A KAMAT, A JELENÉRTÉK ÉS A KÖLCSÖNTÖRLESZTÉS OPTIMALIZÁLÁSA[1]

SOMOGYI LÁSZLÓ
JPTE Közgazdaságtudományi Kar

A kamattól elvárjuk, hogy ekvivalenssé tegye egy jelenbeli összeg és egy helyette felkínált jövőbeli pénzáram jelenértékét. Meglepő, de rávilágítunk, hogy napjaink kamatszámításának gyakorlata – elvárásunk ellenére – lehetőséget nyújt a kölcsönügyletek jelenértékével való manipulálásra (ezt ne a kifejezés negatív jelentésével értsük)! Megmutatjuk, hogy léteznek olyan egzakt és meghatározható paraméterek, melyek figyelembevételével egy kölcsönügylet nem-zéró összegű játszmaként tekinthető, így a törlesztés ütemezésének helyes megválasztása által lehetségessé válik, hogy annak jelenértéke mind a kölcsönt adó, mind a kölcsönt felvevő számára egyidőben pozitív és optimális legyen! Röviden bemutatásra kerül egy algoritmus, mely a vázolt optimalizálási lehetőséget – az ismertetett modell feltételrendszerének általános eset felé való továbbfejlesztésével– a kölcsönből finanszírozott lízingbeadás példáján szemlélteti.

Bevezetés

Kölcsönnyújtási gyakorlatunk rákényszerül, hogy integráljon olyan jelenségeket, mint a kamat és tőketörlesztések *egymástól eltérő* időpontokban való felszámítása, vagy *változó hosszúságú* törlesztési periódusok kezelése.

Új jelenségek új, és néha a megszokott elvek helyességét megkérdőjelező következtetéseket vonnak maguk után. Az egyik ilyen elv, hogy mind a kölcsönt adónak, mind a kölcsön felvevőjének ésszerű a kölcsön mielőbbi visszafizetésére való törekvése.

Felülvizsgáljuk, hogy valóban így van-e. Kiindulópontunk, hogy *meg kell különböztetni azt a két szemléletet, mellyel a kölcsönt adó illetve a kölcsönt felvevő minősíti a pénzt*: Ennek alapját a számukra eltérő hozamtermő képessége jelenti, melyet – *egyelőre a felek megkülönböztetése nélkül* – nevezzünk kamatnak (kamatlábnak).

[1] Beérkezett 1995. november 11.

A kamat egyik tulajdonsága, hogy közömbössé teszi a jelenbeli X és a jövőbeli $X(1+i)$ pénzmennyiségek közötti választást (i legyen most *pontosan az adott periódusra eső* kamatláb): A tulajdonos a birtokában lévő X összegről hajlandó lemondani, ha helyette a jövőben $X + Xi$ összeget, vagy ennél többet kap, és nem hajlandó lemondani, ha X pénzéért a jövőben felkínált az előbbi határ értékénél kevesebb. Így elmondhatjuk, hogy a tulajdonos számára a jövőbeli $X(1+i)$ összeg a jelenben X összeget ér, és megfordítva.

Egy prognosztizált pénzáram értékének becslésekor az egyik legfontosabb figyelembe veendő tényező – elfogadhatóságának akár döntési kritériuma is – annak jelenbeli értéke.

Ha a kamat valóban kiegyenlíti egy jelenbeli összeg, és a helyette felkínált jövőbeli pénzáram jelenértékét, akkor nincs értelme annak, hogy egy kölcsön törlesztő részleteinek optimalizálásáról beszéljünk, hiszen a törlesztő részletek jelenértéken – a kamat révén – ekvivalensek a kölcsönadott összeggel.

Be fogjuk látni, hogy a helyzet nem ez, és igenis tud – bizonyos esetekben akár explicit formában kifejezhető – optimális törlesztési ütemezést választani mind a kölcsönt adó, mind a kölcsön felvevője! Meglepő, de ki fog derülni, hogy – amennyiben az ütemezések értékelése a jelenérték kritérium alapján történik – létezhet olyan ütemezés, mely egyidőben optimális mindkét fél számára!

Tekintsünk el attól, hogy ma a kölcsönt adók a jövőre vonatkozó kalkulációk bizonytalansága miatt mielőbb pénzükhöz szeretnék jutni, és tegyük fel a továbbiakban, hogy a kölcsönt adók kamatlába és inflációs várakozása stabil, legalább a kölcsönügylet által érintett időintervallum folyamán (nevezzük ezt a továbbiakban stabilitási feltételnek)! Tegyük fel azt is, hogy tranzakciós költségek nincsenek, vagyis a kamatlábban megfogalmazódó értékszemlélet tranzakciós költségekre vonatkozó fedezete zérus! *Vegyük majd észre a számítások átgondolása után, hogy ez utóbbi feltételezés az állításainkra vonatkozóan nem jelent megszorítást*, mert – bár a számítások összetettebbekké válnának – azok igazsága méginkább nyilvánvaló lenne!

E feltételezések mellett a következő kérdésre keressük a választ: X összeget kölcsönadva, a *helyette felkínált tőketörlesztések* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *kamatos* pénzáramának ($X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$; $X_1, X_2, \ldots, X_n \geq 0$) milyen ütemezése mellett nyeri a kölcsönt adó jelenértéken a legmagasabb összeget, és a kölcsön felvevője számára az előbbi pénzáram jelenértéken mikor lesz úgyszintén maximális?

A kamatszámítás lehetőségei

Különböztessük meg a kamat felszámításának alábbi – *akár csak elméletileg is lehetséges* – módjait, és figyeljük a törlesztési pénzáram jelenértékét (melyet most *ugyanazon kamatláb által meghatározott diszkonttényezővel* tekintünk)!

1. Ha a *kamat felszámítása folyamatos*, akkor bármilyen, kamatokkal számított törlesztési pénzáram jelenértéke pontosan a kölcsönadott összeg.

2. Ha a törlesztés periódusai *azonos hosszúságúak*, i *pontosan az egy periódusra eső kamat*, a *törlesztések periódusonként történnek tőke + kamat* formájában, akkor a törlesztési pénzáram jelenértéke megint pontosan a kölcsönadott összeg, a kamatot akár mindig az éppen kint lévő tőkére, akár – mint elméleti lehetőség! – mindig az éppen aktuális törlesztő részletre számítottuk fel.

