HÁBORÚ A YIN ÉS A YANG KÖZÖTT[1]
(Fuzzy matematika versus valószínűségelmélet a döntéshozatalban)

PAULER GÁBOR
JPTE-KTK PhD-hallgató

A tanulmányban kísérletet teszünk a fuzzy elmélet és a valószínűségszámítás közti határ definiálására a döntési problémáknál jelentkező bizonytalanság két alapvető típusának megkülönböztetése révén: elkülönítjük az események bekövetkezésének bizonytalanságát az események pontatlan definiálása jelentette bizonytalanságtól. Ezután megvizsgáljuk a két fajta bizonytalanság egy elméleten belüli ábrázolásának lehetőségeit.

Kulcsszavak: a kompatibilitás foka, az ellentmondásmentesség törvényének elvetése, az események definiálásának bizonytalansága, az események bekövetkezésének bizonytalansága, fuzzy valószínűség.

1. Bevezetés

Bár a fuzzy elmélet jelentős fejlődésen ment keresztül a hatvanas évek vége óta, és a fuzzy technológiát hasznosító különféle termékek a kilencvenes évek elején kereskedelmi forgalomban is megjelentek, sok ember számára a fuzzy még mindig 'fekete mágia'. Az előítéletek abban a jelentős különbségben gyökereznek, ami a távol-keleti filozófiákhoz hasonlító fuzzy gondolkodás és az Arisztotelész által megalapozott hagyományos, bivalens logikára épülő elméletek közt fennáll. Ráadásul a fuzzy elmélet létrejötte óta igen erőteljes a rivalizálás a klasszikus és szubjektív valószínűségelmélettel. Az elméletekkel foglalkozók közt igen eltérő nézetek kaptak lábra a fuzzy és a valószínűségelmélet alkalmazhatóságának határával kapcsolatban. A különböző elméleti iskolák közt két évtizede szakadatlanul folyik a háború, a végleges győzelem vagy akár konszenzus reménye nélkül. Jelen tanulmány célja, hogy segítsen tisztázni a fuzzy és a valószínűségelmélet módszerei és tárgya közti különbségről kialakult képet. Kifejezésre kívánjuk juttatni, hogy értelmetlennek tartjuk a két oldal közti csatározást, mert a fuzzy és a valószínűségelmélet

[1] Beérkezett 1996. szeptember 24.

viszonya sokkal inkább komplementer, mint kompetitív. Ez az oka, hogy a Yinről és Yangról szóló példázatot választottuk a tanulmány címéül.

Mielőtt belekezdenénk a fuzzy és a valószínűségelmélet viszonyának taglalásába, röviden felidézünk néhány alapvető definíciót [Zadeh, 1965], amelyekre a későbbiekben gyakran hivatkozunk:

1. Fuzzy halmaz: *olyan halmaz, amelynek elemei különböző mértékben tartoznak a halmazhoz.*

$$A = \{x, \mu_A(x) \mid x \in X\} \tag{1.1}$$

ahol:

A – *fuzzy halmaz*
x – *alaphalmaz elem*
$\mu_A(x)$ – *az adott alaphalmaz elem tagságfüggvénye*
X – *az alaphalmaz univerzuma*

2. Normalizált fuzzy halmaz: *a tagságfüggvény értéke nem haladhatja meg az egyet*

$$\sup_{x \in X} \mu_A(x) = 1\,. \tag{1.2}$$

3. Fuzzy halmaz supportja: *a fuzzy halmaz alaphalmazának olyan alhalmaza, ahol a tagságfüggvény értéke nagyobb, mint 0*

$$S(A) = \{x \in X \mid \mu_A(x) > 0\}\,. \tag{1.3}$$

4. Fuzzy halmaz α-szintű halmaza: *a fuzzy halmaz alaphalmazának olyan alhalmaza, ahol a tagságfüggvény értéke nagyobb (nem szigorú esetben nagyobb vagy egyenlő), mint α.*

Szigorú eset:

$$A_\alpha = \{x \in X \mid \mu_A(x) > \alpha\} \tag{1.4}$$

Nem szigorú eset:

$$A_\alpha = \{x \in X \mid \mu_A(x) \geq \alpha\} \tag{1.5}$$

5. Fuzzy halmaz kardinalitása: *a tagságfüggvény alatti terület.*

Folytonos esetben:

$$|A| = \int_X \mu_A(x)\, dx\,. \tag{1.6}$$

Diszkrét esetben:

$$|A| = \sum_{x \in X} \mu_A(x) \,. \tag{1.7}$$

6. Fuzzy halmazok metszete:

$$C = (A \cap B) \mid \mu_C(x) = \min[\mu_A(x), \mu_B(x)] \qquad \forall x \in X \,. \tag{1.8}$$

7. Fuzzy halmazok uniója:

$$C = (A \cup B) \mid \mu_C(x) = \max[\mu_A(x), \mu_B(x)] \qquad \forall x \in X \,. \tag{1.9}$$

8. Fuzzy halmaz relatív kardinalitása: *a fuzzy halmaz kardinalitása és az alaphalmazának kardinalitása közti arány:*

$$\|A\| = \frac{|A|}{|X|} \,. \tag{1.10}$$

9. Fuzzy halmaz komplementere:

$$\mu_{-A}(x) = 1 - \mu_A(x) \,. \tag{1.11}$$

2. A fuzzy és a valószínűségelmélet ellentmondásos kapcsolata

2.1. Axiomatikus elkülönítés

1. TÉTEL *A fuzzy teljesen független, különálló elmélet, nem a valószínűségelmélet elkorcsosult, vagy leegyszerűsített változata.*

A tétel bizonyítása előtt vizsgáljuk meg, sokak számára miért nem evidens ez a megállapítás. A zavar egyik forrása, hogy a tagságfüggvény és a sűrűségfüggvény első ránézésre meglehetősen hasonló. Normalizált fuzzy halmazok esetén mindkét függvény [0,1] intervallumba történő leképezést jelent. Így a legtöbb ember, aki ismeri a valószínűségelméletet, először találkozván fuzzy halmazzal azt mondja: "Ez majdnem olyan, mint egy sűrűségfüggvény, eltekintve attól, hogy a fuzzy halmaz a legmagasabb csúcsánál fogva normalizált egyhez, míg a sűrűségfüggvény integráljában normalizált." Igaz lenne tehát, hogy a különbség csak a normalizálásban van? A későbbiekben megmutatjuk, hogy a fuzzy halmaz teljesen más, mint a sűrűségfüggvény, nem egy 'módosított verzió'. Ezenkívül, komoly viták folytak a szakirodalomban a két elmélet alkalmazhatóságának határairól:

- A Bayes-i statisztikai iskola különböző tagjai [Jaynes 1979], [Cox 1946], [Lindley 1987] kifejtették, hogy a valószínűség mindenféle bizonytalanság egyetlen helyes mércéje, mivel mind objektív frekvenciák, mind szubjektív kognitív állapotok mérésére alkalmas, így a fuzzy csak a szubjektív valószínűségelmélet más terminológiával történő újradefiniálása.
- Bart Kosko, a kaliforniai MIT Fuzzy Tanszékének vezetője [Kosko 1992, 286. p.] megpróbálta bebizonyítani, hogy a valószínűségelmélet csak egy speciális esete a fuzzy-nak. Gondolatmenetét a későbbiekben még részletesen megvizsgáljuk.

A szakirodalomból úgy tűnik, hogy a két elmélet közt nagyon éles a verseny, és néhány radikális szerző egyszerűen 'meg akarja ölni' a másik elméletet. Mi igyekszünk megmutatni, hogy a két elmélet inkább kiegészíti, mint kiküszöböli egymást. Elsőként, igazoljuk a fenti tételt.

