FOGALMAK, MÓDSZEREK

RÖVID MEGJEGYZÉS EGY NYUGDÍJMODELLEZÉSBEN GYAKRAN ALKALMAZOTT FELTÉTELEZÉSHEZ[1]

BOD PÉTER
MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutató Intézet

Minden komplex folyamat modellezésénél óhatatlanul szukség van különböző egyszerűsítő feltevések bevezetésére. Csak így ábrázolhatók a vizsgált rendszer lényeges összefüggései. Ugyanakkor ezek természetesen befolyásolják az egyszerűsítésekre épülő modell eredményeit. Ezért nem rossz, ha képet tudunk alkotni legalább az így érvényesülő befolyások irányáról.

Öregségi nyugdíjrendszerek modellezésénél elterjedt az alábbi egyszerűsítő feltételezés:

Minden biztosított meghatározott fix életkorban vonul nyugdíjba és nyugdíját a rögzített nyugdíjkorhatártól hátralevő várható élettartamnak megfelelő ideig élvezi — utána mindenki meghal.

A Világbank szakértői által 1994-ben kiadott "Averting old age crisis..." című pamflet szerzői erre a feltételezésre alapozták meggondolásaikat, hozzávéve még azt is, hogy mindenki azonos életkorban lép be a biztosításba és nyugdíjazásáig járulékot fizet. A hivatkozott feltételezés megjelenik több hazai szerző munkájában is.

Az alábbiakban azt szeretném bemutatni, hogy rögzített és időben állandó számítási alapok mellett egy x éves korban induló évi egységnyi utólagos életjáradék induláskori tőkeértéke *kisebb*, mint egy olyan bankjáradéknak az induláskori értéke, amely a nyugdíkorhatárkor várható hátralevő élettartamon át kerül évi egységnyi nagyságban utólag kifizetésre.

Alkalmazzuk az alábbi jelöléseket:

i: az egységnyi tőke éves kamata

$(1+i)$: kamattényező

$v = 1/(1+i)$: leszámítolási tényező

$d = 1 - v = iv$: az egységnyi tőke éves diszkontja

l_x: az alkalmazott kiválási rend szerint x-edik születésnapjukat megélők száma

[1] Beérkezett: 2001. március 4.

p_x: x éves biztosított egy éves túlélésének a valószínűsége

$q_x = 1 - p_x$: x éves biztosított egy éves halálozási valószínűsége

$d_x = l_x - l_{x+1} = l_x q_x$: x éves korban elhaltak száma

$e_x = (1/l_x)[l_{x+1}+l_{x+2}+\ldots+l_\omega]$: x éves korban hátralevő várható élettartam

a_x: az x éves korban induló, évi egységnyi, utólagos életjáradék induláskori tőkeértéke

$a_{\overline{n}|} = (1-v^n)v/(1-v) = (1-v^n)/i$: az n éven át futó, évi egységnyi utólagos bankjáradék induláskori tőkeértéke

Az utólagosan fizetendő évi egységnyi életjáradék induláskori tőkeértéke értelem szerint

$$a_x = vp_x + v^2 p_x p_{x+1} + v^3 p_x p_{x+1} p_{x+2} + \ldots$$

Vegyük észre, hogy ha a túlélési valószínűség az életkor csökkenő függvénye, akkor

$$a_x < vp_x + (vp_x)^2 + (vp_x)^3 + \ldots < \frac{vp_x}{1-vp_x} = \frac{p_x}{q_x + i}$$

Ha $i = 0$, akkor a hátralevő várható élettartamra kapunk egy felső becslést:

$$e_x < \frac{p_x}{q_x}$$

Tekintsük ezek után a leszámítolási tényező hatványait:

$$v,\ v^2,\ v^3,\ \ldots$$

és rendeljünk hozzájuk súlyokat:

$$d_x,\ d_{x+1},\ d_{x+2},\ \ldots$$

Majd állítsuk elő a leszámítolási tényezők súlyozott számtani és mértani közepeit. Vegyük észre, hogy a súlyok összege

$$\sum_{t=0}^{\omega} d_{x+t} = l_x$$

A súlyozott számtani közép:

$$\frac{1}{l_x} \cdot (vd_x + v^2 d_{x+1} + v^3 d_{x+2} + \ldots) =$$

$$= \frac{1}{l_x} \cdot \left(v(l_x - l_{x+1}) + v^2(l_{x+1} - l_{x+2}) + v^3(l_{x+2} - l_{x+3}) + \ldots\right) =$$

$$= v(1 + a_x) - a_x = 1 - d(1 + a_x)$$

Vegyük észre, hogy a szóban levő átlag egyben az x éves korban kötött egységnyi haláleseti biztosítás tőkeértéke, amit szokás A_x szimbólummal jelölni.

A fenti mennyiségek azonos súlyokkal vett mértani átlaga:

$$v^{d_x+2d_{x+1}+3d_{x+2}+\dots} = v^{1+e_x} .$$

Alkalmazzuk a bankjáradék tőkeértékének a formuláját $n = e_x$-re:

$$a_{\overline{e_x}|} = \frac{1-v^{e_x}}{i} = \frac{v-v^{1+e_x}}{vi}$$

$$v^{1+e_x} = v - via_{\overline{e_x}|} = v(1-ia_{\overline{e_x}|}) = v - da_{\overline{e_x}|} = 1 - d(1+a_{\overline{e_x}|})$$

Minthogy a számtani közép nagyobb, mint a mértani:

$$1 - d(1+a_x) > 1 - d(1+a_{\overline{e_x}|}) .$$

Ezért

$$a_{\overline{e_x}|} > a_x .$$

Irodalom

1. Berger, A.: *Mathematik der Lebensversicherung.* 17.par. Wien. 1939. Verlag von Julius Springer.
2. Bod P. Mennyibe kerül egy társadalombiztosítási nyugdíjrendszer működtetése? *Közgazdasági Szemle* 1992. 2-3.

SHORT REMARK CONCERNING A USUAL ASSUMPTION IN MODELING PENSION SYSTEMS

The following assumption is usual in modeling old age retirement systems: "everybody is retiring at the same predetermined age and gets pension during a period which equals to his/her expected remaining lifetime". The author draws the attention to the fact that the present value of a life annuity beginning at age x is less than the present value of an annuity running e_x years, where e_x denotes the remaining lifetime at age x. Consequently, the application of the assumption cited above overestimates the cost of the pensions.