A TERMELŐI ÁRVÁRAKOZÁSOK EGY ÚJ MEGKÖZELÍTÉSI MÓDJÁRÓL[1]

KOVÁCS GERGELY, VIZVÁRI BÉLA ÉS MARIAN MUREŞAN
ELTE, Budapest és Babeş-Bolyai Egyetem, Kolozsvár

Az irodalomban számos megközelítési módja ismeretes a termelői árvárakozások modellezésének. A jelen dolgozatban az eddigiektől eltérő, a matematikai közgazdaságtan eszköztárához jobban illeszkedő modelltípust javaslunk.

1 Bevezetés

Bármely dinamikus piacmodellnek egyik kulcspontja, hogy a modell miként kezeli a termelők jövőre vonatkozó árvárakozásait. Ugyanis ez az a pont, ahol a modell dinamikus jellegét adó visszacsatolás történik. A jelen dolgozatban csak a diszkrét idejű modellek vizsgálatára szorítkozunk. Ezek esetében az irodalomban szereplő árvárakozások legfontosabb típusai a következőkben foglalhatók össze. Az alábbi jelöléseket használjuk: t az időperiódus indexe; p_t a piaci ár a t időpontban; p_t^e a $t-1$ időpontban a t időpontra becsült ár; $m(\geq 2)$ pozitív egész; α, illetve α_k $(k = 1, ..., m)$ pedig rögzített konstans.

(i) *Naiv árvárakozás:* A termelő azt feltételezi, hogy a mostani ár marad fenn, azaz

$$p_t^e = p_{t-1}. \tag{1}$$

(ii) *Racionális árvárakozás:* A termelő pontosan meg tudja határozni a jövőbeli árat:

$$p_t^e = p_t. \tag{2}$$

(iii) *Extrapolatív árvárakozás:* Az utolsó árváltozás súlyozott értékét vetítjük előre:

$$p_t^e = p_{t-1} + \alpha(p_{t-1} - p_{t-2}). \tag{3}$$

(iv) *Általánosított extrapolatív árvárakozás:*

$$p_t^e = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k p_{t-k}, \tag{4}$$

ahol

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k = 1.$$

[1] Beérkezett: 2000. november 11.

(v) *Adaptív árvárakozás:* Itt a termelő az előző évi árbecsléséből kiindulva ugyanezen becslés hibáját vetíti előre:

$$p_t^e = p_{t-1}^e + \alpha(p_{t-1} - p_{t-1}^e), \tag{5}$$

ahol

$$0 \leq \alpha \leq 1.$$

(vi) *AR(1) becslés és általánosításai:* Ebben az esetben a termelő csak az ár várható értékét tudja megbecsülni, de a tényleges ár attól egy véletlen hibataggal - aminek a várható értéke természetesen 0 - különbözhet:

$$p_t^e = F(p_{t-1}, p_{t-1}^e) + \xi, \tag{6}$$

ahol F egy megfelelő függvény, ξ pedig egy hibatag.

(vii) *A minta autokorrelációján alapuló tanulás:* A múltbeli árak egy véges hosszú idősor elemeit alkotják. A t időpontban a megfigyelt értékek átlaga legyen α_t, az idősor korrelációja önmaga egy lépéssel való eltoltjával pedig legyen β_t. Ekkor

$$p_t^e = F(\alpha_{t-1} + \beta_{t-1}(p_{t-1} - \alpha_t)), \tag{7}$$

ahol F ismét egy alkalmasan választott függvény.

(viii) *Keynes-féle n lépéses várakozás:* Legyen $p_t^{e,0} = p_t^e$ a fenti módszerek valamelyikével vagy bármilyen más módon meghatározott árvárakozás. Ezt nevezzük 0 lépéses árvárakozásnak. Jelölje $D(p)$, illetve $S(p^e)$ a keresleti, illetve kínálati függvényt p valódi, illetve p^e becsült ár mellett. Legyen n egy pozitív egész. Ekkor a $p_t^{e,n}$ n lépéses árvárakozást az alábbi rekurzív módon határozzuk meg. Az nem más, mint az a $\bar{p}$ ár, amire a

$$D(\bar{p}) = S(p_t^{e,n-1}) \tag{8}$$

egyenlet teljesül.

Nehéz megmondani, hogy egy adott piacon melyik modell adja a legjobb közelítést. A naiv várakozás bizonyos százalékban a valós piacokon is létezik. A racionális nyilvánvalóan csak az elméletben létező, ideális eset. Előnye, hogy sok esetben a piac stabilizálódásához vezet(ne). Az extrapolatív becslés, amit például [8] és [10] tárgyal, azon alapul, hogy a termelő nem az árat, hanem az ár változásának tendenciáját tartja tartósnak. Előnye, hogy nem kívánja meg a termelőtől bonyolult összefüggések ismeretét és számítását, valamint hosszú idősorok nyilvántartását. Tehát ebben a vonatkozásban hasonlít a valódi termelő magatartására. Az adaptív modellt [9] vezette be abból az elméleti megfontolásból, hogy a múltból való tanulás segít stabilizálni a piacot. Azonban [4] rámutatott, hogy ez nincs mindig így. [11] kimutatta, hogy a piacon meglévő várakozások jól közelíthetők az extrapolatív vagy adaptív esettel. A hazai burgonyapiacot elemzi ezek alapján [1,2,3].

Mindazonáltal nem lehet kizárni, hogy a valódi termelő árvárakozásának meghatározása során bonyolult összefüggéseket alkalmaz, azok explicit ismerete nélkül. Pédául [7] egyebek mellett így jellemez egy gazdálkodói csoportot: „Megvan ugyan a gazdálkodásban a kalkulatorikus elem, de a hagyományban rögzítve. Olyan jövőszámítás ez, amit a gyakorlat ezerszeresen igazolt, így az egyéni praxisban nem jelenik meg mint kalkulatorikus elem." Egy másik, piacorientáltnak mondott csoportról pedig ezt írja: „... azt termelik, amit el tudnak adni, de a bevétel és kiadás könyvelése helyett egy definiálatlan 'megéri' érzésre alapozzák munkájukat. ... Létezik ennél a csoportnál egy konszenzus, hogy meddig éri meg állatokat tartani, és mi az a küszöb, ami alá nem érdemes menni." Ezek olyan magatartásformák, amelyek jóideig jelen lesznek a hazai mezőgazdasági termelők körében. Mindezt tovább bonyolítja, hogy amennyiben érzékelhető infláció van jelen a gazdaságban, akkor ezt hogyan veszi figyelembe a termelő. Példaként említjük, hogy az egyik legegyszerűbb árvárakozás, az extrapolatív, képlete állandó β inflációs ráta esetén

$$p_t^e = (1+\beta)(1+\alpha)p_{t-1} - \alpha(1+\beta)^2 p_{t-2}. \tag{9}$$

Nem valószínű, hogy a termelők többsége ezt így végigszámolja. Ez azonban még nem jelenti azt, hogy nincs árvárakozásuk. Egy implicit várakozás valódi képlete viszont igen bonyolult is lehet. Az említett bonyolult modellek közül [11] használja az általánosított extrapolatívat, [12] tárgyalja az AR(1) modellt és általánosításait, a Keynes-féle modell gondolata [6]-ból származik, az autokorreláción alapuló tanulás gondolata pedig [5]-ből.

Megjegyezzük végül, hogy legjobb ismereteink szerint [11] az egyetlen kisérlet arra, hogy a fent tárgyalt elméleti modelleknek a valósághoz való viszonyát valamely konkrét piac esetében elemezze.

Vegyük észre, hogy a fenti modellek közül egyedül a (vi) ismeri be azt a tényt, hogy a termelő nem képes egyetlen számot megadni becsült árként. A várakozás és a tényleges ár közti különbségre tett azon feltételezés, hogy ez véletlentől függ, természtesnek látszik. Gondoljunk például arra, hogy a mezőgazdaságban a terméseredmények a véletlennek tekinthető időjárástól függnek. Ugyanakkor a hibatag nem lehet akármekkora, hiszen negatív árak nem lehetségesek, így a hibatagra az elméletben megkövetelt normális eloszlás nem lesz igaz. Továbbá egyéb technológiai feltételekből (pl. vetésforgó, öntözés) következik, hogy a terméseredmény bizonyos korlátok közt fog maradni.

Ezért a jelen dolgozatban egy olyan új modellt tárgyalunk, ahol megmarad a becslés bizonytalansága, de ezt matematikai értelemben determinisztikus eszközzel írjuk le. Ez az eszköz a matematikai közgazdaságtan más fejezeteiben ismert és használt halmazértékű függvény.

2 Árvárakozási bizonytalanságok leírása halmazértékű függvények segítségével

Legyen X és Y két nem üres halmaz. Azt mondjuk, hogy F egy X-ből Y-ba képező *halmazértékű függvény*, másik nevén *multifüggvény*, ha F olyan függvény, ami X-ből Y hatványhalmazába képez, azaz minden $x \in X$ esetén $F(x)$ az Y halmaz részhalmaza. Ennek jelölése $F: X \Rightarrow Y$. Az alábbiakban azt a konvenciót alkalmazzuk, hogy a halmazértékű függvényeket mindig nagybetűvel jelöljük, míg a közönségeseket kisbetűvel.

Még egy matematikai segédeszközre lesz szükségünk. Legyen n egy tetszőleges pozitív egész és A, $B \subset \mathbb{R}^n$ két korlátos zárt halmaz. Ha $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ két tetszőleges vektor, akkor jelölje $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$ a szokásos euklideszi távolságukat. Ekkor az A halmaznak a B halmaztól vett távolságán a

$$H(A, B) = \max_{\mathbf{a} \in A} \min_{\mathbf{b} \in B} \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$$

mennyiséget értjük. Könnyen belátható, hogy ebben a fogalomban az A és B halmaz szerepe nem szimmetrikus, azaz az így definiált mennyiség nem távolság a szokásos értelemben. Ugyanis, ha A egyetlen pontból áll, akkor $H(A, B)$ ettől az egyetlen ponttól a B halmaz hozzá legközelebb eső pontjába vezető szakasz hossza, míg ha a B halmaz áll egyetlen pontból, akkor $H(A, B)$ ezt az egyetlen pontot az A halmaz tőle legtávolabb eső pontjával összekötő szakasz hossza. Azonban könnyen azt kaphatunk a segítségével, amit A és B Hausdorff-Pompeiu távolságának nevezünk, illetve általában Hausdorff-Pompeiu metrikának, és amelynek képlete:

$$\mathcal{H}(A, B) = \max \left\{ \max_{\mathbf{a} \in A} \min_{\mathbf{b} \in B} \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|, \max_{\mathbf{b} \in B} \min_{\mathbf{a} \in A} \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| \right\}$$

Belátható, hogy az így definiált fogalom teljesíti a távolságfogalomtól megkövetelt szokásos tulajdonságokat. Ezért lehet arról is beszélni, hogy egy halmazértékű függvény ezen metrika szerint folytonos, ha annak értékei nem üres, korlátos, zárt halmazok.

Olyan piacot vizsgálunk, amelyen egyetlen termék van jelen, és ennek a jövőbeli árát kívánjuk megbecsülni. Bár formailag sehol nem fogjuk felhasználni, vizsgálataink mögött az a hipotézis áll, hogy a piac nyugodt, azaz az ár változhat, de hisztérikus, váratlan események nem történnek.

A fentebb mondottaknak megfelelően azt feltételezzük, hogy a jövőbeli árat egy bizonyos halmazba tudjuk behatárolni. Ez azonban még önmagában nem zárja ki, hogy ne határozzunk meg a jövőbeli árra egy reálisnak tartott értéket. Ezt az utóbbit fogjuk *várt ár*nak nevezni. Ez utóbbi pedig a piac, pontosabban a termék valódi árának történetétől függ, azaz a termelő megpróbál a korábban elkövetett becslés hibájából okulni. A következő időperiódusban megvalósuló ár a jelenlegi piaci ár és a várt ár közös függvényeként határolható be egy szűkebb halmazba.

Az eddig mondottakat matematikailag a következőképpen fogalmazzuk meg. A szükséges jelölések:

t	az időperiódus indexe
p_t	a piaci ár a t periódusban
p_t^e	a t periódusra várt ár
F	az az $\mathbb{R}^2 \Rightarrow \mathbb{R}$ halmazértékű függvény, ami a jövőbeli piaci árat behatárolja
G	egy $\mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ halmazértékű segédfüggvény
$\{\gamma_t\}$	egy nemnegatív számokból álló végtelen sorozat
α_t	a p_t^e meghatározásánál használt segédváltozó

Most megadjuk a folyamat matematikai leírását, majd pedig tisztázzuk a piaci árak és a termelői árvárakozások kialakulásának, mint két folyamatnak az időbeli kapcsolatát.

Az eddig mondottak szerint legfontosabb feltételezésünk:

$$p_t \in F(p_{t-1}, p_t^e). \tag{A1}$$

A várt ár a jelenlegi ár egy számszorosa:

$$p_t^e = \alpha_{t-1} p_{t-1}, \tag{A2.1}$$

ahol α_t a piac történetétől és az utolsó várt ár relatív hibájától függ:

$$\alpha_t = \alpha_{t-1} + \gamma_{t-1} \frac{p_t - p_t^e}{p_{t-1}}, \tag{A2.2}$$

és

$$\alpha_0 \geq 0. \tag{A2.3}$$

A nemnegatív számokból álló $\{\gamma_t\}$ sorozatról pedig feltesszük, hogy

$$\sum_{t=0}^{\infty} \gamma_t = +\infty. \tag{A3}$$

Végül az F halmazértékű függvényről feltesszük, hogy a következő egyszerű módon írható fel:

$$\forall p \in \mathbb{R}\ \forall \alpha \geq 0 : \ F(p, \alpha p) = G(\alpha) p. \tag{A4}$$

A $t-1$ időpontban az ekkor már létező p_{t-1} piaci ár ismeretében a termelő meghatározza, hogy milyen árat vár a t időpontra az α_{t-1} paraméter segítségével (A2.1 képlet). A t idő pontban a piacon megjelenő árumennyiség ettől a várakozástól függ. Ezután a piaci árat az ott megjelenő árumennyiség határolja be a t időpontban (A1 képlet). A termelő megfigyeli várakozása hibáját és ennek megfelelően módosítja az α paraméter értékét, azaz tanulja a piac viselkedését (A2.2 képlet). A γ_t paraméter azt fejezi ki, hogy az utolsó információnak mennyi a súlya. Ha

$$\sum_{t=0}^{\infty} \gamma_t < +\infty,$$

akkor az a gyakorlatban azt jelentené, hogy a termelő szerint ő a piacról nem kaphat egy idő után releváns információt.

3 Hogyan tanulja meg a termelő a piacot?

A termelő akkor tanulta meg pontosan a piacot, ha a várt ár mindig megegyezik a tényleges piaci árral egy időponttól kezdődően. Ekkor a $\{\gamma_t\}$ sorozat tagjainak értékétől függetlenül α_t állandó lesz ugyanezen időponttól. Ez azonban túl erős követelménynek látszik. Joggal gondolhatjuk, hogy a termelő akkor is megtanulja a piac mechanizmusát, ha az $\{\alpha_t\}$ sorozat tart egy α rögzített értékhez. Az alábbiakban ezt az esetet vizsgáljuk.

1. tétel. Tegyük fel, hogy az (A1)-(A4) feltételezések igazak, továbbá, hogy létezik egy $\bar{\alpha}$, hogy

$$\bar{\alpha} = \lim_{t\to\infty} \alpha_t, \tag{10}$$

és hogy $G(\alpha)$ egy nem üres, korlátos, zárt intervallum minden $\alpha \geq 0$ esetén, és a G halmazértékű függvény folytonos a Hausdorff-Pompeiu metrikában. Ekkor

$$\bar{\alpha} \in G(\bar{\alpha}). \tag{11}$$

Bizonyítás. A feltételek szerint

$$\begin{aligned}\alpha_t &= \alpha_{t-1} + \gamma_{t-1}\frac{p_t - p_t^e}{p_{t-1}} \in \alpha_{t-1} + \gamma_{t-1}\frac{G(\alpha_{t-1})p_{t-1} - p_t^e}{p_{t-1}} = \\ &= \alpha_{t-1} + \gamma_{t-1}\left(G(\alpha_{t-1}) - \alpha_{t-1}\right).\end{aligned}$$

Innen

$$\alpha_t - \alpha_{t-1} \in \gamma_{t-1}\left(G(\alpha_{t-1}) - \alpha_{t-1}\right). \tag{12}$$

Legyen T egy tetszőleges pozitív egész. Összegezzük a (12) egyenleteket $t = 1, ..., T$-re. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\alpha_T - \alpha_0 \in \sum_{t=0}^{T-1} \gamma_t\left(G(\alpha_t) - \alpha_t\right). \tag{13}$$

A feltételezések mellett az egyenlet bal oldala a véges $\bar{\alpha} - \alpha_0$ értékhez konvergál. Hasonlóképpen a jobb oldalon $G(\alpha_t)$ a $G(\bar{\alpha})$ halmazhoz tart. Ha a (11) reláció nem igaz, akkor létezik egy $\epsilon_0 > 0$, hogy minden $\epsilon_0 > \epsilon > 0$ estén van egy $T(\epsilon)$ küszöbindex, hogy vagy

(i) $\forall\, t \geq T(\epsilon)$ és $\forall\, \alpha \in G(\alpha_t)$ esetén $\alpha \geq \bar{\alpha} + \epsilon$,

vagy

(ii) $\forall\, t \geq T(\epsilon)$ és $\forall\, \alpha \in G(\alpha_t)$ esetén $\alpha \leq \bar{\alpha} - \epsilon$.

Ez azt jelenti, hogy a (13) jobboldala egy plusz végtelenhez vagy egy minusz végtelenhez tartó intervallum, vagyis maga a (13) reláció nem állhat fenn minden T-re. Q.E.D.

Meg kell jegyezni azonban, hogy sok fixpont lehetséges, mint azt az alábbi tétel mutatja.

2. tétel. (i) Legyen $G : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ egy olyan halmazértékű függvény, amely folytonos a Hausdorff-Pompeiu metrikában és értékei korlátos, zárt intervallumok. Ekkor a G halmazértékű függvény fixpontjainak C halmaza zárt. (ii) Ha $C \subset \mathbb{R}$ egy tetszőleges zárt halmaz, akkor létezik olyan $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, hogy g fixpontjainak halmaza azonos a C halmazzal.

Bizonyítás. (i) Legyen $\{\alpha_t\}$ a G fixpontjainak egy konvergens sorozata úgy, hogy $\alpha = \lim_{t\to\infty} \alpha_t$. Ekkor $H(G(\alpha_t), \{\alpha\}) \leq |\alpha_t - \alpha| \to 0$. Ezért $G(\alpha)$ zártsága miatt $\alpha \in G(\alpha)$.

(ii) Ha a C halmaz egyetlen v számból áll, akkor legyen $g(x) = 2x - v$. Ha C egynél több számból áll, akkor a következőképpen járunk el. Ha C felülről korlátos, akkor létezik egy u maximális eleme. Ekkor minden $x \geq u$ esetén legyen $g(x) = u + \log(x - u + 1)$. Ha C alulról korlátos, akkor létezik egy v minimális eleme. Ekkor minden $x \leq v$ esetén legyen $g(x) = 2x - v$. Minden más esetben ha $x \neq C$, akkor létezik a C halmaznak az x számnál kisebb elemei közül egy maximális és az x-nél nagyobb elemei között egy legkisebb. Legyen ez a két elem $c_1 < x < c_2$. Ekkor legyen

$$g(x) = \frac{x^2}{c_2 - c_1} - \frac{2c_1 x}{c_2 - c - 1} + \frac{c_1 c_2}{c_2 - c_1}.$$

Egyszerű számolással látható, hogy minden esetben g fixpontjai pontosan a C halmaz elemei. Q.E.D.

4 A tanulás konvergenciájáról

A továbbiakban azt vizsgáljuk, hogy egy fixpont közelében hogyan zajlik a folyamat. Feltesszük, hogy $\bar{\alpha}$ a G halmazértékű függvény fixpontja, azaz $\bar{\alpha} \in G(\bar{\alpha})$. Szükségünk lesz a következő halmazra:

$$\begin{aligned} D(\bar{\alpha}) = \big\{(\alpha, \gamma) \mid \mathcal{H}((1-\gamma)\alpha + \gamma G(\alpha), \bar{\alpha})^2 \leq (\alpha - \bar{\alpha})^2\big\} \cup \\ \cup \ \big\{(\bar{\alpha}, \gamma) \mid 0 \leq \gamma \leq 1\big\}. \end{aligned} \tag{14}$$

3. tétel. Legyen $G : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ egy olyan halmazértékű függvény, amely folytonos a Hausdorff-Pompeiu metrikában és értékei korlátos, zárt intervallumok. Legyen továbbá $\bar{\alpha}$ a G fixpontja. Ha az (α_t, γ_t) sorozat olyan, hogy a $(\alpha_t, \gamma_t) \in D(\bar{\alpha})$ és az $\alpha_t \neq \bar{\alpha}$ relációk véges sok kivételtől eltekintve mindig teljesülnek. Ekkor az $|\alpha_t - \bar{\alpha}|$ sorozat konvergens.

Bizonyítás. Ha az állításban szereplő relációk véges sok kivételtől eltekintve teljesülnek, akkor egy alkalmas küszöbindextől kezdve mindig igazak lesznek. Elegendő a sorozatot csak ettől kezdve vizsgálni. Az 1. tétel bizonyításában szereplő (12) reláció ismét igaz lesz. Innen felhasználva, hogy $(\alpha_{t-1}, \gamma_{t-1}) \in D(\bar{\alpha})$

$$(\alpha_t - \bar{\alpha})^2 \leq \mathcal{H}((1-\gamma_{t-1})\alpha_{t-1} + \gamma_{t-1} G(\alpha_{t-1}), \bar{\alpha}) \leq (\alpha_{t-1} - \bar{\alpha})^2. \tag{15}$$

Tehát a nemnegatív $\{|\alpha_t - \bar{\alpha}|\}$ sorozat monoton csökkenő, amiből következik, hogy konvergens. Q.E.D.

4. tétel. Ha a 3. tétel feltételei mellett az $\{\gamma_t\}$ sorozat 0-hoz tart, akkor az $\{\alpha_t\}$ sorozat konvergens.

Bizonyítás. A G halmazértékű függvény folytonosságából következik, hogy a $\{G(\alpha_t)\}$ halmazsorozat korlátos. Innen az ismét teljesülő (12) relációból következik, hogy $\{\alpha_t\}$ Cauchy-sorozat, tehát konvergens. Q.E.D.

A továbbiakban megvizsgáljuk azt az ideális esetet, amikor csak egyetlen fixpont van, és ennek képe önmaga.

5. tétel. Legyen $G : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ egy olyan halmazértékű függvény, amely folytonos a Hausdorff-Pompeiu metrikában és értékei korlátos, zárt, nemüres intervallumok. Feltesszük továbbá a következőket: (i) G-nek egyetlen fixpontja van, ami $\bar{\alpha}$, (ii) minden α esetén

$$\mathcal{H}(G(\alpha), \bar{\alpha}) \leq |\alpha - \bar{\alpha}|, \tag{16}$$

$$\gamma = \limsup_{t\to\infty} \gamma_t < 1. \tag{17}$$

Ekkor

$$\lim_{t\to\infty} \alpha_t = \bar{\alpha}. \tag{18}$$

Bizonyítás. Legyen $\delta = |\alpha - \bar{\alpha}|$. Ekkor a (16) feltétel azt jelenti, hogy $G(\alpha) \subset [\bar{\alpha} - \delta, \bar{\alpha} + \delta]$. Innen következik, hogy minden $\alpha \in [0,1]$ esetén $(\alpha, \gamma) \in D(\bar{\alpha})$. A (17) feltételből adódik, hogy véges sok kivételtől eltekintve $\gamma_t < 1$. Tehát a 3. tételből következik, hogy $|\alpha_t - \bar{\alpha}|$ konvergens. Ezért az α_t sorozatnak egy vagy két torlódási pontja van. Ha az α_t sorozatnak csak egy torlódási pontja van, akkor a sorozat konvergens és az 1. tétel szerint egy fixponthoz tart, ami a feltételeink szerint nem lehet más, csak $\bar{\alpha}$.

Tegyük most fel, hogy az $\mid \alpha_t - \bar{\alpha} \mid$ sorozatnak két torlódási pontja van. Legyen ez a két torlódási pont $\bar{\alpha} - \delta$ és $\bar{\alpha} + \delta$, ahol

$$\delta = \lim_{t\to\infty} |\alpha_t - \bar{\alpha}| > 0.$$

Ekkor a 3. tétel bizonyításához hasonló módon (l. (15)) belátható, hogy a $|\alpha_t - \bar{\alpha}|$ sorozat monoton csökkenő. Tehát α_t sorozat megfelelő részsorozatai kívülről tartanak a $[\bar{\alpha} - \delta, \bar{\alpha} + \delta]$ intervallum két végpontjához. Ezért végtelen sokszor kell előfordulnia annak a két helyzetnek, hogy $\alpha_{t-1} \leq \bar{\alpha} - \delta$ és $\alpha_t \geq \bar{\alpha} + \delta$, illetve $\alpha_{t-1} \leq \bar{\alpha} + \delta$ és $\alpha_t \geq \bar{\alpha} - \delta$. Vizsgáljuk meg az első esetet. A (12) képlet alapján tudjuk, hogy

$$\alpha_t \in (1 - \gamma_t)\alpha_{t-1} + \gamma_t G(\alpha_{t-1}). \tag{19}$$

Minden $\epsilon > 0$ esetén, ha t elegendően nagy, teljesülnie kell, hogy $\alpha_{t-1} \geq \bar{\alpha} - \delta - \epsilon$, $\gamma_t \leq \gamma + \epsilon$. Innen annak figyelembevételével, hogy a (19) jobb oldalán lévő halmaznak az $\alpha_t \geq \bar{\alpha} + \delta$ pontot le kell fednie, az adódik, hogy

$$(\bar{\alpha} - \delta)(1 - \gamma - \epsilon) + (\bar{\alpha} + \delta + \epsilon)(\gamma + \epsilon) \geq \bar{\alpha} + \delta.$$

Ez pedig a

$$2\gamma\delta + 2\delta\epsilon + \gamma\epsilon + \epsilon^2 \geq 2\delta$$

egyenlőtlenséggé redukálható. Mivel a balodal határértéke határozottan kisebb a jobboldalnál, ezért ez minden $\epsilon > 0$ mellett nem lehet igaz, azaz ellentmondásra jutottunk. Q.E.D.

6. lemma. Legyen $G : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ egy olyan halmazértékű függvény, amelynek értékei korlátos, zárt, nemüres intervallumok, és amely folytonos a Hausdorff-Pompeiu metrikában egy $\bar{\alpha}$ pontban. Ha minden α esetén a (16) egyenlőtlenség teljesül, akkor

$$G(\bar{\alpha}) = \{\bar{\alpha}\}. \tag{20}$$

Bizonyítás. Ha létezik egy $\bar{\bar{\alpha}} \neq \bar{\alpha}$ elem úgy, hogy $\bar{\bar{\alpha}} \in G(\bar{\alpha})$, akkor $\mathcal{H}(G(\bar{\alpha}), \bar{\alpha}) \geq |\bar{\bar{\alpha}} - \bar{\alpha}| > 0$. Ugyanakkor (16) azt követeli meg, hogy ez a távolság 0 legyen. Mivel $G(\bar{\alpha}) \neq \emptyset$, ezért $G(\bar{\alpha})$ egyedüli lehetséges eleme $\bar{\alpha}$. Q.E.D.

Ha a következő feltételek teljesülnek, lehetőség adódik a fixpontok egyfajta, a halmazértékű függvényen alapuló karakterizációjára.

7. tétel. Tegyük fel, $\lim_{t\to\infty} \alpha_t = \bar{\alpha}$ úgy, hogy a sorozat végtelen sok tagja különbözik $\bar{\alpha}$-tól, és $\lim_{t\to\infty} \gamma_t = \bar{\gamma}$, $G(\bar{\alpha}) = \{\bar{\alpha}\}$, és az $(\bar{\alpha}, \bar{\gamma})$ pontnak létezik olyan környezete, amely $D(\bar{\alpha})$ része. Tegyük fel továbbá, hogy léteznek $g_1(\alpha)$, $g_2(\alpha)$ folytonosan differenciálható függvények, hogy $G(\alpha) = [g_1(\alpha), g_2(\alpha)]$. Ekkor g_i $(i = 1, 2)$ az alábbi négy eset valamelyikébe tartozik:

(i) $\bar{\gamma} > 0$ és $1 - \frac{2}{\bar{\gamma}} < g_i'(\bar{\alpha}) < 1$,

(ii) $\bar{\gamma} = 0$ és $g_i'(\bar{\alpha}) < 1$,

(iii) $\bar{\gamma} > 0$, $g_i'(\bar{\alpha}) = 1$ és a g_i' függvénynek $\bar{\alpha}$-ban maximuma van,

(iv) $\bar{\gamma} > 0$, $g_i'(\bar{\alpha}) = 1 - \frac{2}{\bar{\gamma}}$ és a g_i' függvénynek $\bar{\alpha}$-ban minimuma van.