1. BIZONYITÁS. A fuzzy elmélet nem fogadja el a következő alapvető axiómákat, amikre a valószínűségelmélet (és minden más, bivalens logikát használó elmélet is) épül:

1. Az ellentmondás-mentesség törvénye, melyet először Arisztotelész definiált, kimondja, hogy bármely halmaz komplementer halmazával alkotott metszete üres halmaz:

$$A \cap A^c = \emptyset\,. \tag{2.1}$$

A fuzzy halmazokra az ellentmondás-mentesség törvénye nem érvényes (lásd az 1. ábrát – a metszet és unió fuzzy halmazok kardinalitásait is feltüntettük, hogy kihangsúlyozzuk az üres halmaztól, illetve a teljes eseménytértől való eltérést).

$$A \cap -A = \emptyset\,. \tag{2.2}$$

2. A kizárt közepek törvénye kimondja, hogy bármely halmaz komplementerével alkotott uniója megegyezik a teljes eseménytérrel (U):

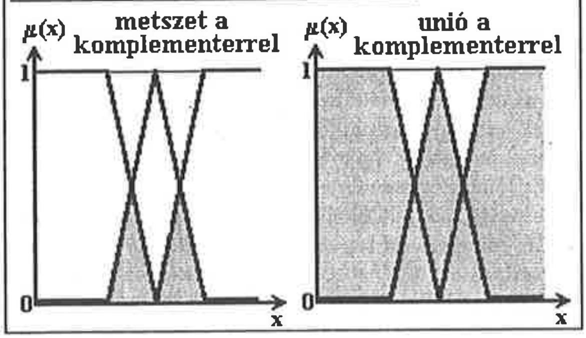
$$A \cup A^c = U\,. \tag{2.3}$$

A fuzzy halmazokra ez szintén nem érvényes (lásd 1. ábra):

$$A \cup -A \subset U\,. \tag{2.4}$$

Így a fuzzy elmélet nem lehet a valószínűségelmélet variánsa, mert eltérő axiómákra épül. q.e.d.

1. ábra Axiomatikus különbségek



A fentiek miatt a fuzzy elméletben egyszerűen megoldható a bivalens logika számos olyan dilemmája, amely az ellentmondás-mentesség törvényére épül, de a fuzzy teljesen más gondolkodásmódot igényel, mint a bivalens elméletek.

1. PÉLDA *Az ellentmondás-mentesség törvényén alapuló dilemmák:*

1. Russel borbélya: egy kisvárosban élő borbély a következő táblát tette ki üzletére: 'Én borotválok minden embert a városban, kivéve azokat, akik saját maguk borotválkoznak.' Ki borotválja a borbélyt?

2. A krétai hazudozó azt mondta az athéniaknak: 'Minden krétai mindig hazudik.' Igaz ez, vagy nem?

3. A fél pohár víz félig üres, vagy félig tele van?

4. A vádlott azt mondja a bíróságon: 'Vigyázat, hazudok!' Igaz ez, vagy nem?

2.2. A bizonytalanság két arca

Az előző részben bizonyítottuk, hogy a fuzzy elméletnek eltér az axiomatikus alapja a valószínűségelmélettől. Most a két elmélet tárgya közti különbséget vizsgáljuk meg. Mindkét elmélet valamiféle bizonytalansággal foglalkozik. Alapvető feltételezésünk, hogy a valós döntési helyzetek bizonytalanságát két részre lehet felosztani:

2. TÉTEL *A fuzzy és a valószínűségelmélet a döntési probléma bizonytalanságának két különböző oldalát írják le. A valószínűségelmélet az események*

bekövetkezésének bizonytalanságával foglalkozik, míg a fuzzy az események pontatlan definiálásából származó bizonytalansággal.

A tételt a következő részben indirekt módon fogjuk bizonyítani (lásd 3.10, 3.11, 3.12 illetve 3.13, 3.14). Most körülírjuk a fennálló különbség jellegét:

– A valószínűség pontosan definiált, éles, absztrakt események (lásd 3.10, 3.11, 3.12) bekövetkezésének objektív frekvenciáját méri. Vagy, szubjektív valószínűség esetén, pontosan definiált, absztrakt események szubjektív frekvenciáját. A valószínűségelméletben feltesszük, hogy az eseménytérben szereplő események mindig pontosan definiálhatók, az események bekövetkezése pedig sztochasztikus jellegű. Igen érdekes kérdés, hogy a valószínűségelmélet miért alapul kizárólag éles eseményeken, amikor ezek oly ritkák a valós döntési környezetben. 'Az ég kék', 'a fű zöld', 'a Microsoft egy dinamikus cég' és az ezekhez hasonló, mindennapi tapasztalatokra alapuló tények nagyrészt pontatlanul megfogalmazott állítások, az '1+1=2' típusú matematikai állítások absztrakt világával szemben. J. A. Anderson a Brown Egyetem Kognitív és Nyelvészeti Tudományok Tanszékéről [Kosko, 1992, XXII. p.] igen tanulságos magyarázatot adott erre kérdésre. A klasszikus valószinűségelmélet a szerencsejátékok környezetében alakult ki, ahol a pontosan definiált játékszabályoknak alapvető fontossága van. Pontos, előre rögzített szabályok nélkül szerencsejáték nem is létezhet (ettől eltérő esetek már a büntetőjog területéhez tartoznak). Ez a környezet arra inspirálta a valószínűségelmélet korai művelőit, hogy figyelmüket kizárólag az események sztochasztikus bekövetkezésére koncentrálják, mert az események mindig pontosan definiáltak voltak. Érdemes elgondolkodni azon, hogyan fejlődött volna a valószínűségelmélet, ha például az időjárás- előrejelzés területén kezdik el először alkalmazni.

– A fuzzy elmélet pontatlanul definiált, determinisztikus bekövetkezésű eseményekkel foglalkozik. Az 'esemény' itt egy komplex, sokjellemzős objektumot jelent. A fuzzy filozófiájának alapfeltevése, hogy mindig van néhány rejtett jellemző, vagy olyan változó, amelynek értéke nem határozható meg a mérési módszerek és az emberi érzékelés pontatlansága, korlátai miatt, így az események nem definiálhatók pontosan. A tagságfüggvény az alaphalmaz adott elemének egy eseményhez viszonyított kompatibilitási fokát méri. A kompatibilitás foka általában nem határozható meg objektív módon, hiszen egy halmazelemnek egy pontatlanul definiált és igen összetett objektumhoz történő hasonlításból származik. Lássunk mindennek illusztrálására egy példát.

2. PÉLDA *Mi a különbség a következő alternatívák közt?*

1. *Egy fél pizza van a mikrosütőben.*
2. *50% az esélye, hogy van egy pizza a mikrosütőben.*

Melyik pizzát választaná, ha éhes? Mindkét esetben fellép valamilyen bizonytalanság:

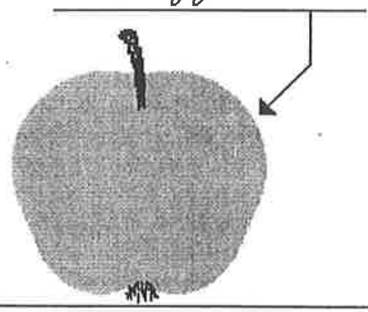
1. Az első esetben, amely fuzzy esemény ír le, biztos, hogy van valami a mikróban. A baj csak az, hogy egy pizza a valóságban igen bonyolult objektum, sok jellemzővel: íz, hozzávalók, szín, illat, energiatartalom, súly stb. Nem mondhatjuk azt, hogy 'fél pizza az 0.5 × egy pizza'. Lehetetlen egy pizzát pontosan két egyforma részre vágni, az egyik felén több sajt lesz, a másik felén több ketchup. Ahelyett, hogy megpróbálnánk egy igen bonyolult, sokváltozós formulát alkotni a '0.5 × pizza' pontos definiálására, rendeljünk hozzá a mikrosütőben fekvő objektumhoz egy [0,1] intervallumbeli skalárt, amellyel kifejezzük a köztudatban pizzaként szereplő objektumhoz mért kompatibilitási fokát. Ezen a módon erősen lecsökkentettük a probléma dimenziószámát, a 'köztudat' információs bázisára támaszkodva. (Ezt a jelenséget később még részletesen tárgyaljuk).

