ERŐS DUALITÁSTÉTEL VÉGTELEN LP-KRE[1]

PINTÉR MIKLÓS
PTE KTK

Ebben a cikkben a végtelen lineáris programokra vonatkozó erős dualitástételt vizsgáljuk meg. Kimondjuk és bizonyítjuk a Farkas-lemma végtelen dimenziós változatát, majd annak segítségével kimondjuk és bizonyítjuk a végtelen lineáris programokra vonatkozó erős dualitástételt (Anderson és Nash, 1987). Ismertetjük a terület alapvető fogalmait és példákkal megvilágítjuk a fogalmak és a tételek mögött megbúvó intuíciókat.

Kulcsszavak: végtelen LP, Farkas-lemma, erős dualitástétel

1 Bevezető

A véges lineáris programokra (LP-k) vonatkozó dualitástételek, úgy mint a gyenge dualitástétel és az erős dualitástétel, az egyetemi alapképzések bevett, kikerülhetetlen és fontos részei. A dualitás fogalma és a dualitástételek olyan nyilvánvalóan alapvetőek, mind az alkalmazások, mind koncepcionális szempontból, hogy fel sem merülhet kihagyásuk egy operációkutatás tárgy tematikájából.

A végtelen LP-k vizsgálata nem része a sztenderd operációkutatási kurzusoknak, pedig az mind az alkalmazások szempontjából (lsd. pl. Anderson és Nash (1987), Pintér (2011)), mind pusztán elméleti szempontból érdekes és fontos.

Ebben a cikkben a végtelen lineáris programokra vonatkozó erős dualitástételt vizsgáljuk meg. Kimondjuk és bizonyítjuk a Farkas-lemma végtelen dimenziós változatát, majd annak segítségével kimondjuk és bizonyítjuk a végtelen lineáris programokra vonatkozó erős dualitástételt (Anderson és Nash, 1987). Ismertetjük a terület alapvető fogalmait és példákkal megvilágítjuk a fogalmak és a tételek mögött megbúvó intuíciókat.

Az alternatíva tételek (ilyen a Farkas-lemma) és a dualitástételek irodalma széles, lsd. pl. Farkas (1894, 1902), Fan (1956), Tucker (1956), Good (1959), Gale (1960), Chernikov (1968), Anderson és Nash (1987), Dax (1993), Dax és Sreedharan (1997), Broyden (1998), Roos és Terlaky (1999), Bartl (2007), Kannai (2008), Bartl (2008). Ez a cikk reményeink szerint abban gazdagítja az alternatíva tételek és a dualitástételek irodalmát, hogy felhívja a figyelmet az analízis szempontú megközelítés erejére és eleganciájára.

[1]A szerző köszöni David Bartl-nak a közös gondolkodást. Ez a cikk Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Hivatal (NKFIH, K 101224, K 115538 és K 124631) és a Pécsi Tudományegyetem Kiválósági Centrum pályázatának anyagi támogatásával készült. Beérkezett: 2017. január 9. E-mail: `pinterm@ktk.pte.hu`.

A cikk felépítése a következő. A 2. fejezetben bevezetjük a cikkben használt alapfogalmakat, a 3. fejezetben kimondjuk a cikkben használt kulcstételt, egy szeparációs tételt, a 4. fejezetben a végtelen dimenziós Farkas-lemmát tárgyaljuk, majd az 5. fejezetben a végtelen LP-kre vonatkozó erős dualitástétel kerül górcső alá. Az utolsó fejezet egy rövid összefoglalása az ismertetett eredményeknek.

2 Alapfogalmak

Ebben a fejezetben áttekintjük és bevezetjük a végtelen LP-khez kapcsolódó alapvető fogalmakat.

Legyenek X és Y topologikus vektorterek a valós test felett, X' az X *algebrai duál*ja, azaz, az X-en értelmezett lineáris funkcionálok tere, Y^* az Y *topologikus duál*ja, azaz, az Y-on értelmezett folytonos lineáris funkcionálok tere. Az $(Y, \hat{Y})$ *duális pár*, ha $\hat{Y} \subseteq Y^*$-ra teljesül, hogy ha $f \in Y$ és $f \neq 0$, akkor létezik olyan $y \in \hat{Y}$, hogy $y(f) \neq 0$. Világos, hogy (Y, Y^*) egy duális pár.