3. Gyakoribb eset, mikor a kamat éves szinten van meghatározva, és több törlesztés is történik az éves periódus alatt. Ha – mint elméleti lehetőség! – a kamat felszámítása most mindig az aktuális törlesztő részletre történik, úgy a kamat újra teljesíti, hogy a törlesztési pénzáram jelenértéke pontosan a kölcsönadott összeg.

A sorolt esetek egyikében sincs tehát hatással az ütemezés a kölcsönügylet pénzáramának jelenértékére. Azonban létezik a soroltaktól eltérő gyakorlat is!

4. A kamat éves szinten van meghatározva, és több törlesztés is történik az éves periódus alatt. A kamat felszámítása mindig az aktuálisan kint lévő tőkére történik, a *kamat és tőketörlesztések akár eltérő és változó tartamú időszakonként kerülhetnek felszámításra, és a kamatszámítási periódus hossza nem feltétlenül kell hogy megegyezzen egyik törlesztési időszak hosszával sem!*

Foglaljuk össze e szándékosan utolsónak hagyott eset feltételeit, a könnyebb kezelhetőség végett egyszerűsítve a probléma megfogalmazásán:

X összeg kölcsönéről van szó; i *éves szintű* kamatláb; két törlesztő részletet tekintünk, $X = X_1+X_2$ ahol $X_1, X_2 \geq 0$; a törlesztések egyenlő időközönként történnek, mégpedig t és $2t$ időpontokban, ahol t a napok számát jelöli úgy, hogy $2t < 365$; a kamatot mindig az éppen kint lévő tőke után számítjuk fel (és nem az éppen törlesztett tőkére, mint – elméleti lehetőség! – tettük azt a 3. esetben!).

(Megint nem jelenti az általánosság korlátozását, de az ütemezési lehetőségek közül részletes elemzéssel az X összeg X_1 és X_2 megosztásának azt a két szélsőséges esetét tekintjük, mikor $X_1 = X$ és $X_2 = 0$, illetve $X_1 = 0$ és $X_2 = X$, vagyis a teljes tőkét az első periódus végén, illetve a teljes tőkét a második periódus végén törlesztjük. Hogy ez nem megszorítás, mert az állítások e két részlet tetszőleges értékmegosztására is igazak, az a számítások követésével nyilvánvaló lesz.)

Megjegyzés: Jelen gyakorlat szerint i éves szintű kamatlábbal felszámított kamatok az évek során kamatos kamatként, hatványozódva keletkeznek, év közbeni törlesztésekre i éves szintű kamatláb esetén lineáris a kamat felszámítása. – Ez a gondolat azért került kiemelésre, mert az eredmények lényeges részét képezi. – Itt jegyezzük meg, hogy a továbbiakban közölt számítások, bár néha hosszadalmasak, de egyszerűek. Csak azok az eredmények kerülnek közlésre, melyek a gondolatmenet gerincének vázolását szolgálják, mivel e tanulmány célja nem elsődlegesen számolási gyakorlat prezentálása. Kérem az Olvasót, hogy a közölt eredmények köztes számításait – a megadott instrukciók szerint – maga is végezze el, ily módon kerülve közelebb az ismertetett modellhez. *A közölt eredmények valódisága végett a tanulmány számításai a MATHEMATICA for WINDOWS 2.0 változatával kerültek ellenőrzésre.*

Végezzük vizsgálódásunkat először a kölcsönt adó szemszögéből!

Így célunk az X_1 és X_2 összegek olyan megválasztása, hogy a kölcsönügylet pénzáramának jelenértéke maximális legyen.

Az ügylet pénzárama:

0. időpont: X összeget kölcsön adunk. Ennek jelenértéke: $-X$.

t. időpont: X_1 tőkét és $X\frac{i}{365}t$ kamatot visszakapunk. Ennek jelenértéke:

$$\frac{X_1 + X\frac{i}{365}t}{1+\frac{i}{365}t}.$$

$2t$. időpont: X_2 tőkét és $(X-X_1)\frac{i}{365}t = X_2\frac{i}{365}t$ kamatot visszakapunk.Ennek jelenértéke:

$$\frac{X_2(1+\frac{i}{365}t)}{1+\frac{i}{365}2t}.$$

A teljes pénzáram jelenértéke összevonások után:

$$PV_a(X_1) = -X + \frac{X\left(1+3\frac{i}{365}t+3\left(\frac{i}{365}\right)^2t^2\right) - X_1\left(\frac{i}{365}\right)^2t^2}{1+3\frac{i}{365}t+2\left(\frac{i}{365}\right)^2t^2}.$$

(Az a index a kölcsönt adóra utal.) Látható, hogy a jelenérték függ a törlesztés ütemezésének megválasztásától (mivel most csak két törlesztő részlet van, ezért csak az elsőtől)!

A jelenérték minimális, ha az első részlet maximális, vagyis $X_1 = X$. Minimumának értéke ekkor:

$$PV_{\min} = 0.$$

A jelenérték maximális, ha az első részlet minimális, vagyis $X_1 = 0$. Maximumának értéke ekkor:

$$PV_{\max} = X\left(-1 + \frac{1 + 3\frac{i}{365}t + 3\left(\frac{i}{365}\right)^2 t^2}{1 + 3\frac{i}{365}t + 2\left(\frac{i}{365}\right)^2 t^2}\right).$$

Ez az érték az

$$\frac{\left(\frac{i}{365}\right)^2 t^2}{1 + 3\frac{i}{365}t + 2\left(\frac{i}{365}\right)^2 t^2}$$

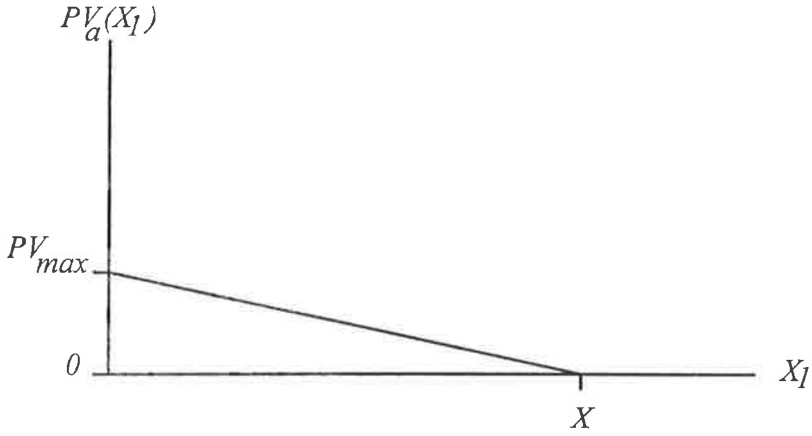
szorzótényező által meghatározott mértékkel nagyobb, mint az eredetileg kölcsönadott összeg (és mivel e növekmény számlálója és nevezője pozitív, így $PV_{\max}$-ban X szorzótényezője nagyobb 0-nál), vagyis az ütemezés helyes megválasztása által többletnyereséget realizáltunk! Mivel a jelenérték az első törlesztő részlet (X_1) lineáris függvénye, az elmondottakból nyilvánvaló, hogy az X_1 összeg tetszőleges választása esetén a $PV_a(X_1)$ jelenértékre

$$0 = PV_{\min} \leq PV_a(X_1) \leq PV_{\max}$$

teljesül.