2. A második, valószínűségelméleti esetben, nem biztos, hogy egyáltalán van valami a mikrosütőben. Mint fentebb megjegyeztük, itt az esemény pontosan definiált, de bekövetkezése bizonytalan. Ebben az esetben egy absztrakt pizza-definíciót alkotunk a legfontosabb döntési változók és a rájuk vonatkozó feltételek felhasználásával. Ha egy mikrosütőben megfigyelt objektum kielégíti az összes feltételt, 'pizza' eseményként regisztráljuk, ellenkező esetben 'nem pizza'-ként, vagyis a döntés bivalens. Még a szubjektív valószínűségelmélet is feltételezi, hogy az egyedek képesek bármilyen esemény felől bivalens módon dönteni, csak a döntések változnak az egyedek közt sztochasztikus módon:

Folytatván példánkat, feltesszük, hogy ha egy teljesen elszenesedett, fekete, korong alakú, mikrosütőben fekvő tárgyat mutatunk megfigyelők egy csoportjának, mindenki egyértelműen el tudja dönteni, hogy ez pizza vagy nem pizza, de a döntés a megfigyelők körében szubjektív módon váltakozik.

Vizsgáljunk meg a fuzzy és a valószínűségelmélet közti néhány további különbséget. A fuzzy erősen támaszkodik az emberi agynak azon képességére, hogy a 'köztudatban' szereplő bonyolult, soktényezős objektumok közt kompatibilitási mértéket képes becsülni. Nagyon nehéz dolog viszont pontosan definiálni, mit jelent a köztudat. Elsőként, lássunk egy példát a hatásáról:

3. PÉLDA



A legtöbb ember, aki meglátja ezt a képet, azt fogja mondani 'Nem, ez nem szék, hanem egy alma.'. Vagyis, egy bonyolult, komplex objektumot igen nagy biztonsággal ismernek fel egy primitív reprezentációból. Agyuk mintafelismerő képességét és tudásbázisukat használják minden nehézség nélkül. Ezzel szemben, meglehetősen bonyolult dolog az 'alma' objektumot analitikusan definiálni: a szín-, forma-, illatváltozatok száma igen magas. Sőt, ha feltesszük, hogy sikerül analitikus formulával definiálni az almát, ez bivalens döntéseket jelent (alma vagy nem) a megfigyelt objektumokról, a fuzzy megközelítés finom árnyalatai helyett. Bonyolult objektumok esetében ez a rugalmatlanság, darabosság nem túlságosan hasznos dolog. A fent leírtak együttesen azt eredményezik, hogy a fuzzy – amely első ránézésre igen primitív elméletnek tűnik a valószínűségelmélettel összehasonlítva – igen jó eredményeket produkálhat valós döntési helyzetekben. Bár, a problémaméret csökkentéséért és a rugalmasságért nagy árat kell fizetni. Az emberi szubjektivitás nagy szerepet kap fuzzy rendszerek esetén. Míg a standard normális eloszlás Kínától Kanadáig standard normális eloszlás marad, a fuzzy halmazok és fuzzy változók sokkal inkább alkalmazásfüggők, és igen veszélyes más alkalmazásokba átvinni őket. A fuzzy és a valószínűségelmélet az elméleti rész és az alkalmazás szempontjából inverz viszonyban állnak egymással. A fuzzy elméleti része elég kicsi és inkább az alkalmazás területén jeleskedik. A valószínűségelmélet nagyon konzisztens elméleti rendszer, ahol 'tíz tizedesjegy pontossággal' definiálhatunk dolgokat, de nagyon komoly problémák vannak az elméleti eredmények gyakorlati alkalmazásával bizonyos területeken.

Még egy érdekes különbség van a fuzzy és a valószínűségelmélet közt.

A valószínűség időben eltűnik, még a fuzziság nem. Vizsgáljuk meg a 4. példát alább. A jövő héten már igen pontosan és biztosan tudni fogjuk, hány százalékkal változott meg a részvényárfolyam. De a 'kismértékű növekedés' esemény akkor is pontatlanul definiált marad, mert bizonytalansága az emberi érzékelés és felismerés különbözőségein alapul.

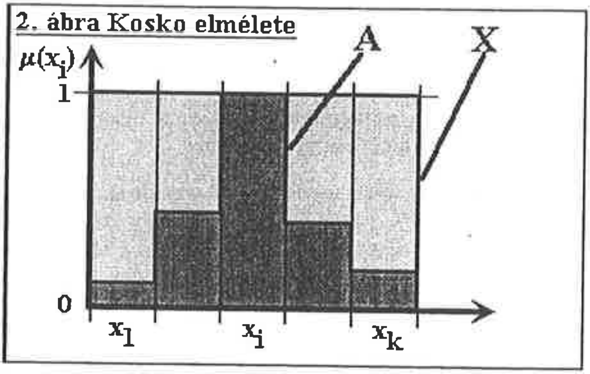
Mindkét elméletben skaláris mértékeket használunk, teljesen eltérő típusú bizonytalanság kifejezésére. Már említettük, hogy ez félreértésekre adhat okot. A zavar másik fő forrása, hogy a fuzziság és a valószínűség a legtöbb valós döntési problémában együttesen jelentkezik.

4. PÉLDA *Részvényárfolyam becslés. — A részvényár a jövő héten valószínűleg kismértékben emelkedni fog — mondta a bróker.*

A fenti állítás mindkét fajta bizonytalanságot tartalmazza. Egyrészt, van egy (gyakran ismeretlen) sűrűségfüggvény a részvényárfolyam egyes százalékpontos változásainak valószínűségéről. Másrészt, mint fentebb megjegyeztük, bizonytalan, hogy mit jelent a 'kismértékű növekedés' százalékpontban az adott bróker, papír és piac esetén, így fuzziság is megjelenik. A következő két részben azt vizsgáljuk, lehetséges-e a két fajta bizonytalanságot egy elmélet keretein belül kezelni.

3. Visszavezethető-e a fuzziság a valószínűségre?

Ebben a részben kísérletet teszünk a fuzzy valószínűségre történő visszavezetésére Bart Kosko munkáinak felhasználásával [Kosko 1992, 286.p.]. Ez egy kicsit meglepő lehet az érdeklődő olvasók számára, hiszen ő eredetileg az ellenkező dolgot igyekezett bizonyítani. Koskonál a valószínűségelmélet a fuzzynak csak egy speciális esete, bár koncepciója sokkal inkább a fuzzy valószínűségi terminológiával történő újradefiniálásának tűnik. Először megvizsgáljuk elméletét, eltekintve az általa alkalmazott terminológiától, amely a fuzzy halmazokat n-dimenziós egység hiperkockaként értelmezi és hiperkocka-geometria segítségével bizonyít tételeket. Az egyszerűség kedvéért, 'hagyományos' diszkrét fuzzy halmazokon mutatjuk be nézeteit. Második lépésben, meg fogjuk mutatni, hogy megközelítése ellentmondást hordoz. Korrigáljuk elméletét és megkíséreljük a fuzziságot valószínűségre visszavezetni. Végül megmutatjuk, hogy a fuzzy valószínűségre redukálása félrevezető.



2. ábra Kosko elmélete

3.1. Kosko elmélete

1. Tételezzük fel, hogy a fuzzy halmazok alaphalmazai diszkrét, megszámlálható, véges halmazok.

2. Egy fuzzy halmaz univerzuma egy speciális fuzzy halmaz, amelynek tagságfüggvénye 1 minden alaphalmaz elem fölött (lásd 2. ábra).