Bizonyítás. Az adott feltételek mellett az α_t sorozat végtelen sok tagja különbözik 0-tól. Ha $(\alpha_t, \gamma_t) \in D(\bar{\alpha})$, akkor

$$\mathcal{H}((1 - \gamma_t)\alpha_t + \gamma_t G(\alpha_t), \bar{\alpha})^2 \leq (\alpha_t - \bar{\alpha})^2,$$

ami $G(\bar{\alpha}) = \{\bar{\alpha}\}$ miatt $\alpha_t = \bar{\alpha}$ esetén is igaz. Innen kapjuk, hogy $i = 1, 2$ esetén

$$((1 - \gamma_t)\alpha_t + \gamma_t g_i(\alpha_t) - \bar{\alpha})^2 \leq (\alpha_t - \bar{\alpha})^2. \tag{21}$$

A Lagrange-középértéktétel szerint létezik olyan $\xi \in (\alpha_t, \bar{\alpha})$, hogy $g_i(\alpha_t) = g_i(\bar{\alpha}) + g_i'(\alpha_t - \bar{\alpha})$. Ezt behelyettesítve (21)-be nyerjük, hogy

$$((1 - \gamma_t + \gamma_t g_i'(\xi))(\alpha_t - \bar{\alpha}))^2 \leq (\alpha_t - \bar{\alpha})^2. \tag{22}$$

Mivel $\alpha_t \to \bar{\alpha}$ esetén $\xi \to \bar{\alpha}$, ezért (22) csak akkor teljesülhet, ha $g_i' \leq 1$. Feltéve, hogy $\alpha_t \neq \bar{\alpha}$, osszuk le a (22) egyenlőtlenséget a jobboldalával. Ekkor

$$(1 + \gamma_t + \gamma_t g_i'(\xi))^2 \leq 1,$$

ami határátmenet után azt adja, hogy

$$|(1-\bar{\gamma}+\bar{\gamma}g_i'(\bar{\alpha}))| \leq 1. \tag{23}$$

Az eddigiekből $\bar{\gamma}=0$ esetén azonnal a (ii) esetet kapjuk. A továbbiakban tegyük fel, hogy $\bar{\gamma}>0$. Vizsgálatainkat aszerint folytatjuk, hogy (23) bal oldalán mi adja az abszolút értéket. Ha $1-\bar{\gamma}+\bar{\gamma}g_i'(\bar{\alpha}) \geq 0$, akkor (23)-ból a $g_i'(\bar{\alpha}) \leq 1$ feltételt kapjuk vissza. Ha $g_i'(\bar{\alpha})=1$, akkor abból a feltételből, hogy $(\bar{\alpha},\bar{\gamma})$ egy környezete $D(\bar{\alpha})$-ban van, a fentiekhez hasonló meggondolásokból következik, hogy a g_i' függvénynek $\bar{\alpha}$-ban maximuma van. Ha viszont $-1+\bar{\gamma}-\bar{\gamma}g_i'(\bar{\alpha}) \geq 0$, akkor innen azonnal adódik, hogy

$$1-\frac{2}{\bar{\gamma}} \leq g_i'(\bar{\alpha}).$$

Ha itt egyenlőség teljesül, akkor a már említett környezetben nem lehet kisebb g_i' értéke, tehát a függvénynek $\bar{\alpha}$-ban minimuma van. Q.E.D.

5 Összefoglalás

Új modellünkben a becslések bizonytalanságát egy matematikai értelemben determinisztikus eszközzel, a halmazértékű függvénnyel írjuk le. A termelő akkor tanulja meg a piacot, ha a várt ár és a tényleges ár közötti különbség idővel eltünik. Ehhez adtunk dolgozatunkban egy szükséges és két elégséges feltételt.

Irodalom

1. Bacsi Zs., Vizvári B., A magyar burgonyapiac viselkedéséről és irányításáról, *VI. Nemzetközi Agrárökonómiai Tudományos Napok, Gyöngyös*, 1998. március 24-25., I. kötet, 25–30.
2. Bacsi Zs., Vizvári B., Modelling chaotic behaviour in Agricultural prices using a discrete deterministic nonlinear price model, *Annals of Operations Research* 89(1999), 125–148.
3. Bacsi Zs., Vizvári B., Mezőgazdasági termékárak modellezése és szabályozása egy determinisztikus nemlineáris ármodell alkalmazásával, GATE Gazdaság- és Társadalomtudományi Kar, Tudományos Közlemények, *Vállalati környezet és alkalmazkodás az élelmiszertermelésben*, III. kötet, 1998., 85–87.
4. C. H. Hommes (1991), Adaptive learning and roads to chaos (The case of the cobweb), *Economics Letters*, 36, 127–132.
5. C. H. Hommes, G. Sorger, Consistent expectations equilibria, *6th Viennese Workshop on Optimal Control, Dynamic Games, Nonlinear Dynamics and Adaptive Systems*, Bécs, 1997.05.22.
6. J. M. Keynes, *The General Theory of Employment, Interest and Money*, Macmillen, London, 1936. 156.
7. Kovách Imre, Kuczi Tibor, Gazdálkodói előnyök átváltási lehetőségei a társadalomban, *Valóság*, 1982. 6.sz., 45–55.

8. Molnár S., Szidarovszky F. (1994), Egy diszkrét dinamikus termelői-fogyasztói modell stabilitásáról, *Szigma*, 25, 207–219.
9. M. Nerlove (1958), Adaptive expectation and cobweb phenomena, *Quaterly Journal of Economics*, 72, 227–240.
10. Szidarovszky F., Molnár S. (1994), Adaptív és extrapolatív becslések egy speciális diszkrét dinamikus termelői-fogyasztói modellben, *Szigma*, 25, 221–227.
11. Vizvári B., Bacsi Zs., Kovács E., Lakner Z. (2000), Empirical analysis of producers' price expectations, *Central European Journal of Operation Research*, 7, 327–336.
12. M. Zenner, *Learning to Become Rational*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 439, Springer, Berlin, 1996.

A NEW APPROACH OF PRICE EXPECTATIONS

A new market model is provided which describes the uncertainty of the estimations by set-valued functions. The producer learns the market if the difference between the estimated price and the real market price converges to zero. A necessary and two sufficient conditions of the convergence are provided.

A GAZDASÁGFEJLESZTÉSI PÁLYÁZAT HATÉKONYSÁGÁNAK VIZSGÁLATA[1]

NÉMETH SÁNDOR ZOLTÁN, RAPCSÁK TAMÁS ÉS TEMESI JÓZSEF
MTA SZTAKI és BKÁE, Budapest

Bemutatjuk a Gazdaságfejlesztési Pályázat hatékonyságának 1996, 1997. és az 1998. évekre vonatkozó értékelését. Az értékelési feladatot csoportos, többszempontú döntési feladatként megfogalmazva, a WINGDSS 4.1. szoftverrendszerrel oldottuk meg, amit a *Magyar Tudományos Akadémia Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézet, Operációkutatás és Döntési Rendszerek Osztályán* fejlesztettünk ki. A feladat megoldása – az uniós értékelési elvekkel megegyezően, számszerűleg is kifejezhető módon – azt mutatta meg a Gazdaságfejlesztési Célelőirányzatot kezelő minisztériumi főosztálynak, hogy a költségvetés által 1996 és 1998 között mintegy 170 pályázónak kiosztott támogatások eredménye a kitűzött gazdaságpolitikai célokkal mennyire volt összhangban. Az előzetes várakozásoknak megfelelően modellszámításaink is azt mutatták, hogy az így értelmezett hatékonyság közepes szinten mozgott és a tényadatokat tekintve a legsikeresebb évnek az 1998-as év bizonyult.

1 Bevezető

Az Európai Unióval szoros kapcsolatot tartó Magyarország gazdasága számára létfontosságú, hogy minden szektorban hatékony szerkezetű, korszerű műszaki-technológiai színvonalon álló kapacitásokat építsen ki, s ezáltal versenyképes árukat és szolgáltatásokat termeljen. A fő stratégiai célok a kormányprogramokból, illetve az éves költségvetés gazdaságpolitikai indoklásából olvashatók ki. Ezen célok megvalósítását speciális támogatási formák is segítik, belföldi és külső forrásokat egyaránt igénybe véve.

A Gazdasági Minisztérium költségvetési fejezetében szereplő Gazdaságfejlesztési Cél-előirányzatok felhasználásáról és kezelésének részletes szabályairól a 33/1998. (V.22.) IKIM rendelet szól. A célelőirányzat —fogalmazza meg a rendelet— a gazdaságfejlesztési és kereskedelempolitikai célok megvalósításának eszköze. A költségvetési törvényben meghatározott előirányzatból —a Magyar Köztársaság nemzetközi szerződéseiben vállalt kötelezettségeivel összhangban— pályázati úton, több jogcímen nyerhető el támogatás.

A Gazdasági Minisztérium Kereskedelemfejlesztési és Befektetésösztönzési Főosztálya megbízásából 1999 végén a Gazdaságfejlesztési Pályázat, az „Ipari Park" cím elnyerésére, valamint az ipari parkok infrastrukturális beruházásainak segítésére kiírt pályázat és a Minőségbiztosítási Pályázat értékelését

[1]Beérkezett: 2000. november 11. Az első két szerző megköszöni az OTKA (T029572) támogatását

végeztük el, amik közül a legnagyobb volumenű és legjelentősebb hatású a Gazdaságfejlesztési Pályázat (továbbiakban GFP). Ennek az értékelését fogjuk ismertetni. Mind elvi, mind módszertani szempontból nagyon fontosnak tarjuk hangsúlyozni azt, hogy a támogatás pályázati rendszerben folyik. Egy pályázati rendszer eredményességének megítélése nem történhet meg kizárólag valamely végponton, hanem meg kell vizsgálni az egész folyamat hatékonyságát, fel kell tárni az egyes pályázati elemek közötti kölcsönös kapcsolatokat. Az egymásra ható tényezők visszacsatolási mechanizmusainak elemzése segít abban, hogy a pályázat egészének hatékonysága javuljon.

Az értékelést az 1996, 1997, 1998. évek pályázati és tényadatain végeztük el. Az értékelés elvégzéséhez a Gazdasági Minisztérium megfelelő adatbázisa állt a rendelkezésünkre, mely a szerződésekre vonatkozó pályázati és tényadatokat tartalmazza. Az értékelési feladatot csoportos többszempontú döntési feladatként megfogalmazva a WINGDSS 4.1. szoftverrendszerrel oldottuk meg, amit a *Magyar Tudományos Akadémia Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézet, Operációkutatás és Döntési Rendszerek Osztályán* fejlesztettünk ki [1,3,4]. Ez a szoftver, ellentétben a többi, hasonló célra kidolgozott szoftverrel, nem csak az alternatívák sorrendjének a megállapítására alkalmas, hanem az alternatívákhoz jellemző értékeket is képes rendelni hasznossági függvények segítségével. Ez, esetünkben, a különböző évek hatékonyságának mérőszáma volt. A pályázat értékelését rajtunk kívül két másik cég is elvégezte és hasonló eredményekhez jutott. A cégek által használt módszertanok különbözősége alátámasztja a kapott eredmények helyességét.

Hangsúlyozzuk, hogy a mi feladatunk a modellek felépítése és megoldása volt; az értékelés az adatbázisban szereplő objektív adatok, valamint a (számunkra ismeretlen) döntéshozóknak a szempontok fontosságára vonatkozó szubjektív ítéletei alapján történt.

A dolgozat második részében ismertetjük a feladat megoldására használt WINGDSS 4.1. szoftverrendszert. A harmadik részben felépítjük a döntési modellt, azaz megadjuk az alternatívákat, az értékelési szempontokat, amiket fa struktúrába rendeztünk és a döntéshozókat. A negyedik rész egy-egy külön alfejezetében tárgyaljuk az összesített mutatók értékeinek a meghatározását, a hasznossági függvényeket, a döntéshozói súlyok megadását, a döntési modell alapadatait, majd az *Eredmények* alfejezetben ismertetjük a feladat megoldását, azaz kiértékeljük az alternatívákat az összes szempont figyelembevételével.

2 A felhasznált módszertan

Az értékelési feladatot csoportos többszempontú döntési feladatként megfogalmazva a WINGDSS 4.1. rendszerrel oldottuk meg. A rendszerrel megoldható döntési modellek alapvető jellemzői:

- a döntési modell a döntési cél elérésében kell, hogy segítse a döntésért felelős személyt vagy szervezetet;

- a döntésben egy, vagy több racionális döntéshozó vesz részt, céljuk a megegyezés;
- több alternatíva közül kell a legjobba(ka)t kiválasztani, vagy az alternatívákat kell rangsorolni;
- a kiválasztás vagy rangsorolás több, eltérő jellegű szempont figyelembevételével történik; vannak objektív —az alternatívákat a döntéshozói megítéléstől függetlenül minősítő— szempontok, és az ún. szubjektív — a döntéshozó személyes véleményének függvényében minősítő— szempontok;
- az alternatívák rangsorolásához minden szempont értékelése számszerűsíthető;
- lehetőség van arra, hogy a szempontok között a döntéshozók egyénileg különbséget tegyenek, egyes szempontokat az értékeléskor figyelmen kívül hagyjanak (egyéni súlyozás), de megállapodhatnak abban is, hogy minden döntéshozó azonos súlyrendszert használ (közös súlyrendszer);
- a döntéshozók hozzáértése közötti különbségeket is érvényre lehet juttatni (szavazóerők);
- a döntéshozók a modell kiértékelésében a szubjektív ítéleteikkel játszanak szerepet.

Egy csoportos, többszempontú döntési modell felépítésének alapvető lépései a következők:

- alternatívák meghatározása;
- az értékelési szempontok kiválasztása;
- a döntéshozók kijelölése.

A továbbiakban ezeket a lépéseket részletezzük.

3 A döntési modell felépítése

3.1 Az alternatívák kiválasztása

Megbízónk, a Gazdasági Minisztérium Kereskedelemfejlesztési és Befektetésösztönzési Főosztálya a költségvetés által a Gazdaságfejlesztési Célelőirányzatból a pályázók számára megítélt összegek hasznosulásának egyetlen mutatóba sűrített eredményét fejlődésében, dinamikájában kívánta megítélni. Ehhez évente rendelkezésünkre álltak a nyertes pályázókkal kötött szerződések pályázati és tényadatai. Ebben az esetben —a minisztériumi döntéshozókkal folytatott konzultációk végeredményeképpen— „hatékonyságnak” a gazdaságpolitikai célkitűzésekkel való összhangot tekintettük, vagyis az egyes évek megítélésére a következő alfejezetben számszerűsítésre kerülő célok indikátor-értékeinek aggregátumát kellett előállítanunk.

A döntési modell alternatíváinak ezzel összhangban az egymással hatékonyság szempontjából összehasonlítani kívánt pályázati éveket tekintettük, azaz 3-3 alternatívánk volt:

- Pályázati adatok: 1996, 1997, 1998.
- Tényadatok: 1996, 1997, 1998.

3.2 Az értékelési szempontok meghatározása

Mivel a fő feladat az volt, hogy a gazdaságpolitika céljainak érvényesülését vizsgáljuk, ezért a rendelkezésünkre álló dokumentumokból össze kellett állítanunk ezeknek a céloknak a hierarchiáját, majd számszerűsíthető mutatók szintjére kellett ezeket a célokat levinni. A Minisztérium által a Gazdaságfejlesztési Pályázat elé állított legfontosabb *stratégiai célok* (a szakértői vélemények és a pályázati kiírás szerint) az alábbiak voltak:

- nemzetközileg versenyképes iparszerkezet kialakítása;
- a fizetési mérleg javítása az exporttevékenység ösztönzése révén;
- társadalmi-szociális elvárások kielégítése.

A döntési modell számára ezeket a célokat értelmezhető formába kellett transzformálni, figyelemmel arra is, hogy milyen adatok állnak rendelkezésre. Az elemzések során a stratégiai célokat az alábbi *gazdaságpolitikai szempontcsoportokra* (jellemzőkre) bontottuk le:

- pénzügyi jellemzők;
- a hazai ipar fejlesztését szolgáló jellemzők;
- nemzetgazdasági célok elérését leíró jellemzők.

Mindegyik jellemző több *szempontot* tartalmazott, a szempontokat pedig *alszempontokra* bontottuk. Ezek az alszempontok adták a modell kvantitatív input értékeit (mutató értékek). A mutatók (indikátorok) értékeit a Gazdasági Minisztérium adatbázisából nyertük. Mivel éves bontást és globális értékelést tekintettünk, ezért az alternatívák értékelésekor csak a mutatók szerződésenkénti éves összegét használtuk.

A gazdaságpolitikai jellemzőket, a hozzájuk tartozó szempontokat és alszempontokat (mutatókat) a [11,12,13] alapján határoztuk meg.

1) PÉNZÜGYI JELLEMZŐK

A pénzügyi jellemzők vizsgálatakor a következő szempontokat különböztetjük meg:

- hatékonyság;
- a működőtőke befektetések ösztönzése;
- értékesítési szerkezet;
- export növekedés.

A pénzügyi jellemzők szempontjai további alszempontokra bonthatók.

1.1) A hatékonyság alszempontjai:

- megtérülési idő;
- 1 Ft támogatásra jutó hozzáadott érték;
- 1 Ft összköltségre jutó energia költség.

1.2) A működőtőke befektetések ösztönzésének alszempontja:

- külföldi tőke aránya.

1.3) Az értékesítési szerkezet alszempontja:

- belföldi értékesítés/export értékesítés.

1.4) Az export növekedés alszempontjai:

- 1 Ft támogatásra jutó export értékesítési árbevétel/év vagy időszak;
- 1 Ft támogatásra jutó nettó többletexport.

2) HAZAI IPAR FEJLESZTÉSE

A hazai ipar vizsgálatakor a következő szempontokat különböztetjük meg:

- kiemelt projektek támogatása;
- a hazai beszállítóipar fejlesztése;
- a kis- és középvállalkozások támogatása.

A hazai ipar szempontjai további alszempontokra bonthatók.

2.1) A kiemelt projektek támogatásának alszempontja:

- kiemelt projektek részesedése az összes támogatásból.

2.2) A hazai beszállítóipar fejlesztésének alszempontja:

- hazai beszállítók részesedése.

2.3) A kis- és középvállalkozások támogatásának alszempontja:

- kis- és középvállalatok részesedése az összes támogatásból.

3) NEMZETGAZDASÁGI CÉLOK

A Gazdaságfejlesztési Pályázat a pénzügyi jellemzők és a hazai ipar fejlesztésén túl a nemzetgazdasági célok érvényesülésének egyik eszköze. A nemzetgazdasági célok vizsgálatakor a következő szempontokat különböztetjük meg:

- saját források felhasználásának ösztönzése;
- munkahelyteremtés;
- regionális fejlesztési célok.

A nemzetgazdasági célok szempontjai további alszempontokra bonthatók.

3.1) A saját források felhasználása ösztönzésének alszempontjai:

- 1 Ft beruházásra jutó saját forrás;
- 1 Ft támogatásra jutó saját forrás.

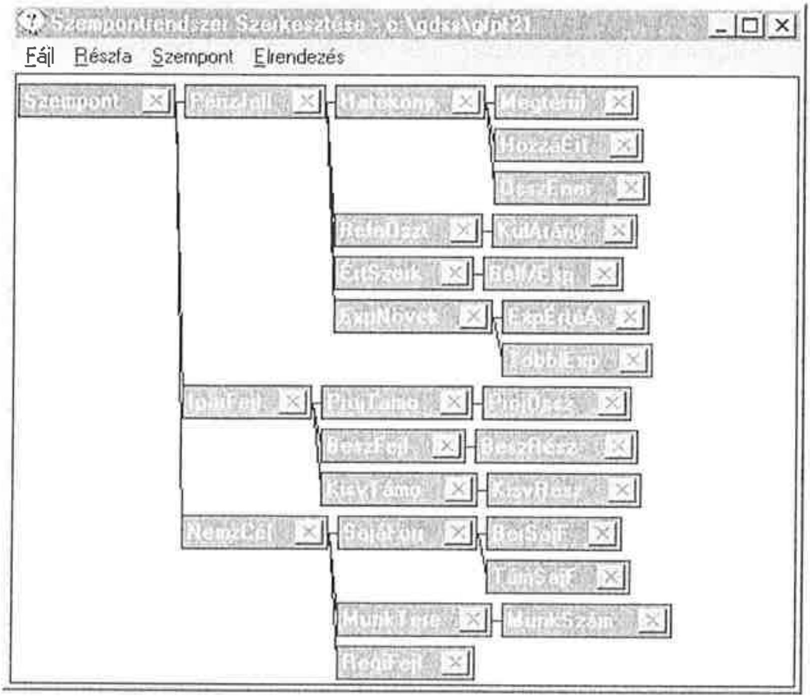
3.2) A munkahelyteremtés alszempontja:

- 1 Ft támogatásra jutó új munkahelyek száma.

3.3) A regionális fejlesztési célok alszempontjai:

- Budapest Pest-Megye részesedése az összes támogatásból;
- Észak-Dunántúl részesedése az összes támogatásból;
- Alföld részesedése az összes támogatásból;
- Észak-Kelet Magyarország részesedése az összes támogatásból;
- Dunántúl részesedése az összes támogatásból.

A döntési modellben a szempontokat szempontfába rendeztük a WINGDSS 4.1 szoftver segítségével. A szempontfa leveleinek nevezzük azokat a csomópontokat, amelyekből nem lehet tovább menni.



1. ábra

3.3 A döntéshozók kijelölése

A Gazdasági Minisztérium Kereskedelemfejlesztési és Befektetésösztönzési Főosztálya 11 döntéshozót vont be az értékelésbe, akiknek a véleménye azonos fontosságú volt; ők hozták meg a szubjektív döntéseket, azaz a döntési modell szempontjait fontosság szerint súlyozták. Személyük számunkra ismeretlen volt, $D01$, $D02$, ..., $D11$-gyel jelöltük őket.

4 A döntési modell megoldása

A többszempontú döntési modellek megoldása általában a következő lépésekből áll:

1. az alternatívák objektív szempontok szerinti értékelése döntéshozónként;
2. a szempontok súlyainak megadása döntéshozónként;
3. a szubjektív szempontok minősítése döntéshozónként;
4. a döntéshozók szavazóerőinek a megadása;
5. a csoportos döntés meghatározása.

A mi modellünkben csak objektív szempontok szerepeltek, és a döntéshozók szavazóereje is megegyezett (amelyet mindenkinél maximálisnak, azaz 100-nak vettünk), tehát elegendő volt az 1 és 2 pontban szereplő adatok megadása. Az alternatívák objektív szempontok szerinti értékeléséhez az összesített mutatókat és a hasznossági függvényeket kellett megadni. A továbbiakban ezt részletezzük.

4.1 Az összesített mutatók értékeinek a meghatározása

A modellben szereplő, származtatott indikátorok a szempontfa levelein találhatók és megfelelnek a szempontfa alszempontjainak.

A pályázati lekérdező rendszer alapján azokat a pályázatokat tekintettük, amelyeknek érvényes szerződésük van és amelyek kaptak Gazdaságfejlesztési Célelőirányzat (GCE) kölcsönt vagy GCE támogatást. Ennek alapján az évekre lebontott szerződések száma és összege a következő:

- 1996. 44 szerződés, 3.46 milliárd Ft;
- 1997. 73 szerződés, 5.1 milliárd Ft;
- 1998. 49 szerződés.

A származtatott indikátorokat a lekérdező rendszer évekre összesített mutatóiból állítottuk össze. Kivételt képeznek a „kiemelt projektek támogatása" valamint a „kis- és középvállalatok támogatása" alszempontok. A kiemelt projektek támogatása esetén végignéztük az összes pályázó céget és ezek közül kiválasztottuk a kiemelteket a [13] alapján. A kis- és középvállalatok támogatása esetén is speciális leválogatást kellett alkalmaznunk. A tényadatok esetén figyelembe vettük, hogy egy, 1996-ban (1997-ben) pályázott cégnek 1996, 1997 és 1998-ban (1997 és 1998-ban) is vannak tényadatai. A támogatástól eltekintve, amit később fogunk tárgyalni, a következőképpen összesítjük egy, 1996-ban (1997-ben) pályázott cég tény mutatóit:

Legyen x_{1996}, x_{1997}, illetve x_{1998} (y_{1997}, illetve y_{1998}) egy, 1996-ban (1997-ben) pályázott cég egy adott mutatójának 1996, 1997, illetve 1998. évre (1997, illetve 1998. évre) vonatkozó összesített értéke. Átlagos 15%-os inflációval számolva és az 1998. évre diszkontálva, a következő összesített értéket kapjuk az 1996–1998 (1997–1998) időtartamra:

$$x_{1996-1998} = 1.3225\, x_{1996} + 1.15\, x_{1997} + x_{1998} \,,$$

$$(y_{1997-1998} = 1.15\, y_{1997} + y_{1998}) \,,$$

ahol $1.3225 = \left(1 + \frac{15}{100}\right)^2$ és $1.15 = 1 + \frac{15}{100}$.

Az összes támogatás a GCE kölcsön és a GCE támogatás összege. Az első két évben a kölcsönt még nem kell visszatéríteni, a harmadik évben viszont már el kell kezdeni a visszatérítést. Tehát, az 1997-es pályázatok összesített támogatását ugyanúgy kell számolni, mint a többi mutatót. Ha k-val, t-vel, illetve T-vel jelöljük a GCE kölcsönt, GCE támogatást, illetve teljes támogatást, akkor az 1996-ban pályázott cégek tényadatok alapján összesített támogatása az 1996-1998. időtartamra:

$$T_{1996-1998} =$$
$$1.3225(k_{1996} + t_{1996}) + 1.15(k_{1997} + t_{1997}) + k_{1998} + t_{1998} - 0.1961\, k_{1996}\,,$$

ahol

$$0.1961 = \frac{\left(1 + \frac{15}{100}\right)^5 \cdot \frac{15}{100}}{\left[\left(1 + \frac{15}{100}\right)^5 - 1\right] \cdot \left(1 + \frac{15}{100}\right)^3}\,.$$

A 0.1961 értéket az

$$\left(1+\frac{15}{100}\right)^5 = d\left(1+\frac{15}{100}\right)^3 + d\left(1+\frac{15}{100}\right)^4 + d\left(1+\frac{15}{100}\right)^5 +$$
$$+ d\left(1+\frac{15}{100}\right)^6 + d\left(1+\frac{15}{100}\right)^7$$

egyenlet megoldásából nyertük.

A származtatott mutatókat a pályázati lapokról [5] a [12]-ben megadott metodika alapján számítottuk ki.

4.2 Hasznossági függvények

Az évenként összesített indikátor értékeket beskáláztuk a $[100, 900]$ intervallumba az

$$f(x) = 800\frac{x - x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}} + 100\,,$$

illetve az

$$f(x) = 800\frac{x_{\max} - x}{x_{\max} - x_{\min}} + 100$$

hasznossági függvényekkel, attól függően, hogy a magas, illetve alacsony indikátor értékeket részesítettük előnyben (ahol $x_{\min}$, illetve $x_{\max}$ a megfelelő indikátor maximális, illetve minimális értéke, x pedig a beskálázandó indikátor érték). Az AHP módszertan alapján az $[1, 9]$ skála megfelelőnek bizonyul az értékelésekre. Mivel a WINGDSS 4.1 a pontszámokra csak egész számokat fogad el, a nagyobb pontosság érdekében ezt a skálát beszoroztuk 100-zal. Az alternatívák WINGDSS 4.1 által kiszámolt csoportos, illetve egyéni döntéshozói értékeléseit Excel fájl segítségével beskáláztuk a [0,100] intervallumba az

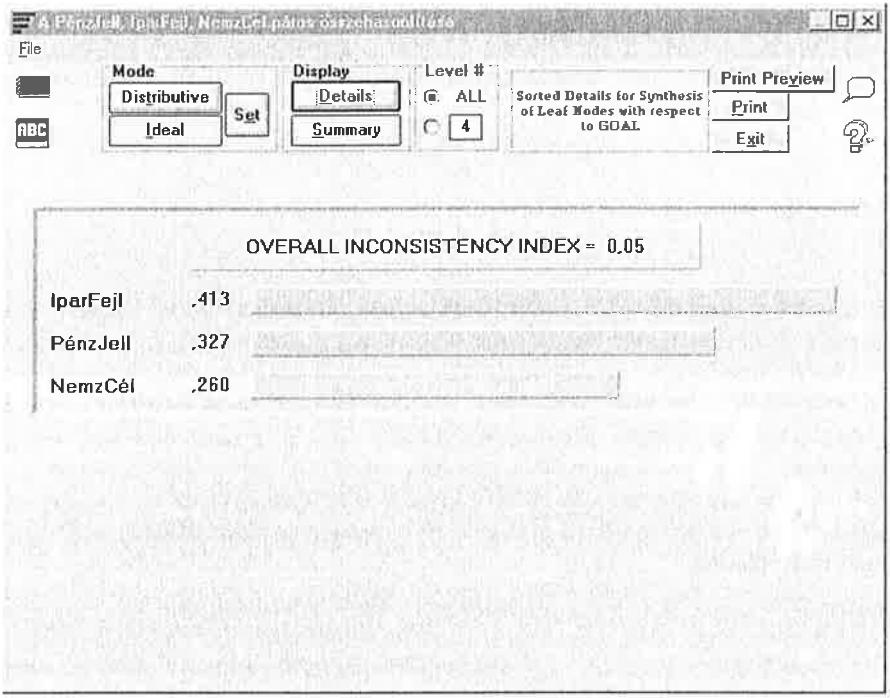
$$f(x) = \frac{x - 100}{8}$$

függvény felhasználásával. Így megkaptuk az 1996, 1997 és 1998-as évek hatékonyságainak százalékos értékeit, mind a pályázati mind a tényadatok alapján.

4.3 A döntéshozói súlyok megadása

A többszempontú, csoportos döntési modellek megoldása során kiemelt fontossága van a szubjektív döntések figyelembevételének. Magasabb hierarchikus szinteken jó döntés elképzelhetetlen szubjektív elemek nélkül, ugyanakkor érzékelhető annak a veszélye, ha a szubjektív ítéletek előre nem látható módon befolyásolják a döntés végeredményét. Ezért a döntési modellek építésekor előre meg kell határozni azokat a pontokat, ahol a szubjektív ítéleteket figyelembe kell venni és előre meg kell adni azok maximális mértékét is.