Összefoglalva a kölcsönt adó szemszögéből végzett vizsgálat eredményeit: Ha feltesszük, hogy a pénz minden értéket jelentő tulajdonsága valamint kockázata megfogalmazódik az általa felszámított éves szintű kamatban, akkor a *stabilitási feltétellel* élve azt mondhatjuk, hogy az iménti speciális, két periódusú esetben *a kölcsönt adó akkor nyeri jelenértéken mérve a legtöbb hasznot, ha a kölcsönügylet során minél később kapja vissza a kölcsönadott tőke törlesztő részleteit*! (A tranzakciós költségek figyelembe vétele abban nyilvánulna meg, hogy a jelenérték számításakor az i által meghatározottnál kisebb tényezővel diszkontálunk: Ez a jelenértékre emelő hatással van, így a kapott eredmény még inkább igazzá válna.)

Foglaljuk össze ábrán is az elmondottakat (1. ábra)!



1. ábra. Lehetőségek a kölcsönt adó pénzáramának jelenértékére

Végezzük vizsgálódásunkat most a kölcsönt felvevő szemszögéből!

Így célunk újra az X_1 és X_2 összegek olyan megválasztása, hogy a kölcsönügylet pénzáramának jelenértéke maximális legyen. Azonban míg az előbb joggal feltételeztük, hogy a kölcsönt adó számára a pénz értékét az i kamatláb fejezi ki, ezért ő a jelenértéket is az általa meghatározott diszkonttényezővel számítja, *most különböztessük meg a jelenérték számításához használt diszkonttényezőt az előbbitől!*

Jelölje r azt az éves szintű, *kamatláb jellegű tényezőt, mely kifejezi, hogy a kölcsönt felvevő számára a jelenbeli X összeg t idő múlva $X(1+\frac{r}{365}t)$ összeggel ér fel! (r lehet például a kölcsönt felvevő t időtávra kalkulált belső megtérülési rátájának éves szintű kivetítése.)* (Ne feledkezzünk meg a t-re tett feltételezésünkről: $2t < 365$.)

Megjegyzés: r-nek ez a fajta bevezetése és az i-től való megkülönböztetése ad alapot törlesztési optimalizálási lehetőségre: *Egyszerűen arról a tényről van szó, hogy különböző cégek működhetnek eltérő piaci megtérülésekkel, így van alapja megtérülési rátáik megkülönböztetésének.* Most a két "cég" a kölcsönt adó, illetve a kölcsön felvevője!

Az ügylet pénzárama:

0. időpont: X összeget kölcsönveszünk. Ennek jelenértéke: X.

t. időpont: X_1 tőkét és $X\frac{i}{365}t$ kamatot visszatérítünk. Ennek jelenértéke

$$-\frac{X_1 + X\frac{i}{365}t}{1+\frac{r}{365}t},$$

hiszen az előbbi összeget pontosan

$$\frac{X_1 + X\frac{i}{365}t}{1+\frac{r}{365}t},$$

nagyságú 0. időpontbeli összeggel fogjuk majd törleszteni, mivel "a mi cégünk ilyen megtérüléssel forgatja a pénzt".

$2t$. időpont: X_2 tőkét és $(X - X_1)\frac{i}{365}t = X_2\frac{i}{365}t$ kamatot visszatérítünk. Ennek jelenértéke

$$-\frac{X_2\left(1+\frac{i}{365}t\right)}{1+\frac{r}{365}2t},$$

hiszen az előbbi összeget pontosan

$$\frac{X_2\left(1+\frac{i}{365}t\right)}{1+\frac{r}{365}2t},$$

0. időpontbeli összeggel fogjuk majd törleszteni.

A teljes pénzáram jelenértékére összevonások után

$$PV_f(X_1, r) =$$

$$X - \frac{X\left(1 + 2\frac{i}{365}t + \frac{r}{365}t + 3\frac{i}{365}\frac{r}{365}t^2\right) + X_1\left(\frac{r}{365}t - \frac{i}{365}t - \frac{i}{365}\frac{r}{365}t^2\right)}{1 + 3\frac{r}{365}t + 2\left(\frac{r}{365}\right)^2 t^2}$$

adódik. (Az f index a kölcsönt felvevőre utal). *Ha $r = i$, a formula pontosan a kölcsönt adó szemszögéből végzett vizsgálatnál levezetett jelenérték formula -1-szeresével azonos*! Látható, hogy a jelenérték újra függ a törlesztés ütemezésének megválasztásától! Mivel a függés jellegét most az

$$\frac{r}{365}t - \frac{i}{365}t - \frac{i}{365}\frac{r}{365}t^2$$

számlálóbeli X_1 szorzótényezőjének előjele dönti el, ezért vizsgáljuk a következő eseteket:

I. eset

$$\frac{r}{365}t - \frac{i}{365}t - \frac{i}{365}\frac{r}{365}t^2 = 0\,,$$

vagyis az r és az i kamatlábak között az

$$r = \frac{i}{1 - \frac{i}{365}t}$$

összefüggés áll fenn. Ekkor a jelenérték a kölcsönt felvevő számára *pozitív, állandó összeg, amely független a törlesztés ütemezésétől, mivel az X_1 első részlet szorzótényezője a $PV_f(X_1, r)$ tört számlálójában zérus*. A kölcsönt felvevő értékszemléletét kifejező r kamatláb most vizsgált kritikus értékének *(kritikus, mert tőle függ az X_1 szorzótényezőjének előjele, és ily módon a kölcsönt felvevő pénzáramának jelenértéke)* a továbbiakban kitüntetett szerep jut, ezért vezessük be rá az r_k jelölést:

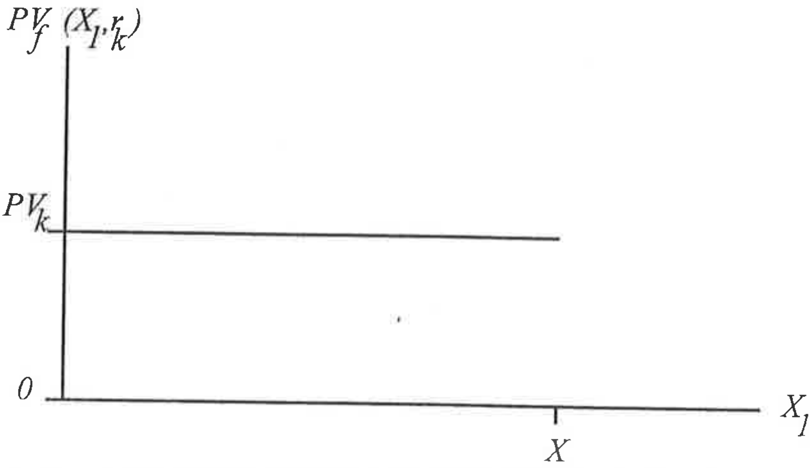
$$r_k = \frac{i}{1 - \frac{i}{365}t}$$

Az ügylet jelenértéke ekkor

$$PV_k = X\left(1 - \frac{1 + 2\frac{i}{365}t + \frac{r_k}{365}t + 3\frac{i}{365}\frac{r_k}{365}t^2}{1 + 3\frac{r_k}{365}t + 2\left(\frac{r_k}{365}\right)^2 t^2}\right).$$

(Az olvasóra bízzuk annak belátását, hogy az X összeg szorzótényezője valóban pozitív.)

Foglaljuk össze ábrán is az elmondottakat (2. ábra)!



2. ábra. A kölcsönt felvevő pénzáramának jelenértéke $r = r_k$ kamatláb esetén

II. eset

Ha

$$\frac{r}{365}t - \frac{i}{365}t - \frac{i}{365}\frac{r}{365}t^2 > 0 \,,$$

vagyis $r > r_k$ (a kölcsönt felvevő értékszemléletét kifejező kamatláb meghaladja a kritikus r_k értéket), akkor a $PV_f(X_1, r)$ jelenérték függvény az r kamatláb adott értéke esetén maximális, ha az X_1 összeg minimális, vagyis $X_1 = 0$. Ha most is feltesszük, hogy a pénz minden értéket jelentő tulajdonsága valamint kockázata a kölcsönt felvevő számára megfogalmazódik az őrá jellemző r kamatlábban, akkor a *stabilitási feltételt rá is kiterjesztve* azt mondhatjuk, hogy e speciális, két periódusú esetben *akkor nyeri jelenértéken mérve a legtöbb hasznot, ha a kölcsönügylet során minél később törleszti a kölcsönvett tőke törlesztő részleteit*!

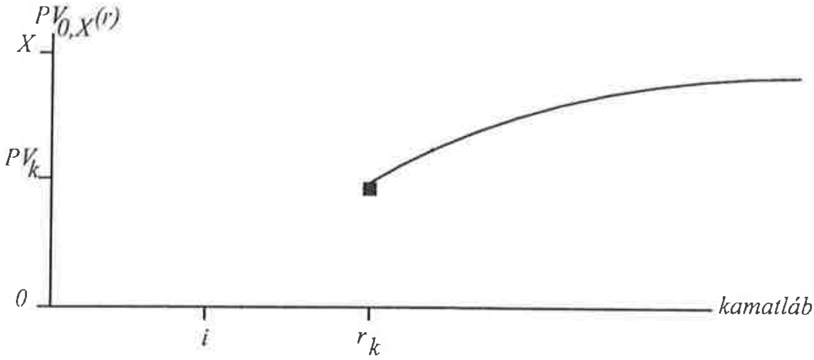
Nyereségének jelenértéke ekkor az r kamatláb függvénye:

$$PV_{0,X}(r) = X\left(1 - \frac{1 + 2\frac{i}{365}t + \frac{r}{365}t + 3\frac{i}{365}\frac{r}{365}t^2}{1 + 3\frac{r}{365}t + 2\left(\frac{r}{365}\right)^2 t^2}\right).$$

(Az index az ütemezés jellegére utal.) Vizsgáljuk meg a függvényt! (Újra az olvasóra bízzuk az állítások belátását.) E függvény első deriváltja az $(r_k; \infty)$ intervallumon határozottan pozitív, tehát a függvény maga szigorúan monoton növekvő. Határértékére

$$\lim_{r\to\infty} PV_{0,X}(r) = \lim_{r\to\infty} X\left(1 - \frac{1 + 2\frac{i}{365}t + \frac{r}{365}t + 3\frac{i}{365}\frac{r}{365}t^2}{1 + 3\frac{r}{365}t + 2\left(\frac{r}{365}\right)^2 t^2}\right) = X$$

adódik, vagyis az r kamatláb növekedésével a jelenérték aszimptotikusan közelíti a kölcsön kapott X összeg értékét. Mivel $r = r_k$ kamatláb esetén a jelenérték pontosan PV_k, így összefoglalhatjuk ábrán is az elmondottakat (3. ábra):



3. ábra. A kölcsönt felvevő pénzáramának jelenértéke $r > r_k$ kamatláb esetén, $X_1 = 0$, $X_2 = X$ összegű ütemezéssel

Mi történik, ha $r > r_k$ kamatláb esetén mégsem az $X_1 = 0$, $X_2 = X$ optimálisnak tekintett ütemezést választjuk? Vizsgáljuk ennek szélsőséges eseteként az $X_1 = X$, $X_2 = 0$ esetet (a teljes kölcsönt az első periódus végén visszafizetjük)! A jelenértékre, mint az r kamatláb függvényére most

$$PV_{X,0}(r) = X\left(1 - \frac{1 + \frac{i}{365}t + 2\frac{r}{365}t + 2\frac{i}{365}\frac{r}{365}t^2}{1 + 3\frac{r}{365}t + 2\left(\frac{r}{365}\right)^2 t^2}\right)$$

adódik. E függvényről a $PV_{0,X}(r)$-nél tett megállapításokhoz hasonlóakat lehet elmondani: Első deriváltja a tekintett intervallumon határozottan pozitív (így a függvény szigorúan monoton növekvő), határértéke végtelenben X (a kölcsönvett összeg), $PV_{X,0}(r_k) = PV_k$. Az *eltérést a két jelenérték függvény között értékeik különbözősége adja, ugyanis belátható, hogy bármely $r > r_k$ kamatlábat választva*