3. A fuzzy halmaz alhalmazsága B fuzzy halmazban:

$$S(A,B) = \frac{|A \cap B|}{|A|} . \tag{3.1}$$

Egy fuzzy halmaz univerzumához mért alhalmazsága megegyezik az univerzumához mért relatív kardinalitásával:

$$S(X,A) = \frac{|X \cap A|}{|X|} = \frac{|A|}{|X|} = \|A\| . \tag{3.2}$$

4. Minden fuzzy halmazhoz hozzá lehet rendelni egy relatív frekvenciát (valószínűséget): ez megegyezik az univerzumhoz mért relatív kardinalitással, vagy alhalmazsággal:

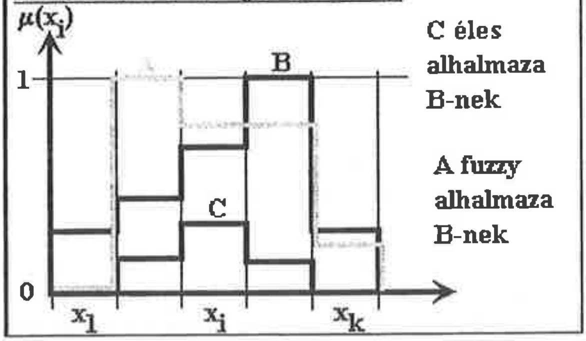
$$P_A = \frac{N_A}{N} = \|A\| = \frac{|A|}{|X|} , \tag{3.3}$$

ahol:

P_A – az A fuzzy halmaz által leírt komplex objektum, esemény valószínűsége

N_A – azon megfigyelések száma, ahol a megfigyelő felismerte az eseményt
N – az összes megfigyelés száma.

3. ábra Éles és fuzzy alhalmazok



5.1. C fuzzy halmaz éles alhalmaza B fuzzy halmaznak (lásd 3. ábra), ha:

$$C \cap B = C \,. \tag{3.4}$$

5.2. A fuzzy halmaz fuzzy alhalmaza B fuzzy halmaznak (lásd 3. ábra), ha:

$$A \cap B = A \,. \tag{3.5}$$

Összefoglalván a fenti feltevéseket és definíciókat, Kosko kijelentette, hogy a fuzzy halmazok éles alhalmazsága mindenféle valószínűséget ki tud fejezni, még a valószínűség nem tudja kifejezni fuzzy halmazok fuzzy alhalmazságát. Például, valószínűséggel nem lehet kifejezni A kapcsolatát B-hez. Így a valószínűség a fuzziságnak csak egy speciális esete.

3.2. Kritika

Nem értünk egyet Kosko fenti következtetésével, mert megközelítése ellentmondást hordoz. Először vegyük szemügyre a negyedik feltételezést, amely implicit módon további két feltételezést tartalmaz:

4.1. A megfigyelők mindig egyértelműen el tudják dönteni, hogy az aktuálisan megfigyelt alaphalmaz elem A eseményre vonatkozik vagy nem, de ez a döntés egyénenként sztochasztikusan változik (ez nagyon hasonlít a szub-

4.2. Minden x_i alaphalmaz elem feletti tagságfüggvény érték kifejezhető relatív frekvenciaként:

$$\mu_A(x_i) = \frac{n_{Ai}}{n_i} \qquad i = 1, \ldots, k , \tag{3.6}$$

$$\sum_{i=1}^{k} n_{Ai} = N_A , \tag{3.7}$$

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = N , \tag{3.8}$$

ahol:

n_{Ai} – az egyedi döntések száma, ahol 'x_i megfelel A-nak'
n_i – az x_i-re vonatkozó megfigyelések száma
x_i – alaphalmaz elemek

4.2.-ben csak annyit feltételeztünk, hogy N_A-t és N-t lehetséges n_{Ai}, illetve n_i részekre darabolni, aszerint, hogy a megfigyelések mely alaphalmaz elemre vonatkoznak. A 4. feltételezés és 4.2 implicit feltételezés összevetésével viszont ellentmondást kapunk:

$$P_A = \frac{N_A}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_{Ai}}{\sum_{i=1}^{k} n_i} = \frac{\sum_{i=1}^{k} \left(\frac{n_{Ai}}{n_i}\right)}{k} = \frac{|A|}{|X|} = \|A\| . \tag{3.9}$$

3.3. Korrigált megközelítés

Kosko elmélete azért vezetett ellentmondásra, mert figyelmen kívül hagyta, hogy a fuzzy halmazok univerzuma is hordozhat bizonytalanságot. Az alaphalmaz elemei közt sok esetben egy bekövetkezéssel kapcsolatos valószínűség-eloszlás is fennállhat, mindenféle fuzzy halmaztól függetlenül. Illusztrációképpen, lássuk a korábbi 4. példát sokkal részletesebben. Mint azt már említettük, a kijelentés kétfajta bizonytalanságot hordoz:

– Egyrészt van egy valószínűségeloszlás a részvényárfolyam változásának lehetséges értékei közt. Tételezzük fel, hogy D sűrűségfüggvény ismert (lásd 4. ábra). Diszkrét árfolyamváltozás százalékpontokra értelmezett sűrűségfüggvényt tételezünk fel az egyszerűség kedvéért. A százalékpontok -2-től $+3$-ig egyszerű, közvetlenül megfigyelhető események. Ugyanazon eseménytéren osztoznak, metszetük nincs (lásd a tortadiagrammot a 4. ábrán):

$$U = \bigcup_{i=1}^{k} x_i \tag{3.10}$$

$$x_i \cap x_j = \emptyset \qquad i,j = 1,\ldots,k\,, \quad i = j \tag{3.11}$$

$$p(U) = \sum_{i=1}^{k} p(x_i) = 1\,. \tag{3.12}$$

– Másrészt, van egy pontatlanul definiált, komplex eseményünk – 'kis mértékű növekedés a részvényárban' – amit F fuzzy halmazzal írunk le. Feltételezzük, hogy a tagságfüggvényt korábbi piaci tapasztalatok alapján alkották meg. A fuzzy halmazoknak a sűrűségfüggvényektől teljesen eltérő belső struktúrája van. Minden x_i alaphalmaz elem felett egy U_{x_i} szeparált eseménytér helyezkedik el, amelyet az aktuális $\mu_F(x_i)$ tagságfüggvény érték csak a komplementer fuzzy halmaz megfelelő $\mu_{-F}(x_i)$ tagságfüggvény értékével oszt meg (lásd a 3 feletti eseményteret a 4. ábrán):

$$U_{x_i} = 1 = \mu_F(x_i) + \mu_{-F}(x_i)\,, \tag{3.13}$$

$$1 \geq \mu_F(x_i), \mu_{-F}(x_i) \geq 0\,. \tag{3.13}$$

Így egy adott alaphalmaz elem feletti tagságfüggvény értéket nem korlátoznak más tagságfüggvény értékek. A +2% elem tagsága 1, még a +3% elem tagsága 0.5. A sűrűségfüggvény esetén ez (3.12) miatt nem lehetséges. Láthatjuk, hogy a tagságfüggvény és a sűrűségfüggvény közti különbség nem egyszerűen normalizálás kérdése. A következő részben majd megmutatjuk, hogy a sűrűségfüggvények és a tagságfüggvények kezelése is eltérő operátorokat igényel.