Legyen $A : X \to Y$ egy lineáris leképezés, ekkor $A' : Y^* \to X'$ az A leképezés *adjungált*ja, azaz minden $x \in X$-re és $y \in Y^*$-ra $\big(A'(y)\big)(x) = y\big(A(x)\big)$.

A $P \subseteq X$ *konvex kúp*, ha tetszőleges $x, y \in P$ pontokra és nem negatív $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ skalárokra $\alpha x + \beta y \in P$. Tetszőleges $f, g : X \to \mathbb{R}$ funkcionálokra $f \geq_P g$, ha minden $x \in P$ pontra $f(x) \geq g(x)$.

Legyen adott $A : X \to Y$ lineáris funkcionál, $b \in Y$ pont, $P \subseteq X$ konvex kúp és $c : X \to \mathbb{R}$ lineáris funkcionál. Tekintsük a következő LP feladatpárt (ld. Anderson és Nash (1987), Section 3.3):

$$\begin{array}{llcl} (P): & c(x) & \to & \sup \\ f.h. & A(x) & = & b \\ & x & \in & P \end{array} \qquad \begin{array}{llcl} (D): & y(b) & \to & \inf \\ f.h. & A'(y) & \geq_P & c \\ & y & \in & Y^* \end{array} \tag{1}$$

Az (1) LP feladatpárnak a véges LP feladatpárokkal való hasonlósága nyilvánvaló, ránézésre látható. A főbb különbségek okaira a következő példa segítségével mutatunk rá.

1. példa. Tekintsük a következő LP feladatpárt, ahol ℓ^1 az abszolút konvergens sorok tere, azaz, $\ell^1 = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_n |x_n| < \infty\}$, értelmezzük ℓ^1-en a következő normát: $||x|| = \sum_n |x_n|$, $x \in \ell^1$:

$$\begin{array}{llcl} (P_p): & \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} x_n & \to & \sup \\ f.h. & \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x_n & = & 0 \\ & \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n & = & 1 \\ & x & \in & \ell^1_+ \end{array} \quad \begin{array}{llcl} (D_p): & y_2 & \to & \inf \\ f.h. & y_1 \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x_n + y_2 \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n & \geq_{\ell^1_+} & \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} x_n \\ & & & \\ & y & \in & \mathbb{R}^2 \end{array} \tag{2}$$

Vegyük észre, hogy a (P_p) feladatnak nincs lehetséges megoldása, hiszen a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x_n = 0$ feltétel csak akkor teljesülhet, ha $x = 0$ ($x \in \ell_+^1$), de akkor $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = 0 \neq 1$.

Ugyanakkor a (D_p) feladatnak van lehetséges megoldása, pl. $(y_1, y_2) = (0, 1)$ egy lehetséges megoldás. Vegyük észre továbbá, hogy az $y_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x_n + y_2 \sum_{n=1}^{\infty} x_n \geq_{\ell_+^1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} x_n$ feltételt fel lehet írni a következőképpen:

$$y_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x_n + y_2 \sum_{n=1}^{\infty} x_n \geq_{\ell_+^1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} x_n \,, \qquad x \in \{e_1, e_2, \dots\}$$

azaz

$$y_1 \frac{1}{n^2} + y_2 \geq \frac{2}{n} \,, \qquad n = 1, 2, \dots \tag{3}$$

Könnyen látható továbbá, hogy tetszőleges $y_1 \in I\!R$ számra $y_1 \frac{1}{n^2} < \frac{2}{n}$, $n = 1, 2, \dots$, tehát y_2 pozitív. Az is látható továbbá, hogy az $(m, 1/m)$, $m = 1, 2, \dots$ sorozat minden eleme kielégíti a (3) egyenlőtlenséget, tehát a (D_p) feladat megoldása 0, de nincs olyan megengedett megoldása (D_p)-nek, ahol a célfüggvényérték 0.