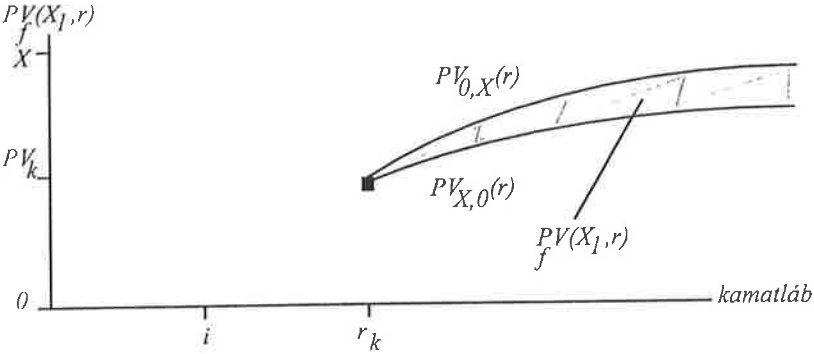
$$PV_{X,0}(r) < PV_{0,X}(r)\ !$$

(Ami persze az $X_1 = 0$, $X_2 = X$ optimális ütemezésből nyilvánvalóan következik.) Mivel $PV_f(X_1, r)$ jelenérték függvény az első törlesztő részlet (X_1) lineáris függvénye, ezért úgyszintén nyilvánvaló, hogy

$$PV_k < PV_{X,0}(r) \leq PV_f(X_1, r) \leq PV_{0,X}(r) < X\ ,$$

vagyis adott $r > r_k$ kamatláb esetén az X_1 összeg értékét nem specializálva a kölcsönt felvevő pénzáramának jelenértéke az adott korlátok közé esik.

Szemléltessük ábrán az elmondottakat (4. ábra)!



4. ábra. A kölcsönt felvevő pénzáramának jelenértéke $r > r_k$ kamatláb esetén

III. eset

Ha

$$\frac{r}{365}t - \frac{i}{365}t - \frac{i}{365}\frac{r}{365}t^2 < 0\,,$$

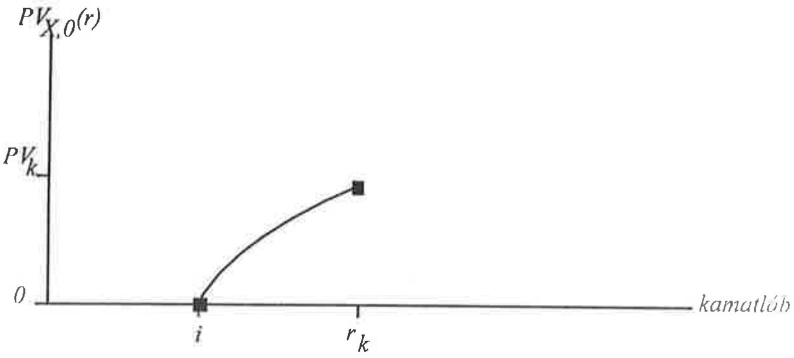
vagyis $i \leq r < r_k$ (a kölcsönt felvevő értékszemléletét kifejező kamatláb alatta marad a kritikus r_k értéknek és természetesen nagyobb mint a kölcsönhöz jutás i kamatlába), akkor a $PV_f(X_1, r)$ jelenérték függvény az r kamatláb adott értéke esetén maximális, ha az X_1 összeg maximális, vagyis $X_1 = X$. Most azt mondhatjuk, hogy e speciális, két periódusú esetben a kölcsönt felvevő *akkor nyeri jelenértéken mérve a legtöbb hasznot, ha a kölcsönügylet során minél gyorsabban törleszti a kölcsönvett tőke törlesztő részleteit*! Nyereségének jelenértéke ekkor az r kamatláb függvénye:

$$PV_{X,0}(r) = X\left(1 - \frac{1 + \frac{i}{365}t + 2\frac{r}{365}t + 2\frac{i}{365}\frac{r}{365}t^2}{1 + 3\frac{r}{365}t + 2\left(\frac{r}{365}\right)^2 t^2}\right)$$

(Az index most is az ütemezés jellegére utal.) Vizsgáljuk meg a függvényt! (Újra az olvasóra bízzuk az állítások belátását!) E függvény első deriváltja az $[i; r_k)$ intervallumon határozottan pozitív, tehát a függvény maga szigorúan monoton növekvő. Határértékére

$$\lim_{r\to i} PV_{X,0}(r) = \lim_{r\to i} X\left(1-\frac{1+\frac{i}{365}t+2\frac{r}{365}t+2\frac{i}{365}\frac{r}{365}t^2}{1+3\frac{r}{365}t+2\left(\frac{r}{365}\right)^2t^2}\right)=0$$

adódik, vagyis az r kamatláb csökkenésével a jelenérték zérushoz közelít, és $r=i$ kamatláb esetén nulla lesz. Mivel $r=r_k$ kamatláb esetén a jelenérték pontosan PV_k, így összefoglalhatjuk ábrán is az elmondottakat (5. ábra):



5. ábra. A kölcsönt felvevő pénzáramának jelenértéke $i \le r < r_k$ kamatláb esetén, $X_1 = X$, $X_2 = 0$ összegű ütemezéssel

Mi történik, ha most mégsem az $X_1 = X$, $X_2 = 0$ optimálisnak tekintett ütemezést választjuk? Vizsgáljuk ennek szélsőséges eseteként az $X_1 = 0$ $X_2 = X$ ütemezést (a teljes kölcsönt a második periódus végén fizetjük vissza)! A jelenértékre, mint az r kamatláb függvényére most

$$PV_{0,X}(r) = X\left(1-\frac{1+2\frac{i}{365}t+\frac{r}{365}t+3\frac{i}{365}\frac{r}{365}t^2}{1+3\frac{r}{365}t+2\left(\frac{r}{365}\right)^2t^2}\right).$$

adódik. E függvény első deriváltja a tekintett intervallumon határozottan pozitív (így a függvény szigorúan monoton növekvő), $PV_{0,X}(r_k) = PV_k$ és $PV_{0,X}(i) = -PV_{\max}$, *vagyis pontosan a kölcsönt adó által elérhető jelenérték maximumának -1-szerese!*