A GFP hatékonyságának az értékelésére kidolgozott döntési modellben az értékelési szempontok objektívek, azaz a mutatók értékeit az adatbázisból nyertük. Ezért a szubjektív ítéletek a döntési szempontok súlyainak megadására korlátozódtak. Mivel a szempontokat 3 fő csoportba osztottuk, ezért ezek súlyainak meghatározása döntően befolyásolta a hatékonysági mutatókat. Ez az oka annak, hogy mind a pénzügyi jellemzők, mind a hazai ipar fejlesztése, valamint a nemzetgazdasági célok súlyának meghatározására az amerikai módszertan, az AHP páros összehasonlítás módszerét alkalmaztuk és az ezt megvalósító EXPERT CHOICE döntéstámogató szoftvert (a 2. ábrához hasonlóan az összes döntéshozóra). A többi szempont súlyait a döntéshozók közvetlenül adták meg százalékos alakban. Technikailag ezt úgy valósítottuk meg, hogy az általunk ismeretlen döntéshozók kitöltötték az előre elkészített adatlapokat, majd ezeket az adatokat vittük be a rendszerbe.



2. ábra. D05 döntéshozó súlyai az egyes szempontokra az AHP páros összehasonlítás alapján

A beszállítók száma kezdetben testvérszempontja volt a hazai beszállítók részesedésének. Mivel az adatbázisban nem találtunk rá semmiféle információt és lényegesen fontosabbnak tartottuk a hazai beszállítók részesedését, ezért töröltük az alszempontok közül. A hazai beszállítók részesedését megtaláltuk ugyan az adatbázisban, viszont nem találtunk rá megfelelő adatokat. Ahhoz, hogy ez ne befolyásolja a kiértékelés eredményét, nulla értéket és minden döntéshozó esetén nulla súlyt rendeltünk hozzá. A megmaradt két alszempont (kiemelt projektek részesedése az összes támogatásból és a kis- és középvállalatok részesedése az összes támogatásból) súlyait százra normáltuk.

A *Pénzügyi jellemzők, Hazai ipar fejlesztése és Nemzetgazdasági célok érvényesítése* szempontok alszempontjait nem súlyozták a döntéshozók, csak megjelenítési szerepet kaptak a WINGDSS 4.1 szoftverben. Ehhez minden szempont súlyának az alszempont súlyok összegét vettük. Ahhoz, hogy belássuk választásunk helyességét, ki kell térnünk arra, hogy a WINGDSS 4.1 hogyan végzi el az alternatívák egyéni döntéshozók szerinti kiértékelését. Mivel a mi esetünkben csak objektív levélszempontok vannak, a levélszempontokhoz minden döntéshozó esetén ugyanazok a pontszámok tartoznak. Azonos gyökerű levélszempontok esetén a program a gyökérhez a levélszempontok értékeinek a levélszempontok adott döntéshozó súlyaival képzett számtani középarányosát rendeli. Ezt a folyamatot a program elvégzi a magasabb szinteken is, addig amíg el nem ér a SZEMPONTOK gyökérhez. Az itt kapott érték az adott alternatíva adott döntéshozó szerinti értékelése. Ennek alapján könnyen belátható, hogy a program a *Pénzügyi jellemzők*-höz, *Hazai ipar fejlesztésé*-hez és a *Nemzetgazdasági célok érvényesítésé*-hez az unokaszempontjaik értékeinek az unokaszempontok súlyaival képzett számtani középarányosát rendeli, mintha a közbenső szempontok nem is léteznének. Unokaszempontoknak nevezzük egy szempont alszempontjainak az alszempontjait.

4.4 Eredmények

A származtatott mutatókat beskáláztuk a [100, 900] intervallumba és így vittük be a WINGDSS 4.1 szoftverbe, ahol a pontszámok alsó határa 0, felső határa pedig 900 volt. A 0 alsó határ azt jelenti, hogy azokhoz a mutatókhoz, amelyekhez nem találtunk megfelelő adatot az adatbázisban 0-t rendeltünk. Egy szempont csoportos súlya a szempont döntéshozói súlyainak a számtani középarányosa, mivel a döntéshozók szavazóerői megegyeztek. A csoportos súlyokból és a levélszempontok értékeiből a program kiszámította az alternatívák csoportos értékeléseit az egyéni döntések alapján.

A pályázati adatok csoportos értékelése:

$$\begin{aligned} 1996.\ \text{év hatékonysága} &= 62.28\% \\ 1998.\ \text{év hatékonysága} &= 57.77\% \\ 1997.\ \text{év hatékonysága} &= 37.01\% \end{aligned}$$

A tényadatok csoportos értékelése:

1998. év hatékonysága = 67.49%
1996. év hatékonysága = 54.94%
1997. év hatékonysága = 40,95%

Mit jelentenek ezek az aggregált hatékonysági értékek? A modell minden évre kiszámította a gazdaságpolitikai célokhoz rendelt minden egyes indikátor értéket, s ezeket egy hasznossági függvény 0 és 1 közötti értékeivé transzformálta. A 11 felkért döntéshozó a célokhoz súlyszámokat határozott meg, s az ő értékeléseik átlagaként kialakított súlyokkal számítottuk ki azt az összhatékonysági értéket, amely minden évet jellemez. A „hatékonyság" ebben a szóhasználatban a gazdaságpolitikai céloknak való megfelelőséget jelenti.

Ha minden tökéletesen alakulna a tervek és a tények szintjén egyaránt, akkor a pályázati hatékonyság 100 százalékos lenne. Természetesen, a valóságban legfeljebb megközelíteni lehet ezt az ideális értéket. Eredményeink azt mutatják, hogy mind a pályázati adatok tükrében, mind a valós teljesítéseket értékelve a vizsgált évek többségében 50% fölött van a hatékonyság. *A tényadatokkal számított 1998-as, majdnem 68%-os értéket kimondottan jónak tekinthetjük.*

A pályázati adatok a döntések alapjául szolgáltak. 1996-ban és 1998-ban a pályázók jól „találták el" tervadataikkal a gazdaságpolitikai elvárásokat, 1997-ben kevésbé. A lényeg azonban a teljesítésekben rejlik: itt már megfordul a sorrend és 1998, majd 1996 végül pedig 1997 következik.

Érdemes megjegyezni, hogy az egyedi döntéshozók véleményével számított sorrendek is hasonló képet mutatnak: a hatékony évek gyakorlatilag „vita nélkül" egyöntetűen a legjobbak mindegyik döntéshozó értékelése szerint, a kisebb hatékonyságok mögött viszont eltérő egyéni sorrendek húzódnak meg.

Az 1996. évre vonatkozóan 7 döntéshozó egyéni értékelése közelíti meg a csoportos értékelésből származó hatékonysági mutatót, mind a pályázati, mind a tény adatok esetén. Egy további döntéshozónál, a tényadatok alapján számított hatékonyság jó közelítése a tényadatok alapján számított csoportos hatékonyságnak.

Az 1997. évre vonatkozóan 5 döntéshozó egyéni értékelése közelíti meg a csoportos értékelésből származó hatékonysági mutatót, mind a pályázati, mind a tényadatok esetén. Három további döntéshozónál, a pályázati adatok alapján számított hatékonyság jó közelítése a pályázati adatok alapján számított csoportos hatékonyságnak.

Az 1998. évre vonatkozóan 5 döntéshozó közelíti meg a csoportos értékelésből származó hatékonysági mutatót, mind a pályázati mind a tényadatok esetén is. Három további döntéshozónál, a pályázati adatok alapján számított hatékonyság jó közelítése a pályázati adatok alapján számított csoportos hatékonyságnak.

Megállapítható, hogy a pályázati adatokat tekintve 5 döntéshozó értékelése mutatott ugyanolyan sorrendet az alternatívák hatékonyságára vonatkozóan, mint a csoportos értékelés. Az 5 döntéshozó közül 4 döntéshozónak az alternatívák hatékonyságára vonatkozó értékelései abszolút értékben is nagyon jó közelítései voltak a csoportos értékelés hatékonysági mutatószámainak, egy döntéshozóra pedig az 1998. és 1997. évekre vonatkozóan állíthatunk hasonlót. Ez a döntéshozó viszont sokkal jobbnak értékelte az 1998. évet. A fennmaradó 6 döntéshozó közül 2 döntéshozó értékelései vannak közel a csoportos értékeléshez. Ugyan az említett döntéshozók jobban értékelték az 1998. évet, mint az 1996. évet, azonban az eltérés a két év hatékonysága között kicsi. Ezenkívül megjegyezzük, hogy az 1996. és 1997. év csoportos hatékonysági mutatói közel állnak egymáshoz.

Megállapítható, hogy a tényadatok esetén 8 döntéshozó értékelése mutatott ugyanolyan sorrendet az alternatívák hatékonyságára vonatkozóan, mint a csoportos értékelés. A 8 döntéshozó közül 5 döntéshozónak az alternatívák hatékonyságára vonatkozó értékelései abszolút értékben is jól megközelítették a csoportos értékelés hatékonysági mutatóit, 2 döntéshozónak pedig az 1996. év hatékonyságára vonatkozó értékelései mutatták, hogy közel vannak az 1996. év hatékonyságának csoportos értékeléséhez. A fennmaradó 3 döntéshozó közül egy döntéshozó értékelése van közel az 1996. év hatékonysági mutatójához. Az említett döntéshozó 1996, 1997 és 1998. évekre vonatkozó értékelései igen közel állnak egymáshoz, tehát sorrend tekintetében nem perdöntők.

Mind a tény, mind pedig a pályázati adatok esetén az 1997. év hatékonysága erősen elmaradt az 1996. és 1997. év hatékonyságától. Az egyéni döntéshozók fentebb elemzett értékeléseit a következő két táblázat tartalmazza:

százalék	D01	1998	66.64
százalék	D01	1996	57.58
százalék	D01	1997	37.94

százalék	D02	1997	60.08
százalék	D02	1998	49.82
százalék	D02	1996	37.03

százalék	D03	1996	70.96
százalék	D03	1997	53.66
százalék	D03	1998	46.81

százalék	D04	1996	58.59
százalék	D04	1997	57.20
százalék	D04	1998	50.51

százalék	D05	1998	67.61
százalék	D05	1996	54.05
százalék	D05	1997	40.68

százalék	D06	1998	82.84
százalék	D06	1996	71.44
százalék	D06	1997	27.15

százalék	D07	1998	87.68
százalék	D07	1996	59.43
százalék	D07	1997	17.50

százalék	D08	1998	79.43
százalék	D08	1996	48.1
százalék	D08	1997	27.5

százalék	D09	1998	65.35
százalék	D09	1996	50.35
százalék	D09	1997	45.85

százalék	D10	1998	67.34
százalék	D10	1996	51.08
százalék	D10	1997	44.23

százalék	D11	1998	63.32
százalék	D11	1996	53.51
százalék	D11	1997	46.69

1. táblázat. Tényadatok értékelése döntéshozónként

százalék	D01	1998	67.60
százalék	D01	1996	59.54
százalék	D01	1997	33.28

százalék	D02	1998	75.13
százalék	D02	1996	40.53
százalék	D02	1997	34.53

százalék	D03	1996	78.87
százalék	D03	1997	50.87
százalék	D03	1998	32.69

százalék	D04	1996	60.73
százalék	D04	1998	55.60
százalék	D04	1997	39.88

százalék	D05	1998	63.48
százalék	D05	1996	60.44
százalék	D05	1997	31.00

százalék	D06	1996	77.57
százalék	D06	1997	52.43
százalék	D06	1998	39.34

százalék	D07	1996	81.18
százalék	D07	1998	48.36
százalék	D07	1997	30.58

százalék	D08	1996	66.18
százalék	D08	1998	61.48
százalék	D08	1997	26.66

százalék	D09	1998	56.36
százalék	D09	1996	56.35
százalék	D09	1997	41.68

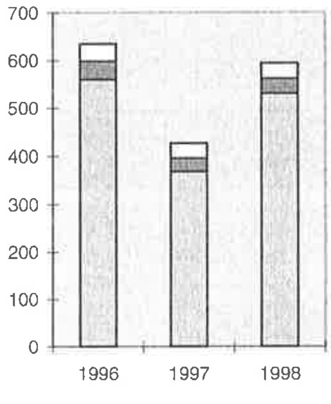
százalék	D10	1998	61.17
százalék	D10	1996	58.53
százalék	D10	1997	36.73

százalék	D11	1998	57.63
százalék	D11	1996	56.78
százalék	D11	1997	39.29

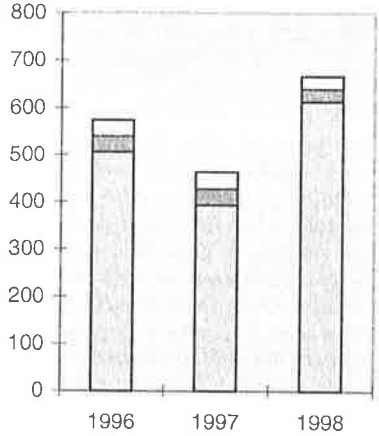
2. táblázat. Pályázati adatok értékelése döntéshozónként

A WINGDSS 4.1 segítségével érzékenységvizsgálatot is végeztünk a levélszempontok és a főszempontok súlyaira vonatkozóan (lásd 3, 4. ábra), azaz megvizsgáltuk, hogy milyen hatással van ezen szempontok súlyainak 10 százalékos bizonytalansága a csoportos értékelésre és a döntéshozók értékeléseire. A közbenső szint súlyait rögzítettük, mivel a WINGDSS 4.1 az érzékenységvizsgálat során is úgy számol, mintha a levélszempontok a főszempontokhoz (azaz nagyszüleikhez) kapcsolódnának.

Ezek a számítások lehetőséget nyújtanak az egyes évek GFC pályázati eredményeinek egyetlen mutatószámba sűrített értékelésére, illetve —a megismételhető modellszámítások révén— az egyes évek összehasonlítására.



3. ábra. Pályázati adatok értékelése – Érzékenységvizsgálat



4. ábra. Tényadatok értékelése – Érzékenységvizsgálat

Irodalom

1. Csáki, P. – Fölsz, F. – Rapcsák, T. – Sági, Z., On tender evaluations, *Journal of Decision Systems*, Volume 7-SI/1998 179-194.
2. Csáki, P. – Rapcsák, T. – Turchányi, P. – Vermes, M., R and D for group decision aid in Hungary by WINGDSS, a Microsoft Windows based group decision support system, *Decision Support Systems* 14 : 205-217, 1995.
3. Mészáros, Cs. – Rapcsák, T., On sensitivity analysis for a class of decision systems, *Decision Support Systems* 16 (3) : 231-240, 1996.
4. Rapcsák, T. – Sági, Z. – Tóth, T. – Kétszeri, L., Evaluation of tenders in information technology, *Decision Support Systems* 30 : 1-10, 2000.
5. Adatlap a gazdaságfejlesztési pályázathoz, 1999.
6. A Gazdaságfejlesztési Célelőirányzatból juttatott egyes támogatások értékeléséről, Budapest, 1999. június.
7. A kiemelt főbb pályázati rendszerek 1998. évi működtetésének tapasztalatai, 1999.
8. Communication from the Commission to the Council and the European Parlament (Independent external monitoring and evaluation of Community activities in the area of research and technological development).
9. Értékelési elvek a technológiapolitika területére, 1999.
10. Irányelvek és útmutató az eredményesen működő monitoring rendszer megvalósításához, Adetef, Kei és Euro-Prospective, 1998. december.
11. Irányelvek és útmutató az eredményesen működő monitoring rendszer megvalósításához (mellékletek), Adetef, Kei és Euro-Prospective, 1998. december.
12. 33/1988. (V. 22.) IKIM rendelet a Gazdaságfejlesztési Célelőirányzatok felhasználásának és kezelésének részletes szabályairól.
13. Pályázati felhívás és útmutató a Gazdaságfejlesztési Pályázat elkészítéséhez, Budapest, 1999. február.

EVALUATION OF THE TENDER FOR DEVELOPING THE ECONOMY IN HUNGARY

The evaluation of the efficiency of the Tender for Developing the Economy in Hungary (TDEH) regarding the years of 1996, 1997 and 1998 will be presented. The task was completed as a multi-attribute group decision problem, and solved by the software system named WINGDSS 4.1, developed at the Department of Operation Research and Decision Systems, Computer and Automation Institute, Hungarian Academy of Sciences. The results, in harmony with the evaluation principles in the European Union, showed numerically as well for the Division controlling the amount of subsidy at the Ministry how far the result of the subsidy allocated by the budget for 170 candidates between the period 1996 and 1998 met the set economic policy objectives. In accordance with the expectations, also our model-calculations proved that the efficiency interpreted in this sense can be considered as an average, and regarding the facts, 1998 turned out to be the most successful year.

KÖZJAVAK ÉS KORRUPCIÓ RAMSEY MODELLJÉBEN[1]

BESSENYEI ISTVÁN
PTE Közgazdaságtudományi Kar

E dolgozat a korrupció gazdasági növekedésre gyakorolt hatását vizsgálja a neoklasszikus modell keretei között. Meglehetősen szűken értelmezve a jelenséget a közjavakra fordított kormányzati kiadások diszfunkcionális felhasználását tekintjük korrupciónak. Megmutatjuk, hogy a korrupció és az adóztatás bevezetése Ramsey modelljébe nem változtatja meg a modell stabilitási tulajdonságait. Megvizsgáljuk, hogy a korrupció és az adóztatás hogyan befolyásolják az egyes változók egyensúlyi értékeit és a stabilizációt célzó gazdaságpolitika lehetőségeit. Elemzéseink során mind a termelők, mind pedig a háztartások oldalán két elkülönült szektort különböztetünk meg.

1 Bevezetés

Vizsgálódásaink kiindulási alapja gyanánt Ramsey (1928) modelljének Cass (1965) és Koopmans (1965) által finomított változata szolgál. E tipikusan neoklasszikus modell bemutatásával kezdi a makroökonómia tárgyalását pl. Blachard és Fischer (1992) tankönyve, de Barro és Sala-i-Martin (1995) is könyvük elején ismertetik, amit aztán számos kiterjesztés és módosítás bemutatása követ. Ezek sorát folytatja dolgozatunk is, bevonva az elemzésbe a korrupció jelenségét. Amint arra Barro és Sala-i-Martin a figyelmet felhívják, alapmodellünk speciális esetének tekinthető a közismert Solow-Swan modell, melynek ismertetése megtalálható pl: Bessenyei (1995). Mindezek miatt konstrukciónk elméleti konzisztenciájának megőrzése érdekében célszerű lesz vizsgálódásainkat amennyire csak lehetséges, a neoklasszikus gondolati rendszer keretein belül tartani.

A korrupció legáltalánosabb megfogalmazását Petschnig Mária Zita (1993) adta, mely szerint ez a bürokrácia sajátságos devianciája. Bár frappáns volta miatt e definíció rendkívül csábító, túlságosan is átfogó jellegéből adódóan mégis le kell mondani az alkalmazásáról. Ehrlich és Lui (1999) növekedési modellje a korrupciót az emberi tőkébe történő beruházás devianciájának tekinti, melynek következtében nem az emberi, hanem a politikai tőke növekszik. Véleményünk szerint a politikai tőke képzéséhez szükséges reál-erőforrás mennyisége elhanyagolható, így a politikai tőke felhalmozásának mechanizmusát a továbbiakban figyelmen kívül hagyjuk. Acemoglu és Verdier (2000) szerint a korrupció leglényegesebb következménye az erőforrások központi

[1]Beérkezett: 2000. november 11. A dolgozat elkészítését az OTKA T037291 számú pályázata támogatta, amelyért a szerző ezúton fejezi ki köszönetét.

újraelosztásának diszfunkcionalitása. Ebből a megállapításból kiindulva definiáljuk a korrupció fogalmát.

A korrupció jelenségének egyszerű kezelése érdekében kénytelenek leszünk viszonylag szűk definíciót alkalmazni: korrupción értjük azt a tranzakciót, amikor a közszféra látszólag vásárol valamit, valójában azonban semmit nem kap a kifizetett pénzért. Ebben az esetben a kormányzati vásárlás célja közpénzek személyes jövedelemmé történő transzformálása. Természetesen a fent definiált korrupt tranzakció a valóságban szinte soha nem fordul elő, azonban a közbeszerzések jelentős része felbontható egy korrupció mentes és egy korrupt vásárlás összegére. A jelenség mélyebb okait és néhány következményét a gazdaság egy szűkebb szegmensében vizsgálja Bessenyei (1996). A jelen dolgozat egy zárt nemzetgazdaság egészére terjeszti ki az elemzést.

A korrupcióra adott fenti definícióval kapcsolatban meg kell jegyezni, hogy az magában foglalja a kontraszelekció jelenségét is, hisz itt is egy olyan tranzakcióról van szó, amikor valaki politikai tőkéjét felhasználva jut olyan beosztásba, melyből származó reáljövedelme meghaladja munkája határtermelékenységét. Kimarad viszont modellünkből a hivatali engedélyek megszerzése körül kialakult korrupció, ám ennek jelentősége a gazdasági növekedés szempontjából kevéssé jelentős.

A dolgozat felépítése a növekedési modellek ismertetésének általános sémáját követi. A következő szakaszban a modell föltevései kerülnek bevezetésre. Alapmodellünkkel szemben mind a vállalatok mind pedig a háztartások oldalán két szektort különböztetünk meg. Ez a strukturális eltérés az alapmodelltől nem változtatja meg annak leglényegesebb tulajdonságait, ám lehetőséget teremt a korrupció jelenségének viszonylag egyszerű kezelésére. A harmadik szakaszban definiált optimális szabályozáselméleti probléma felhasználásával levezetjük a legfontosabb makrováltozók mozgásegyenleteit, valamint a problémához tartozó transzverzalitási feltételt. A negyedik szakasz az egyensúlyi helyzetet mutatja be és azt vizsgálja, milyen hatásokat idéz elő a modell paramétereinek megváltozása. Az elemzés elsősorban a korrupció és adóztatás területén bekövetkező változásokra koncentrál. Az ötödik szakasz az egyensúlyi helyzet stabilitását és a stabilizációs gazdaságpolitika lehetőségeit vizsgálja. Végül néhány záró megjegyzés megtételére kerül sor.

2 A modell föltevései

Modellünkben a vállalatokat két szektorba osztjuk. Az első szektorba tartozik minden olyan vállalat, mely fogyasztási javakat, beruházási javakat illetve olyan közjavakat állít elő, amelyek határtermelékenysége nullánál nagyobb. A második szektorba tartozó vállalatok kizárólag azon közjavakat állítják elő, melyek határtermelékenysége zérus. E vállalatok funkciója a kormányzati kiadások egy részének közvetlen jövedelemmé történő transzformálása, tehát korrupciós csatornaként működnek. A vállalatoknak ez az elhatárolása különösen empirikus vizsgálatok esetében problematikus, mivel alig dönthető el egy vállalatról egyértelműen, hogy melyik szektorba tartozik. Helyesebb lenne a második szektorba azon vállalati tevékenységeket sorolni, melyek során olyan közjavak jönnek létre, melyek határtermelékenysége zérus. Így számos vállalat egyidejűleg tartozna mindkét szektorhoz. Például egy acélmű által egységnyi idő alatt előállított vasúti sín mennyisége az első szektor kibocsátásában jelenne meg, az acélmű hosszú távú stratégiai fejlesztési programja viszont, ha funkciója mindössze annyi, hogy megteremti néhány topmenedzser kiugróan magas díjazásának jogalapját, a második szektorban. Mondanivalónk egyszerűbb kifejtése érdekében azonban a továbbiakban úgy tekintjük, mintha minden egyes vállalat egyértelműen hozzárendelhető lenne a két szektor valamelyikéhez.

Az egyes szektorok bevételeire így az alábbi összefüggések érvényesek:

$$Y_1 = C + I + G_1 \qquad \text{és} \qquad Y_2 = G_2 \tag{1}$$

ahol Y_i az egyes szektorok kibocsátását, C az összes fogyasztást, I a bruttó beruházások nagyságát, G_i pedig az egyes vállalati szektoroktól történő kormányzati vásárlások nagyságát jelöli.

Mivel az első szektor vállalatai tevékenységük során termelési tényezőket használnak fel, ezek után bér-, illetve tőkejövedelmeket fizetnek, továbbá adóznak. A második szektor tevékenységéhez szükséges termelési tényezők mennyiségét az egyszerűség érdekében elhanyagolhatóan kicsinek tekintjük, így az ide tartozó vállalatok nem is fizetnek tényezőjövedelmet, bevételük az adók levonása után a háztartásokhoz kerül. Az első szektor vállalatai által fizetett jövedelmek kimerítik a teljes árbevételt, azaz:

$$Y_1 = rK + wL \tag{2}$$

ahol r a kamatláb, w pedig a bérráta. Mivel a háztartások között jelentős különbségek mutatkoznak, célszerű itt is két szektort definiálni. Bérből- és fizetésből élő háztartásoknak nevezzük azokat, melyek kizárólag bérjövedelemhez jutnak, illetve ahol a nem bérjellegű jövedelmek mennyisége elhanyagolható. A kormányzat által fizetett jóléti transzferektől az egyszerűség érdekében eltekintünk, és feltesszük, hogy a háztartások ezen szektora sajátítja el a gazdaságban képződő összes bérjövedelmet. A bérből és fizetésből élő háztartások megtakarításait figyelmen kívül hagyjuk. Hasonló föltevések találhatók pl. Káldor és Mirrlees (1962) modelljében. E háztartások fogyasztását C_1-gyel jelölve:

$$C_1 = (1 - \tau)wL \tag{3}$$

ahol τ a valamennyi háztartásra egységesen alkalmazott lineáris adókulcs, és $0 < \tau < 1$. Feltesszük, hogy az adókat kizárólag a háztartások fizetik, a vállalatok nem adóznak. A háztartások másik szektorát elit háztartásoknak nevezzük. Itt jelenik meg a tőkejövedelmeken kívül a 2. vállalati szektor teljes bevétele is. E háztartások bérjövedelmét nem vesszük figyelembe, föltesszük azonban, hogy fogyasztásukon kívül megtakarításuk is számottevő. Petschnig (1993) szerint a tulajdonhoz és annak működtetéséhez kapcsolt korrupciós összegek elérik a tőkeképzéshez szükséges mértéket. E megjegyzésből kiindulva az elit háztartások jövedelemfölhasználásáról a következőket tesszük fel:

$$(1-\tau)(rK+Y_2)=C_2+S \tag{4}$$

ahol K a gazdaság rendelkezésére álló tőkeállomány nagysága, C_2 az elit háztartások fogyasztása, és $C=C_1+C_2$. A neoklasszikus elvekkel összhangban feltesszük, hogy a megtakarítások teljes egészében beruházásra kerülnek és a tőkeállományt növelik, azaz $S=\dot{K}$. Az amortizációtól az egyszerűség érdekében eltekintünk. A kormányzat a beszedett adókat a két szektor termékeinek megvásárlására, illetve egyes vállalatok támogatására fordítja. Kiegyensúlyozott költségvetést feltételezve:

$$\tau(rK+wL+Y_2)=T=G_1+G_2 \qquad \text{és} \qquad G_2=\mu T \tag{5}$$

ahol T a kormányzati adóbevételek mértékét jelöli. μ egyfajta korrupciós paraméterként is értelmezhető, amennyiben megmutatja, hogy a kormányzati kiadások mekkora hányada „csurog" vissza gyakorlatilag ellenszolgáltatás nélkül az elit háztartásokhoz. Modellünkben tehát a korrupció erősödését μ értékének növekedése jeleníti meg. $\mu=0$ esetén nincs korrupció, másrészt $0\leq\mu\leq1$.

Az (1), (2) és (5) egyenletekből

$$Y_2=\frac{\mu\tau}{1-\mu\tau}(rK+wL)=\frac{\mu\tau}{1-\mu\tau}Y_1 \tag{6}$$

adódik.

A közjavak termelésben betöltött szerepének vizsgálata során Samuelson (1954) tanulmányából indulunk ki, mely szerint egyetlen termelő sem akarja és nem is tudja akadályozni a többit a közjavak felhasználásában. Az első szektor vállalatai a termelés során beruházási javakat, munkát és közjavakat használnak fel. Barro (1990) modelljében az i-edik vállalat termelési függvényét a következő formulával definiálta:

$$Y_i=AL_i^{1-\alpha}K_i^{\alpha}G^{1-\alpha}\,.$$

E specifikáció a neoklasszikus, jól viselkedő termelési függvénnyel szemben Inada (1964) által definiált követelmények megsértését tartalmazza, amennyiben a tőkére és a közjavakra együttesen nem érvényesül a csökkenő hozadék elve, és ez endogén növekedést eredményez a modellben. Mivel amennyire csak lehetséges, igyekszünk az elemzést a neoklasszikus keretek között tartani, lineárisan homogén termelési függvényt alkalmazunk. Ennek következménye exogén növekedés lesz, miként alapmodellünkben is. Mindezek alapján az első szektor termelési függvénye a következő:

$$Y_1=AK^{\alpha}\bar{L}^{\beta}G_1^{1-\alpha-\beta}=AK^{\alpha}\bar{L}^{\beta}\left(\frac{\tau-\mu\tau}{1-\mu\tau}Y_1\right)^{1-\alpha-\beta}, \quad 0<\alpha,\beta<1 \tag{7}$$

Az átalakítás során felhasználtuk a (6) egyenletet, $\bar{L}$ pedig a hatékony munkát jelöli, azaz

$$\bar{L}=Le^{mt}\,,$$

ahol m az exogén technikai haladás rátája, L pedig a gazdaság rendelkezésére álló munka mennyisége. Reális föltevés, hogy L növekedési rátája zérus, továbbá az egyszerűség érdekében a gazdaság rendelkezésére álló munka mennyiségét egységnyinek tekintjük, tehát $L = 1$. Mindezek alapján

$$\bar{L} = e^{mt} .$$

Kifejezve Y_1-et a (7) egyenletből:

$$Y_1 = A^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\tau - \mu\tau}{1 - \mu\tau}\right)^{\frac{1-\alpha-\beta}{\alpha+\beta}} K^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \bar{L}^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} = BK^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \bar{L}^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} ,$$

ahol csupán az egyszerűbb írásmód kedvéért vezettük be a B jelölést. Könnyen ellenőrizhető, hogy

$$B > 0$$

$$\frac{\partial B}{\partial \mu} = -\frac{(1-\alpha-\beta)(1-\tau)B}{(\alpha+\beta)(1-\mu)(1-\mu\tau)} < 0 , \quad \frac{\partial B}{\partial \tau} = \frac{(1-\alpha-\beta)B}{(\alpha+\beta)\tau(1-\mu\tau)} > 0 . \tag{8}$$

Felhasználva, hogy az 1. szektorra vonatkozó termelési függvény K-ban és $\bar{L}$-ban lineárisan homogén, az intenzív termelési függvény

$$\bar{y} = f(\bar{k}) = B(\bar{k})^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} , \tag{9}$$

ahol $\bar{y}$ az egységnyi hatékony munkára eső kibocsátás nagyságát jelöli, $\bar{k}$ pedig az egységnyi hatékony munkára eső tőke mennyiségét, a hatékony tőkeintenzitást. Ezen utóbbi két változó bevezetése azért célszerű, mert mint a későbbiekben látni fogjuk, egyensúlyi növekedési rátájuk zérus.