Az 1. példa több szempontból is tanulságos. Egyrészt mutatja, hogy a feladatok végtelen jellege miatt le kell mondanunk a max-ról és a min-ról, helyettük rendre sup-ot és inf-ot használhatunk. Ezek a módosítások nagyon kézenfekvőek, természetesek. Azt is láthatjuk azonban, hogy egy erős dualitástételhez ennél több kell.

Ahhoz, hogy lássuk, hogy mi az a több, ami kell egy erős dualitástételhez, bele kell néznünk az erős dualitástétel bizonyításába. A bizonyítás (véges esetben is) szeparációs tétellel megy a feladatpár (P_p) részében. A szeparációs tételben zárt konvex halmazt erősen szeparálunk egy külső ponttól, tehát hangsúlyosan zárt konvex halmazra van szükségünk és csak a feladatpár (P_p) részében.

Az is könnyen látható (ld. a 4. példát), hogy a lezárást alkalmazva van (P_p)-nek megoldása, és az optimális célfüggvényérték 0. Vegyük észre, hogy a (D_p) feladatnak is ez az optimális célfüggvényértéke, tehát úgy tűnik, hogy az erős dualitástétel a megfelelő módosításokkal kiterjeszthető végtelen LP-kre.

Lássuk a módosításokat:

2. definíció. *Tekintsük az (1) feladatpárt. Azt mondjuk, hogy a (D) feladat konzisztens, ha létezik olyan $y \in Y^*$ lineáris funkcionál, hogy $\big(A'(y)\big)(x) \geq c(x)$ minden $x \in P$-re. A (D) konzisztens program értéke* $\inf\big\{\, y(b) : A'(y) \geq_P c, y \in Y^* \,\big\}$.

A fent említett lezáráshoz definiálnunk kell a topológiát amiben a lezárást értjük. Vegyük az $(Y, \hat{Y})$ duális párt. Az $\hat{Y}$ által indukált *gyenge topológia* Y-on a következő: az $U \subseteq Y$ halmaz az $f_0 \in Y$ pont *gyenge környezete*, ha létezik olyan n természetes szám és olyan $y_1, \dots, y_n \in \hat{Y}$ lineáris funkcionálok, hogy $\bigcap_{j=1}^{n} \big\{\, f \in Y : \big|y_j(f) - y_j(f_0)\big| < 1 \,\big\} \subseteq U$. Magyarán szólva, az $\hat{Y}$ által

Y-on indukált gyenge topológia bázisa a következő:

$$\left\{ \bigcap_{j=1}^{n} \{ f \in Y : |y_j(f) - y_j(f_0)| < 1 \} : n \in \mathbb{N},\, y_1, \ldots, y_n \in \hat{Y},\, f_0 \in Y \right\}.$$

3. definíció. *Tekintsük az (1) feladatpárt. Legyen* $D = \{ (A(x), c(x)) : x \in P \}$. *Azt mondjuk, hogy a* (P) *program szuperkonzisztens, ha létezik olyan* $z \in \mathbb{R}$ *szám, hogy* $(b, z) \in \overline{D}$, *ahol* $\overline{D}$ *a* D *halmaz lezártja az* $Y \times \mathbb{R}$*-en értelmezett szorzattopológiában. A* (P) *szuperkonzisztens program szuperértéke* $\sup\{ z : (b, z) \in \overline{D} \}$.

Azt mondjuk, hogy $(I, \leq)$ *jobbra irányított* halmaz, ha $(I, \leq)$ egy olyan előrendezett halmaz, hogy tetszőleges $i, j \in I$ eleméhez létezik egy olyan $k \in I$ eleme, hogy $i \leq k$ és $j \leq k$. $(x_i)_{i \in I}$ egy általánosított sorozat az X halmazból, ha $(I, \leq)$ egy jobbra irányított halmaz és $x_i \in X$ minden $i \in I$-re.