Mindezek után az a kérdés, hogyan kombinálható a két fajta bizonytalanság a valószínűségelmélet keretein belül. Ehhez felhasználjuk a 4.1 és 4.2 implicit feltételezéseket, amelyeket a koskoi elmélet kritikájánál definiáltunk. Szorozzuk össze minden alaphalmaz elem felett a tagságfüggvény és a sűrűségfüggvény értékét (lásd a sötét színű oszlopokat az $F \times D$ oszlopdiagrammon a 4. ábrán):

$$f_{F\times D}(x_i) = p(x_i) \times \mu_F(x_i) \quad \forall i = 1,\ldots,k\,. \tag{3.15}$$

Könnyebben érthető ez a művelet, ha elképzeljük, hogy el akarjuk különíteni azokat az eseteket, amikor a megfigyelők felismerték x_i alaphalmaz elemből F komplex eseményt. (Pl. Hány ember mondta a megfigyelők közül a 3%-os növekedésre, hogy ez 'kis mértékű növekedés'?) Mivel a sűrűségfüggvény alatti terület az összes megfigyelést jelenti, az előbbi művelettel ennek egy részét definiáltuk. Vegyük szemügyre az $F \times D$ oszlopdiagrammot: a szürke négyzetek olyan megfigyelés-adagokat jelentenek, ahol a megfigyelő nem ismerte fel F komplex eseményt, a fekete négyzetek olyan megfigyelés csomagokat jelentenek, ahol a felismerés megtörtént. (3.6), (3.7), (3.8) alapján

$F \times D$ kardinalitása kifejezhető relatív frekvenciaként, vagyis valószínűségként:

$$P_F = \frac{N_F}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_{Fi}}{\sum_{i=1}^{k} n_i} = \frac{|F \times D|}{|D|} = \frac{|F \times D|}{1} = |F \times D| \,, \tag{3.16}$$

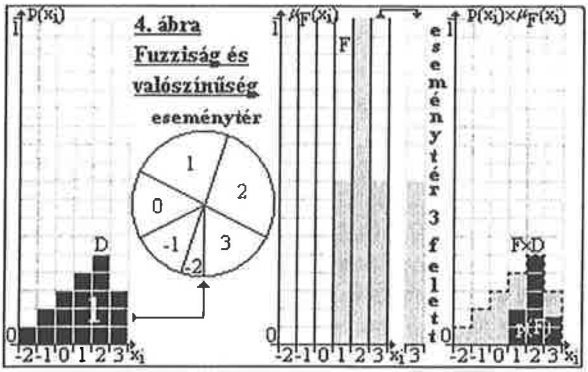
ahol:

n_{Fi} – az egyedi döntések száma, ahol 'x_i megfelel F-nek';

n_i – az x_i-re vonatkozó megfigyelések száma;

x_i – alaphalmaz elemek;

$F \times D$ relatív kardinalitása D sűrűségfüggvényhez és $F \times D$ abszolút kardinalitása megegyeznek, mert a sűrűségfüggvény kardinalitása mindig 1.



4. ábra Fuzziság és valószínűség

Így sikerült leírni a 4. példában szereplő kijelentés hordozta mindkét fajta bizonytalanságot egyetlen valószínűségi skalárral. Ezen a ponton úgy tűnik, 'megöltük' a fuzzy elméletet, visszavezetve azt a valószínűségelméletre.

3.4. Miért nem működik a dolog?

Mielőtt a fenti, lehengerlő győzelmet arattuk a fuzzy felett, felhasználtuk 4.1 és 4.2 implicit feltételeket. A probléma az, hogy ezek arányskálaként értelmezik a tagságfüggvény értéket: azon megfigyelők arányát fejezi ki, akik felismerték a komplex eseményt, így a skálának van abszolút 0 pontja (senki nem ismerte fel). Valójában a tagságfüggvény inkább intervallum skála. Ezt illusztrálandó, képzeljük el, hogy a lovakat, mint komplex objektumokból álló osztályt fuzzy halmazok segítségével kívánjuk definiálni, különféle változók, mint alaphalmazok felhasználásával. A baj az, hogy nem tudjuk definiálni az 'abszolút ló' és 'abszolút nem ló' objektumokat, mert különféle inverz hatások állnak fent a változók közt, sőt nem biztos, hogy minden változót ismerünk, a megfigyelők érzékelése pontatlan, kognitív kapacitása korlátozott stb. Az ideál és antiideál hiánya megakadályozza, hogy olyan módszereket alkalmazzunk a tagságfüggvény érték megállapításánál, amelyek az ideáltól és antiideáltól mért Hamming-, euklideszi-, vagy más távolságokon alapulnak (pl. TOPSIS soktényezős döntéshozatali módszer [Chen-Ching-Hwang 1992, 38. p.]). Így különböző alaphalmaz-elemek komplex eseménytől mért távolsága nem mérhető arányskálán, sőt az intervallum skála végpontjai is bizonytalanok, változóról változóra változnak. Ezért a tagságfüggvény érték semmiképpen sem értelmezhető relatív frekvenciaként, amint azt a 4.1-nél és 4.2-nél feltételeztük.

Ezen a ponton felvetődik egy fontos kérdés. Ha egy fuzzy halmaz egyik tagságfüggvény értékét nem tudjuk pontosan összehasonlítani egy másik fuzzy halmaz tagságfüggvény értékeivel, amelynek eltérő az alaphalmaza, hogyan fogjuk a két fuzzy halmazt mint operanduszokat használni egy fuzzy műveletnél? A későbbiekben látni fogjuk, hogy óvatosan kiválasztott fuzzy operátorokat használó fuzzy rendszerek jól tolerálják ezt a nehézséget.

4. Visszavezethető-e a valószínűség fuzziságra?

Ebben a részben azokat a módszereket tesszük vizsgálat tárgyává, amelyek egy valós döntési problémánál felmerülő mindkét fajta bizonytalanságot a fuzzy elmélet keretein belül kívánják ábrázolni.

4.1. Tagságfüggvények sűrűségfüggvényekből?

Amint azt korábban említettük, a fuzzy halmazok és a sűrűségfüggvények első ránézésre nagyon hasonlóak. Nagy a csábítás, hogy egyszerűen átnormalizáljunk egy sűrűségfüggvényt a legmagasabb csúcsánál fogva egyhez és azt mondjuk: 'Ez a tagsági érték azon állítás igazságának foka, hogy az adott alaphalmaz elem, mint egyszerű esemény bekövetkezésének a legnagyobb a valószínűsége.'. Sőt, egyes szerzők [Cox 1994, 75. p.] kísérletet tettek a Gauss-féle görbe (4.1) tagságfüggvényként történő felhasználására. Úgy gondoljuk, hogy ezek a próbálkozások nagyon veszélyesek és zavaróak három okból kifolyólag:

1. Amint az az előző részben kifejtettük, a fuzzy halmazoknak és a sűrűségfüggvényeknek teljesen eltérő a belső struktúrája. Az átnormalizálás eltünteti ezt a különbséget, ami erősen félrevezető lépés.

2. Amíg a valószínűség arány skálán mért, a tagság intervallum skálán.

Nagyon veszélyes vállalkozás egy fuzzy rendszer eredmény fuzzy halmazát egyszerűen visszakonvertálni sűrűséggé.

3. Az előző két probléma egyre fenyegetőbb lesz, ha számos műveletet végzünk az átkonvertálásból származó fuzzy halmazokkal, mert másfajta operátorok illeszkednek a fuzzy halmazok mint a sűrűségfüggvények kezeléséhez. A különbség eredete az, hogy a fuzzy halmazok inkább a profiljukban hordozzák az információt, míg a sűrűségfüggvények integráljukban. Példaként hozható fel a normális eloszlás sűrűségfüggvénye (4.2), amely a Gauss-féle görbén (4.1) alapul. A függvény formája minden egyes szórási értéknél más és más, az integrálja viszont mindig egy marad.