A (8) összefüggés ezek szerint úgy értelmezhető, hogy a korrupciós paraméter értékének növekedése csökkenti, a lineáris adókulcs emelése pedig növeli az első szektorban az egységnyi hatékony munkára eső kibocsátás nagyságát.

Föltesszük, hogy a (7) termelési függvény az 1. szektorban működő valamennyi vállalatra érvényes, és a vállalatok célja maximális profit elérése. Ekkor az i-edik vállalat profitja

$$T\Pi_i = Y_i - rK_i - wL_i = \bar{L}_i \left(f(\bar{k}_i) - r\bar{k}_i - we^{-mt}\right) ,$$

ahol r a kamatláb, és $\bar{L}_i = L_i e^{mt}$. Nem tesszük fel, hogy a kamatláb konstans. A profitmaximum elérésének elsődleges feltételéből következik, hogy

$$r = f'(\bar{k}) = \frac{\alpha B}{\alpha+\beta} \left(\bar{k}\right)^{\frac{-\beta}{\alpha+\beta}} , \tag{11}$$

mivel $\bar{k}$ értéke valamennyi 1. szektorbeli vállalatra azonos: $\bar{k}_i = \bar{k}$. A (11) egyenlet következménye, hogy amennyiben az egyensúlyi növekedési pályán $\bar{k}$ konstans, úgy a kamatlábnak is változatlannak kell lennie, $\bar{k}$ növekedése pedig a kamatláb csökkenését vonja maga után.

A (2) egyenlet szerint az 1. szektorban működő vállalatokra teljesül a kimerítési elv, tehát az elérhető maximális profit zérus. Így a bérráta

$$w = \left(f(\bar{k}) - \bar{k}f'(\bar{k})\right)e^{mt} = \frac{\beta B}{\alpha+\beta}\left(\bar{k}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}e^{mt}\,.$$

A bérráta növekedési rátája pedig

$$\hat{w} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\hat{\bar{k}} + m\,. \tag{12}$$

Mivel föltevéseink szerint $L = 1$, a (3) egyenletből következően $\hat{C}_1 = \hat{w}$. A (12) egyenlet szerint pedig a hatékony tőkeintenzitás növekedése esetén a bérből és fizetésből élő háztartások fogyasztásának növekedési rátája meghaladja az exogén technikai haladás rátáját, $\bar{k}$ csökkenése esetén viszont elmarad attól.

A (11) és (12) egyenletek szerint az egyes termelési tényezők díjazása azok határtermelékenységétől függ, így modellünk a jövedelemelosztás neoklasszikus elveit követi.

Könnyű észrevenni, hogy az egyensúlyi helyzetben, ahol $\bar{k}$ értéke konstans, a bérráta növekedési üteme az exogén technikai haladás rátájával egyezik meg. Egyensúlytalanság esetén pedig az egységnyi hatékony munkára eső tőke mennyiségének megváltozása is módosítja a bérráta növekedési ütemét.

3 A modell mozgásegyenletei

Mivel a teljes tőkeállomány az elit háztartások tulajdonában van, az amortizációt figyelmen kívül hagyjuk, továbbá az előző szakaszban említett neoklasszikus elveknek megfelelően $\dot{K} = S$, a (4) egyenlet felhasználásával az alábbiakat írhatjuk:

$$\dot{K} = (1-\tau)(rK + Y_2) - C_2 = \frac{1-\tau}{1-\mu\tau}rK + \frac{(1-\tau)\mu\tau}{1-\mu\tau}w - C_2\,. \tag{13}$$

Az átalakítás során a (6) egyenletet használtuk fel. Amint azt Barro és Sala-i-Martin (1995) megmutatták, kiegyensúlyozott növekedés csakis abban az esetben lehetséges, ha az elit háztartások mindenkori hasznossága az alábbi CIES (constant intertemporal elasticity of substitution) hasznossági függvény szerint függ folyó fogyasztásuktól:

$$u = u(C_2) = \frac{C_2^{1-\phi} - 1}{1-\phi}\,, \tag{14}$$

ahol $\phi > 0$ és $\phi \neq 1$. E hasznossági függvény függvény levezetését és legfontosabb jellemzőit Müller és Ströbele (1985) mutatja be. Ezek szerint $\phi > 1$ esetén a függvénynek felső korlátja van, mégpedig a nulla, $\phi \to 1$ esetén pedig a függvény a $\log C_2$ függvényhez tart. A továbbiakban föltesszük, hogy $0 < \phi < 1$ teljesül. Minél nagyobb a ϕ paraméter értéke, annál erőteljesebben preferálják az elit háztartások az egyenletes fogyasztási pályát. $u' = C_2^{-\phi}$ és $u'' = -\phi C_2^{-\phi-1}$, az intertemporális helyettesítés rugalmassága pedig

$$\varepsilon = -\frac{u'(C_2)}{C_2 u''(C_2)} = -\frac{C_2^{-\phi}}{-C_2\phi C_2^{-\phi-1}} = \frac{1}{\phi} .$$

Mivel az elit háztartások végtelen időhorizonton szeretnék hasznosságukat maximalizálni, döntési problémájuk a következő:

$$\max U = \int_0^\infty e^{-\rho t} \frac{C_2^{1-\phi} - 1}{1-\phi} dt$$

ahol $\rho > 0$ az időpreferencia rátája. A döntés során a (13) korlátozó feltételre kell tekintettel lenni. A problémához az alábbi Hamilton-függvény tartozik:

$$H = e^{-\rho t}\frac{C_2^{1-\phi} - 1}{1-\phi} + \lambda\left(\frac{1-\tau}{1-\mu\tau} rK + \frac{(1-\tau)\mu\tau}{1-\mu\tau} w - C_2\right) . \tag{15}$$

A dinamikus optimum létezésének elsőrendű feltételei:

$$\frac{\partial H}{\partial C_2} = e^{-\rho t} C_2^{-\phi} - \lambda = 0 , \tag{16}$$

$$-\frac{\partial H}{\partial K} = \dot{\lambda} = -\frac{1-\tau}{1-\mu\tau} r\lambda . \tag{17}$$

A (16) egyenletet az idő szerint differenciálva:

$$\dot{\lambda} = -e^{-\rho t} C_2^{-\phi}(\rho + \phi\hat{C}_2) = -\lambda(\rho + \phi\hat{C}_2) .$$

Az átalakítás során a (16) egyenletet használtuk fel. $\hat{C}_2 = \dot{C}_2/C_2$ az elit háztartások fogyasztásának növekedési rátája. Iménti összefüggésünk és a (17) egyenlet felhasználásával

$$\hat{C}_2 = \frac{1}{\phi}\left(\frac{1-\tau}{1-\mu\tau} r - \rho\right)$$

adódik. Figyelembe véve továbbá a (11) összefüggést, az elit háztartások fogyasztásának növekedési rátájára az alábbi egyenlet adódik:

$$\hat{C}_2 = \frac{1}{\phi}\left(\frac{\alpha B(1-\tau)}{(\alpha+\beta)(1-\mu\tau)} \left(\bar{k}\right)^{\frac{-\beta}{\alpha+\beta}} - \rho\right) . \tag{18}$$

Az imént kapott mozgásegyenlet az elit háztartások végtelen időhorizonton történő hasznosságmaximalizálásának szükséges feltétele.

A hatékony tőkeintenzitás mozgásegyenletének a levezetéséhez induljunk ki $\bar{k}$ definíciójából, mely szerint

$$\bar{k} = Ke^{-mt} .$$

Elvégezve az idő szerinti differenciálást

$$\dot{\bar{k}}e^{mt} = \dot{K} - mK$$

adódik. Behelyettesítve a (13) egyenletbe, majd átrendezve:

$$\dot{\bar{k}} = \frac{1-\tau}{1-\mu\tau} r\bar{k} + \frac{(1-\tau)\mu\tau}{1-\mu\tau} we^{-mt} - m\bar{k} - \frac{C_2}{e^{mt}} .$$

Egyenletünk utolsó tagját az elit háztartások egységnyi hatékony munkára eső fogyasztásaként is értelmezhetjük. E hányados jelölésére vezessük be a $\bar{c}_2 = C_2 e^{-mt}$ jelölést. $\hat{\bar{c}}_2 > m$ esetén az elit háztartások fogyasztása növekszik, $\hat{\bar{c}}_2 < m$ esetén csökken. A (11) és (12) egyenletek felhasználásával $\bar{k}$ alábbi mozgásegyenletét kapjuk:

$$\dot{\bar{k}} = \frac{(1-\tau)(\alpha+\beta\mu\tau)}{(1-\mu\tau)(\alpha+\beta)} B\left(\bar{k}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} - m\bar{k} - \bar{c}_2 . \tag{19}$$

Másrészt $\hat{\bar{c}}_2 = \hat{C}_2 - m$, és így a (18) egyenlet az alábbi alakban írható fel:

$$\hat{\bar{c}}_2 = \frac{1}{\phi}\left(\frac{\alpha B(1-\tau)}{(\alpha+\beta)(1-\mu\tau)}\left(\bar{k}\right)^{\frac{-\beta}{\alpha+\beta}} - \rho\right) - m , \tag{20}$$

ami $\bar{c}_2$ mozgásegyenlete.

Annak eldöntéséhez, hogy optimális-e az elit háztartások számára az egyensúlyi növekedési pálya, szükség lesz a döntési problémához tartozó transzverzalitási feltétel átalakítása. E feltétel:

$$\lim_{t\to\infty} \lambda K = 0$$

(lásd pl. Chiang (1992)) azt fejezi ki, hogy a háztartások birtokában lévő befektetések értékének végtelen időhorizonton nullához kell tartania. Megoldva a (17) differenciálegyenletet λ-ra, majd behelyettesítve a transzverzalitási feltétel az alábbi formában adódik:

$$\lim_{t\to\infty} Ke^{-\int_0^t \frac{1-\tau}{1-\mu\tau} r(v)\,dv} = \lim_{t\to\infty} \bar{k}e^{-\int_0^t \frac{\alpha B(1-\tau)}{(\alpha+\beta)(1-\mu\tau)}\left(\bar{k}\right)^{\frac{-\beta}{\alpha+\beta}} - m\,dv} = 0 . \tag{21}$$

Az átalakítás során a (11) egyenletet, illetve a $\bar{k} = Ke^{-mt}$ összefüggést használtuk fel. A kitevőben azért vagyunk kénytelenek integrálkifejezést szerepeltetni, mert nem tettük fel sem a kamatláb, sem pedig az egységnyi hatékony munkára eső tőke változatlanságát. Megjegyezzük, hogy a (21) transzverzalitási feltétel kielégítésének szükséges feltétele:

$$h(\bar{k}) = \frac{\alpha(1-\tau)}{(\alpha+\beta)(1-\mu\tau)} B\left(\bar{k}\right)^{\frac{-\beta}{\alpha+\beta}} > m , \tag{22}$$

ahol a $h(\bar{k})$ függvényt csupán az egyszerűbb írásmód érdekében vezettük be. A (11) egyenlet felhasználásával könnyen ellenőrizhető, hogy

$$h(\bar{k}) = \frac{1-\tau}{1-\mu\tau} f'(\bar{k}) ,$$

továbbá $0 < \alpha, \beta < 1$ miatt $h'(\bar{k}) < 0$.

4 Egyensúly

A háztartások optimális fogyasztási pályáját a (19-20) differenciálegyenlet-rendszer adja, kiegészítve a (21) transzverzalitási feltétellel. Másrészt a (19) és (20) mozgásegyenletek egy nem-lineáris rendszert definiálnak, melynek stacionárius pontjában

$$\hat{\bar{c}}_2 = 0 \quad \text{és} \quad \hat{\bar{k}} = 0$$

teljesül. Ezt a stacionárius pontot tekintjük a rendszer egyensúlyi pontjának. Hasonlóképpen definiálja az egyensúly fogalmát az alapmodell legegyszerűbb változatában a Solow-Swan modell és dinamikus rendszerekre Szidarovszky és Bahill (1992) is. Egyensúlyban $\hat{K} = \hat{C}_2 = m$ teljesül, továbbá a (12) egyenlet szerint $\hat{w} = m$. Figyelembe véve, hogy föltevéseink szerint $\dot{L} = 0$, a (3) egyenlet szerint a bérből és fizetésből élő háztartások egyensúlyi fogyasztása is m ráta szerint növekszik. Egyensúly esetén az elit háztartások fogyasztása is m ráta szerint növekszik, továbbá $\bar{c}_2 = C_2(0)$, ami az elit háztartások fogyasztási színvonalát határozza meg. Hasonló módon $\bar{k}$ egyensúlyi értéke a tőkeállomány színvonalát determinálja. A (11) egyenletből következően egyensúlyban a kamatláb konstans, így a (2) egyenlet szerint $\hat{Y}_1 = m$, és a (6) egyenletből adódóan $\hat{Y}_2$ is m ráta szerint növekszik.

Egyensúlyban a (19) és (20) mozgásegyenletek bal oldalán zérus szerepel, ami lehetővé teszi a $\bar{k}$ és $\bar{c}_2$ egyensúlyi értékeinek a meghatározását. Az egységnyi hatékony munkára eső tőke egyensúlyi nagyságát a (20) egyenletből vezetjük le. Egyensúlyban

$$0 = \frac{1}{\phi}\left(\frac{\alpha B(1-\tau)}{(\alpha+\beta)(1-\mu\tau)}\left(\bar{k}\right)^{\frac{-\beta}{\alpha+\beta}} - \rho\right) - m\,.$$

Jelölje a hatékony tőkeintenzitás fenti egyenletet kielégítő egyensúlyi értékét $\bar{k}^*$. Felhasználva B definícióját, majd átrendezve iménti egyenletünket:

$$\bar{k}^* = \left(\frac{\alpha B(1-\tau)}{(\alpha+\beta)(1-\mu\tau)(\phi m+\rho)}\right)^{\frac{\alpha+\beta}{\beta}}\,. \tag{23}$$

Hogy milyen változást okoz a hatékony tőkeintenzitás egyensúlyi szintjében a korrupció erősödése, az $\partial\bar{k}^*/\partial\mu$ előjelétől függ. E parciális derivált a következő:

$$\frac{\partial\bar{k}^*}{\partial\mu} = \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{\alpha B(1-\tau)}{(\alpha+\beta)(1-\mu\tau)(\phi m+\rho)}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}}\frac{1-\tau}{\phi m+\rho}\left[\frac{\frac{\partial B}{\partial\mu}(1-\mu\tau)+\tau B}{(1-\mu\tau)^2}\right]\,.$$

A paraméterekre tett föltevésekből következik, hogy jobb oldalon álló kifejezésben szereplő valamennyi tényző pozitív, kivéve a szögletes zárójelben szereplő tört számlálóját, így ez határozza meg a parciális derivált előjelét. A (8) összefüggés felhasználásával a számláló a

$$B\left[\tau - \frac{(1-\alpha-\beta)(1-\tau)}{(\alpha+\beta)(1-\mu)}\right]$$

alakban írható fel, amiből:

$$\frac{\partial \bar{k}^*}{\partial \mu} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu > \frac{1}{\alpha+\beta} - \frac{1-\alpha-\beta}{(\alpha+\beta)\tau} .$$

A korrupció erősödésének hatása a hatékony tőkeintenzitás egyensúlyi szintjére tehát a szögletes zárójelben szereplő kifejezés előjelétől függ. Ez egyaránt lehet negatív és pozitív is az α, β, μ, τ paraméterek értékétől függően.

A stabilizációs gazdaságpolitika lehetőségeinek felméréséhez szükséges megvizsgálni azt is, miként hat a hatékony tőkeintenzitás egyensúlyi szintjére a lineáris adókulcs emelése. Ehhez képezzük a $\partial \bar{k}^*/\partial \tau$ parciális deriváltat:

$$\frac{\partial \bar{k}^*}{\partial \tau} = \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{\alpha B(1-\tau)}{(\alpha+\beta)(1-\mu\tau)(\phi m+\rho)} \right)^{\frac{\alpha}{\beta}} \frac{1}{(\phi m+\rho)(1-\mu\tau)} \times$$
$$\times \left(\frac{\partial B}{\partial \tau}(1-\tau) - \frac{1-\mu}{1-\mu\tau} B \right) .$$

A jobb oldalon álló kifejezés előjele az utolsó tényező előjelével egyezik meg, ami a (8) összefüggés felhasználásával a következő alakra hozható:

$$\frac{B}{1-\mu\tau} \left[\left(\frac{1}{\alpha+\beta} - 1 \right) \frac{1-\tau}{\tau} - (1-\mu) \right] ,$$

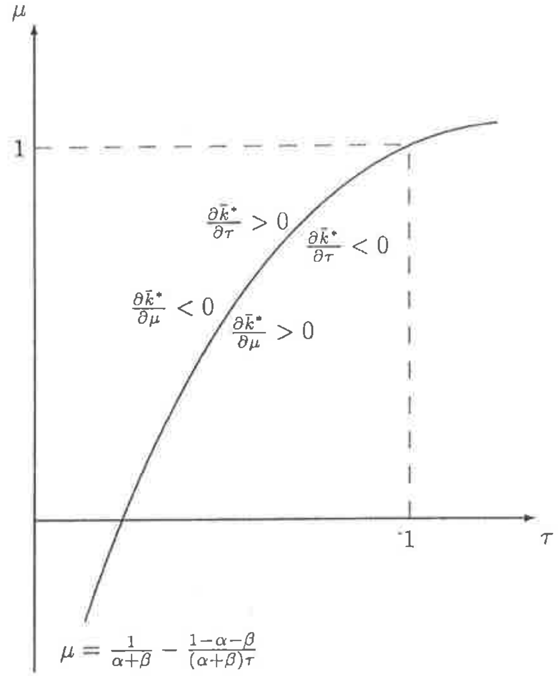
amiből:

$$\frac{\partial \bar{k}^*}{\partial \tau} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu > \frac{1}{\alpha+\beta} - \frac{1-\alpha-\beta}{(\alpha+\beta)\tau} .$$

A szögletes zárójelben álló kifejezés előjeléről itt is csupán annyit lehet mondani, hogy az az α, β, μ, τ paraméterek értékétől függ. A korrupció erősödésének, illetve a lineáris adókulcs emelésének $\bar{k}^*$-ra gyakorolt hatásával kapcsolatos eredményeinket az *1. ábra* foglalja össze. A görbe a $\tau = 1-\alpha-\beta$ értéknél metszi a vízszintes tengelyt. A (τ, μ) koordinátarendszer releváns tartománya az origóba állított egységnyi oldalú négyzet. Ezek szerint a $\partial \bar{k}^*/\partial \mu$ és $\partial \bar{k}^*/\partial \tau$ parciális deriváltak előjele egymással mindig ellentétes.

A transzverzalitási feltétel egyensúly esetére történő felírásához rendezzük át a (20) egyenletet:

$$h(\bar{k}^*) = \frac{\alpha B(1-\tau)}{(\alpha+\beta)(1-\mu\tau)} \left(\bar{k}^*\right)^{\frac{-\beta}{\alpha+\beta}} = \phi m + \rho . \tag{24}$$



1. ábra. A korrupció erősödésének, illetve az adókulcs emelésének a hatása

Behelyettesítve a (22) egyenlőtlenségbe, a transzverzalitási feltétel kielégítéséhez az alábbi egyenlőtlenség teljesülése szükséges:

$$\phi m + \rho > m\,. \tag{25}$$

$\bar{c}_2$ egyensúlyi értéke a (19) egyenletből a következőképpen adódik:

$$\bar{c}_2^* = \frac{(1-\tau)(\alpha+\beta\mu\tau)}{(1-\mu\tau)(\alpha+\beta)} B\left(\bar{k}^*\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} - m\bar{k}^* = \left[\frac{\alpha B(1-\tau)}{(\alpha+\beta)(1-\mu\tau)(\phi m+\rho)}\right]^{\frac{\alpha+\beta}{\beta}} \left[\frac{(\alpha+\beta\mu\tau)(\phi m+\rho)}{\alpha} - m\right]. \tag{26}$$

A jobb oldalon álló kifejezéshez a (23) egyenlőség felhasználása révén jutottunk. Most $\bar{c}_2^*$ pozitivitását a (25) egyenlőtlenség biztosítja.

Keressük meg most a hatékony tőkeintenzitás azon értékét, melyre $\bar{c}_2^*$ maximális. Jelölje $\bar{k}_g$ a keresett értéket, $\bar{k}_g = \bar{k}^*$ esetén az egyensúlyi növekedési pálya optimális az elit háztartások számára. A maximum elsőrendű feltétele:

$$h(\bar{k}_g) = \frac{\alpha B(1-\tau)}{(\alpha+\beta)(1-\mu\tau)}\left(\bar{k}_g\right)^{\frac{-\beta}{\alpha+\beta}} = \frac{m(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta\mu\tau}\,. \tag{27}$$

$\bar{k}_g$ jelöli azt a hatékony tőkeintenzitást, melyre $\bar{c}_2$ maximális. Az egységnyi hatékony munkára eső tőke ezen mennyiségét szokás a felhalmozás aranyszabálya által meghatározott hatékony tőkeintenzitásnak is nevezni, míg $\bar{k}^*$ a felhalmozás módosított aranyszabályához tartozó tőkeintenzitás. Ramsey modelljében $\bar{k}^* < \bar{k}_g$ teljesül, modellünkben azonban a (24), illetve (27) egyenletekből, továbbá a $h(\bar{k})$ függvény szigorú monotonitásából az következik, hogy $\bar{k}^* \geq \bar{k}_g$ is lehetséges. Az egyenlőség szükséges és elegendő feltétele

$$\phi m + \rho = \frac{m(\alpha + \beta)}{\alpha + \beta\mu\tau}$$

teljesülése.

A 2. ábra mutatja be, hogy a modell paraméterei miként befolyásolják $\bar{k}$ és $\bar{c}$ egyensúlyi értékét. A felső síknegyedben a (23) és (26) egyenletek által meghatározott nyugalmi vonalak láthatóak. Ezek metszéspontja határozza meg a modell egyensúlyi helyzetét. Az alsó síknegyedben $\bar{k}^*$ és $\bar{k}_g$ meghatározódása követhető nyomon a

$$h(\bar{k}) = \frac{1-\tau}{1-\mu\tau} f'(\bar{k})$$

függvénygörbe segítségével. Könnyen ellenőrizhető, hogy e függvénygörbe a $\dot{\bar{c}}_2 = 0$ nyugalmi vonallal megegyező irányba mozdul el μ, illetve τ értékének megváltozása esetén, tehát a $\partial\bar{k}^*/\partial\mu$ és $\partial h/\partial\mu$ parciális deriváltak előjele azonos, csakúgy, mint a $\partial\bar{k}^*/\partial\tau$ és $\partial h/\partial\tau$ parciális deriváltaké.

A $\dot{\bar{k}} = 0$ nyugalmi vonal egyenletét a (19) összefüggésből kapjuk:

$$\bar{c}_2 = \frac{(1-\tau)(\alpha+\beta\mu\tau)}{(1-\mu\tau)(\alpha+\beta)} B\left(\bar{k}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} - m\bar{k} = \left[\frac{\alpha+\beta\mu\tau}{\alpha} h(\bar{k})\right]\bar{k} - m\bar{k}\,. \tag{28}$$

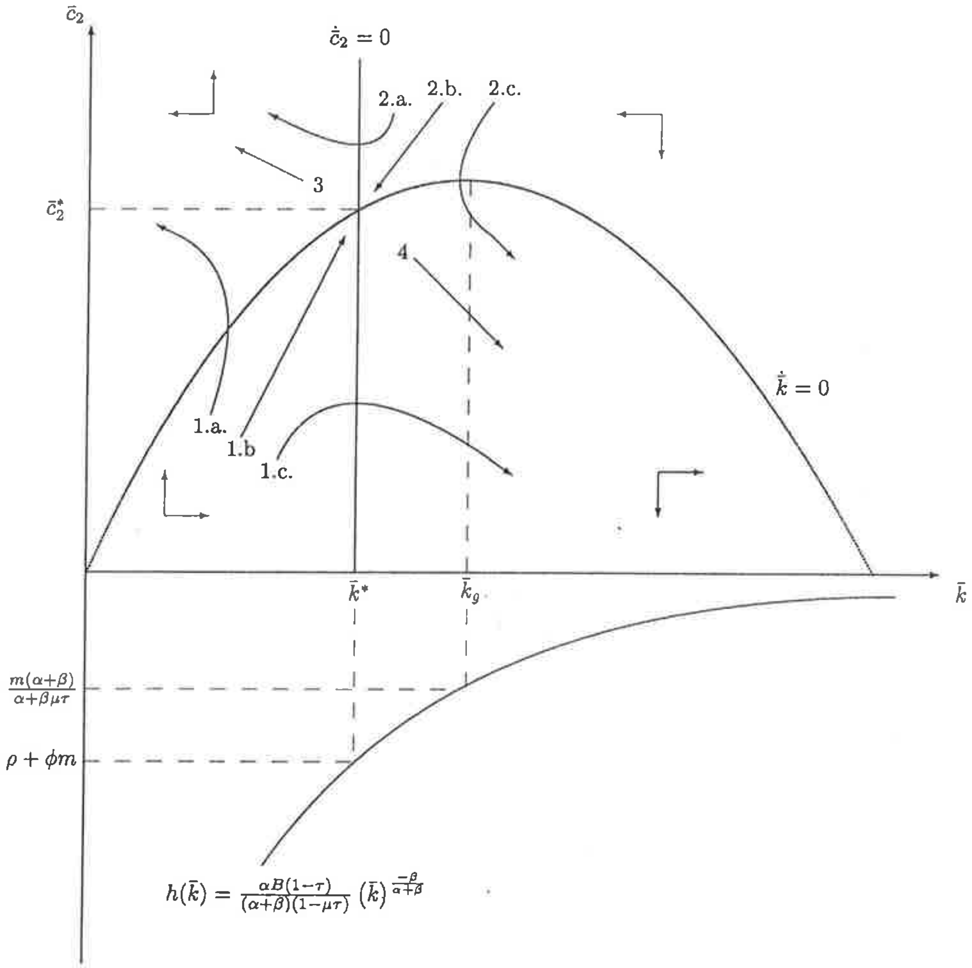
A parciális deriváltak pedig:

$$\frac{\partial\bar{c}_2}{\partial\mu} = \left[\frac{\beta\tau}{\alpha} h(\bar{k}) + \frac{\alpha+\beta\mu\tau}{\alpha}\frac{\partial h}{\partial\mu}\right]\bar{k}$$

és

$$\frac{\partial\bar{c}_2}{\partial\tau} = \left[\frac{\beta\mu}{\alpha} h(\bar{k}) + \frac{\alpha+\beta\mu\tau}{\alpha}\frac{\partial h}{\partial\tau}\right]\bar{k}$$

Mindezek alapján a korrupció, illetve az adóztatás erősödésének a $\dot{\bar{k}} = 0$ görbe helyzetére gyakorolt hatásáról még annyi biztosat sem lehet állítani, mint a $\dot{\bar{c}}_2 = 0$ nyugalmi vonal helyzetéről. Mindenesetre annyit mondhatunk, hogy amennyiben a hatékony tőkeintenzitás egyensúlyi értéke növekszik, úgy $\bar{c}_2$ értéke is nő, tehát a $\dot{\bar{k}} = 0$ görbe fölfelé tolódik. Nem tudjuk viszont eldönteni, mi történik a hatékony tőkeintenzitás egyensúlyi értékének csökkenése esetén, ekkor ugyanis a fenti parciális deriváltak jobb oldalán a szögletes zárójelben álló kifejezések első tagja pozitív, a második pedig negatív.



2. ábra. A modell fázisdiagramja

Megállapítható viszont a fázisdiagramról, hogy a ρ, ϕ és m paraméterek bármelyikének növekedése csökkenti a hatékony tőkeintenzitás egyensúlyi értékét, és bal felé tolja el a $\dot{\bar{c}}_2 = 0$ nyugalmi vonalat. Az exogén technikai haladás rátájának növekedésével továbbá a $\dot{\bar{k}} = 0$ nyugalmi vonal maximumhelye balra tolódik $\bar{k}_g$ egyidejű csökkenésével. E tulajdonságok egyébként alapmodellünkben is kimutathatóak.