Most már át tudjuk fogalmazni 3. definíciót. A (P) program pontosan akkor szuperkonzisztens, ha létezik egy olyan P-beli általánosított sorozat $(x_i)_{i \in I}$, hogy $A(x_i) \xrightarrow{w} b$, azaz, $A(x_i)$ konvergál b-hez a gyenge topológiában, és $c(x_i)$ korlátos. Továbbá, a z^* szám pontosan akkor a (P) szuperkonzisztens program szuperértéke, ha az a legkisebb felső korlátja azon z számok halmazának amikhez létezik olyan P-beli $(x_i)_{i \in I}$ általánosított sorozat, hogy $A(x_i) \xrightarrow{w} b$ és $c(x_i) \longrightarrow z$.

4. példa. Az 1. példában a (P_p) feladat nem konzisztens, de szuperkonzisztens, hiszen $(e_n) \subseteq \ell^1_+$ sorozatot tekintve azt láthatjuk, hogy egyrészt $\sum_{i=1}^{\infty} e_{ni} = 1$ minden n-re, másrészt $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} e_{ni} \to 0$, azaz az ℓ^1_+ halmaz a feltételek lineáris leképezéssel vett képének lezártjában benne van a $(0, 1)$ pont. Tehát a lezárást alkalmazva kapunk lehetséges megoldást, azaz a feladat szuperkonzisztens. Vegyük észre, hogy mivel $(\ell^1, ||\cdot||)$ metrikus tér, így elég hagyományos sorozatokat tekinteni.

Könnyen látható az is, hogy tetszőleges olyan $(x_n) \subseteq \ell^1$ sorozatra, amire $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} x_{nm} \to 0$ és $\sum_{m=1}^{\infty} x_{nm} \to 1$ azt kapjuk, hogy $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{m} x_{nm} \to 0$. Azaz a szuperkonzisztens (P_p) feladat szuperértéke 0.

3 Szeparáló hipersíkok

Azt mondjuk, hogy az f lineáris funkcionál erősen szeparálja az A és B halmazokat, ha létezik olyan $\alpha \in \mathbb{R}$ és $\varepsilon > 0$, hogy minden $x \in A$-ra $f(x) \geq \alpha$ és minden $x \in B$-re $f(x) \leq \alpha - \varepsilon$.

Egy (X, τ) topologikus vektortér lokálisan konvex, ha a 0 pontnak van konvex halmazokból álló környezetbázisa, azaz, ha tetszőleges U környezetére 0-nak van $K \subseteq U$ konvex környezete 0-nak. Vegyük észre, hogy ha $(Y, \hat{Y})$ egy duális pár, akkor az Y-on értelmezett gyenge topológia egy lokálisan konvex (Hausdorff-) topológia.

A következő tételt nem bizonyítjuk, a bizonyítása jól ismert, megtalálható pl. Aliprantis és Border (2006)-ban (Theorem 5.79, 207. old.).

5. tétel. *Legyen $A \subseteq X$ egy zárt konvex halmaz, és $B \subseteq X$ egy kompakt konvex halmaz az X lokálisan konvex topologikus vektortérben, hogy $A \cap B = \emptyset$. Ekkor létezik olyan folytonos lineáris funkcionál, ami erősen szeparálja A-t és B-t.*

Amint a későbbiekben látni fogjuk az 5. tétel bújik meg mind a Farkas-lemma, mind az erős dualitástétel mögött.

4 Farkas-lemma

Ebben a fejezetben a Farkas-lemma (Farkas, 1894, 1902) végtelen dimenziós változatát vizsgáljuk. A következő tétel egy végtelen dimenziós Farkas-lemma.