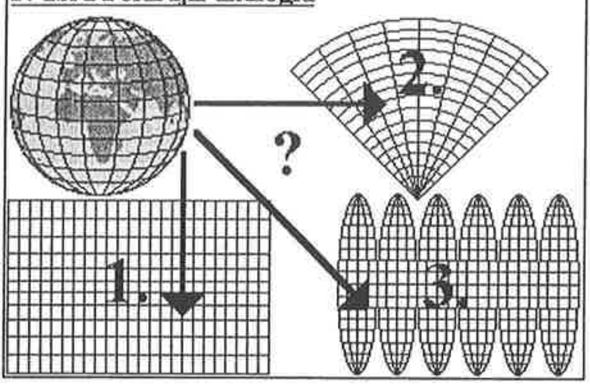
$$y = e^{-k(x-m)^2} \tag{4.1}$$

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \tag{4.2}$$

A valószínűségelmélet operációi a sűrűség-integrálok konzisztens megőrzésére törekednek, de ez a profilok nagy torzulásával jár. A legtöbb fuzzy operátor viszont (pl. maxmin kompozíció) nagyon érzékenyek a fuzzy operanduszok profiljaira, viszont erősen torzítanak a kardinalitásokat illetően. Az eredmény fuzzy halmaz kardinalitása elég semmitmondó lesz néhány művelet után.

5. PÉLDA *Földrajzi analógia. Hasonló jellegű problémával találkozunk a térképészetben: a Föld gömbfelületét lehetetlen torzió nélkül síkba kiteríteni. Különböző leképezési technikák léteznek (lásd 5. ábra), amelyeknek kölcsönös előnyeik és hátrányaik vannak.*

5. ábra Földrajzi analógia



Az 1. módszer megőrzi a kontinensek formáját, de nagyon torzítja a területeket. A 2. módszer a területeket őrzi meg a formával szemben. A 3. kompromisszumos módszer a gyakorlatban diszkontinuitása miatt nem használható.

A fentiekből nyilvánvaló, hogy ha fuzzy operátorokkal kezelnénk átnormalizált sűrűségfüggvényeket, azok néhány művelet után minden valószínűségi jellegüket elvesztenék. Felvetődik a kérdés, miért nem használhatunk a valószínűséghez illeszkedő operátor fajtákat (pl. szorzat-összeg kompozíció) ezen fuzzy halmazok kezelésére? Ezen megoldás hatékonytalanságának illusztrálására kitérőt kell tennünk a fuzzy aritmetika irányába, amely az extenziós alapelvre épül.

Az extenziós alapelvet L. A. Zadeh vezette be [Zadeh, 1973], éles aritmetikai operátorok fuzzyvá konvertálása céljából. Az egyszerűség kedvéért diszkrét fuzzy számokon és csak két operandusz esetén mutatjuk be működését. Az érdeklődők könnyen általánosíthatják ezt több operandusz esetére.

– Tételezzük fel, hogy A és B két fuzzy operandusz, alaphalmazaik univerzuma U_a ,illetve U_b.

– $x_{a1}, \ldots, x_{an} \in U_a$ és $x_{b1}, \ldots, x_{bn} \in U_b$ a két fuzzy halmaz alaphalmazának diszkrét értékei.

– Legyen Z a művelet eredményeként létrejövő fuzzy szám, U_z alaphalmazuniverzummal és $z_1, \ldots, z_k$ diszkrét alaphalmaz értékekkel.

– Legyen f egy függvény, ami $U_a \times U_b$-t U_z-be képezi le, vagyis $z = f(x_a, x_b)$. Ez az éles aritmetikai operátor, amit fuzzifikálni akarunk.

– A és B Cartesian szorzata legyen:

$$\begin{aligned} C &= \{(x_{ai}, x_{bj}), \min[\mu_{\tilde{A}}(x_{ai}), \mu_{\tilde{B}}(x_{bj})]\} \\ &\forall x_{ai}, x_{bj},\ i = 1 \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m\,. \end{aligned} \tag{4.3}$$

– Z eredmény fuzzy halmazt a következőképpen kaphatjuk meg A-ból és B-ből:

$$Z = \{[Z_1, \mu_{\tilde{Z}}(Z_1)] \mid Z_1 = f(x_{ai}, x_{bj}),\ x_{ai} \in U_a,\ x_{bj} \in U_b\} \tag{4.4}$$

ahol

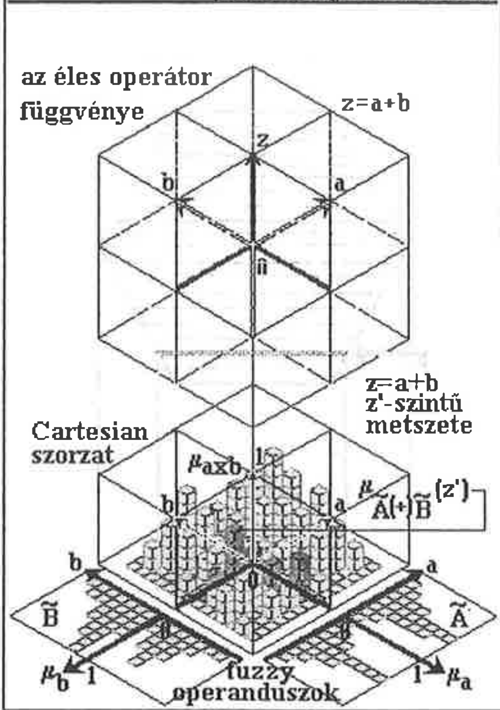
$$\mu_{\tilde{Z}}(Z_1) = \begin{cases} \max\min_{Z_1 = f(x_{ai}, x_{bj})} [\mu_{\tilde{A}}(x_{ai}, \mu_{\tilde{B}}(x_{bi})] & \text{ha } f^{-1}(z_1) = 0; \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

6. PÉLDA *Fuzzy összeadás. A könnyebb érthetőség kedvéért, lássunk egy grafikus példát két operandusz összeadására (lásd 6. ábra). A kérdés, hogy hogyan határozzuk meg az eredmény fuzzy halmaz alaphalmazának egy egyedi z′ értékéhez rendelt tagságfüggvény-értéket. Kiinduláskor az éles operátort jelentő függvényt ($z = x_a + x_b$), valamint A és B halmazok Cartesian szorzatát*

ismerjük. A következő lépésben meghatározzuk az éles függvény z'-szintű metszetét (olyan (x_{ai}, x_{bj}) párokat keresünk, ahol $x_{ai} + x_{bj} = z'$). A Cartesian szorzatban is megkeressük ezeket a párokat (lásd a sötétebb oszlopokat a Cartesian szorzat oszlopdiagrammjában). Harmadik lépésben a maximumát vesszük az elhatárolt elemek tagságfüggvény értékeinek, ez lesz z' tagságfüggvény értéke az eredmény fuzzy halmazban. Ezt a három lépést minden z értékre meg kell ismételnünk.

Az extenziós elv legnagyobb problémája, hogy nem alkalmazható közvetlenül a gyakorlatban, mert nagyon sok gépidőt fogyasztó probléma az éles függvény z' szintű metszetét meghatározni, főként ha sok operandusz van, folytonos közelítés szükséges és az operátorfüggvény bonyolult. Ezért különböző szerzők [Jain 1976], [Mizumoto & Tanaka 1976], [Baas & Kwakernak 1977], [Dubois & Prade 1980] egyszerűsített módszereket vezettek be, amelyek mind az extenziós elven alapulnak.

6. ábra Grafikus példa fuzzy összeadásra

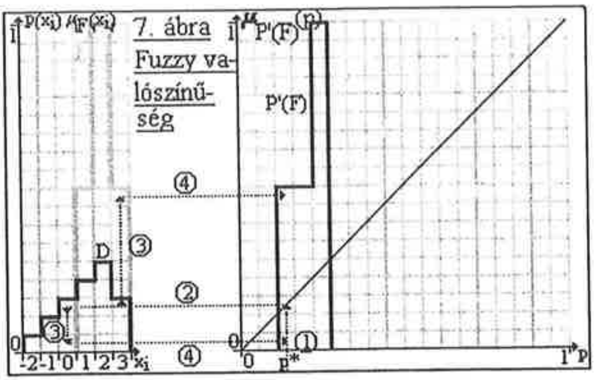


Visszatérve a fuzzy és a valószínűségi operátorok közti különbségre, ha a az extenziós elvben maxmin kompozíció helyett szorzat-összeg kompozíciót alkalmaznánk, ez nagyon komoly analitikus problémát jelentene, amelynek rendkívül magas a számítási igénye, és nincs lehetőség egyszerűsítő módszerek bevezetésére. Még ennél is súlyosabb probléma, hogy az eredmény fuzzy halmazok harang-görbe felé konvergálnak, ez a jelenség már egy művelet után is erőteljesen jelentkezik. A szorzat-összeg kompozíció egyszerűen 'kimossa' az eredményből a többszörös csúcsokat. Ez előnyös lehet a defuzzifikációnál [Kosko, 1992 32. p.], de óriási információvesztést jelent, mert egy fontos döntési információ, az eredmény többértéküsége, elvész.