5 Stabilitás

A (23) és (26) egyenletek révén definiált egyensúlyi helyzet lokális stabilitásának vizsgálatához szükséges a (19) és (20) differenciálegyenletek által definiált nemlineáris rendszer egyensúlyi pont körül történő linearizálása. A linearizált rendszerhez előállítása során az elsőrendű Taylor-polinom segítségével történő közelítést alkalmazzuk. Így az alábbi lineáris rendszerhez jutunk:

$$\begin{pmatrix} \dot{\bar{k}} \\ \dot{\bar{c}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(\alpha+\beta\mu\tau)(\phi m+\rho)}{\alpha+\beta} - m & -1 \\ -\frac{\beta(\phi m+\rho)}{(\alpha+\beta)\phi}\left(\frac{(\alpha+\beta\mu\tau)(\phi m+\rho)}{\alpha} - m\right) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{k}-\bar{k}^* \\ \bar{c}-\bar{c}^* \end{pmatrix}.$$

Az együtthatómátrix sajátértékei az alábbi formula segítségével adódnak:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left\{\frac{(\alpha+\beta\mu\tau)(\phi m+\rho)}{\alpha+\beta} - m \pm \sqrt{\left[\frac{(\alpha+\beta\mu\tau)(\phi m+\rho)}{\alpha+\beta} - m\right]^2 + \frac{4\beta(\phi m+\rho)}{(\alpha+\beta)\phi}\left(\frac{(\alpha+\beta\mu\tau)(\phi m+\rho)}{\alpha} - m\right)}\right\}.$$

A (25) egyenlőtlenség biztosítja a gyökjel alatti utolsó tényező pozitivitását, és így két valós sajátérték létezését. Mivel a jobb oldalon álló kifejezés második tagja nagyobb, mint az első tag abszolút értéke, a két sajátérték közül az egyik pozitív, a másik negatív. Ziedler (1986) szerint mivel mindkét sajátérték valós része különbözik nullától, létezik az egyensúlyi pontnak egy olyan környezete, melyben a linearizált rendszer stabilitási tulajdonságai megegyeznek az eredeti rendszer stabilitási tulajdonságaival. Mivel a két valós sajátérték eltérő előjelű, modellünk nyeregpont-stabilitást mutat, melyet Simonovits (1998) az instabilitás egy speciális eseteként említ. Nyeregpont-stabilitás esetén az egyensúlyi pontból kitérített rendszer bizonyos esetekben visszatér oda, más esetekben azonban nem. Az egyensúlyi helyzetéből kitérített rendszer által követett növekedési pályát a (19) és (20) mozgásegyenletek definiálják. E pálya jellege az induló helyzettől függ. A különböző jellegű pályákra a 2. ábrán láthatóak példák. Modellünk tehát éppúgy nyeregpont stabilitást mutat, mint Ramsey modellje, és ezen az sem változtat, hogy az alapmodellel ellentétben ezúttal $\bar{k}^* \geq \bar{k}_g$ is előfordulhat. A fázisdiagramon ez annyit jelent, hogy a $\dot{\bar{c}}_2 = 0$ egyenes nem feltétlenül a pozitív meredekségű darabján metszi a $\dot{\bar{k}} = 0$ görbét, az egyensúly stabilitását azonban ez nem érinti.

Modellünkben tehát nincs olyan automatizmus, mely az egyensúlyi helyzet stabilitását biztosítaná, az adókulcs meghatározása és a korrupciós paraméter befolyásolása révén azonban képes lehet a kormányzat az egyensúlyi pont helyzetének módosítására, és így a gazdaságot destabilizáló folyamatok megfékezésére. E destabilizációs folyamatok során különösen drámainak tűnik $\bar{k}$ csökkenése.

Ezzel kapcsolatban szükséges megjegyezni, hogy $\hat{\bar{k}} = \hat{k} - m$ miatt $\hat{\bar{k}} < 0$ esetén is növekedhet a tőkeintenzitás, ami $L = 1$ következtében a fizikai tőkejavak állományának a növekedését jelenti. Ebben az esetben a (9) egyenlet szerint az 1. szektor kibocsátása is növekedhet, növekedési rátája azonban nem éri el az exogén technikai haladás rátáját. A különféle kezdeti feltételek mellett kialakuló növekedési pályák tulajdonságainak leírása során az egyszerűbb kifejtés érdekében a következő terminológiát fogjuk alkalmazni.

Egy változó alacsony ütemű vagy lassú növekedéséről beszélünk, ha növekedési rátája nem éri el az exogén technikai haladás rátáját. Az alacsony ütemű vagy lassú növekedés az adott változó értékének csökkenését is jelentheti. Gyors ütemű növekedésről illetve magas növekedési rátáról akkor beszélünk, ha a növekedés rátája meghaladja m értékét. Egyensúlyinak az exogén technikai haladás rátáját tekintjük. A 2. ábrán bemutatott fázisdiagram alapján az egyensúlytalanság alábbi négy esetét kell megkülönböztetni:

1. $\dot{\bar{c}}_2 > 0$ és $\dot{\bar{k}} > 0$. Ebben a helyzetben mind az elit háztartások fogyasztása mind pedig a fizikai tőkejavak mennyisége gyors ütemben növekszik. A (12) egyenletből következik továbbá, hogy ugyanez igaz a bérrátára is. Hogy eléri-e a gazdaság az egyensúlyi helyzetet, a kezdeti feltételektől függ. Három eset fordulhat elő.

   (a) Az elit háztartások akár felhalmozásuk csökkentése árán is ragaszkodnak fogyasztásuk magas növekedési rátájához. A növekvő fogyasztást egy darabig képes a gazdaság a tőkeintenzitás gyors ütemű növekedése mellett fenntartani, ám utóbbi növekedési rátája előbb-utóbb m értéke alá csökken. Ezt követően az elit háztartások fogyasztásának gyors ütemű növekedését a tőkeintenzitás és a bérből és fizetésből élők fogyasztásának lassú növekedése finanszírozza. Az így létrejött helyzet részletesebb elemzésére a 3. pontban kerül sor.

   (b) Az elit háztartások csak az egyensúlyi helyzet eléréséig növelik fogyasztásukat és felhalmozásukat az egyensúlyinál gyorsabb ütemben. $\bar{k}$ és $\bar{c}$ növekedésük során az egyensúlyi helyzet felé tartanak. Ezt a trajektóriát az alapmodell esetében részletesen bemutatja Barro és Sala-i-Martin (1995).

   (c) Az elit háztartások annyira fontosnak tartják felhalmozásaik növelését, hogy azt még akkor is gyors ütemben folytatják, amikor ennek következménye már fogyasztásuk egyensúlyinál alacsonyabb ráta szerinti növekedése. k és C_1 mindvégig magasabb ráta szerint növekednek, mint m, az ehhez szükséges forrásokat azonban egy idő után az elit háztartások fogyasztásának alacsony növekedési üteme biztosítja. A kialakult helyzet további vizsgálata a 4. pontban következik.

2. $\dot{\bar{c}}_2 < 0$ és $\dot{\bar{k}} < 0$ esetén a fogyasztás növekedési rátája a háztartások mindkét szektorában alacsony, és ugyanez igaz a tőkeintenzitásra is. A kezdeti feltételektől függően ismét három eset lehetséges, az egyensúlyi helyzet elérése csak a másodikban következik be.

   (a) Az elit háztartások csak ideiglenesen viselik el, hogy fogyasztásuk a bérből és fizetésből élők fogyasztásához és a hatékony tőkeintenzitáshoz hasonlóan lassan növekszik. Miután sikerül elérniük fogyasztásuk gyors ütemű növekedését, ennek forrásai a tőkeintenzitás és a bérből és fizetésből élők fogyasztásának lassú növekedése révén jönnek létre. A kialakult új helyzet részeltesebb tárgyalására szintén a 3. pontban kerül sor.

(b) Az elit háztartások mindaddig elviselik fogyasztásuk az egyensúlyinál alacsonyabb ütemű növekedsét, míg az új egyensúlyi helyzet ki nem alakul. Ez a trajektória az 1.b növekedési pályához hasonló.

(c) Az elit háztartások fogyasztásuk gyors ütemű növekedésével szemben felhalmozásaik magas növekedési rátáját preferálják, ezért fogyasztásuk még akkor is lassan növekszik, amikor a tőkeintenzitás és a bérből és fizetésből élők fogyasztásának növekedési rátája már magas. Utóbbiak gyors ütemű növekedését ebben az esetben az elit háztartások megtakarítása finanszírozza. Ezen szituáció részletesebb vizsgálata is a 4. pontban következik.

3. $\dot{\bar{c}}_2 > 0$ és $\dot{\bar{k}} < 0$ esetén a gazdaság az egyensúlyi helyzettől távolodik. Az elit háztartások fogyasztása gyors ütemben növekszik, miközben a tőkeintenzitás alacsony ütemű növekedésével együtt az egységnyi hatékony munkára eső tőke mennyisége csökken, ami a gazdaság destabilizációjának megnyilvánulása. A tőkeállomány növekedése csak ideiglenesen maradhat fenn, az ábráról leolvasható, hogy a magárahagyott gazdaságra ebben a helyzetben

$$\lim_{t\to\infty} K = -\infty$$

érvényes, ami a termelőapparátus összeomlását jelenti. A kormányzati beavatkozást a tőkeállomány csökkenésén kívül a bérből és fizetésből élők elégedetlensége is szükségessé teszi, ekkor ugyanis $\hat{w} < m$ a (12) egyenlet szerint. Megoldást ebben a helyzetben a hatékony tőkeintenzitás egyensúlyi értékének növelése hozhat. Ekkor a $\dot{\bar{c}}_2 = 0$ nyugalmi vonal jobbra, a $\dot{\bar{k}} = 0$ nyugalmi vonal pedig fölfelé mozdul el, és ha ez az utóbbi elmozdulás elég nagy, a gazdaság az 1. pontban tárgyalt szituációba kerül.

4. $\dot{\bar{c}}_2 < 0$ és $\dot{\bar{k}} > 0$ esetén az elit háztartások fogyasztásának növekedési rátája alacsony, míg a tőkeintenzitás valamint a bérből és fizetésből élők fogyasztásának növekedési rátája magas. A gazdaság távolodik az egyensúlyi helyzettől, a destabilizáció az elit háztartások fogyasztásának csökkenésében jelentkezik. A megoldást ebben az esetben is $\bar{k}^*$ növelése jelenti, melynek következtében a gazdaság az 1. pontban tárgyalt helyzetbe kerül.

A hatékony tőkeintenzitás egyensúlyi értékét növelve tehát elkerülhető a gazdaság destabilizációja. Nem világos azonban, mit kell tennie a kormányzatnak, amennyiben $\bar{k}^*$ növelése válik szükségessé. Az 1. ábráról látható, hogy $\tau < 1 - \alpha - \beta$ esetén az adókulcs növelése, illetve a korrupció visszaszorítása biztosan a kívánt hatást éri el. Magasabb adókulcs esetén azonban a követendő gazdaságpolitika attól is függ, hogy milyen erős a korrupció az adott gazdaságban. Ha ugyanis μ értéke alacsony, akkor a korrupció mérséklődése miatt az elit háztartások jövedelme csökken, ezzel együtt megtakarításaik visszaesnek, ami a hatékony tőkeintenzitás csökkenése révén destabilizálhatja a gazdaságot. Másrészt az adókulcs emelésének is lehet destabilizáló hatása, amennyiben $\bar{k}^*$-t csökkenti. A (19) egyenletből következik, hogy ekkor τ emelésének azonnali hatásaként $\dot{\bar{k}}$ csökken.

Az elemzés teljessége érdekében meg kell vizsgálni azt az esetet is, amikor a kormányzat szándéka szerint, vagy éppen azzal ellentétesen, csökken az egységnyi hatékony munkára eső tőke mennyisége. Amennyiben ez a $\dot{\bar{k}} = 0$ nyugalmi vonalat fölfelé tolja, úgy a 3. esetben ennek stabilizáló hatása van. A 4. esetben a $\dot{\bar{k}}$ görbe lefelé történő elmozdulásának lehet stabilizáló hatása $\bar{k}^*$ csökkenése esetén.

Végül megjegyezzük, hogy a 2. ábrán bemutaott fázisdiagram szerint minél rövidebb időt tölt a gazdaság a 3. vagy 4. szituációban, annál kisebb mértékben távolodik el eredeti egyensúlyi helyzetétől, így annál kisebb mértékű kormányzati beavatkozás elegendő a stabilizációhoz, ami az 1. vagy 2. eset jellemzőinek létrehozását jelenti. Ezért különösen fontos, hogy a kormányzati beavatkozás a kívánt hatást érje el.

6 Záró megjegyzések

Dolgozatunkban Ramsey (1928) modelljének egy olyan kiterjesztését mutattuk be, mely az adóztató és közjavakat a termelés rendelkezésére bocsátó kormányzat hibás döntésinek lehetőségét is figyelembe veszi. Hibás döntésen azt értjük, amikor a kormányzat által vásárolt közjavak határtermelékenysége zérus. A μ hibaarány magas értéke esetén feltehető, hogy a jelenség hátterében közpénzek személyes jövedelemmé történő transzformációjának motívuma áll, ami a korrupció egy meglehetősen gyakori megjelenési formája. Modellünk alapvető fogyatékossága, hogy zárt gazdaságot tételez fel. Eredményeink így jobban összevethetők az alapmodell eredményeivel, azonban feltehető, hogy nyitott gazdaság feltételezése lényegesen eltérő következtetésre vezetne, különösen, ha figyelembe vesszük, hogy az elit háztartások jövedelmük jelentős részét külföldre vihetik. Következtetéseink így inkább azokra az országokra érvényesek, ahol az elitnek és vagyonának külföldre menekülése nem jellemző.

A közjavak és korrupció figyelembe vétele formálisan nem változtatja meg Ramsey modelljének stabilitási tulajdonságait, ugyanakkor tartalmazza a stabilizációt célzó gazdaságpolitika lehetőségét. A μ korrupciós paraméter hatása az egyes változók egyensúlyi értékeire, illetve egyensúlyi növekedési pályáira nem egyértelmű, és ugyanezt monhatjuk el a τ lineáris adókulcsról is. μ és τ növekedésének következménye az α, β, μ, τ paraméterek aktuális értékétől függően egyaránt lehet $\bar{k}$ és $\bar{c}_2$ növekedése és csökkenése is. A paraméterek szóba jöhető értékei mellett mindkettő előfordulhat. Az eredmények ilyen fokú bizonytalansága azért figyelemre méltó, mert azokat igen jól specifikált, lineárisan homogén, Cobb-Douglas típusú termelési függvény feltételezése mellett kaptuk.

A paraméterek pontosabb értelmezéséhez meg kell még jegyezni, hogy a (11) és (12) egyenletek alapján α és β nem pusztán a parciális termelési rugalmasságok technikai paraméterei, hanem jövedelemelosztási paraméterek gyanánt is értelmezhetőek, amennyiben $\alpha/\beta = wL/rK$.

További hiányossága modellünknek, hogy a korrupciós paraméter és az adókulcs nagyságát függetlennek tekintettük. Valószínűbb, hogy τ magasabb értéke esetén μ értéke is nagyobb, egy ilyen összefüggés figyelembe vétele azonban még nehezebben kezelhető eredményekre vezetett volna.

Irreális a tökéletes verseny feltételezése a munka- és termékpiacon is. Piaci elégtelenségek jelenlétében viszont a reálbér kisebb a munka határtermelékenységénél. E határtermelékenység a (12) egyenletben jelenik meg, így monopolelemek előfordulása esetén a (12) összefüggés egyenlőtlenség formájában teljesül. Modellünk tehát a valóságosnál kedvezőbb képet fest a bérből és fizetésből élő háztartások jövedelmének és fogyasztásának alakulásáról, ezért ide vonatkozó eredményeit helyesebb a változók egyfajta felső korlátjaként értelmezni, melyet a gazdaság csak tökéletes verseny esetén érhetne el.

Végül megjegyezzük, hogy valószínűleg irreális az a föltevésünk, mely szerint minden téves kormányzati döntés mögött az elit háztartások egy csoportjának jövedelemszerzési motívuma húzódik meg. Rossz kormányzati döntések születhetnek a döntéshozók rendelkezésére álló információk elégtelen volta miatt is, éppúgy mint téves vállalkozói döntések, különösen a beruházások területén. Utóbbiak figyelembe vétele azonban szétfeszítené modellünk neoklasszikus kereteit, többek között szükségessé válna a hibás anticipációk lehetőségét is magában foglaló autonóm beruházási függvény bevezetése.

Irodalom

1. Acemoglu, Daron – Verdier, Thierry (2000). „The Choice Between Market Failures and Corruption", *The American Economic Review*, 90 (3) pp. 194–211.
2. Barro, Robert J. (1990). „Government Spending in a Simple Model of Endogenous Growth", *Journal of Political Economy*, 98, 5 (10) pp. 103–125.
3. Barro, Robert J. – Sala-i-Martin, Xavier (1995). *Economic Growth*, McGraw-Hill, Inc.
4. Blanchard, Jean Oliver – Fischer, Stanley (1992). *Lectures on Macroeconomics*, The MIT Press. Cambridge, Massachusetts; London, England
5. Bessenyei István (1995). *A gazdasági növekedés alapvető elméletei* (egyetemi tankönyv), Janus Pannonius Tudományegyetem.
6. Bessenyei István (1996). „Az infrastruktúra fejlesztés költségei és hozamai", megjelent: *Informatika a felsőoktatásban* (tanulmánykötet), KLTE, Debrecen, pp. 731–735.
7. Cass, David (1965). „Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation", *Review of Economic Studies*, 32 (7), pp. 233–240.
8. Chiang, Alpha C. (1992). *Elements of dynamic optimization*, McGraw-Hill.
9. Ehrlich Isaac – Lui Francis T. (1999). „Bureaucratic Corruption and Endogenous Economic Growth", *Journal of Political Economy*, 107 (6) S270–S293.
10. Inada, Ken-Ichi (1963). „On a Two-Sector Model of Economic Growth: Comments and a Generalisation", *Review of Economic Studies*, 30. (6), pp. 119–127.

11. Kaldor, Nichols – Mirrlees, James A. (1962). „A New Model of Economic Growth", *The Review of Economic Studies*, 29. (6), pp. 174–192.
12. Koopmans, Tjalling (1965). „On the Concept of Optimal Economic Growth", megjelent: *The Econometric Approach to Development Planning*, Amsterdam, North Holland.
13. Müller, Karl Wilhelm – Ströbele, Wolfgang (1985). *Wachstumstheorie*, R. Oldenburg Verlag, München, Wien.
14. Petschnig Mária Zita (1993). „Rendszerváltás a korrupcióban", *Korunk*, 1993 (7) pp. 11–21.
15. Ramsey, Frank (1928). „A Mathematical Theory of Saving", *Economic Journal*, 38 (12) pp. 543–559.
16. Samuelson, Paul A. (1954). „The Pure Theory of Public Expenditure", *Review of Economics and Statistics*, 36 (11), pp. 387–389.
17. Simonovits András (1998). *Matematikai módszerek a dinamikus közgazdaságtanban*, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.
18. Szidarovszky Ferenc – Bahill, Terry (1992). *Linear Systems Theory*, CRC Press, Boca Raton/ London
19. Zeidler, E. (1986). *Nonlinear Functional Analysis and its Applications – Fixed-Point Theorems*, Vol. I. (németből angolra ford.: Wadsack, P. R.), Springer Verlag, New York.

PUBLIC GOODS AND CORRUPTION IN THE RAMSEY MODEL

This paper discusses the effect upon economic growth of corruption in the neoclassical framework. Corruption is defined as follows: The government purchases a portion of the private output and then uses this purchase to provide free public services to private producers, but the marginal productivity of these free public services is zero. It is shown that the introduction of public goods and taxation do not alter the stability properties of the model. The study examines how corruption and taxation affect the rate of economic growth and the possibilities of stabilization policy. Firms and households are divided into two sectors.

DOLLÁRBEFEKTETŐK MAGYARORSZÁGON: FORINTBAN DENOMINÁLT RÉSZVÉNYEK DEVIZAKOCKÁZATA

SCHEPP ZOLTÁN
PTE Közgazdaságtudományi Kar

A devizakockázat értelmezése

Az árfolyamkockázat és a devizakockázat kategóriájának elhatárolása a nemzetközi szakirodalomban a 80-as és 90-es évek fordulóján történt meg. A hazai szakemberek érdeklődését ugyanakkor —néhány, később említendő kivételtől eltekintve— mindmáig nem keltette fel igazán a kérdés. Ez tulajdonképpen érthető, ha figyelembe vesszük a hazai devizaszabályozás elmúlt években végbement fokozatos és óvatos liberalizálását, illetve ezzel párhuzamosan az immár 6 éve életben lévő előre bejelentett csúszó leértékeléses árfolyamrezsim kockázatkorlátozó sajátosságait. A dollárnak a forint devizakosarából történt tavalyi (2000. január 1.) kivétele, és ezzel a forint/dollár árfolyam lényegét tekintve rugalmassá válása óta azonban az árfolyamváltozáshoz kapcsolódó kockázatok immanenssé váltak. Legfőbb ideje tehát, hogy az egyes kockázati kategóriák tisztázásával megkönnyítsük azok hatásainak megértését.

Az árfolyamkockázatok fajtáinak „hagyományos", hármas felosztása[1] a következő:

- A nyitott devizapozíciókból származó, vagy azok után fizetendő hazai pénzösszeg nagyságát érinti az ún. *tranzakciós kockázat* (transaction risk);
- A hazai pénznemben összeállított vállalati mérlegben szereplő devizális eszközök és források tárgynapi értékét módosítja az ún. *átértékelési kockázat* (translation risk);
- A vállalatok teljes tevékenység-portfóliójának kialakítása során az árfolyamok jövőbeli alakulásának előreláthatatlansága folytán (pl. a kamatláb, vagy a konjunktúra ingadozásaihoz hasonló) általános bizonytalansági tényezőként jelenik meg az ún. *gazdasági kockázat* (economic risk).

Ezek a kockázati kategóriák — precízen és konzekvensen használva őket — alkalmasak arra, hogy a fizetési mérlegben szereplő nemzetközi tranzakciók javarészéhez, így elsősorban a külkereskedelmi kapcsolatokhoz, a közvetlen

---
[1] A kockázattípusok elhatárolását, és kezelésük lehetőségeit magyar nyelven elsőként Buckley (1998) tárgyalta.

befektetésekhez és a nemzetközi hitelezéshez kötődő kockázatokat megragadjuk velük.

Nem konzisztensek ugyanakkor azzal a kockázati személettel, amelyet a külgazdasági kapcsolatokat egyre inkább domináló portfólió-befektetések során alkalmaznak. A fizetési mérleg portfólió-befektetések sora azokat az areán átnyúló értékpapír-befektetéseket összegzi, melyeket a szokásos hozam-kockázati (valamint likviditás) mérlegelés alapján hajtanak végre. Mint tudjuk, a portfólió-elmélet nyomán az értékpapír-befektetések kockázatát a várható hozamok ingadozásaként értelmezik és számszerűsítik. Külföldi befektetések esetén azonban a befektetők számára nem a külföldi (befektetési) pénznemben, hanem a hazai (referencia) pénznemben mért hozamok ingadozásai lesznek a mérvadóak. A *devizakockázat* kategóriája éppen e kettő eltérését tükrözi. *Árfolyamkockázatként* ugyanakkor a devizaárfolyam változásában megtestesülő hozam szórása értelmezhető.

Vegyünk példának egy európai befektetőt, aki az 1999. november eleje és 2000. október vége között a MAX-indexxel jellemzett hazai államkötvény-portfólióba fektette pénzét.[2] A MAX-index forintban számított hozama az adott időszakban 12,75%, a volatilitása pedig 4,08% volt.[3] Példabeli befektetőnket azonban ennél sokkal inkább érdekli a saját pénznemében mért hozam és volatilitás. A referencia pénznemnek tekinthető euróban viszont 9,92%-os hozam, és 4,65%-os volatilitás adódik.[4] A MAX-befektetés devizakockázata a külföldi befektető referencia pénznemében és a forintban mért volatilitás különbsége. Vagyis az a járulékos hozamingadozás, amivel a befektetés repatriálása során, mint pótlólagos kockázattal számolni kell. Jelen esetben ez 4,65% - 4,08% = 0,57%. A konkrét példában ez kevesebb, mint a harmada az EUR/HUF árfolyam volatilitásaként számítható árfolyamkockázatnak (1,76%). A könnyebb áttekinthetőség érdekében az *1. táblázatba* foglaltuk adatainkat.

	Hozam(%)	Kockázat(%)
MAX (HUF-ban)	12,75	4,08
HUF (EUR-ben)	−2,83	1,76
MAX (EUR-ben)	9,92	4,65

1. táblázat

A külföldi befektetések devizakockázatának létezése az árfolyam változékonyságának a következménye, hiszen az árfolyam tökéletes rögzítése esetén mind a befektetési és a referencia pénznemben mért hozamok, mind pedig a kockázatok megegyeznének egymással. Az —árfolyamváltozásban megtestesülő hozam[5] szórásaként definiált— *árfolyamkockázat az adott pénznemben*

[2] A MAX-index értéke az időszak elején 166,0618; az időszak végén pedig 188,6503 volt.

[3] A számítások alapját az MNB napi adatai képezték. A megadott hozamok folytonosak, a kockázat mérésére szolgáló volatilitási mutatót pedig a hozamok szórásának annualizálásával (a napok számának négyzetgyökével való szorzásával) kaphatjuk.

[4] Az átszámításhoz az MNB hivatalos HUF/EUR devizaárfolyamait használtuk. Mivel a kivont tőke külföldi újraallokálását feltételezzük, ezért mindig a tárgynapi árfolyamokat.

[5] Az adott időszakban a forint —ha csekély mértékben is, de— leértékelődött az euróval szemben, ezért az abban mért hozama negatív $(-2,83\%)$ volt.

denominált értékpapír-befektetések devizakockázatának ugyanakkor *csupán* a felső korlátját, *a lehetséges maximumát adja meg.*[6] A devizakockázat nagyságát az árfolyam és a konkrét befektetési eszköz értékének együttmozgása határozza meg.[7] Ennek intenzitása viszont befektetési eszközönként más és más. Vagyis: nem a forintnak van devizakockázata, hanem a forintban eszközölt értékpapír-befektetéseknek.

Amennyiben a külföldi pénznemben történő befektetés eszközök szerint diverzifikált (pl. a kötvények mellett részvényekre is kiterjed), akkor a kialakított portfólió devizakockázata a benne szereplő eszközök devizakockázatából lenne származtatható. A devizakockázat kategóriája ezen kívül értelmezhető lenne egyéb (pl. közvetlen) befektetésekre is. Gyakorlati jelentősége azonban csak a kellően likvid másodlagos piacú értékpapír-befektetések esetében van. Vizsgálatainkat a jelen írásban mi egy más irányba terjesztjük ki.

A devizakockázat komponensei

A további vizsgálatok alátámasztása érdekében ebben a pontban a devizakockázat összetevői kerülnek bemutatásra. A fejtegetések során elsősorban a Drummen/Zimmermann svájci szerzőpáros a témában mérvadónak számító tanulmányát hívjuk segítségül.[8] Az egyetlen külföldi pénznemben végrehajtott befektetések hazai pénznemben vett folytonos hozama (h) a külföldi pénzben mért folytonos hozam (k) és az árfolyamváltozásban megtestesülő folytonos hozam (e) összege:

$$h = k + e\,. \tag{1}$$

A hozam varianciája a korrelációs együttható (K) segítségével kifejezve:

$$\sigma^2(h) = \sigma^2(k) + \sigma^2(e) + 2K(k,e)\sigma(k)\sigma(e)\,. \tag{2}$$

A devizában végrehajtott befektetés (DB) kockázatának definiálására a legprecízebben a referencia, és a befektetési pénznemben mért *varianciák különbségeként* lenne mód:[9]

$$\sigma^2(DB) = \sigma^2(h) - \sigma^2(k) = \sigma^2(e) + 2K(k,e)\sigma(k)\sigma(e)\,. \tag{3}$$

A gyakorlatban mégis a devizakockázatnak a *volatilitások különbségeként* történő definiálása a megszokott:

$$\sigma(DB) = \sigma(h) - \sigma(k)\,. \tag{4}$$

Vegyük észre, hogy a (4) bal oldalán szereplő $\sigma(DB)$ nem azonos a (3) bal oldalán levő $\sigma^2(DB)$ négyzetgyökével! Jelen cikk példáiban (mint korábban

---

[6] Ezt a gondolatot explicit formában egyetlen általam ismert szerző sem fogalmazta meg eddig.

[7] Ezt, mint később látni fogjuk, legcélszerűbb folytonos hozamaik korrelációjával mérni.

[8] Drummen/Zimmermann (1992. 8.1. alpont).

[9] A variancia-komponensek összeadhatósága okán is ez lenne a legindokoltabb.

A devizakosár összetételének hatása a forint árfolyamkockázatára

Amíg a dollár a devizakosár egyik alkotóeleme volt, addig a (hivatalos forint/dollár árfolyam reciprokaként adódó) dollár/forint árfolyamban megtestesülő (folytonos) hozam (R_F) két komponensből tevődött össze:[21]

$$R_F\left(\frac{\mathrm{USD}}{\mathrm{HUF}}\right)=R_F\left(\frac{\mathrm{USD}}{\mathrm{Kosár}}\right)+R_F\left(\frac{\mathrm{Kosár}}{\mathrm{HUF}}\right). \tag{9}$$

1999-re a tényleges 30%-os dollár és 70%-os euró részaránnyal számolva,[22] valamint figyelembe véve a forintnak a kosárral szembeni leértékelését (α), a következőt kapjuk[23]

$$R_F\left(\frac{\mathrm{USD}}{\mathrm{HUF}}\right)=0.7\cdot R_F\left(\frac{\mathrm{USD}}{\mathrm{EUR}}\right)-\log(1+\alpha)\,. \tag{10}$$

Tekintettel arra, hogy a kosárral szembeni leértékelés egy adott időszak vonatkozásában konkrét érték,[24] a hozam szórására (vagyis a forint árfolyamkockázatára) az alábbi egyszerű összefüggés adódik[25]

$$\sigma\left(\frac{\mathrm{USD}}{\mathrm{HUF}}\right)\approx 0.7\cdot\sigma\left(\frac{\mathrm{USD}}{\mathrm{EUR}}\right). \tag{11}$$

2000. január 1. után, amikor a dollár már nem volt része a devizakosárnak, a forint csúszó leértékelése ugyanakkor (az ekkor már kizárólag az euróból álló kosárral szemben) tovább folytatódott, az összefüggés a következőre módosult:

$$\sigma\left(\frac{\mathrm{USD}}{\mathrm{HUF}}\right)\approx\sigma\left(\frac{\mathrm{USD}}{\mathrm{EUR}}\right). \tag{12}$$

A (12) és (11) összevetéséből egyértelműen következik, hogy a dollárnak a kosárból történő kivétele a forint árfolyamkockázatát (a dollárral szemben) növelte.