6. tétel (Farkas-lemma). *Legyen X egy vektortér, $P \subseteq X$ egy konvex kúp, Y egy lokálisan konvex valós vektortér, $b \in Y$, $A : X \to Y$ egy lineáris leképezés. Ekkor a következő állítások közül mindig pontosan egy igaz:*

1. $b \in \overline{A(P)}$,
2. *létezik olyan f folytonos, Y-on értelmezett lineáris funkcionál, hogy minden $x \in P$-re $A'(f)(x) \geq 0$ és $f(b) < 0$.*

Bizonyítás. $b \in \overline{A(P)}$: minden $x \in X$-re, $f \in Y^*$-ra $A'(f)(x) = f(A(x))$, és létezik $(x_i)_{i \in I} \subseteq P$ olyan általánosított sorozat, hogy $f(A(x_i)) \to f(b)$. Tehát, ha tetszőleges $x \in P$-re $A'(f)(x) \geq 0$, akkor $f(b) \geq 0$, ami ellentmond $f(b) < 0$-nak.

$b \notin \overline{A(P)}$: $\overline{A(P)}$ egy konvex zárt halmaz, tehát az 5. tételből következik, hogy létezik f folytonos lineáris funkcionál Y-on, és $\alpha \in \mathbb{R}$, hogy minden $y \in A(P)$-re $f(y) \geq \alpha$ és $f(b) < \alpha$.

Mivel P egy kúp, így $A(P)$ is egy kúp, és $0 \in A(P)$ ($f(0) = 0$), így minden $x \in P$-re, $\beta \in \mathbb{R}_+$-ra $\beta x \in P$, $\beta A(x) = A(\beta x)$, azaz minden $x \in P$-re $A'(f)(x) = f(A(x)) \geq \lim\limits_{\beta \to \infty} \frac{\alpha}{\beta} = 0$; tehát $\alpha = 0$. □

A Farkas-lemma a 6. tétel formában az 5. tétel közvetlen következménye, míg – könnyen láthatóan – az 5. tétel nem következik a 6. tételből. Magyarán szólva a Farkas-lemma (6. tétel) a szeparációs tétel (5. tétel) egy gyengített (konvex, zárt halmaz ponttól való erős szeparációja), speciális változataként (is) értelmezhető.

5 Az erős dualitástétel

Ebben a fejezetben kimondjuk és bizonyítjuk a végtelen LP-kre vonatkozó erős dualitástételt. Mielőtt kimondanánk az erős dualitástételt, kimondunk és bizonyítunk egy másik, dualitáshoz köthető állítást, az ún. gyenge dualitástételt.

7. tétel (Gyenge dualitástétel). *Tekintsük a következő LP párt:*

$$\begin{array}{llcl} P: & c(x) & \to & \sup \\ f.h. & A(x) & = & b \\ & x & \in & P \end{array} \qquad \begin{array}{llcl} D: & y(b) & \to & \inf \\ f.h. & A'(y) & \geq_P & c \\ & y & \in & Y^* \end{array}$$

Ekkor

$$\sup_{(b,z)\in\overline{(A,c)\,(P)}} z \leq \inf_{y\in Y^*, A'(y)\geq_P c} y(b) \ .$$

Bizonyítás. Ha (P) nem szuperkonzisztens, akkor $\sup_{(b,z)\in\overline{(A,c)\,(P)}} z = -\infty$, ha (D) nem konzisztens, akkor $\inf_{y\in Y^*, A'(y)\geq_P c} y(b) = \infty$, tehát ezekben az esetekben áll a bizonyítandó egyenlőtlenség.

Legyen $y \in Y^*$ a D feladat egy megengedett megoldása. Ekkor

$$A'(y) \geq_P c \ ,$$

azaz minden $x \in P$-re $A'(y)\,(x) \geq_P c(x)$.

Legyen $(b, z) \in \overline{(A, c)\,(P)}$ tetszőlegesen választott. Ekkor létezik $(x_i)_{i\in I} \subseteq P$ általánosított sorozat, hogy $A(x_i) \xrightarrow{w} b$ és $c(x_i) \to z$. Mivel y folytonos, így $y(A(x_i)) \to y(b)$, és $(A'(y)\,(x) = y(A(x)))$

$$\lim c(x_i) \leq \lim y(A(x_i)) = y(b) \ .$$

Tehát

$$\sup_{(b,z)\in\overline{(A,c)\,(P)}} z \leq \inf_{y\in Y^*, A'(y)\geq_P c} y(b) \ .$$

□

A következő tétel a fejezet és a cikk fő eredménye, az ún. erős dualitástétel. Ez az eredmény Anderson és Nash (1987)-re (Theorem 3.3, p. 41) épül, gyakorlatilag Anderson és Nash eredményének újra- és átfogalmazása.