Belátható, hogy most

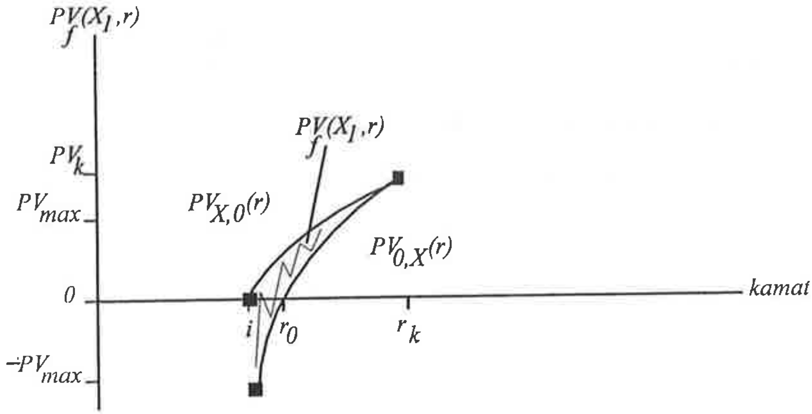
$$-PV_{\max} \leq PV_{0,X}(r) < PV_{X,0}(r) < PV_k \,.$$

(Ami persze az optimális ütemezésből megint csak következik.) Mivel a $PV_f(X_1, r)$ jelenérték függvény az első törlesztő részlet (X_1) lineáris függvénye, ezért $i \leq r < r_k$ kamatláb esetén nyilvánvaló, hogy

$$PV_{0,X}(r) \leq PV_f(X_1, r) \leq PV_{X,0}(r) \,,$$

vagyis adott $i \leq r < r_k$ kamatláb esetén az X_1 összeg értékét nem specializálva a kölcsönt felvevő pénzáramának jelenértéke az adott korlátok közé esik.

Szemléltessük ábrán az elmondottakat (6. ábra)!



6. ábra. A kölcsönt felvevő pénzáramának jelenértéke $i \leq r < r_k$ kamatláb esetén

Az r_0 kamatláb, ahol az X_1 összeg megválasztásának függvényében a jelenérték nullává válik a $PV_f(X_1, r) = 0$, vagyis az

$$X - \frac{X\left(1 + 2\frac{i}{365}t + \frac{r}{365}t + 3\frac{i}{365}\frac{r}{365}t^2\right) + X_1\left(\frac{r}{365}t - \frac{i}{365}t - \frac{i}{365}\frac{r}{365}t^2\right)}{1 + 3\frac{r}{365}t + 2\left(\frac{r}{365}\right)^2 t^2} = 0$$

egyenletből számolható. Ez r-re nézve másodfokú egyenlet, melynek $i \leq r < r_k$ esetén egy pozitív gyöke van, tehát

$$r_0 = 365\frac{\frac{i}{365}t(3X+X_1)-(2X-X_1)}{4Xt}+$$
$$365\frac{\sqrt{\left(\frac{i}{365}\right)^2 t^2(3X+X_1)^2-\frac{i}{365}t(2X-x_1)(14X+2X_1)+(2X-X_1)^2}}{4Xt}$$

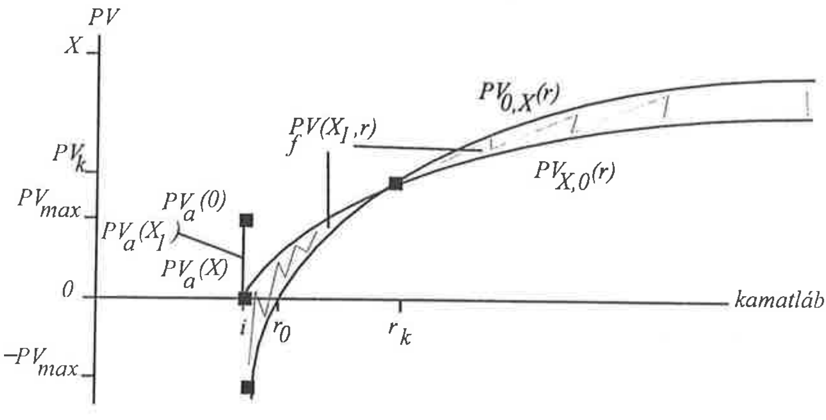
A kérdés fordítva is megfogalmazható: Ha adott az r kamatláb értéke ($i \leq r < r_k$), akkor az ütemezés (két periódusú esetünkben konkrétan az X_1 első részlet) milyen megválasztása esetén lesz a jelenérték nulla? Erre az előbbi egyenlet X_1-re való rendezésével megint csak explicit formula adható:

$$X_{1_k} = X\frac{2\frac{r}{365}t+2\left(\frac{r}{365}\right)^2t^2-2\frac{i}{365}t-3\frac{i}{365}\frac{r}{365}t^2}{\frac{r}{365}t-\frac{i}{365}t-\frac{i}{365}\frac{r}{365}t^2}.$$

Ha az X_{1_k} összegre megoldásként negatív számot kapunk, az azt jelenti, hogy az r kamatláb mellet az $X_1 = 0$, $X_2 = X$ – ez esetben legkedvezőtlenebbnek tekinthető – ütemezéssel is pozitív a pénzáram jelenértéke!

Foglaljuk össze eredményeinket!

Vizsgáljuk meg ehhez először a 7. ábrát!



7. ábra. Jelenérték lehetőségek az ütemezés és az r kamatláb függvényében a kölcsönt adó és a kölcsönt felvevő számára

A 7. ábráról a következők olvashatók le: Ha a kölcsönt felvevő pénzértéket kifejező kamatlábának kritikus értéke r_k, akkor e feletti r kamatláb esetén a kölcsönt felvevő minél később igyekszik törleszteni a felvett összeg tőkerészleteit, és mind ő, mind a kölcsönt adó méltán érzi úgy, hogy a jelenérték kritérium szerint optimálisan választott! (Saját szemszögéből értékelve mindkét fél jelenértéken a lehető legnagyobb pozitív hozamot érte el.)

Az i és r_k közé eső r kamatláb esetén megalapozott a kölcsön felvevőjének igyekezete a részletek mielőbbi törlesztésére, hogy pénzáramának jelenértéke az ő szemszögéből az elérhető maximális legyen. A kölcsönt adó ekkor – megint csak saját szemszögéből ítélve – határesetként jelenértéken 0 hasznot realizál.

Amennyiben az ütemezés a felvevő számára itt optimálisnak tekinthetőtől eltér, úgy az eltérés racionálisan megengedhető mértékét az ekkor pontosan számítható r_0 kamatlábérték és az ő r kamatlábának összevetése határozza meg. (Mint jeleztük, a kérdés megfordítható, és az r kamatlábból is kiszámítható az ütemezés még racionálisnak tekinthető határesete – az X_1 első részlet olyan X_1kkritikus értéke, melynél a jelenérték a kölcsönt felvevő számára nullává válik.)