A *3. táblázat* éves bontásban szemlélteti a forint dollárban mért (folytonos) hozamát,[26] illetőleg az árfolyamkockázatot a vizsgált időszakra:

---

[21] Az itt következő összefüggések szigorúan véve csupán az intervenciós centrumárfolyamra érvényesek. Ha azonban — a gyakorlatnak megfelelően — feltételezzük, hogy a hazai bankok jegyzéseik elkészítésekor tekintettel vannak a leértékelés képletére, akkor a hivatalos árfolyamokra is vélelmezhetjük az érvényességüket.

[22] 1996-ban az ECU, 1997-98-ban pedig a márka (DEM) volt a dollár mellett a kosárban ugyanilyen (70%-os) részaránnyal. Analóg összefüggések természetesen ezekre az időszakokra is megfogalmazhatók.

[23] A levezetés kissé hosszadalmas, ezért a dolgozat végén található függelékben került elhelyezésre.

[24] A következő képletben a megközelítőlegesség jelölése veszi figyelembe a leértékelési ütem változtatásainak a kétségtelenül létező, bár (mint látni fogjuk) nem túl jelentős hatását.

[25] Hasonló összefüggést ír fel —más kontextusban— a forint/márka árfolyam varianciájára Darvas (1998/60. o.).

[26] A hozam sorában szereplő negatív értékek a forintnak a dollárral szembeni adott évi leértékelődését mutatják.

USD/HUF	1996	1997	1998	1999	2000
Hozam (e, %)	-16,21	-22,71	-4,29	-16,36	-13,49
Kockázat ($\sigma(e)$, %)	4,10	6,39	7,60	7,19	12,43

3. táblázat

Az árfolyamkockázat 2000-ben történt „megugrása"[27] szembeszökő, és ez az egyetlen év, amikor az érték kétszámjegyű. A korábbi évek változatos (bár a 2000-esnél minden esetben sokkal alacsonyabb) értékeit minden bizonnyal a kosárdevizák keresztárfolyamának változékonyságában bekövetkezett változásokkal magyarázhatjuk.

Az 1999-es és 2000-es évre a fentebb levezetett összefüggéseinket ellenőrizhetjük is, ha meghatározzuk az USD/EUR árfolyam összevethető volatilitásértékeit. Az MNB hivatalos napi HUF/EUR és HUF/USD devizaárfolyamaiból képzett keresztárfolyamok segítségével[28] számított értékeket a *4. táblázat* mutatja.

USD/EUR	1999	2000
volatilitás, %	9,42	12,54

4. táblázat

A 2000-es adat csak egészen minimálisan ($12.43 - 12.54 = -0.11\%$-kal) tér el a (12) szerintitől. 1999-ben a különbség jelentősebb $7.19 - (9.42 * 0.7) = +0.6\%$. Az eltérések magyarázatát valószínűleg a leértékelési ütem 2000-ben egyszer, míg 1999-ben háromszor is végrehajtott mérséklésében kereshetjük.

Az árfolyamkockázat növekedése önmagában véve kedvezőtlenül hat a forintban eszközölt értékpapír-befektetések devizakockázatára. Túlságosan elhamarkodottan vonnánk le azonban a következtetésünket, ha úgy gondolnánk, hogy az árfolyamkockázat növekedésének hatására a devizakockázat is növekszik. Mint azt a következő alpontban látni fogjuk, arra a befektetési eszköz és az árfolyam közötti korreláció erősségének a változásai is hatással vannak. A kritikus és a tényleges korrelációs együtthatók vizsgálata tartogat még meglepetéseket a számunkra.

A korrelációs együtthatók és a devizakockázat értékének évenkénti alakulása a BUX esetében

Az *5. táblázat* összefoglalja a BUX forintban és dollárban mért éves hozamait, illetve a hozzájuk tartozó kockázati értékeket (volatilitás). Tartalmazza továbbá a devizakockázatot, valamint annak a dollárban mért teljes kockázaton belüli részarányát. A táblázat utolsó két sora a kritikus és a tényleges korrelációs együtthatókat mutatja.

[27] 12.43/7.19=1.728. Vagyis az árfolyamkockázat növekedése mintegy 73%-os!

[28] A hivatalos árfolyamok képzési módja miatt (lásd 17-es lábjegyzet) ez ebben az esetben elfogadhatónak tűnik.

	1996	1997	1998	1999	2000
BUX (HUF)					
Hozam (k, %)	97,60	62,27	-28,03	26,40	-10,46
Kockázat ($\sigma(k)$, %)	23,65	39,43	47,96	30,53	45,46
BUX (USD)					
Hozam (h, %)	81,39	39,56	-32,31	10,05	-23,94
Kockázat ($\sigma(h)$, %)	23,70	38,75	48,31	31,68	45,35
Devizakockázat					
$\sigma(DB) = \sigma(h) - \sigma(k)$, %	0,05	-0,68	0,35	1,15	-0,11
$\sigma(DB)/\sigma(h)$, %	0,21	-1,75	0,72	3,63	-0,24
Korrelációs együtthatók					
$K_{\text{KRIT}} = -0,5 \cdot \sigma(e)/\sigma(k)$	−0,0867	−0,0811	−0,0792	−0,1177	−0,1367
$K_{\text{TÉNY}}$	−0,0742	−0,1857	−0,0330	0,0453	−0,1453

5. táblázat

Mint látható, a BUX-befektetés devizakockázata —az öt év egyesített adataiból korábban számított 0.12%-os értékkel összhangban— mindvégig rendkívül alacsony, sőt 1997-ben és 2000-ben egyenesen negatív volt. Az amerikai befektetők teljes kockázatán belüli részaránya, $\sigma(DB)/\sigma(h)$ pedig olyan csekély, hogy megkockáztathatjuk: *az adott időszakban a BUX-befektetésekhez kapcsolódó forintpozíciókat gyakorlatilag nem volt értelme fedezni a dollárral szemben.*[29]

Első pillantásra hajlamosak lehetnénk ezt az érvényben lévő árfolyamrezsimmel magyarázni. Ennek azonban nagyon is ellentmond a devizakockázatban 1999-ről 2000-re bekövetkezett markáns csökkenés. Az utóbbira az árfolyamkockázattal kapcsolatban észleltek kapcsán sem számíthattunk. A jelenség értelmezésében a korrelációs együtthatók lehetnek a segítségünkre.

Mint az a táblázatban is jelölt képletből következik, a kritikus korrelációs együttható abszolút értéke egyenes arányban áll az árfolyamkockázattal. Ezzel egybevág, hogy 1999-ről 2000-re az árfolyamkockázathoz hasonlóan a K_{KRIT} abszolút értéke[30] (ha kisebb mértékben is, de) szintén nőtt.[31] A devizakockázat mégis csökkent, sőt egyenesen negatívvá vált, és ez kizárólag a tényleges korrelációs együtthatóban bekövetkezett jelentős változásnak tudható be.[32]

A táblázat utolsó sorában szereplő tényleges korrelációs együtthatókat szemügyre véve elmondható, hogy *a BUX és az USD/HUF árfolyam közötti kapcsolat:*

- Egyrészt *nem különösebben intenzív;*
- Másrészt *egyáltalán nem stabil.*

A kapcsolat gyengeségére utaló megállapítás még viszonylag könnyen értelmezhető, hiszen mindkét ismérvünkre számos egyéb, jóval intenzívebb hatású

[29] Ebből persze egyáltalán nem következik, hogy a fedezésnek a jövőben sem lenne értelme. Másrészt az állítás nem zárja ki azt, hogy a birtokolt BUX-pozíciók forint bázison számított kockázatát — pl. határidős BUX eladással — célszerű lehet fedezni.

[30] Vagyis az árfolyam és a BUX között elvárt negatív kapcsolat erőssége.

[31] A csekélyebb növekedés magyarázata, hogy a vele fordítottan arányos $\sigma(k)$ (a BUX hozamának forintban mért szórása) szintén emelkedett, mégpedig kb. 49%-kal.

[32] $K_{\text{TÉNY}}$ +0.045-ről −0.145-re csökkent!

változó is befolyást gyakorol. Az árfolyam esetében egyelőre talán elég az USD/EUR keresztárfolyamot, a BUX tekintetében pedig a részvénypiaci várakozásokat kiemelni. A *6. táblázat* a szokásos szignifikancia-szintekhez, és az $n = 248$ szabadsági fokhoz tartozó empirikus t-értékeket, valamint a belőlük származtatható, a függetlenségi hipotézis elvetéséhez minimálisan szükséges abszolút értékétű korrelációs együtthatókat mutatja:

Szignifikancia-szint	10%	5%	1%
t_{EMP}	1,97	2,26	2,83
$\lvert K\rvert_{\mathrm{MIN}}$	0,124	0,142	0,177

6. táblázat

Ezek szerint miközben az 1997-es tapasztalati korrelációs együttható még 1%-on is, a 2000-es pedig 5%-on teljesíti a kívánalmakat, addig a többi évre: *1996-ra, 1998-ra és 1999-re egyáltalán nem zárható ki az árfolyam- és részvényhozamok függetlensége.*

Ez sem ad azonban magyarázatot az egyes évek korrelációs együtthatóiban tapasztalható eltérésekre. Nehéz dolgunk lesz tehát, ha a kapcsolat instabilitásának okait kívánjuk feltérképezni. Márpedig a dolgozat befejező részében éppen ez a feladat vár ránk.

A tényleges korrelációs együttható értékét befolyásoló tényezők

A részvénypiac és az árfolyam kapcsolata esetében nyilvánvalóan kölcsönhatásról, és nem ok-okozati viszonyról van szó. A felmerült kérdések tisztázásában azonban segítségünkre lehet, ha az egyik, illetve másik oldalról kiinduló hatásokat előbb külön-külön is szemügyre vesszük. Lássuk most először a részvénypiac által indukált változásokat.

Ha minden egyéb tényező hatásától eltekintünk, akkor kézenfekvő a BUX és az USD/HUF árfolyam között pozitív összefüggést feltételezni: amikor — nem utolsó sorban az amerikai befektetők vásárlásai következtében — a BUX emelkedik (pontosabban az adott napi forintban mért hozama meghaladja a napi átlagos hozamot), akkor ezzel párhuzamosan — a forintvásárlások következtében — az USD/HUF árfolyamban megtestesülő hozamnak is átlag felettinek kellene lennie.[33] A tényleges korrelációs együtthatók tanúsága szerint azonban a gyakorlatban korántsem ez a helyzet. A forint keresletét ugyanakkor a külföldi befektetők tőzsdei részvényekkel kapcsolatos tranzakciói mellett még számos más, nem kevésbé fontos tényező befolyásolja: a folyó fizetési mérleg tranzakciói, a közvetlen tőkebefektetések, a külföldiek (nettó) államkötvény vásárlásai, a hitelforgalom stb.[34] Ezek a komponensek

[33] Ennek természetesen az ellentettje is vélelmezhető, és semmivel sem kisebb jelentőségű: vagyis a külföldiek jelentősebb részvényeladásai és a hozzájuk kapcsolódó dollár-vásárlások egyaránt kellene, hogy csökkentsék a BUX és a forint hozamát.

[34] Az MNB forint konverziós keresletének meghatározása során a fentiek mellett még saját külföldi (nettó) kamatfizetéseit, a bankok nyitott devizapozíciójának és a határidős kontraktusok állományváltozásának konverziós hatásait, valamint a tőketranszfereket veszi számba.

persze folyamatosan változnak, és a devizapiacra gyakorolt hatásuk intenzitása egyáltalán nem stabil.

Az imént leírt pozitív összefüggés érvényesülését a ténylegesen rendelkezésre álló adatok közül egyedül azzal próbálhatnánk megragadni, hogy a teljes konverziós forintkeresleten belül mekkora részarányt képviselnek, és arányaikban hogyan változnak a külföldiek részvényekbe történő nettó portfólió-befektetései.[35] Sajnos azonban a fizetési mérleg erre vonatkozó statisztikái meglehetősen bizonytalanok, ezért a konverziós forintkereslet dekomponálásakor a (nettó) részvényvásárlások meghatározásához még az MNB is a „maradékelvet" alkalmazza.[36] A problémát még tovább komplikálja, hogy a külföldi befektetők devizaterületek szerinti megoszlására vonatkozóan semmiféle adat nem áll a rendelkezésünkre. Gondolatmenetünk korrektségének megőrzése érdekében —a számbavétel nehézségeit elismerve, és statisztikák pontosítására irányuló törekvéseket is tiszteletben tartva— ezeknek az adatoknak a közlésétől eltekintünk, mivel aligha lehetnek alkalmasak érdemi következtetések levonására. A részvénypiac oldaláról kibontakozó hatásokkal kapcsolatban tehát csupán annyit kockáztathatunk meg, hogy a korreláció várhatóan annál erősebb:

- Minél jelentősebb szerep jut a devizapiaci forgalmon belül a részvénypiaci tranzakciókhoz kapcsolódó ügyleteknek;
- Illetve minél inkább megegyezik azok iránya (eladás/vétel) a más alaptranzakciókhoz kapcsolódó devizapiaci ügyletek irányával.

Ezek a többé-kevésbé heurisztikus kijelentések mindenesetre plauzibilisen illeszkednek az 1999-ben, illetve 2000-ben tapasztaltakhoz. Miközben 1999-ben a tőzsdei részvényeken keresztül történő tőkebevonás egyrészt nagymértékben illeszkedett a tőkeáramlás egyéb csatornáinak folyamataihoz, másrészt korántsem elhanyagolható részarányt tett ki a konverziós forintkeresleten belül is, addig 2000-ben a tőzsdei részvényekből jelentős nettó tőkekivonás történt, miközben az egyéb csatornákon (közvetlen befektetések, államkötvények, devizahitelek) érkező tőkevonás annak devizapiaci hatásait bőven túlkompenzálta.

Lássuk ez után, hogy mennyivel visz közelebb minket a korrelációs együtthatóval kapcsolatos bizonytalanság megértéséhez, ha a devizapiac oldaláról kibontakozó hatásokat elemezzük. Könnyebb dolgunk ebben az esetben sem lesz, mivel a szakma által egységesen támogatott árfolyam-elmélet hiányában bármilyen érvrendszerrel is támasztjuk alá gondolatainkat, az elvi alapon is támadható lesz. Célunk érdekében ezért most nem annyira modell-teoretikus, mint inkább probléma-orientált gondolatmenettel igyekszünk dolgozni.

---

[35] Hasonló értelemben fontos lehetne a részvényeladásoknak a konverziós devizakeresleten belüli részaránya is. A forint azonban a vizsgált időszakban csak kivételesen, és nagyon ritkán tartózkodott az intervenciós sáv „gyenge" végén.

[36] Vagyis a máshová be nem sorolható tételeket helyezi ide. Az adatok bizonytalanságát jól jellemzi, hogy az 1999-es éves jelentésben szereplő 483 milliárd forintos részvényvásárlási adat a 2000/3-as inflációs jelentésben már 151,3 milliárdra módosult, miközben 321 milliárd az újonnan kialakított „egyéb" kategóriába került át ...

A forint dollárral szembeni gyengülése csökkenti a hazai részvények dollárban mért bekerülési árát, ami pótlólagos részvényvásárlásokat indukálhat. A hazai részvények ezzel járó részarány-növekedése a nemzetközi portfóliókon belül azonban csak akkor következik be, ha az egyéb (döntően pénzügyi) befektetési lehetőségek várható hozam-kockázat profilja mindeközben nem módosult számottevően. A korábban már vizsgálttal analóg, párhuzamos BUX–USD/HUF hozamnövekmény azonban egyáltalán nem szükségszerű. Minden további nélkül elképzelhető, hogy a pótlólagos amerikai befektetésekre aspiráló hazai befektetők vásárlásai —az előbbiek tényleges bekövetkezte nélkül— emelik a BUX értékét. Ebben az esetben pedig nem biztos, hogy devizapiaci tranzakciókban megnyilvánuló hatások is fellépnek.[37] A két változó közötti kapcsolat pozitív vagy negatív jellege már akár csak ettől —az utólag tévesnek bizonyuló— spekulációtól is bizonytalanná válhat.

Eddig nem vettük figyelembe, hogy kezdetben miért is gyengült a forint, pedig ennek a pótlólagos amerikai befektetések szempontjából óriási jelentősége lehet. Az euró 1999. januári bevezetésétől egészen a 2000-es év késő őszéig a dollár lényegében folyamatosan erősödött az egységes európai pénznemmel szemben,[38] amely mint a forint kosarának előbb domináns, majd kizárólagos eleme mintegy „magával rántotta" a forintot. Vagyis a forint gyengülése, és ezzel a hazai részvények olcsóbbá válása egyáltalán nem „ceteris paribus" valósult meg, hanem együtt járt az euró-zóna értékpapírjainak hasonló mértékű (dollár alapú) árcsökkenésével. A BÉT részvényszekciójának így egy, a szélességében és mélységében nála nagyságrendekkel jelentősebb konkurenssel versenyezve kellett kihasítania a maga szeletét az eszközárak módosulásának hatására mozgásba lépő —egyébként nem éppen óriási mennyiségű— amerikai portfólió-tőkéből. A forintnak az euróhoz történő mind szorosabb hozzákötése[39] kapcsán ez a konkurencia immár állandósulni fog, akárcsak a HUF/USD árfolyamnak az USD/EUR árfolyam általi meghatározottsága. A jövőben ezért mind kevésbé lehet a BUX számára kedvező impulzusokat remélni a forintnak a dollárral szembeni gyengülésétől. Ez pedig a két változó korrelációjának a jövőbeni gyengülését vetíti előre.

A forintnak a dollárral szembeni erősödése[40] viszont kedvező alkalmat kínál az amerikai befektetők számára Magyarországon birtokolt részvénypozícióik hozamának realizálásához, és tőkéjük (legalább részleges) nemzetközi újraallokálásához. A részvényeladások és devizavásárlások ebben az esetben

[37]Mivel a forintban denominált egyéb eszközök dollárban vett árai is csökkennek, ezért persze az a valószínűbb, hogy a forint kereslete, és ezzel az USD/HUF árfolyam is nőni fog.

[38]A dollár erősödésének okát (szinte teljes a szakma egyetértése, pl. ECB 2000/11) a kedvezőbbnek tekintett amerikai (értékpapír-) befektetési lehetőségek által kiváltott tőkemozgásokban szokás keresni. Mellesleg ez lényegében egybevág a monetarista árfolyamelmélet azon tézisével, miszerint az árfolyammozgások mozgatórugóját a pénzügyi piacok állományi egyensúlytalanságai szolgáltatják. Vö. Schepp et al. (2000, 388.o.)

[39]A monetáris integráció nem csak a sávos árfolyamrögzítés ex post módszerén keresztül valósulhat meg, hanem a monetáris (és kisebb részt a fiskális) politika konvergenciája, mintegy ex ante árfolyam-szabályozás révén is.

[40]Aminek kiváltó oka megint csak döntően az USD/EUR árfolyamban bekövetkezett változás (növekedés) lehet.

a BUX- és az USD/HUF árfolyam hozama közötti kapcsolat szorosságának erősödését (a korreláció pozitív irányba történő elmozdulását) vetítik előre. Az legalábbis elgondolkodtató, hogy 2000 novemberének elején napra pontosan ugyanakkor kezdődött el az euró (és vele a forint) dollárral szembeni „rehabilitációja", valamint a BUX azóta is tartó gyengülése. Akár az iméntieket, akár az előző bekezdésben leírtakat alátámaszthatjuk azzal a ténnyel is, hogy a BUX változásának korreláltsága az európai tőzsdeindexek változásával 1999-ről 2000-re jelentősen emelkedett, miközben az a DJI-vel szemben szinte változatlan maradt[41] *(7. táblázat)*.

Korreláció	BUX/DJI	BUX/DAX	BUX/CAC 40	BUX/WIG
1999	0,17	0,19	0,37	0,41
2000	0,18	0,25	0,49	0,51

7. táblázat

A devizapiac oldaláról kibontakozó hatásokat a fentiek szerint tehát szintén két pontban lehet összefoglalni:

- Az euró dollárral szembeni gyengülésétől a BUX és USD/HUF hozamok korreláltságának inkább a csökkenését;
- Az USD/EUR árfolyam növekedésétől pedig inkább a korreláció erősödését lehet várni.

Talán sikerült a bemutatottakkal érzékeltetni, hogy a tőzsdeindex és az árfolyam közötti kapcsolat szorosságát jelző korrelációs érték milyen bonyolult összefüggésrendszer keretében határozódik meg. Hiba és túlzott elbizakodottság volna ezért annak jövőbeni alakulásával kapcsolatban bármilyen explicit előrejelzést, vagy akárcsak hipotézist is megfogalmazni. Annak hiányában pedig az amerikai befektetők BÉT-en birtokolt részvénypozícióinak jövőbeni devizakockázatáról sem mondhatunk semmi biztosat. Az elvégzett vizsgálatok alapján annyit azonban kijelenthetünk: *az árfolyamrezsim változása a keresztárfolyamok indukálta hozamváltozásoknak a korrelációkra gyakorolt hatása révén legalább annyira érinti a devizakockázatot, mint a primer árfolyamkockázati hatáson keresztül.*

Mindenesetre merész várakozás lenne éppen az amerikai befektetőktől remélni a BÉT ismételt fellendítését. Talán több eséllyel kecsegtetne, ha az ebben érdekeltek[42] inkább az európai befektetők figyelmét próbálnák ráirányítani a budapesti részvénypiacra. Azok ugyanis épp mostanság kezdik el (a technológiai piacokból való —nézetem szerint időlegesen— „kiábrándulásuk" okán) újra felfedezni saját másod-, illetve harmad-vonalbeli cégeik részvényeit. Azokkal pedig a BÉT legfontosabb papírjai is több reménnyel lehetnek képesek konkurálni. Az első lépések pedig már megtörténtek annak

[41] A táblázat az indexváltozások korrelációs együtthatóit tartalmazza. A DJI esetében a T-1, a többi indexnél a T napi árváltozásokhoz viszonyítva a BUX T napi változásait. (Forrás: BÉT éves jelentés 1999, 2000)

[42] Gondolhatunk pl. a tőzsdetagokra, a BÉT választott képviselőire, a bevezetett cégekre, vagy akár a kormányra.

igazolására, hogy az európai befektetők számára a magyar részvényekre is kiterjedő portfólió-diverzifikáció a kockázat tolerálható mértékű növekedése mellett kecsegtet hozamnövelő esélyekkel.[43] Az ő esetükben az árfolyamkockázat már ma is jóval csekélyebb.[44] Azért persze mindezt kommunikálni is illene feléjük. Méghozzá hatékonyan ...

Függelék: az USD/HUF hozam származtatása a devizakosár képletéből

A tárgynapi hivatalos HUF/USD árfolyam 1999-ben a következő módon került kiszámításra:

$$\left(\frac{\mathrm{HUF}}{\mathrm{USD}}\right)_1 = \left(\frac{\mathrm{HUF}}{\mathrm{USD}}\right)_0^{0.3} \cdot \left[\left(\frac{\mathrm{HUF}}{\mathrm{EUR}}\right)_0 \cdot \left(\frac{\mathrm{EUR}}{\mathrm{USD}}\right)_1\right]^{0.7} \cdot (1+\alpha)$$

Az alsó index a tárgy, ill. bázisnapot, α a leértékelés napi mértékét jelöli. Logaritmizálva:

$$\ln\left(\frac{\mathrm{HUF}}{\mathrm{USD}}\right)_1 = 0.3\ln\left(\frac{\mathrm{HUF}}{\mathrm{USD}}\right)_0 + 0.7\left[\ln\left(\frac{\mathrm{HUF}}{\mathrm{EUR}}\right)_0 + \ln\left(\frac{\mathrm{EUR}}{\mathrm{USD}}\right)_1\right] + \\ + \ln(1+\alpha)\,.$$

Az adott napi árfolyamváltozásban megtestesülő folytonos hozam (amit a korábbi jelölésekkel összhangban $-R_F$-fel jelölünk, mert a forint dollárban vett hozamának az ellentettje!):

$$-R_F = \ln\left(\frac{\mathrm{HUF}}{\mathrm{USD}}\right)_1 - \ln\left(\frac{\mathrm{HUF}}{\mathrm{USD}}\right)_0$$

A hozam képletébe helyettesítve, majd ekvivalens átalakításokat végrehajtva:

$$\begin{aligned} -R_F &= 0.3\ln\left(\frac{\mathrm{HUF}}{\mathrm{USD}}\right)_0 - \ln\left(\frac{\mathrm{HUF}}{\mathrm{USD}}\right)_0 + \\ &\quad + 0.7\left[\ln\left(\frac{\mathrm{HUF}}{\mathrm{EUR}}\right)_0 + \ln\left(\frac{\mathrm{EUR}}{\mathrm{USD}}\right)_1\right] + \ln(1+\alpha) = \\ &= 0.7\left[\ln\left(\frac{\mathrm{HUF}}{\mathrm{EUR}}\right)_0 - \ln\left(\frac{\mathrm{HUF}}{\mathrm{USD}}\right)_0 + \ln\left(\frac{\mathrm{EUR}}{\mathrm{USD}}\right)_1\right] + \ln(1+\alpha)\,. \end{aligned}$$

A szögletes zárójel első két tagjára alkalmazva a keresztárfolyam-összefüggést:

$$-R_F = 0.7\left[\ln\left(\frac{\mathrm{USD}}{\mathrm{EUR}}\right)_0 + \ln\left(\frac{\mathrm{EUR}}{\mathrm{USD}}\right)_1\right] + \ln(1+\alpha)\,.$$

---

[43] Vö. Bugár-Maurer (1999)

[44] Az EUR/HUF-ban megtestesülő árfolyamkockázat 1999-ben 4.82%-kos, 2000-ben mindössze 1.39%-kos volt!

Mindkét oldalt −1-gyel szorozva és felhasználva a $\ln(1/x) = -\ln(x)$ azonosságot

$$R_F = 0.7\left[\ln\left(\frac{\text{USD}}{\text{EUR}}\right)_1 - \ln\left(\frac{\text{USD}}{\text{EUR}}\right)_0\right] - \ln(1+\alpha)\ ,$$

amiből a (10) közvetlenül adódik.

Irodalom

1. Buckley: *Bevezetés a nemzetközi pénzügyekbe* (Panem, 1998);
2. Bugár–Maurer: Performance of international portfolio diversification strategies: the viewpoint of german and hungarian investors (in *Kredit und Kapital* 1999/4, 581–609. o.);
3. Darvas: Csúszó árfolyamrendszerek (*MNB Műhelytanulmányok* 16. 1998);
4. Drummen–Zimmermann: Portfolioeffekte des Währungsrisikos (in *Finanzmarkt und Portfolio Management*, 1992/1, 81–102. o.);
5. Schepp: Nemzetközi pénzügyi kapcsolatok (in Madár–Schepp–Szabó–Szebellédi–Zeller: *Pénzügyek alapjai*, BGF-Unió-Finance, 2000, 349–479. o.);
6. Steiner–Bruns: *Wertpapiermanagement* (Schäffer-Poeschel 1998);
7. Budapesti Értéktőzsde: Éves jelentések 1999-2000;
8. Európai Központi Bank: Havi jelentés 2000/11;
9. Magyar Nemzeti Bank: Éves jelentések 1996-1999;
10. Magyar Nemzeti Bank: Havi jelentés 2001/2;
11. Magyar Nemzeti Bank: Jelentés az infláció alakulásáról 2000/3;
12. Magyar Nemzeti Bank: Jelentés a pénzügyi stabilitásról 2001/1;
13. Adatok: www.akk.hu, www.bet.hu, www.iridium.hu, www.mnb.hu

DOLLAR INVESTORS IN HUNGARY,
CURRENCY RISK OF FORINT DENOMINATED STOCKS

This paper discusses the currency risk of dollar investors in the Hungarian stock market. First according to Drummen/Zimmermann it separates the categories of currency risk and FX market risk, than it presents that between 1996 and 2000, in case of dollar investments in BUX the currency risk was so minimal that it did not make any sense to hedge. During the analysis it became clear that the correlation between BUX and the USD/HUF exchange rate is weak and unstable. Analyzing the effects of changes in the exchange rate regime the author has come to the conclusion that the yield changes generated by the USD/EUR cross rate are minimum as important in the currency risk of stakeholders as the primary FX market risk effects.

FOGALMAK, MÓDSZEREK

RÖVID MEGJEGYZÉS EGY NYUGDÍJMODELLEZÉSBEN GYAKRAN ALKALMAZOTT FELTÉTELEZÉSHEZ[1]

BOD PÉTER
MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutató Intézet

Minden komplex folyamat modellezésénél óhatatlanul szukség van különböző egyszerűsítő feltevések bevezetésére. Csak így ábrázolhatók a vizsgált rendszer lényeges összefüggései. Ugyanakkor ezek természetesen befolyásolják az egyszerűsítésekre épülő modell eredményeit. Ezért nem rossz, ha képet tudunk alkotni legalább az így érvényesülő befolyások irányáról.

