük össze, amelyekben szintén farokindex becslést alkalmaztak, akkor megállapíthatjuk, hogy azok nagyon közel állnak egymáshoz. Megemlítjük, hogy az USA részvénypiacát (Jansen és de Vries, 1991) vagy devizapiacát vizsgálva (Koedijk et al., 1990; Dewachter és Gielens, 1991; Kähler, 1993; Koedijk és Kool, 1993) szintén 2 és 4 közötti értékeket találtak. A határtulajdonságok megegyezése nem csak a német részvényhozamok esetében fogadható el, hanem általános jelenségnek tűnik. Felvetődik ezért a kérdés, hogy léteznek-e olyan közös részvénypiaci jellemzők, amelyek inkább az empirikus eloszlások extremális részeinek viselkedésében, mintsem az eloszlás általános alakjában jutnak kifejezésre. A farokrészek megegyező viselkedése okainak tisztázása további vizsgálatokat igényel.

Irodalom

1. AKGIRAY, V., G. G. BOOTH, 1988: The Stable-Law Model of Stock Returns, Journal of Business & Economics 6, pp. 51–57
2. AKGIRAY,V., G. G. BOOTH, B. SEIFERT, 1988: Distribution Properties of Latin American Black Market Exchange Rates, Journal of International Money & Finance 7, pp. 37–48
3. AKGIRAY, V., G. G. BOOTH, O. LOISTL, 1989: Stable Laws are Inappropriate for Describing German Stock Returns, Allgemeines Statistisches Archiv 73, pp. 115–121
4. CORNEW, R. W., D. E. TOWN, L. D. CROWSON, 1984: Stable Distributions, Futures Prices, and the Measurement of Trading Performance, Journal of Futures Markets 4, pp. 531–557
5. de HAAN, L., S. I. RESNICK, H. ROOTZEN, C. G. de VRIES, 1989: External Behaviour of Solutions to a Stochastic Difference Equation with Applications to ARCH Processes, Stochastic Processes and their Applications 32, pp. 213–224
6. DEKKERS, A. L. M., L. de HAAN, 1989: On the Estimation of the Extreme-Value Index and Large Quantile Estimation, Annals of Statistics 17, pp. 1795–1832
7. DEWACHTER, H., G. GIELENS: A note on the Sum-Stability of Exchange Rate Returns. Catholic University of Leuven: mimeo
8. DuMOUCHEL, W., 1971: Stable Distributions in Statistical Inference, Ph. D. Thesis: Yale University
9. DuMOUCHEL, W., 1983: Estimating the Stable Index α in Order to Measure Tail Thickness: A Critique, Annals of Statistics 11, pp. 1019–31
10. FAMA, E. F., 1963: Mandelbrot and the Stable Paretian Hypothesis, Journal of Business 35, pp. 420–429
11. FRIEDMAN, D., S. VANMDERSTEEL, 1982: Short-run Fluctuations in Foreign Exchange Rates, Journal of International Economics 13, pp. 171–186
12. HALL, J. A., B. W. BRORSEN, S. H. IRWIN, 1989: The Distribution of Futures Prices: A Test of the Stable Paretian and Mixture of Normal Hypotheses, Journal of Financial & Quantitative Analysis 24, pp. 105–116
13. HILL, B. M., 1975: A Simple General Approach to Interference About the Tail of a Distribution, Annals of Statistics 3, pp. 1163-73
14. HOLS, M. C. A. B., C. G. de VRIES, 1991: The Limiting Distribution of External Exchange Rate Returns, Journals of Applied Econometrics 6, pp. 287–302
15. HSU, D.-A., R. B. MILLER, D. W. WICHERN, 1974: On the Stable Paretian Behavior of Stock Market Prices, Journal of the American Statistical Association 69, pp. 1008–13

16. JANSEN, D. W., C. G. de VRIES, 1991: On the Frequency of Large Stock Returns: Putting Booms and Busts into Perspective, Review of Economics & Statistics 73, pp. 18-24
17. KÄHLER, J., 1993: On the Modelling of Speculative Prices by Stable Paretian Distributions and Regularly Varying Tails. ZEW University of Mannheim: mimeo
18. KOEDIJK, K. G., C. J. M KOOL,1983: Tail Estimates of East-European Exchange Rates, Journal of Business & Economics Statistics 10, pp. 83–96
19. KOEDIJK, K. G., P. A. STORK, C. G. de VRIES, 1992: Differences between Foreign Exchange Rate Regimes: The View from the Tails, Journal of International Money & Finance 11, pp. 462–473
20. LEADBETTER, R. G. LINDGREN, H. ROOTZEN, 1983: Extremes and Related Properties of Random Sequences and Process. Berlin: Springer
21. LUX, T., 1994a: Herd Behaviour, Bubbles and Crashes, University of Bamberg: mimeo
22. LUX, T., 1994b: Endogenous Noise in Speculative Markets. University of Bamberg: mimeo
23. MANDELBROT, B., 1963: The Variation of Certain Speculative Prices, Journal of Business 35, pp. 394–419
24. McCULLOCH, J. H., 1986: Simple Consistent Estimators of Stable Distribution Parameters, Communications in Statistics: Simulation 15, pp. 1109–32
25. McFARLAND, J. W., R. R. PETTIT, S. K. SUNG, 1980: The Distribution of Foreign Exchange Price Changes: Trading Day Effects and Risk Measurement, Journal of Finance 37, pp. 693–715
26. MOORE, D. S., 1986: Tests of Chi-Squared Type, Chap. 3 in D'Agostino, R. B., M. A. Stephens, eds., Goodness-of-Fit Techniques. New York: Marcel Dekker Inc.
27. SIMKOWITZ, M. A., W. L. BEEDLES, 1980: Asymetric Stable Distributed Security Returns, Journal of the American Statistical Association 75, pp. 306–312
28. SO, J. C., 1987a: The Distribution of Foreign Exchange Price Changes: Trading Day Effects and Risk Measurement – A Comment, Journal of Finance 42, pp. 181–188
29. SO, J. C., 1987b: The Sub-Gaussian Distribution of Currency Futures: Stable Paretian or Nonstationary? Review of Economics & Statistics 69, pp. 100–107
30. TEICHMOELLER, J., 1971: A Note on the Distribution of Stock Price Changes, Journal of the American Statistical Association 66, pp. 282–284
31. UPTON, D. E., D. S. SHANNON, 1979: The Stable Paretian Distribution, Subordinated Stochastic Process and Asymptotic Lognormality: An Empirical Investigation, Journal of Finance 34, pp. 131–139
32. VARGA, J., 1996: Tests for Randomness in Multiple Financial Time Series, in: Modelling Techniques for Financial Markets and Bank Management, Physical Verlag, Heidelberg, eds. M. Bertocchi, E. Cavalli, S. Komlósi, pp. 259-271.

THE STABLE PARETIAN HYPOTHESIS AND THE FREQUENCY OF LARGE RETURNS: AN EMPIRICAL INVESTIGATION

This paper provides an analysis of daily returns for thirty German stocks forming the DAX share index as well as the DAX itself during the period 1988 to 1994. Estimating the parameters of the stable laws and performing standard tests for fit some evidence in favor of the stable Paretian hypothesis can be found. However, application of a more recently developed semi-parametric technique for analysis of the behaviour in tails of a distribution (Hill's tail index estimator) gives results incompatible with the stable laws and leads to the rejection of the Paretian hypothesis for all stocks considered. Furthermore, strong similarity in the extremal behaviour of the thirty series is found and the hypothesis of identical limit laws of their extreme value distribution can not be rejected.