Ha a kölcsönt felvevő pénzértéket kifejező kamatlába pontosan r_k, akkor az ütemezés az ő számára közömbös, azt a kölcsönt adó alkupozíciója fogja meghatározni, így a kölcsönt adónak van esélye a jelenérték saját szemszöge szerinti maximalizálására.

$r < i$ esetén a kölcsönügylet racionális alapon nem jöhet létre.

A fenti vizsgálatok – *mint modell* – az optimalizálási lehetőség talán legegyszerűbb esetét szemléltették.

Azonban a jelenség ennél általánosabb: Tekinthetünk n részletben való törlesztést; *feloldhatjuk az azonos hosszúságú törlesztő időszakok* feltételt; megengedhetjük, hogy a *kamat és a tőke törlesztése eltérő időpontokban* történjen, és természetesen a kölcsönügylet teljes időtartama tetszőleges lehet (meghaladhatja az egy évet).

Az általunk tárgyalt egyszerű eset általános esetre való kiterjesztésére legkézenfekvőbb eszközként a matematikai teljes indukció módszere kínálkozik.

Így bár a jelenséget általánosan igazolhatjuk, az általánosság negatívuma, hogy a kritikus r_k kamatláb érték nem lesz explicit módon meghatározható! *Értékére csak jelentős specializációk után nyerhetünk egzakt formulát.* Minden egyes konkrét "általános esetben" meghatározása iteráció segítségével, *közelítőleg* történhet. (Ugyanez vonatkozik a jelenértéket nullává tevő r_0 kamatláb értékének meghatározhatóságára is.)

Az elemzett *kétperiódusú modellben* a kölcsönnyújtás kamatlábát 35%-nak véve a kölcsönt felvevő pénzértéket kifejező kamatlábának kritikus nagyságára $r_k = 36.03667\%$ adódik; az r_0 jelenértéket nullává tevő kamatláb ekkor 35.49608% (a jelenérték szempontjából legkedvezőtlenebb $X_1 = 0$, $X_2 = X$ összegű ütemezéssel számítva). t értékét 30 napnak feltételeztük.

Ahelyett, hogy további számításokba bocsátkoznánk, nézzünk egy számpéldát a valós életből: Kölcsönből finanszírozott lízingbeadás esetén a lízingbe vevőtől beáramló lízingdíjak kell, hogy szigorúan fedezetül szolgáljanak a kölcsönt adónak törlesztendő tőke és kamat együttes összegére. A kölcsön törlesztő részleteit tehát a *beáramló lízingdíjak korlátja alatt* mozgathatjuk csak előre, illetve hátra. A *példa teljesen általános* abban az értelemben, hogy a *lízingdíjak, a kamattörlesztés és a tőketörlesztés időpontjai között semmiféle összefüggést nem követelünk meg, és nem teszünk megszorító feltételt az egyes időszakok hosszára sem. (Erre külön felhívjuk a figyelmet!)* (A program, mely a számításokat végzi, egy meglehetősen összetett, több irányú iterációt tartalmazó algoritmus.) Figyeljük meg a jelenérték változásának az ütemezéstől és a diszkontáláshoz használt kamatlábtól való függését!

Lásd: Melléklet!

Vizsgálódásunk befejezéseként a következőt mondhatjuk: Ha elfogadjuk a jelenértéket domináns döntési kritériumként, akkor – amint azt sikerült belátni – érdemes felülvizsgálni kölcsönnyújtási gyakorlatunk elveit: Egy kölcsönügylet során egyik fél számára sem elegendő annak megállapítása, hogy a kölcsönt felvevő belső megtérülési rátája meghaladja a kölcsönhöz jutás kamatlábát, így a törlesztésnek elvileg nem lehet akadálya! Fontos annak meghatározása is, hogy a kölcsönt felvevő r belső megtérülési rátája adott ütemezés esetén milyen viszonyban van az ütemezéshez tartozó r_0 és r_k értékekkel, mert a jelenértéken mért hozam az ütemezés helyes megválasztása által így optimalizálható mindkét fél számára!

Megjegyzések

E megjegyzések közlésével a valós gyakorlat és az ismertetett modell – mint elméleti konstrukció – közötti, számomra érdekes kapcsolat bemutatása a szándékom:

Maga a modell egy elméleti konstrukció volt, pontosan rögzített feltételrendszerrel. Maga az említett algoritmus egy rendkívül rugalmas kamat- és tőketörlesztés számítást lehetővé tevő *program*:

1. A kamatfizetések és tőketörlesztések időpontjaira nem tartalmaz semmiféle megszorítást, azok időpontjait *tetszőlegesen* adhatjuk meg akár egymástól függetlenül.

2. Extra lehetősége az egyes törlesztő részletek *kívánt értékeinek* beállíthatósága (természetesen csak értelmezhető határok között).

3. Azt is előírhatjuk feltételekként, hogy milyen várható *fedezeti korlátokkal* vagyunk képesek fizetni az egyes részleteket. (Lásd: Melléklet.)

(Utóbbi kettőt természetesen a kölcsönt adóval való egyeztetés, és saját bevételi forrásaink alapján állítjuk össze.)

Az optimalizálást a fizetendő pénzáram jelenértékének állandó figyelésén, és maximalizálásán alapuló többszörösen egymásba ágyazott iteráció végzi beállíthatóan tetszőleges számolási pontosságig, mely iteráció a mondott feltételeket is tekintetbe veszi.

Ezen tulajdonságai *rendkívül rugalmas számolási lehetőségeket biztosítanak,* és élesen megkülönböztetik az általam ismert piacon található törlesztést számoló segédprogramoktól (kivétel nélkül mind előre rögzítendő periódushosszat és egybeeső kamat- és tőketörlesztési időpontokat képes csak kezelni).

Azt, hogy a jelenérték milyen érdekesen mozog az ütemezések korlátainak változtatásakor, pontosan az algoritmus rugalmas használati tulajdonságai miatt vehettem csak észre.

Az algoritmus azért került kifejlesztésre, mert hitelnyújtói igény volt a kamat- és tőkefizetési időpontok – akár egymástól is eltérő – tetszőleges előírhatósága! Az általa mutatott ütemezéstől függő mozgást a jelenértékben – mint e tanulmány mutatja – sikerült tisztáznom, megmagyaráznom.