Öregségi nyugdíjrendszerek modellezésénél elterjedt az alábbi egyszerűsítő feltételezés:

Minden biztosított meghatározott fix életkorban vonul nyugdíjba és nyugdíját a rögzített nyugdíjkorhatártól hátralevő várható élettartamnak megfelelő ideig élvezi — utána mindenki meghal.

A Világbank szakértői által 1994-ben kiadott "Averting old age crisis..." című pamflet szerzői erre a feltételezésre alapozták meggondolásaikat, hozzávéve még azt is, hogy mindenki azonos életkorban lép be a biztosításba és nyugdíjazásáig járulékot fizet. A hivatkozott feltételezés megjelenik több hazai szerző munkájában is.

Az alábbiakban azt szeretném bemutatni, hogy rögzített és időben állandó számítási alapok mellett egy x éves korban induló évi egységnyi utólagos életjáradék induláskori tőkeértéke *kisebb*, mint egy olyan bankjáradéknak az induláskori értéke, amely a nyugdíkorhatárkor várható hátralevő élettartamon át kerül évi egységnyi nagyságban utólag kifizetésre.

Alkalmazzuk az alábbi jelöléseket:

i: az egységnyi tőke éves kamata

$(1+i)$: kamattényező

$v = 1/(1+i)$: leszámítolási tényező

$d = 1 - v = iv$: az egységnyi tőke éves diszkontja

l_x: az alkalmazott kiválási rend szerint x-edik születésnapjukat megélők száma

[1] Beérkezett: 2001. március 4.

p_x: x éves biztosított egy éves túlélésének a valószínűsége

$q_x = 1 - p_x$: x éves biztosított egy éves halálozási valószínűsége

$d_x = l_x - l_{x+1} = l_x q_x$: x éves korban elhaltak száma

$e_x = (1/l_x)[l_{x+1} + l_{x+2} + \ldots + l_\omega]$: x éves korban hátralevő várható élettartam

a_x: az x éves korban induló, évi egységnyi, utólagos életjáradék induláskori tőkeértéke

$a_{\overline{n}|} = (1 - v^n)v/(1 - v) = (1 - v^n)/i$: az n éven át futó, évi egységnyi utólagos bankjáradék induláskori tőkeértéke

Az utólagosan fizetendő évi egységnyi életjáradék induláskori tőkeértéke értelem szerint

$$a_x = vp_x + v^2 p_x p_{x+1} + v^3 p_x p_{x+1} p_{x+2} + \ldots$$

Vegyük észre, hogy ha a túlélési valószínűség az életkor csökkenő függvénye, akkor

$$a_x < vp_x + (vp_x)^2 + (vp_x)^3 + \ldots < \frac{vp_x}{1 - vp_x} = \frac{p_x}{q_x + i}$$

Ha $i = 0$, akkor a hátralevő várható élettartamra kapunk egy felső becslést:

$$e_x < \frac{p_x}{q_x}$$

Tekintsük ezek után a leszámítolási tényező hatványait:

$$v,\ v^2,\ v^3,\ \ldots$$

és rendeljünk hozzájuk súlyokat:

$$d_x,\ d_{x+1},\ d_{x+2},\ \ldots$$

Majd állítsuk elő a leszámítolási tényezők súlyozott számtani és mértani közepeit. Vegyük észre, hogy a súlyok összege

$$\sum_{t=0}^{\omega} d_{x+t} = l_x$$

A súlyozott számtani közép:

$$\frac{1}{l_x} \cdot (vd_x + v^2 d_{x+1} + v^3 d_{x+2} + \ldots) =$$

$$= \frac{1}{l_x} \cdot \left(v(l_x - l_{x+1}) + v^2(l_{x+1} - l_{x+2}) + v^3(l_{x+2} - l_{x+3}) + \ldots\right) =$$

$$= v(1 + a_x) - a_x = 1 - d(1 + a_x)$$

Vegyük észre, hogy a szóban levő átlag egyben az x éves korban kötött egységnyi haláleseti biztosítás tőkeértéke, amit szokás A_x szimbólummal jelölni.

A fenti mennyiségek azonos súlyokkal vett mértani átlaga:

$$v^{d_x+2d_{x+1}+3d_{x+2}+\dots} = v^{1+e_x} .$$

Alkalmazzuk a bankjáradék tőkeértékének a formuláját $n = e_x$-re:

$$a_{\overline{e_x}|} = \frac{1-v^{e_x}}{i} = \frac{v-v^{1+e_x}}{vi}$$

$$v^{1+e_x} = v - via_{\overline{e_x}|} = v(1-ia_{\overline{e_x}|}) = v - da_{\overline{e_x}|} = 1 - d(1+a_{\overline{e_x}|})$$

Minthogy a számtani közép nagyobb, mint a mértani:

$$1 - d(1+a_x) > 1 - d(1+a_{\overline{e_x}|}) .$$

Ezért

$$a_{\overline{e_x}|} > a_x .$$

Irodalom

1. Berger, A.: *Mathematik der Lebensversicherung.* 17.par. Wien. 1939. Verlag von Julius Springer.
2. Bod P. Mennyibe kerül egy társadalombiztosítási nyugdíjrendszer működtetése? *Közgazdasági Szemle* 1992. 2-3.

SHORT REMARK CONCERNING A USUAL ASSUMPTION IN MODELING PENSION SYSTEMS

The following assumption is usual in modeling old age retirement systems: "everybody is retiring at the same predetermined age and gets pension during a period which equals to his/her expected remaining lifetime". The author draws the attention to the fact that the present value of a life annuity beginning at age x is less than the present value of an annuity running e_x years, where e_x denotes the remaining lifetime at age x. Consequently, the application of the assumption cited above overestimates the cost of the pensions.

PÉNZ- ÉS TŐKEPIACI IDŐSOROK SZTOCHASZTIKUS VOLATILITÁS MODELLJEI[1]

VARGA JÓZSEF
PTE Közgazdaságtudományi Kar

Ebben a dolgozatban az idősorok sztochasztikus volatilitás modelljeivel kapcsolatos fontosabb fogalmakat foglaljuk össze a teljesség igénye nélkül. Tárgyaljuk az ARCH folyamatok általánosítását, módosított változatait, továbbá foglalkozunk az ARCH folyamatoknak az eszköz értékelési elméletben betöltött szerepével.

Bevezetés

Pénz- és tőkepiaci idősorok statisztikai módszerekkel történő elemzésekor célszerű az $(x_1, x_2, \ldots, x_T)$ megfigyelt idősort valamely sztochasztikus folyamat egy realizációjának tekinteni. Ezt a realizációt általában az $\{x_t\}_1^T$ szimbólummal jelöljük, míg maga a sztochasztikus folyamat egy alkalmas valószínűségi mezőn értelmezett valószínűségi változók $\{X_t\}_{-\infty}^{\infty}$ együttese. Általában elegendő az indexhalmazt a $\mathcal{T} = (\infty, T)$ halmazra korlátozni, továbbá, ha nem okoz félreértést, akkor mind a generáló sztochasztikus folyamat, mind pedig a realizációja jelölésére az x_t szimbólumot szokás alkalmazni. Ezekkel a megállapodásokkal a sztochasztikus folyamat leírható egy T-dimenziós valószínűség-eloszlással, és a realizáció valamint a sztochasztikus folyamat közötti kapcsolat hasonló a minta és a populáció klasszikus statisztikában megismert kapcsolatához. A valószínűség-eloszlás teljes meghatározása helyett megelégszünk az első- és másodrendű momentumok, vagyis az

$$\mathrm{E}(x_1), \mathrm{E}(x_2), \ldots, \mathrm{E}(x_T)$$

várható értékek, a

$$\mathrm{Var}(x_1), \mathrm{Var}(x_2), \ldots, \mathrm{Var}(x_T)$$

varianciák, és a $T(T-1)/2$ számú

$$\mathrm{Cov}(x_i, x_j), \quad i < j$$

kovariancia meghatározásával. Ha feltételezhető az együttes normális eloszlás, akkor ezek a momentumok teljesen meghatározzák a sztochasztikus folyamat tulajdonságait. Ha a normalitásra vonatkozó feltételezés nem helytálló, de lineárisnak tekinthető a folyamat olyan értelemben, hogy a folyamat jelenlegi értékét korábbi értékeinek és más vele kapcsolatban álló folyamat jelenlegi és múltbeli értékeinek lineáris kombinációja generálja, akkor ezek a

[1]Beérkezett: 2001. január 24.

momentumok szintén meghatározzák a folyamat fő tulajdonságait. A folyamat összes első- és másodrendű momentumának meghatározása (becslése) azonban mindkét esetben lehetetlen, mivel T számú megfigyelés (egyetlen realizáció) áll rendelkezésre a $T + T(T+1)/2$ számú ismeretlen paraméter meghatározására. Ezért további egyszerűsítő feltételezésekkel kell élnünk az ismeretlen paraméterek számának csökkentésére.

Figyelembe kell vennünk, hogy az együttes eloszlás ismeretlen paramétereinek egyetlen realizációból történő meghatározása csak akkor megalapozott, ha a folyamat *ergodikus*, ami nagy vonalakban fogalmazva azt jelenti, hogy a minta alapján becsült momentumok közelítik a populáción alapuló megfelelő momentumokat, ha a realizáció hossza minden határon túl nő. Mivel pedig *az ergodicitás fennállását egyetlen realizáció alapján nem ellenőrizhetjük*, a továbbiakban feltesszük, hogy minden vizsgálandó idősor rendelkezik ezzel a tulajdonsággal.

Az egyik fontos egyszerűsítő feltételezés az idősor *stacionaritása*, amely esetben a folyamat egy bizonyos *statisztikai egyensúlyban van.* Szigorú értelemben akkor mondjuk stacionáriusnak a sztochasztikus folyamatot, ha tulajdonságait nem befolyásolja az időtengely origójának megváltoztatása, másképpen fogalmazva, ha az együttes eloszlás bármely $t_1, t_2, \ldots, t_n$ időpont-együttes esetében megegyezik a $t_1+k, t_2+k, \ldots, t_n+k$ időpontokhoz tartozó együttes eloszlással, ahol k tetszőleges időeltolás (késleltetés). Az $n = 1$ esetben ez azt jelenti, hogy a peremeloszlások nem függnek az időtől, ami viszont azzal jár, hogy ha $\mathrm{E}(|X_t|^2) < \infty$, akkor mind a várható érték, mind pedig a szórás állandó, azaz

$$\mathrm{E}(x_1) = \mathrm{E}(x_2) = \ldots = \mathrm{E}(x_T) = \mathrm{E}(x_t) = \mu$$

és

$$\mathrm{Var}(x_1) = \mathrm{Var}(x_2) = \ldots = \mathrm{Var}(x_T) = \mathrm{Var}(x_t) = \sigma_x^2 \,.$$

Az $n = 2$ esetben a szigorú stacionaritás következményeként az összes kétváltozós eloszlás független az időtől, így az összes kovariancia csak a k késleltetéstől függ, vagyis

$$\mathrm{Cov}(x_1, x_{1+k}) = \mathrm{Cov}(x_2, x_{2+k}) = \ldots = \mathrm{Cov}(x_{T-k}, x_T) = \mathrm{Cov}(x_t, x_{t-k}) \,.$$

Ezért az autokovarianciát, illetve az autokorrelációt a következőképpen értelmezzük:

$$\gamma_k = \mathrm{Cov}(x_t, x_{t-k}) = \mathrm{E}\big((x_t - \mu)(x_{t-k} - \mu)\big)$$

és

$$\rho_k = \frac{\mathrm{Cov}(x_t, x_{t-k})}{\big(\mathrm{Var}(x_t) \cdot \mathrm{Var}(x_{t-k})\big)^{1/2}} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} \,.$$

Az autokovariancia és az autokorreláció is csak a k késleltetéstől függ. Mivel ezek a feltételek a folyamatnak csak az első, illetve másodrendű momentumait tartalmazzák, ezt a stacionaritást *másodrendű* vagy *gyenge stacionaritásnak* nevezzük. Az autokorrelációkat, mint a k késleltetés függvényét *autokorreláció függvénynek* is nevezik.

Az idősorelemzés alapvető tétele (Wold-dekompozíció) szerint minden gyengén stacionárius, tisztán nemdeterminisztikus $(x_t - \mu)$ sztochasztikus folyamat kifejezhető korrelálatlan valószínűségi változók lineáris kombinációjaként. (Tisztán nemdeterminisztikusnak akkor mondjuk a folyamatot, ha $(x_t - \mu)$ egyetlen lineárisan determinisztikus komponenst sem tartalmaz.)

A lineáris kombináció vagy lineáris filter értelmezés:

$$x_t - \mu = a_t + \psi_1 \cdot a_{t-1} + \psi_2 \cdot a_{t-2} + \ldots = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \cdot a_{t-j}\,, \quad \psi_0 = 1\,.$$

Az $\{\, a_t \,:\, t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \}$ korrelálatlan valószínűségi változók sorozata, amelynek elemeit az *idősor innovációinak* nevezzük, és egy rögzített eloszlásból származó változóknak tekintjük őket, továbbá feltesszük, hogy

$$\mathrm{E}(a_t) = 0, \qquad \mathrm{Var}(a_t) = \mathrm{E}(a_t^2) = \sigma^2 < \infty$$

és

$$\mathrm{Cov}(a_t, a_{t-k}) = \mathrm{E}(a_t a_{t-k}) = 0, \quad \forall k \neq 0\,.$$

Egy ilyen tulajdonságú sorozatot *fehér zaj folyamatnak* nevezünk, és jelölésére általában az $a_t \sim WN(0, \sigma^2)$ szimbólumot alkalmazzuk. A lineáris filter értelmezésben szereplő együtthatókat az irodalomban ψ súlyoknak nevezik.

Az idősor nem-lineáris jellegének modellbe foglalása úgy történhet a legegyszerűbben, hogy megengedjük a folyamat varianciájának, vagy feltételes varianciájának bizonyos diszkrét időpontokban való megváltozását, vagy folytonos változását. A stacionárius folyamat varianciája állandó ugyan, de bizonyos feltételes varianciái változhatnak.

Az x_t nem lineáris stacionárius folyamat $\mathrm{Var}(x_t)$ varianciája minden t időpontban állandó, a $\mathrm{Var}(x_t | x_{t-1}, x_{t-2}, \ldots)$ feltételes variancia azonban függ a folyamat megfigyelt értékeitől, ezért periódusról periódusra változhat.

1 Sztochasztikus volatilitás modellek

Tegyük fel, hogy az $\{x_t\}_1^t$ sorozatot az

$$x_t = \mu + \sigma_t U_t \tag{1}$$

szorzatfolyamat generálta, ahol U_t egy standardizált folyamat, vagyis $\mathrm{E}(U_t) = 0$ és $\mathrm{Var}(U_t) = 1$ minden t időpontban, σ_t pedig olyan pozitív valószínűségi változókból álló sorozat, amelyre $\mathrm{Var}(x_t | \sigma_t) = \sigma_t^2$. Tehát σ_t az x_t feltételes szórása. Általában feltételezik, hogy $U_t = (x_t - \mu)/\sigma_t$ normális eloszlású és független a σ_t-től. A továbbiakban feltesszük, hogy U_t szigorú értelemben vett fehér zaj folyamat. Megmutatható, hogy az (1) egyenlet a

$$\frac{dP}{P} = d(\log P) = \mu\, dt + \sigma\, dW$$

sztochasztikus differenciálegyenlet megoldásának diszkrét idejű közelítése, ahol $x_t = \Delta \log P_t$, $W(t)$ pedig a standard Wiener-folyamat. Ez az ún.

diffúzió folyamat, amelyet a finanszírozás-elméleti modellekben eszközértékelésre alkalmaznak.

A fenti feltételekből következően x_t várható értéke μ, varianciája

$$\mathrm{E}(x_t-\mu)^2=\mathrm{E}(\sigma_t^2U_t^2)=\mathrm{E}(\sigma_t^2)\,\mathrm{E}(U_t^2)=\mathrm{E}(\sigma_t^2)\ ,$$

az autokovariancia függvény pedig

$$\mathrm{E}\big((x_t-\mu)(x_{t-k}-\mu)\big)=\mathrm{E}(\sigma_t\sigma_{t-k}U_tU_{t-k})=\mathrm{E}(\sigma_t\sigma_{t-k}U_t)\,\mathrm{E}(U_{t-k})=0\ ,$$

vagyis fehér zaj. Vegyük észre, hogy az $S_t=(x_t-\mu)^2$ négyzetes és az $M_t=|x_t-\mu|$ abszolút eltérés autokorrelált lehet. Például a négyzetes eltérésre fennáll

$$\mathrm{Cov}(S_t,S_{t-k})=\mathrm{E}\big((S_t-\mathrm{E}(S_t))(S_{t-k}-\mathrm{E}(S_{t-k}))\big)=\mathrm{E}(S_tS_{t-k})-\big(\mathrm{E}(S_t)\big)^2=$$
$$\mathrm{E}(\sigma_t^2\sigma_{t-k}^2)\mathrm{E}(U_t^2U_{t-k}^2)-\big(\mathrm{E}(\sigma_t^2)\big)^2=\mathrm{E}(\sigma_t^2\sigma_{t-k}^2)-\big(\mathrm{E}(\sigma_t^2)\big)^2\ ,$$

és így az S_t k késleltetésű autokorrelációja

$$\rho_{k,S}=\frac{\mathrm{E}(\sigma_t^2\sigma_{t-k}^2)-\big(\mathrm{E}(\sigma_t^2)\big)^2}{\mathrm{E}(\sigma_t^4)-\big(\mathrm{E}(\sigma_t^2)\big)^2}\ .$$

Ezek után felmerül a kérdés, hogy milyen modell lehet alkalmas a σ_t feltételes szórás leírására? Nyilvánvaló, hogy normális eloszlás nem jöhet szóba, mivel pozitív valószínűségi változókból álló sorozatról van szó, de mert σ_t eloszlása valószínűleg jobb oldali ferdeségű, ezért a lognormális eloszlás megfelelő választásnak tűnik. Legyen

$$h_t=\log\sigma_t^2=\gamma_0+\gamma_1h_{t-1}+\eta_t\ , \tag{2}$$

ahol $\eta_t\sim NID(0,\sigma_\eta^2)$ (független azonos normális eloszlású, zérus várható értékkel és σ_η^2 varianciával) és független az U_t folyamattól. A h_t szokásos értelmezés szerint a véletlen és nem egyenletes új információnak a pénz- és tőkepiacokra történő beáramlását reprezentálja. (ld. Clark (1973), Tauchen és Pitts (1983)). Ezzel

$$x_t=\mu+U_t\exp(h_t/2)\ .$$

Felhasználva, hogy U_t mindig stacionárius, azt kapjuk, hogy x_t akkor és csak akkor (gyenge értelemben) stacionárius, ha h_t is az, ez pedig a $|\gamma_1|<1$ esetben teljesül. Ezzel a feltételezéssel, valamint a lognormális eloszlás tulajdonságainak a felhasználásával belátható, hogy x_t és S_t minden páros rendű, az

$$\mathrm{E}\big((x_t-\mu)^r\big)=\mathrm{E}\big((S_t)^{r/2}\big)=\mathrm{E}(U_t^r)\mathrm{E}\big(\exp(rh_t/2)\big)=$$
$$\frac{r!}{2^{r/2}(r/2)!}\exp(r\mu_h/2+r\sigma_h^2/4)$$

összefüggéssel meghatározott momentuma létezik, ahol

$$\mu_h = \mathrm{E}(h_t) = \frac{\gamma_0}{1-\gamma_1} \qquad \text{és} \qquad \sigma_h^2 = \mathrm{Var}(h_t) = \frac{\sigma_\eta^2}{1-\gamma_1^2} \, .$$

A páratlan rendű momentumok mind zérussal egyenlőek. A momentumokkal meghatározott csúcsosság vagy kurtózis mérték

$$\frac{\mathrm{E}(S_t^2)}{(\mathrm{E}(S_t))^2} = \frac{\mathrm{E}(x_t-\mu)^4}{(\mathrm{E}(x_t-\mu)^2)^2} = 3\exp(\sigma_h^2) > 3 \, ,$$

ami azt jelenti, hogy a folyamat vastagabb farokrészekkel jellemezhető, mint a normális eloszlás. Az S_t autokorreláció függvényének meghatározásához vegyük figyelembe, hogy

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(S_t S_{t-k}) = \mathrm{E}(\sigma_t^2\sigma_{t-k}^2) = \mathrm{E}(\exp h_t \cdot \exp h_{t-k}) = \mathrm{E}\left((\exp(h_t + h_{t-k})\right) = \\ \exp\left((\mu_h+\sigma_h^2)+(\mu_h+\gamma_1^k\sigma_h^2)\right) = \exp\left(2\mu_h + \sigma_h^2(1+\gamma_1^k)\right) \, .\end{aligned}$$

Ezzel a k késleltetésű autokovariancia

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(S_t, S_{t-k}) = \exp\left(2\mu_h + \sigma_h^2(1+\gamma_1^k)\right) - \exp(2\mu_h+\sigma_h^2) = \\ \exp(2\mu_h+\sigma_h^2)\left(\exp(\sigma_h^2\gamma_1^k)-1\right) \, ,\end{aligned}$$

az autokorreláció pedig

$$\rho_{k,S} = \frac{\exp(\sigma_h^2\gamma_1^k)-1}{3\exp(\sigma_h^2)-1} \, .$$

Az (1) logaritmusát véve a négyzetes eltérésre

$$\log S_t = h_t + \log U_t^2 = \mu_h + \frac{\eta_t}{1-\gamma_1 B} + \log U_t^2$$

adódik, ez pedig azt mutatja, hogy $\log S_t \sim ARMA(1,1)$, de az átlagtól való eltérések nem normális eloszlásúak. Ha az U_t normális eloszlású, akkor $\log U_t^2$ várható értéke -1.27, a varianciája pedig 4.93, és az eloszlás nagyon hosszú bal oldali farokrésszel rendelkezik, ez pedig annak a következménye, hogy zérushoz nagyon közeli számok logaritmusait vesszük. A $\log S_t$ autokorreláció függvénye

$$\rho_{k,\log S} = \frac{\gamma_1^k}{1+4.93/\sigma_h^2} \, .$$

Előfordulhat, hogy az S_t bizonyos értékei zérussal egyenlőek, ezeknek pedig nem vehetjük a logaritmusát. Ennek a problémának a kiküszöbölésére a Koopman és szerzőtársai által javasolt

$$\log S_t \approx \log(S_t + c\cdot s_S^2) - \frac{c\cdot s_S^2}{S_t - c\cdot s_S^2}$$

transzformációt szokás alkalmazni, ahol s_S^2 az S_t minta alapján becsült varianciája, c pedig egy kis szám, amelyre Koopman és szerzőtársai a 0.02 értéket javasolják (Koopman et al. (1995)).

A sztochasztikus volatilitás (SV) modellek alkalmazásának legnagyobb nehézségét az jelenti, hogy a becslés rendkívül nehéz. A becslési módszerek egy része *maximum likelihood* módszer, amelyek igen intenzív számítógép alkalmazást igényelnek. Ilyen módszereket ismertet Shephard (1996). Kényelmesebb becslési módszer a *kvázi maximum likelihood* (QML) módszer, amelyről vázlatos leírás található Koopman et al. (1995) 7. fejezetében. Ez a becslési eljárás a Kalman filter módszert alkalmazza a σ_t^2 volatilitás becslésére.

2 ARCH folyamatok

Az x_t feltételes szórását meghatározó folyamatról feltettük korábban, hogy nem függ az x_t-től. Például a (2) AR(1) lognormális modellben σ_t az $\{\eta_t, \sigma_{t-1}, \sigma_{t-2}, \dots\}$ információ halmaztól függ. Most azt az esetet vizsgáljuk meg, amikor a feltételes szórás az x_t múltbeli értékeinek függvénye, vagyis

$$\sigma_t = \mathcal{I}(x_{t-1}, x_{t-2}, \dots) .$$

Abban az esetben például, amikor σ_t csak x_{t-1} függvénye,

$$\sigma_t = \mathcal{I}(x_{t-1}) = \left(\alpha_0 + \alpha_1(x_{t-1} - \mu)^2\right)^{1/2} , \tag{3}$$

ahol $\alpha_0 > 0$ és $\alpha_1 > 0$. Ha $U_t \sim NID(0,1)$ és független σ_t-től, akkor $x_t = \mu + U_t\sigma_t$ fehér zaj feltételes eloszlása normális eloszlás, vagyis

$$x_t | x_{t-1}, x_{t-2}, \dots \sim NID(\mu, \sigma_t^2)$$

és

$$\mathrm{Var}(x_t | x_{t-1}) = \alpha_0 + \alpha_1(x_{t-1} - \mu)^2 .$$

Ha $\alpha_1 < 1$, akkor a feltételes variancia

$$\mathrm{Var}(x_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1} ,$$

és x_t gyenge értelemben stacionárius. Az x_t negyedik momentuma véges, ha $3\alpha_1^2 < 1$ és ekkor a kurtózis

$$\frac{3(1 - \alpha_1^2)}{1 - 3\alpha_1^2} .$$

Ez az érték háromnál nagyobb, ezért az x_t feltétel nélküli eloszlása a normális eloszlásénál vastagabb farokrészű eloszlás. Ha ez a momentum feltétel nem teljesül, akkor az x_t^2 varianciája nem véges, ezért x_t^2 nem stacionárius (gyenge értelemben véve). Ezt a modellt Engle (1982) vezette be, és *elsőrendű autoregresszív feltételes heteroszkadasztikus* (ARCH(1)) folyamatként ismert. Az ARCH folyamatok a pénz- és tőkepiaci idősorok nem lineáris modelljeinek különösen népszerű osztályát alkotják. Ezt a népszerűséget számos publikáció jelzi, amelyek közül csak néhányat említünk. Engle és Bollerslev (1986), Bollerslev, Chou és Kroner (1992), Bera és Higgins (1993), Bollerslev, Engle és Nelson (1994).

Az ARCH(1) modell az $\varepsilon_t = x_t - \mu = U_t\sigma_t$ kényelmesebb jelöléssel a következő alakban írható:

$$\varepsilon_t | x_{t-1}, x_{t-2}, \ldots \sim NID(0, \sigma_t^2)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 \, .$$

Bevezetve a $\nu_t = \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2$ jelölést, a modell

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \nu_t$$

alakban is írható. Mivel $\mathrm{E}(\nu_t | x_{t-1}, x_{t-2}, \ldots) = 0$, a modell az ε_t^2 négyzetes eltérés AR(1) modellje. A hibák azonban nyilvánvalóan heteroszkedasztikusak, mivel $\nu_t = \sigma_t^2(U_t^2 - 1)$. Az ARCH(1) modell természetes módon adódó általánosítása az ARCH(q) folyamat, ahol (3)-at

$$\mathcal{I}(x_{t-1}, x_{t-2}, \ldots, x_{t-q}) = \left(\alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i (x_{t-i} - \mu)^2\right)^{1/2} \tag{4}$$

váltja fel, $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $1 \leq i \leq q$. A folyamat gyenge értelemben véve stacionárius, ha az ARCH paraméterek karakterisztikus egyenletének minden gyöke az egységkörön kívül esik, vagyis, ha $\sum_{i=1}^{q} \alpha_i < 1$. Ebben az esetben a feltétel nélküli variancia

$$\mathrm{Var}(x_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^{q} \alpha_i} \, .$$

A feltételes variancia függvény

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 \, .$$

A modellek gyakorlati alkalmazása során, ha a q nagy, a nem korlátozott becslési eljárás gyakran vezet az α_i paraméterekre kirótt nem-negativitási feltétel megsértésére. Ez a feltétel a σ_t^2 feltételes variancia pozitivitásának biztosításához szükséges. Néhány korai alkalmazásban ennek a feltételnek a biztosítására csökkenő késleltetési struktúrát alkalmaztak.

A modell rugalmasságának növelésére Bollerslev (1986, 1988) bevezette az általánosított ARCH (GARCH) modellt. A GARCH(p, q) folyamat feltételes variancia függvénye

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \sigma_{t-i}^2 = \alpha_0 + \alpha(B)\varepsilon_t^2 + \beta(B)\sigma_t^2 \, ,$$

ahol $p > 0$, $\beta_i \geq 0$, $1 \leq i \leq p$, $\alpha(B)$ és $\beta(B)$ a B késleltető operátor polinomjai. A GARCH(p,q) modell feltételes varianciájának egyértelmű meghatározottságához a megfelelő $\sigma_t^2 = \theta_0 + \theta(B)\varepsilon_t^2$ (ARCH(∞)) modell minden együtthatójának pozitívnak kell lennie. Abban az esetben, amikor $\alpha(B)$ és $\beta(B)$ nem rendelkezik közös gyökökkel és a $\beta(B)$ gyökei az egységkörön kívül helyezkednek el, ez a pozitivitási feltétel akkor és csak akkor teljesül, ha a $\theta(B) = \alpha(B)/(1-\beta(B))$ minden együtthatója nemnegatív. Ennek szükséges és elégséges feltételeiről Nelson és Cao (1992) dolgozatában olvashatunk. A

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1\sigma_{t-1}^2$$

GARCH$(1,1)$ folyamat esetében ezek a feltételek megkövetelik mindhárom paraméter nemnegativitását.