4.2. Fuzzy valószínűség

Az előző részben láthattuk, hogy a sűrűségek átvitele egy fuzzy rendszerbe egyszerű átnormalizálás révén mennyire félrevezető megközelítés. A fuzzy valószínűség alapötlete teljesen más. Mivel a fuzzy halmaz egy komplex objektum adott jellemzőjének sokértékű reprezentációja, a hozzá kapcsolódó valószínűségnek is sokértékűnek kell lennie. Egy pontatlanul definiált, komplex esemény valószínűségét egy olyan speciális fuzzy halmazzal próbáljuk jellemezni, amelynek alaphalmaza a [0,1] valószínűségi intervallum. Mindezt illusztrálandó, nézzük meg ismét kedvenc 4. példánkat:

Ismét feltételezzük, hogy D, az árváltozás százalékpontok sűrűségfüggvénye és a kismértékű növekedést leíró F fuzzy halmaz ismertek (lásd 7. ábra).



7. ábra Fuzzy valószínűség

Kiválasztunk egy adott p^* valószínűségi értéket és megpróbáljuk meghatározni a kompatibilitási fokát a 'kismértékű növekedés a részvényárban' komplex eseménnyel.

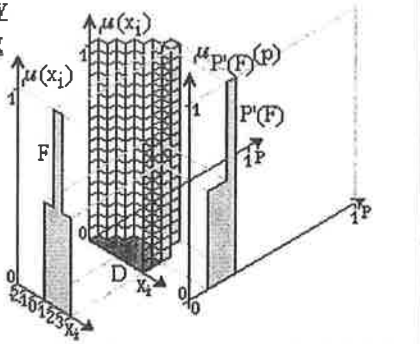
Először olyan alaphalmaz elemeket keresünk, amelyeknek valószínűsége p^* (lásd az 1. és 2. lépést). Ezután meghatározzuk az ilyen alaphalmaz elemekhez tartozó tagságfüggvény értékeket, majd ezek közül kiválasztjuk a maximális tagságfüggvény értéket (lásd 3. és 4. lépés). Ez lesz p^* tagsági értéke. Formálisan:

$$\mu_{P'(F)}(p^*) = \max_{x_i \in X}[\mu_F(x_i) \mid p(x_i) = p^*] \tag{4.6}$$

ahol: $P'(F)$ – F fuzzy valószínűsége (egy fuzzy halmaz a valószínűségi intervallum felett).

A 8. ábrán látszik, hogy $P'(F)$ olyan fuzzy halmaz, amely F fuzzy halmaz D sűrűségfüggvény inverzén keresztül történő leképezésével keletkezik.

8. ábra Fuzzy valószínűség



Ezen megközelítés fő előnye, hogy a döntési probléma mindkét fajta bizonytalansága egy fuzzy halmazba van sűrítve, de a valószínűségi és a fuzzy operátorok elkülöníthetőek. Ha fuzzy aritmetikai műveletet végzünk fuzzy valószínűségi halmazokon, az éles operátor (lásd 6. ábra) reprezentálhatja a valószínűségszámítás előírta műveletet, míg az aktuális fuzzy rendszer által előírt fuzzy művelet a Cartesian szorzatban jeleníthető meg.

A módszer fő hátránya, hogy a gyakorlatban használatos, egyszerűsített fuzzy aritmetikai módszerek nem pontosak, csak közelítő megoldást adnak az extenziós alapelv által előírt elméleti eredményhez képest.

5. Néhány szó a fuzzy döntési rendszerekről

Az előző részekben áttekintettük a valószínűségelmélet és a fuzzy kapcsolatát, valamint a kísérleteket, amelyek a két fajta bizonytalanság egy elméleten belüli ábrázolását célozzák. De eddig még nem mondtunk semmit arról, hogyan lehet a fuzzy halmazokat a döntéstámogatásban felhasználni. A részletes válasz messze meghaladná ennek a tanulmánynak a kereteit, ezért csak egy rövid grafikus példára szorítkozunk (lásd 7. példa), amelyet gyakran idéznek fel a szakirodalomban [Kosko, 1991 32.p.], [Cox, 1994 14.p.], és ennek kapcsán foglalkozunk a valószínűségen alapuló, illetve fuzzy döntési rendszerek közti különbséggel.

A fuzzy döntési rendszerek nagy részének az a célja, hogy az éles változók alkotta input-output térben lévő hiperfelületet (egyszerűbb esetben sokváltozós függvényt) szimulálja. Az input (hőmérséklet, nyomás) és az output (szelep pozíció) változók fuzzy nyelvi változóként vannak jelen a rendszerben. A fuzzy nyelvi változó közös alaphalmazzal rendelkező, általában egymást átlapoló fuzzy halmazok csoportja (pl. a 'fagyott', 'alacsony', 'OK.', 'meleg', 'forró' fuzzy halmazok alaphalmaza a Celsius-skála). A különböző fuzzy halmazok a fuzzy nyelvi változó értékei. A fuzzy következtetési szabályok az input fuzzy nyelvi változók bizonyos értékeit kapcsolják össze az output fuzzy nyelvi változók bizonyos értékeivel. A fuzzy nyelvi változókat és a fuzzy következtetési szabályokat az adott szakterület szakértői definiálják fuzzy rendszerelméleti szakemberek segítségével. A definiálás során dönteni kell:

- az adott fuzzy nyelvi változóban szereplő fuzzy halmazok számáról (általában 3 és 9 közt)
- a fuzzy halmazok formájáról (trianguláris, trapezoidális, harang-görbe)
- a fuzzy halmazok közti átlapolás mértékéről (általában 50%).

Igen érdekes kérdés, hogyan lehet megtalálni a megfelelő beállításokat, mivel nincs pontos algoritmus, az adott szakterület 'köztudata' és hüvelykujjszabályai dominálnak. Szerencsére, a fuzzy rendszerek meglehetősén toleránsak a tagságfüggvény formák és az átlapolásban elkövetett hibák iránt. Sőt, lehetőség nyílik a rendszer fuzzisági fokának befolyásolására az átlapolás megváltoztatásával. A fuzzy rendszer lényegét a fuzzy következtetési szabályok adják. Ha a fuzzy nyelvi változók jól lefedik az adott szakterület terminológiáját, sokkal könnyebb a tudást fuzzy következtetési szabályok formájába konvertálni, mint analitikus formulákba. Különösen igaz ez látensen jelenlévő tudás esetén: a szakértő könnyebben tudja sejtéseit, intuícióit verbálisan kifejezni, mert nem bátortalanítja el az egzakt formalizálás követelménye.