Az, hogy a leírt jelenség több periódusra is igaz, matematikai indukcióval *elméletileg* belátható, mint arra utaltunk is. Létezését azonban a gyakorlat is igazolja. A cégek, melyek számára az algoritmus kifejlesztésre került rövid távú (7-8 hónap, de legfeljebb másfél év), nagy összegű (10-50 millió forint) lízingkonstrukciókra specializálódtak. A banki finanszírozási kölcsönök törlesztésére fordítandó részletek mozgatásával a jelenértékben mérhető változás nem egy esetben milliós nagyságrendet ért el.

Az, hogy az iménti jelenértékben kapott haszonmaximalizálás tekinthető-e konkrét, kézzelfogható jövedelemtöbbletnek, nézőpont kérdése. Az én véleményem az, hogy igen: A jelenértéken kinyert, törlesztési pénzáramból előre tudhatóan felszabaduló összeg máshol, más befektetéssel hozamtermésre fogható.

Melléklet: Számpélda egy kölcsönből finanszírozott lízingbeadás esetből

Kölcsön adott összeg: 5 000 000 Ft.
Felvételének dátuma: 1995.11.1.

A lízingbe adónak a kölcsöntörlesztés fedezetéül szolgáló pénzárama minden esetben a következő (a kölcsöntörlesztés ütemezésének változtatása tehát csak ezek korlátja alatt történhet):

Dátum	Fedezeti összeg
95.12.01	300 000
95.12.15	500 000
96.01.08	2 000 000
96.01.19	2 000 000
96.02.04	500 000
96.02.07	500 000
96.02.10	500 000

Két szélsőséges ütemezést tekintünk:

I. A törlesztő részletek fizetése a fedezeti összegek adta határokon belül a leggyorsabb. A törlesztés pénzárama ekkor:

Kamat		Tőke		Tőke+Kamat	
dátum	összeg	dátum	összeg	dátum	összeg
95.12.12	208 082	95.12.05	300 000	95.12.05	300 000
95.12.26	47 841	95.12.17	200 935	95.12.15	208 082
96.01.05	43 142	95.12.29	0	95.12.17	200 935
96.03.01	61 813	96.01.10	2 000 000	95.12.26	47 841
Összesen	*360 878*	96.01.22	2 000 000	96.01.05	43 142
		96.02.03	0	96.01.10	2 000 000
		96.02.15	499 065	96.01.22	2 000 000
		Összesen	*5 000 000*	96.02.15	499 065
				96.03.01	61 813
				Összesen	*5 360 878*

II. A tőke egy összegben, a legutolsó tőkefizetési dátummal kerül visszafizetésre. A törlesztés pénzárama ekkor:

Kamat		Tőke		Tőke+Kamat	
dátum	összeg	dátum	összeg	dátum	összeg
95.12.15	210 959	95.12.05	0	95.12.15	210 959
95.12.26	52 740	95.12.17	0	95.12.26	52 740
96.01.05	47 945	95.12.29	0	96.01.05	47 945
96.03.01	196 575	96.01.10	0	96.02.15	5 000 000
Összesen	*508 219*	96.01.22	0	96.03.01	196 575
		96.02.03	0	*Összesen*	5 508 219
		96.02.15	5 000 000		
		Összesen	*5 000 000*		

A kölcsönt adó szemszögéből vizsgálva

A kölcsön nyújtás kamata (i) évi 35%.

I. A törlesztő részleteket a lehető leggyorsabban megkapjuk. A Tőke + Kamat pénzáram – Kölcsönadott összeg jelenértéke = 5 494 Ft.

II. A tőkét egy összegben, a legutolsó tőkefizetési dátummal kapjuk vissza (optimális eset). A Tőke + Kamat pénzáram – Kölcsönadott összeg jelenértéke = 12 459 Ft.

A kölcsönt felvevő szemszögéből vizsgálva

A kölcsönhöz jutás kamata (i) évi (35%). Az r_k kamatláb, melynél az ügylet jelenértéke független az ütemezéstől: évi 37.0535%. Az r_0 kamatláb, melynél az ügylet jelenértéke nulla, évi 35.97055%. (Az utóbbi a legkedvezőtlenebb esetre meghatározva: egy összegben, késõn törlesztünk.)

$\mathbf{r = 40\%}$

I. A törlesztő részleteket a fedezeti összegek adta korláton belül a lehető leggyorsabban törlesztjük. A Kölcsönbe vett összeg – (Tőke + Kamat) pénzáram jelenértéke = 41 280 Ft.

II. A tőkét egy összegben, a legutolsó tőkefizetési dátummal törlesztjük (optimális eset). A Kölcsönbe vett összeg – (Tőke + Kamat) pénzáram jelenértéke = 51 059 Ft.

$\mathbf{r = 36,5\%}$

I. A törlesztő részleteket a fedezeti összegek adta korláton belül a lehető leggyorsabban törlesztjük (optimális eset). A Kölcsönbe vett összeg – (Tőke + Kamat) pénzáram jelenértéke = 8 635 Ft.

II. A tőkét egy összegben, a legutolsó tőkefizetési dátummal törlesztjük. A Kölcsönbe vett összeg – (Tőke + Kamat) pénzáram jelenértéke = 6 770 Ft.

Irodalom

1. Bélyácz Iván: Tőkeberuházási és finanszírozási döntések. JPTE, 1995.
2. Bélyácz Iván: Vállalati tőkefinanszírozás. JPTE, 1991.
3. Cheng F. Lee: Financial Analysis and Planning. Addison-Wesley, 1985.
4. Gellért Andor: Banküzletek. KJK, 1993.
5. Gellért Andor: Külgazdasági pénzügyek. KJK, 1993.
6. Gerard Debreu: Közgazdaságtan axiomatikus módszerrel. KJK, 1987.
7. SALDO kiadó: Pénzügytan. 1993.

INTEREST, PRESENT VALUE AND OPTIMISATION OF INSTALMENTS OF A LOAN TRANSACTION

We expect the interest have to make equivalent the value of a present amount of money and the present value of future amounts of money offered instead of it. Surprising, but we prove that despite of our expectation today's practice of lending has a chance for us to manipulate (this is not the negative shade) the present value of a loan transaction. We show there exist exact and determinable parameters, which we can consider a loan transaction with, as a non-zero-sum game, and we can make it's present value definitely positive and optimal for both of the parties at the same time through the proper selection of instalments! We introduce an algorithm which will show the chance for the optimisation through a sample taken from the practice of a loan based leasing construction. This algorithm extends the simplicity of the constraints of this model towards the general case.