Ez a modell rendkívül népszerű a pénz-és tőkepiaci idősorok modellezése területén. A GARCH(p,q) folyamatnak a fentivel egyenértékű alakja

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + (\alpha(B) + \beta(B))\,\varepsilon_{t-1}^2 + \nu_t - \beta(B)\nu_{t-1}\,, \tag{5}$$

vagyis $\varepsilon_t^2 \sim$ ARMA(m,p), ahol $m = \max(p,q)$. Ez a folyamat akkor és csak akkor gyenge értelemben stacionárius, ha az $\alpha(B) + \beta(B)$ gyökei az egységkörön kívül helyezkednek el, vagyis, ha $\alpha(1) + \beta(1) < 1$. Ez a feltétel biztosítja, hogy ε_t is gyenge értelemben stacionárius. Mivel az ARCH folyamatok vastag farokrészekkel rendelkeznek, a gyenge stacionaritás feltételei gyakran szigorúbbak a szigorú stacionaritás feltételeinél. Megmutatható például, hogy ε_t és σ_t^2 a GARCH$(1,1)$ modellben akkor és csak akkor szigorúan stacionárius, ha

$$\mathrm{E}\left(\log(\beta_1 + \alpha_1 U_t^2)\right) < 0\,,$$

és ez teljesül például, ha $U_t \sim N(0,1)$, $\alpha_1 = 3$ és $\beta_1 = 0$, a gyenge stacionaritás feltételei ugyanakkor nem teljesülnek. Bougerol és Picard (1992) dolgozatában olvashatunk az általános eset, a GARCH(p,q) folyamat stacionaritási feltételeiről.

A stacionaritási feltételek körüli bonyodalmak vezettek a GARCH modellek volatilitás állandósága vagy volatilitás tartóssága (volatility persistence) fogalmának bevezetéséhez. Ha (5)-ben $\alpha(1)+\beta(1) = 1$, akkor az $\alpha(B)+\beta(B)$ polinomnak van egységgyöke. Ekkor a modellt integrált GARCH modellnek vagy IGARCH(p,q) modellnek nevezzük (Engle és Bollerslev (1986)). A pénz- és tőkepiaci idősorok esetében gyakran fordul elő, hogy $\alpha(1) + \beta(1)$ nagyon közel esik 1-hez, és ha ez teljesül, akkor egy idősori kilengésnek, várható értéktől való eltérésnek a feltételes varianciára irányuló hatása tartós olyan értelemben, hogy minden előrejelzés tekintetében lényeges marad.

Bollerslev et al. (1994) a GARCH modellek volatilitás állandóságának a fogalmát nem tartották megfelelőnek. Javasolták úgy módosítani a fogalmat, hogy a kilengések nem állandósulnak, ha σ_t^2 stacionárius olyan értelemben, hogy az $\mathrm{E}(\sigma_{t+s}^2|\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \ldots)$ feltételes várható érték konvergál az $\alpha_0/(1 - \alpha(1) - \beta(1))$ feltétel nélküli varianciához, ha $s \to \infty$. Másik definíció az előrejelzések momentumaira vonatkozó feltételt tartalmaz, amely szerint a kilengések akkor és csak akkor nem állandósulnak, ha valamely $\eta > 0$-ra teljesül, hogy az $\mathrm{E}(\sigma^{2\eta}_{t+s}|\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \ldots)$ feltételes várható érték konvergál egy, az $\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots$ sorozattól független véges számhoz. A volatilitás állandóság vizsgálatának eredménye sajnálatos módon attól is függhet, hogy melyik definíciót alkalmazzuk. Tekintsük például a

$$\sigma^2_{t+1} = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon^2_t + \beta_1 \sigma^2_t = \alpha_0 + \alpha_1 \sigma^2_t (U^2_t + \beta_1)$$

GARCH$(1,1)$ modellt, amelyre a módosított definícióban szereplő feltételes várható érték

$$\mathrm{E}(\sigma^2_{t+s}|\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \ldots) = \alpha_0 \sum_{k=0}^{s-1} (\alpha_1 + \beta_1)^k + \sigma^2_t (\alpha_1 + \beta_1)^s \, .$$

Belátható, hogy a feltételes várható érték akkor és csak akkor konvergál az $\alpha_0/(1-\alpha_1-\beta_1)$ feltétel nélküli varianciához, ha $\alpha_1 + \beta_1 < 1$. Az IGARCH modellben $\alpha_1 + \beta_1 = 1$, ekkor tehát a feltételes várható érték végtelenbe konvergál, ha $s \to \infty$, mivel ekkor

$$\mathrm{E}(\sigma^2_{t+s}|\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \ldots) = s \cdot \alpha_0 + \sigma^2_t \, .$$

Az IGARCH modell azonban szigorúan stacionárius, a szigorú stacionaritás esetében pedig $\mathrm{E}(\sigma^{2\eta}_{t+s}|\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \ldots)$ véges számhoz konvergál, ha $0 < \eta < 1$ (ld. Nelson (1990)). Ezekből az eredményekből arra következtethetünk, hogy bármely nyilvánvalóan jelenlevő volatilitás állandóság inkább az eloszlás vastag farokrészének a következménye, mint a nem-stacionaritás velejárója.

A volatilitás állandóság jellemezhető az *impulzus válasz együttható* (impulse response coefficient) segítségével is. A $\phi_1 = \alpha_1 + \beta_1$ jelölés bevezetésével a GARCH$(1,1)$ modell így írható:

$$(1 - \phi_1 B)\varepsilon^2_t = \alpha_0 + (1 - \beta_1 B)\nu_t \, ,$$

vagy

$$\Delta \varepsilon^2_t = (1 - B)(1 - \phi_1 B)^{-1}(1 - \beta_1 B)\nu_t = \Theta(B)\nu_t \, .$$

Az impulzus válasz együttható a $\Theta(B)$ késleltető polinomból határozható meg.

$$\Theta_0 = 1, \qquad \Theta_1 = \phi_1 - \beta_1 - 1, \qquad \Theta_j = (\phi_1 - \beta_1)(\phi_1 - 1)\phi_1^{j-2}, \quad j \geq 2 \, .$$

A kumulált impulzus válasz $\Theta_1 = 0$, mivel a $\Theta(B)$ polinomnak van egységgyöke, vagy másképpen

$$\sum_j \Theta_j = (\phi_1 - \beta_1)\phi_1^{j-1} \, ,$$

amely exponenciálisan konvergál zérushoz, ha $\phi_1 = \alpha_1 + \beta_1 < 1$. A $\phi_1 = \alpha_1 + \beta_1 = 1$ esetben azonban, amikor tehát IGARCH$(1,1)$ modellről van szó,

$$\Delta \varepsilon^2_t = \alpha_0 + (1 - \beta_1 B)\nu_t \, ,$$

$\sum_j \Theta_j = 1 - \beta_1 = \Theta(1) \neq 0$, ezért a volatilitás állandósága nem véges.

3 Módosított GARCH folyamatok

Feltételeztük ugyan, hogy ε_t feltételes eloszlása normális eloszlás, ez azonban nem lényeges feltétel. Például Bollerslev (1987) azt az esetet vizsgálta, amikor az eloszlás ismeretlen ν fokszámú standardizált t-eloszlás, és a fokszám a rendelkezésre álló adatokból becsülhető. A $\nu > 4$ esetben egy ilyen eloszlás leptokurtikus, ezért az eloszlás farokrészei vastagabbak a normális eloszlásénál.

Jorion (1988) a normális és a Poisson-eloszlás keverékét, Baillie és Bollerslev (1989) az exponenciális eloszlást, Hsieh (1989) normális és lognormális eloszlás keverékét, Nelson (1991) pedig az általánosított exponenciális eloszlást vizsgálta.

További módosításokat eredményezett, hogy az addig feltételezett kvadratikus kapcsolatnál rugalmasabb kapcsolatot engedtek meg a σ_t^2 és az ε_t között. Az egyszerűség kedvéért a

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \sigma_{t-1}^2 U_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \tag{6}$$

GARCH$(1,1)$ modell változatait tekintjük át.

Taylor (1986) és Schwert (1989) a feltételes szórás modellezését javasolták a variancia helyett. A modell:

$$\sigma_t = \alpha_0 + \alpha_1 |\varepsilon_{t-1}| + \beta_1 \sigma_{t-1} = \alpha_0 + \alpha_1 \sigma_{t-1} |U_{t-1}| + \beta_1 \sigma_{t-1} \, . \tag{7}$$

Itt a feltételes variancia az abszolút kilengések súlyozott átlagának négyzetgyöke. Ebből pedig az következik, hogy nagy kilengéseknek kisebb a hatása a feltételes varianciára, mint a standard GARCH modellben. A kilengésre adott nem szimmetrikus válasz explicit módon szerepel a

$$\log(\sigma_t^2) = \alpha_0 + \alpha_1 f(\varepsilon_{t-1}/\sigma_{t-1}) + \beta_1 \log(\sigma_{t-1}^2) \tag{8}$$

exponenciális GARCH (EGARCH) modellben, ahol

$$f(\varepsilon_{t-1}/\sigma_{t-1}) = \Theta_1 \varepsilon_{t-1}/\sigma_{t-1} + (|\varepsilon_{t-1}/\sigma_{t-1}| - \mathrm{E}(|\varepsilon_{t-1}/\sigma_{t-1}|)) \, .$$

Az $f(\cdot)$ *információ hatás függvény* a feltételes volatilitás újraértékelésével kapcsolatos, amely a $\log(\sigma_t^2)$ és az ε_{t-1} új információ közötti relációt írja le. Nem szimmetrikus választ tartalmaz, mivel $\partial f/\partial \varepsilon_{t-1} = \Theta_1 + 1$, ha $\varepsilon_{t-1} > 0$, és $\partial f/\partial \varepsilon_{t-1} = \Theta_1 - 1$, ha $\varepsilon_{t-1} < 0$. Láthatjuk azt is, hogy a volatilitás a minimumát veszi fel az $\varepsilon_{t-1} = 0$ esetben. Ez az aszimmetria hasznos, mert gyorsabb reagálást tesz lehetővé abban az esetben, amikor a piac hanyatlik, mint az erősödő piac esetében. Ez a *tőkeáttételi hatásként* ismert tényező rendkívül fontos több pénz- és tőkepiaci eszköz tekintetében. Könnyen igazolható, hogy $f(\varepsilon_{t-1})$ szigorú értelemben vett fehér zaj zérus várható értékkel és konstans varianciával, és így $\log(\sigma_t^2)$ ARMA$(1,1)$ folyamat, amely akkor stacionárius, ha $\beta_1 < 1$.

A (6), (7) és (8) feltételeket magában foglaló modell a nem-lineáris ARCH (NARCH) modell (ld. Higgins és Bera (1992)). A NARCH modell általános alakja

$$\sigma_t^\gamma = \alpha_0 + \alpha_1 f^\gamma(\varepsilon_{t-1}) + \beta_1 \sigma_{t-1}^\gamma \, .$$

Ennek egy változata a

$$\sigma_t^\gamma = \alpha_0 + \alpha_1 g^{(\gamma)}(\varepsilon_{t-1}) + \beta_1 \sigma_{t-1}^\gamma .$$

„küszöb" ARCH, (threshold ARCH, rövidített jelöléssel TARCH) modell, ahol

$$g^{(\gamma)}(\varepsilon_{t-1}) = \theta \cdot I(\varepsilon_{t-1} > 0) \cdot |\varepsilon_{t-1}|^\gamma + \theta \cdot I(\varepsilon_{t-1} \leq 0) \cdot |\varepsilon_{t-1}|^\gamma .$$

Az $I(\cdot)$ indikátor függvényt jelöl. A $\gamma = 1$ eset a Zakonian-féle TARCH modell (Zakonian (1994)), a $\gamma = 2$ eset pedig a Glosten, Jagannathan és Runkle (1993) által kidolgozott GJR modell, amelyben az új információra kvadratikus volatilitás válasz következik, és különböző együtthatókat tartalmaz a jó és rossz hírek súlyozására. Megőrzi ugyanakkor azt a tulajdonságot, hogy a volatilitás minimális, ha nincs új információ.

Ding, Granger és Engle (1993), majd Hentschel (1995) nagyon általános modell osztályt vezettek be. Engle (1996) aszimmetrikus ARCH (AARCH) modellje, valamint Sentana (1995) kvadratikus ARCH (QARCH) modellje

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \delta \varepsilon_{t-1} + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$

alakban írható, ahol negatív δ érték azt jelenti, hogy a jó hír, a kedvező információ kevésbé növeli a volatilitást, mint a rossz hír. A modellben ε_{t-1} második hatványa is szerepel, ezért ezek a modellek nem speciális esetei a Ding, Granger és Engle, valamint Hentschel által javasolt általános modell osztálynak.

A (6) GARCH(1, 1) modell formulába foglalásának egy másik lehetséges módja az $\alpha_0 = \omega(1 - \alpha_1 - \beta_1)$ segítségével történő megfogalmazás, ahol ω a feltétel nélküli variancia, vagy másképpen a hosszútávú volatilitás, amellyel a folyamat

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1(\varepsilon_{t-1} - \omega) + \beta_1(\sigma_{t-1}^2 - \omega) .$$

Az EVIEWS programcsomag ezt a modellt kiterjeszti arra az esetre, amikor megengedett a visszatérés egy változó q_t szintre. A modell:

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 = &\quad q_t + \alpha_1(\varepsilon_{t-1}^2 - q_{t-1}) + \beta_1(\sigma_{t-1}^2 - q_{t-1}) \\ q_t = &\quad \omega + \zeta(q_{t-1} - \omega) + \xi(\varepsilon_{t-1}^2 - \sigma_{t-1}^2) . \end{aligned}$$

Ebben a modellben q_t a hosszútávú volatilitás, amely ζ hatványkitevőivel ω-hoz konvergál, a $\sigma_t - q_t$ „eltűnő" komponens pedig zérushoz tart $\alpha_1 + \beta_1$ kitevőivel. Ez az ún. *komponens* GARCH modell összekapcsolható a TARCH modellel, lehetővé téve az állandó és az eltűnő tag aszimmetriájának figyelembe vételét. Az *aszimmetrikus komponens* GARCH modell automatikusan építi be az aszimmetriát az eltűnő komponensbe.

Két további modell osztályt említünk még, az egyik a *strukturális* ARCH (STARCH) modell osztály, amelyet Harvey, Ruiz és Sentana (1992) publikált, és az *átváltó* ARCH (switching ARCH, rövidítve SWARCH) modellek, amelyekről lényegében egyidőben közöltek eredményeket Cai (1994), illetve

Hamilton és Susmel (1994). A STARCH modell különböző, nem megfigyelt komponensekre bontja ε_{t-1}-et, amely komponensek mindegyike ARCH alakú, a SWARCH modell pedig több, eltérő ARCH modellt foglal magában, amelyek között Markov-lánc szerint átvált a folyamat.

4 Hosszú memóriájú volatilitás folyamatok — A FIGARCH modell

A hozam idősorok egyik jellemzője, hogy a hozamok abszolút értékeiből, vagy hatványaiból álló idősorok autokorrelációi nagyon lassan szűnnek meg. Ez különösen igaz a hozamok négyzeteiből álló idősorokra. Ding, Granger és Engle (1993) az S&P 500 index napi értékeit vizsgálták az 1928 és 1991 közötti időszakban, és azt találták, hogy az első negatív autokorreláció 2598 késleltetés mellett fordul elő. Hasonló eredményre jutott Mills (1996), a London FT 30 napi hozamait vizsgálva az 1935 és 1994 közötti periódusban. Válaszul ezekre az eredményekre Baillie, Bollerslev és Mikkelson (1996) megalkotta a Fractionally Integrated GARCH (FIGARCH) modellt. A FIGARCH folyamatot, vagy FIGARCH$(1, d, 1)$ modellt, mint az (5) általánosítását a következőképpen értelmezzük:

$$\Delta^d \varepsilon_t^2 = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)\Delta^d \varepsilon_{t-1}^2 + \nu_t - \beta_1 \nu_{t-1} \,. \tag{9}$$

Ennek a fentivel ekvivalens alakja:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + (1 - \Delta^d)\varepsilon_t^2 - \big(\beta_1 - (\alpha_1 + \beta_1)\Delta^d\big)\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \,. \tag{10}$$

A késleltető operátor segítségével (9) így is írható:

$$\Delta \varepsilon_t^2 = \alpha_0^* + \Delta^{1-d}\big(1 - (\alpha_1 + \beta_1)B\big)^{-1}(1 - \beta_1 B)\nu_t = \alpha_0^* + \Theta(B)\nu_t \,,$$

a (10) megfelelője a késleltető operátorral kifejezve

$$\sigma_t^2 = \frac{\alpha_0}{(1 - \beta_1) + (1 - (1 - (\alpha_1 + \beta_1)B)(1 - \beta_1 B)^{-1}\Delta^d)\,\varepsilon_t^2} = \alpha_0^{**} + \pi(B)\varepsilon_t^2$$

A FIGARCH(p, d, q) folyamat stacionárius, ha $0 \leq d \leq 1$. Ha $0 < d < 1$, akkor $\Theta(1) = 0$, és így a feltételes varianciára ható kilengések elhalnak. Nem ez a helyzet a $d = 0$ esetben, amikor is $\sum_j \Theta_j$ hiperbolikus függvény szerint csökken, és ez fontos információ a volatilitást kiváltó kilengés, hatás terjedésének módjára és sebességére nézve. A $d > 1$ esetben $\Theta(1)$ nem értelmezett és a feltételes varincia rendkívül nagy mértékű.

A FIGARCH$(1, d, 1)$ folyamat esetében az

$$\alpha_0 > 0, \quad \alpha_1 + d \geq 0 \quad \text{és} \quad 1 - 2(\alpha_1 + \beta_1) \geq d \geq 0$$

feltételek biztosítják a feltételes variancia pozitivitását.

5 ARCH az eszköz értékelés elméletében

Az ARCH folyamatok jelentősége a pénzügyi idősorok modellezése területén a legvilágosabban az eszköz értékelési modellekben nyilvánul meg, ahol a közvetítő jövőbeli bizonytalan események mellett kívánja maximalizálni várható hasznosságát. Ennek szemléltetésére tekintsük a következő példát. Tegyük fel, hogy egy reprezentatív közvetítő a W_t vagyonát a q_t mennyiségű és p_t egységárú kockázatos eszköz, és az x_t mennyiségű kockázatmentes eszköz vásárlására fordítja. Ez utóbbi egységárát az egyszerűség kedvéért egységnyinek tekintjük. A periódus végén a kockázatos eszköz részvényeinek értéke egyenként y_{t+1}, ha osztalékfizetés nincsen, akkor $y_{t+1} = p_{t+1}$. A kockázatmentes eszköz értéke pedig $x_t r_t$ lesz, ahol r_t értéke 1 plusz a kockázatmentes kamatláb. Ha a közvetítő hasznossági függvénye a

$$W_{t+1} = q_t y_{t+1} + x_t r_t$$

periódusvégi vagyonának ún. átlag-variancia hasznossági függvénye, akkor allokációs problémája ennek a hasznossági függvénynek a maximalizálása a q_t szerint, vagyis

$$\max_{q_t} 2\mathrm{E}_t(q_t y_{t+1} + x_t r_t) - \gamma_t \mathrm{Var}_t(q_t y_{t+1}) \ , \tag{11}$$

az induló periódusbeli vagyonára vonatkozó

$$W_t = x_t + q_t p_t$$

feltétellel. Ennek a feladatnak a megoldása

$$p_t = r_t^{-1}\mathrm{E}_t(y_{t+1}) - \gamma_t q_t r_t^{-1}\mathrm{Var}_t(y_{t+1}) \ . \tag{12}$$

Ha a kockázatos eszköz mennyiségét rögzítjük q értéken, továbbá $\gamma_t = \gamma$ és $r_t = r$ állandók, akkor a (12) modell az *eszköz értékelési modell.*

Ha a kockázatos eszközt egy s periódus lejáratú határidős szerződés képviseli, akkor egy spekuláns ezért a szerződésért legfeljebb

$$p_t = r^{-s}\left(\mathrm{E}_t(y_{t+s}) - \delta \mathrm{Var}_{t+1}(y_{t+s})\right) \tag{13}$$

árat hajlandó fizetni, ahol r^{-s} végzi az r kockázatmentes kamatláb melletti jelenre diszkontálást, és $\delta = \gamma q$.

A modell egyszerű átdátumozásával azt kapjuk, hogy a határidős szerződés értéke a $t+1$ időpontban, $s \geq 2$ periódussal a lejárat előtt a következőképpen is írható

$$p_{t+1} = r^{1-s}\left(\mathrm{E}_{t+1}(y_{t+s}) - \delta \mathrm{Var}_{t+1}(y_{t+s})\right) \ .$$

Szorozva r^{-1}-gyel, a t időpontbeli várható értékeket véve és (13)-ból kivonva

$$p_t = r^{-1}\mathrm{E}_t(p_{t+1}) - \delta r^{-s}\left(\mathrm{Var}_t(y_{t+s}) - \mathrm{E}_t(\mathrm{Var}_{t+1}(y_{t+s}))\right) \ . \tag{14}$$

Tegyük fel, hogy y_t végtelen mozgó átlag folyamatként értelmezhető, ahol az idősor innovációi korrelálatlanok, a σ_t^2 feltételes varianciája azonban függ az időtől, vagyis

$$\begin{aligned} y_t &= \varepsilon_t + \sum_{i=1}^{\infty} \Theta_i \varepsilon_{t-i} = \Theta(B)\varepsilon_t \,, \\ \mathrm{Var}_t(y_{t+1}) &= \mathrm{Var}_t(\varepsilon_{t+1}) = \sigma_{t+1}^2 \,. \end{aligned} \tag{15}$$

Felhasználva (15)-öt,

$$\mathrm{Var}_t(y_{t+s}) = \mathrm{E}_t\left(\sum_{i=1}^{s} \Theta_{s-i}\varepsilon_{t+i}\right)^2 = \sum_{i=1}^{s} \Theta_{s-i}^2 \mathrm{E}_t(\sigma_{t+i}^2) \,,$$

ezzel pedig

$$\mathrm{Var}_t(y_{t+s}) - \mathrm{E}_t\big(\mathrm{Var}_{t+1}(y_{t+s})\big) = \Theta_{s-1}^2 \varepsilon \sigma_{t+1}^2 \,,$$

és (14) most már a következőképpen írható:

$$p_t = r^{-1}\mathrm{E}_t(p_{t+1}) - \delta r^{-s} \Theta_{s-1}^2 \sigma_{t+1}^2 \,,$$

ez pedig az egyperiódusú hozam ismert formulája, amely explicit formában tartalmazza az y_{t+s} változó varianciájának a kockázat kerülő közvetítőre gyakorolt hatását.

A (12) egyszerű eszköz értékelési modell zárt alakban megadott megoldása az y_t változót generáló folyamattól függ. Tegyük fel, hogy y_t *véletlen bolyongási folyamat*, amelynek innovációi GARCH$(1,1)$ folyamatot követnek. Ekkor $\mathrm{E}_t(y_{t+1}) = y_t$ és

$$\mathrm{Var}_t(y_{t+s}) = \mathrm{E}_t\left(\sum_{i=1}^{s} \varepsilon_{t+i}^2\right) = \mathrm{E}_t\left(\sum_{i=1}^{s} \sigma_{t+i}^2\right) = s\sigma_{t+1}^2 \,,$$

így

$$p_t = r^{-s}(y_t - \delta s \sigma_{t+1}^2) \,.$$

Határidős szerződés esetében, ahol nem cserél gazdát pénz a $t+s$ lejáratig, a kockázatmentes kamatláb zérus, tehát $r = 1$, vagyis a megoldás a következőre egyszerűsödik

$$p_t = y_t - \delta s \sigma_{t+1}^2 \,.$$

Ha $\delta \neq 0$, akkor a határidős szerződés kockázati prémiuma időtől függő. A távoli jövőre vonatkozó szerződések esetében az új információ jelentős hatást gyakorol az eszközök értékére, mivel megváltoztatja a közvetítő érzékenységét a végső kifizetés varianciájával, illetve minden közbenső varianciával szemben. Ez időfüggő kockázati prémiumot eredményez, és így jelentős hatással van az eszközök értékére.

Ha azt tételezzük fel, hogy az innovációk függetlenek az időben, és a konstans varianciájuk σ^2, akkor $\mathrm{Var}_t(y_{t+s}) = s\sigma^2$, és a (12) eszköz értékelő modell megoldása

$$p_t = y_t - \delta s \sigma^2 \,,$$

és bár az azonnali ár varianciája szerepel az értékelő egyenletben, mégsem eredményez időfüggő kockázati prémiumot, mivel a modell nem teremt kapcsolatot az új információ és a jövőbeli bizonytalanság között.

Az irodalomjegyzékben található dolgozatok számos alkalmazásról számolnak be, jelezve a volatilitás modellek finanszírozás-elméleti alkalmazhatóságát.

Irodalom

1. BAILLIE, R. T., BOLLERSLEV, T., 1989: The Message in Daily Exchange Rates:a Conditional Variance Tale, *Journal of Business and Economic Statistics*, 7, 297-305
2. BAILLIE, R. T., BOLLERSLEV, T., MIKKELSON, H. O., 1996: Fractionally Integrated Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, *Journal of Econometrics*, 74, 3-30
3. BERA, A. K., HIGGINS, M. L., 1993: On ARCH Models: Properties, Estimation and Testing, *Journal of Economic Surveys*, 7, 305-366
4. BOLLERSLEV, T., 1986: Generalised Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, *Journal of Econometrics*, 31, 307-327
5. BOLLERSLEV, T., 1988: On the Correlation Structure for the Generalised Autoregressive Conditional Heteroskedastic Process, *Journal of Time Series Analysis*, 9, 121-132
6. BOLLERSLEV, T., CHOU, R. Y., KRONER, K. F., 1992: ARCH Modelling in Finance: A Review of the Theory and Empirical Evidence, *Journal of Econometrics*, 52, 5-59
7. BOLLERSLEV, T., ENGLE, R. F., NELSON, D. B., 1994: ARCH Models, in R. F. Engle, D. L. McFadden (eds.) *Handbook of Econometrics*, Volume IV, New York: North Holland, pp. 2959-3038
8. BOUGEROL, P., PICARD, N., 1992: Stationarity of GARCH Processes and of Some Nonnegative Time Series, *Journal of Econometrics*, 52, 115-128
9. CAI, J.,1994: A Markov Model of Switching-Regime ARCH, *Journal of Business and Economic Statistics*, 12, 309-316
10. CLARK, P. K., 1973: A Subordinated Stochastic Process Model with Finite Variances for Speculative Prices, *Econometrica*, 41, 135-155
11. DING, Z., GRANGER, C. W. J., ENGLE, R. F., 1993: A Long Memory Property of Stock Returns and a New Model, *Journal of Empirical Finance*, 1, 83-106
12. ENGLE, R. F., 1982: Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of U. K. Inflation, *Econometrica*, 50, pp. 987-1008
13. ENGLE, R. F., BOLLERSLEV, T., 1986: Modelling the Persistence of Conditional Variances, *Econometric Reviews*, 5, 1-50
14. ENGLE, R. F.,1996: Discussion: Stock Market Volatility and the Crash of 1987, *Review of Financial Studies*, 3, 103-106
15. GLOSTEN, L. R., JAGANNATHAN, R., RUNKLE, D.,1993: Relationship Between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks, *Journal of Finance*, 48, 1779-1801
16. HAMILTON, J. D., SUSMEL, R., 1994: Autoregressive Conditional Heteroskedasticity and Changes in Regime, *Journal of Econometrics*, 64, 307-333

17. HARVEY, A. C., RUIZ, E., SENTANA, E., 1992: Unobserved Component Models with ARCH Disturbances, *Journal of Econometrics*, 52, 129-157

18. HENTSCHEL, L.,1995: All in the Family: Nesting Symmetric and Asymmetric GARCH Models, *Journal of Financial Economics*, 39, 71-104

19. HIGGINS, M. L., BERA, A. K., 1992: A Class of Nonlinear ARCH Models, *International Economic Review*, 33, 137-158

20. HSIEH, D. A., 1989: Modelling Heteroskedasticity in Daily Foreign Exchange Rates, *Journal of Business and Economic Statistics*, 7, 307-317

21. JORION, P., 1988: On Jump Processes in the Foreign Exchange and Stock Markets, *Review of Financial Studies*, 1, 427-445

22. KOOPMAN, S. J. , HARVEY, A. C., DOORNIK, SHEPHARD, N.,1995: *Stamp 5.0: Structural Time Series Analyser, Modeller and Predictor*, London, Chapman and Hall

23. MILLS, T. C., 1996: Non-Linear Forecasting of Financial Time Series: An Overview and Some New Models, *Journal of Forecasting*, 15, 127-135

24. NELSON, D. B., 1990: Stationarity and Persistence in the GARCH (1,1) Model, *Econometric Theory*, 6, 318-334

25. NELSON, D. B., 1991: Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns, *Econometrica*, 59, 347-370

26. NELSON, D. B., CAO, C. Q., 1992: Inequality Constraints in Univariate GARCH Models, *Journal of Business and Economic Statistics*, 10, 229-235

27. SHEPHARD, N., 1996: Statistical Aspects of ARCH and Stochastic Volatility, in D. R. Cox, D. V. Hinkley, O. E. Barndorff-Nielsen (eds.), *Time Series Models in Econometrics, Finance and Other Fields*, London, Chapman and Hall, pp. 1-67

28. SCHWERT, G. W., 1987: Effects of Model Specification on Tests for Unit Roots in Macroeconomic Data, *Journal of Monetary Economics*, 20, 73-105

29. TAUCHEN, G. E., PITTS, M., 1983: The Price Variability-Volume Relationship on Speculative Markets, *Econometrica*, 51, 485-505

30. TAYLOR, S. J., 1986: *Modelling Financial Time Series*, New York, Wiley

31. ZAKONIAN, J. M.,1994: Threshold Heteroskedastic Models, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 18, 931-955

STOCHASTIC VOLATILITY IN FINANCIAL TIME SERIES MODELS

In this paper a brief summary of financial time series volatility models is given. We discuss generalised and modified versions of ARCH processes such as GARCH, NARCH, AARCH, QARCH, STARCH and FIGARCH models as well as the role of GARCH processes in asset pricing theory.