A fuzzy rendszereket gyakran azzal vádolják, hogy csak parciális közelítésre képesek, mert nem kezelnek sokváltozós függvényeket analitikus módon, mint a valószínűségelmélet. Szilárd meggyőződésünk, hogy jól kiválasztott fuzzy következtetési szabályok hatékonyabbak lehetnek bármely analitikus becslési formulánál nagy bonyolultságú, sok konkáv elemet tartalmazó hiperfelületek becslése esetén. A fuzzy következtetési mechanizmus két nagy részből áll, a kompozícióból és a dekompozícióból:

1. A kompozíciónál éles input változók adott vektorából indulunk ki. Ezek a változóértékek különböző mértékben kompatibilisek egy adott fuzzy következtetési szabályban szereplő fuzzy nyelvi változó értékekkel (lásd 1. lépés) Az egy szabály esetén jelentkező kompatibilitások minimumát vesszük, és a szabályban szereplő output fuzzy nyelvi változó értéket ezen a szinten vágjuk el (lásd a 2. lépést, a megmaradó részt szürke színezéssel jelöltük). A fentieket minden fuzzy következtetési szabály esetén megismételjük, majd a csonkolt output fuzzy halmazok unióját vesszük (lásd 3. lépés). Ezen a módon egy összetett eredmény fuzzy halmazt kapunk. Az itt leírt maxmin kompozíció helyett, másfajta (pl. minimum-összeg, szorzat- maximum) kompozíciók is alkalmazhatók.

2. A dekompozíciónál először defuzzifikáljuk az eredmény fuzzy halmazt, alaphalmazának egyetlen értékére történő leképezés révén. A defuzzifikációnak különböző módszerei ismertek, a legegyszerűbb a centroid momentum módszer, amikor a tagságfüggvény alatti terület súlypontját számítjuk ki (lásd 4. lépés). Az ehhez tartozó alaphalmaz érték lesz a rendszer éles outputja.

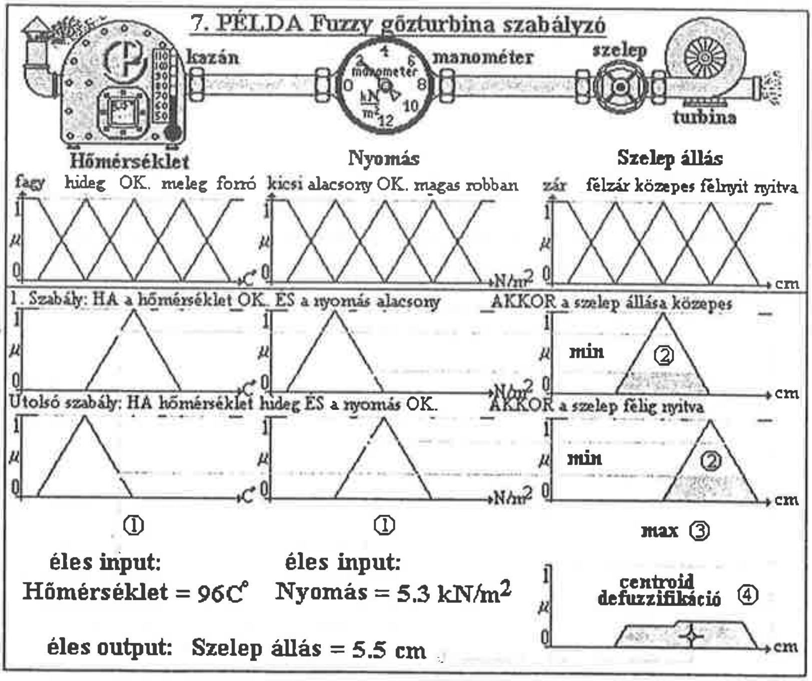
A fuzzy döntési rendszereknek van néhány alapvető előnye azon szakértői rendszerekkel szemben, amelyek konfidencia intervallumokat, vagy valószínűségi faktorokat használnak a bizonytalanság megjelenítésére:

1. Számszerű megközelítés szimbolikus helyett. A fuzzy rendszer könnyedén kezel folytonos kvantitatív változókat, míg a szakértői rendszerek erre sok esetben nem képesek.
2. Hatékonyság komplex, messze nem lineáris problémák modellezésében.
3. A fuzzy rendszer egymásnak ellentmondó szakértői vélemények, következtetési szabályok kezelésére is képes. Ez megoldhatatlan feladat a szakértői rendszerek számára, mert megkövetelik a tudásbázis teljes konzisztenciáját, ami sokszor irreális követelmény.
4. Az intuíciók, látens tudás felhasználása.
5. Gyorsabb következtetési mechanizmus. A fuzzy rendszerekben minden szabály egyszerre 'tüzel', szemben a szakértői rendszerek lassú és bonyolult döntési mechanizmusával, amely döntési fákat jár be, folytonosan

ellenőrizve az inkonzisztencia és a gráf-körök felbukkanását a döntési fában.

6. Ugyanazon probléma kevesebb szabállyal leírható fuzzy rendszerekben a rugalmasság és az átlapolás miatt.

A fuzzy rendszerek fő hátránya, hogy a defuzzifikáció rendszerint igen komoly információvesztést jelent, mert elmossa az eredmény többértékűségét.



6. Összegzés

A fuzzy és a valószínűségelmélet közti 'hadiállapot' lényegét a következőképpen összegezhetjük (lásd 9. ábra):

9. ábra Végkövetkeztetés

Valós döntési probléma bizonytalansága

		ESEMÉNY éles	ESEMÉNY pontatlan
ESEMÉNY BEKÖVETKEZÉSE	determinisztikus	'1+1=2'	Fuzzy
	sztochasztikus	Valószínűség	A VALÓSÁG !!!!!

Láttuk, hogy a fuzzy és a valószínűségelmélet egy valós döntési probléma bizonytalanságának csak egy-egy oldalát írják le, még a két fajta bizonytalanság mindig keveredik a valóságban. Ez az oka a fuzzy és a valószínűségelmélet elhatárolása körüli zavaroknak és a rivalizációnak. A kompromisszumos megközelítés, amely mindkét fajta bizonytalanságot megfelelő pontossággal ábrázolja, további kutatások tárgya.

Irodalom

1. Baas, S. M.–Kwakernak, H.: Rating and ranking of multiple aspect alternative using fuzzy sets. Automatica, vol. 13, 47–58, 1977.
2. Chen, S. J.–Ching, L. H.–Hwang, F. P..: Fuzzy MADM. Springer Verlag, Berlin, 1992.
3. Cox, E.: The Fuzzy Systems Handbook. Academic Press, Boston-London, 1994.
4. Cox, R. T.: Probability, Frequency, and Reasonable Expectations. American Journal of Physics, vol. 14, no. 1, 1–13, January/February 1946.
5. Dubois, D.–Prade, H.: Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications. Academic Press, New York 1980.
6. Jain, R.: Decision making in the presence of fuzzy variables. IEEE Trans. On systems, Man, and Cybernetics, vol. SMC-6, 698–703, 1976.
7. Jaynes, E. T.: Where Do We Stand on Maximum Entropy? Maximum Entropy Formalism, Levine and Tribus (eds.), M.I.T. Press, Cambridge, MA, 1979.
8. Kosko, B.: Neural Networks and Fuzzy Systems. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. 1992.

9. Lindley, D. V.: The Probability Approach to the Treatment of Uncertainity in Artifical Intelligence and Expert Systems. Statistical Science, vol. 2, no. 1, 17-24, February 1987.

10. Mizumoto, M.–Tanaka, K.: Algebraic properties of fuzzy numbers. IEEE International Conference of Cybernetics an Society, 559–563. 1976.

11. Rescher, N.: Many-Valued Logic. McGraw-Hill, New York, 1969.

12. Zadeh, L. A.: Fuzzy Sets. Information and Control, vol. 8, 338–353, 1965.

13. Zadeh, L. A.: Outline of a new approach to the analysis of complex system and decision processes. IEEE Trans. On Systems, Man, and Cybernetics, vol. SMC-2, 28–44, 1973.

WAR BETWEEN YIN AND YANG

In this paper, we try to outline the border between Fuzzy and Probability theories, distincting two basic types of uncertainity in a decision problem: the uncertainity of the events and uncertainity of the occourences. We also examine the possibilities to describe the overall uncertainity using single theory.

Key words: Degree of compatibility, rejecting the law of noncontradiction, uncertainity of the events, uncertainity of the occourences, fuzzy probability