8. tétel (Erős dualitástétel). *Tekintsük a következő LP-párt:*

$$\begin{array}{llcl} (P): & c(x) & \to & \sup \\ f.h. & A(x) & = & b \\ & x & \in & P \end{array} \qquad \begin{array}{llcl} (D): & y(b) & \to & \inf \\ f.h. & A'(y) & \geq_P & c \\ & y & \in & Y^* \end{array}$$

Ekkor következő négy eset lehetséges:

1. *A (P) program szuperkonzisztens és z^* a véges szuperértéke, és a (D) program konzisztens és z^* a véges értéke.*
2. *A (P) program nem szuperkonzisztens, a (D) program konzisztens és nincs véges értéke.*
3. *A (P) program szuperkonzisztens és nincs véges szuperértéke, a (D) program nem konzisztens.*

4. A (P) program nem szuperkonzisztens, és a (D) program nem konzisztens.

Bizonyítás. *1. pont*: Tegyük fel, hogy a (P) program szuperkonzisztens és a véges szuperértéke z^*. Legyen $z' > z^*$, és legyen $d = (b, z')$, a $B : X \to Y \times \mathbb{R}$ lineáris leképezés pedig a következőképpen definiált: minden $x \in X$-re $B(x) = (A(x), c(x))$.

Ekkor $\overline{B(P)}$ egy zárt, konvex kúp a gyenge (Y-on) és az euklideszi ($\mathbb{R}$-en) topológiák szorzattopológiájában, és $d \notin \overline{B(P)}$. A Farkas-lemmából (6. tétel) következik, hogy létezik egy olyan f folytonos lineáris funkcionál, hogy minden $x \in \overline{B(P)}$ pontra $f(x) \geq 0$ és $f(d) < 0$.

Ekkor létezik olyan $\beta \in \mathbb{R}$, hogy minden $(y, z) \in \overline{B(P)}$-re

$$f((y, z)) = f((y, 0)) + f((0, z)) = f|_Y(y) + \beta z \geq 0 \; , \tag{4}$$

és

$$f(d) = f((b, z')) = f((b, 0)) + f((0, z')) = f|_Y(b) + \beta z' < 0 \; , \tag{5}$$

ahol $f|_Y$ az f lineáris funkcionál megszorítása $Y \times \{0\}$-ra, tehát (valójában) $f|_Y$ egy folytonos lineáris funkcionál Y-on.

Mivel a (P) feladat szuperkonzisztens és z^* a véges szuperértéke, így $(b, z^*) \in \overline{B(P)}$. Írjuk be (b, z^*)-t a (4) egyenlőtlenségbe

$$f((b, z^*)) = f((b, 0)) + f((0, z^*)) = f|_Y(b) + \beta z^* \geq 0 \, . \tag{6}$$

Az (5) és (6) különbségét véve

$$\beta(z' - z^*) < 0 \; ,$$

azaz $\beta < 0$.

Legyen $y_0 = -\frac{f|_Y}{\beta}$. Ekkor y_0 folytonos lineáris funkcionál Y-on, és minden $x \in P$-re a (4) egyenlőtlenséget alkalmazva kapjuk, hogy

$$f|_Y(A(x)) + \beta c(x) \geq 0 \; ,$$

azaz

$$y_0(A(x)) = -\frac{f|_Y(A(x))}{\beta} \geq c(x) \; .$$

Az $y_0(A(x)) = A'(y_0)\,(x)$ összefüggésből következik tehát, hogy $A'(y_0) \geq_P c$, azaz, y_0 megengedett megoldása (D)-nek, így a (D) feladat konzisztens. Az (5) egyenlőtlenségből következik továbbá, hogy $y_0(b) < z'$.

Összefoglalva a fentieket, és alkalmazva a gyenge dualitástételt (7. tétel, ahol $(A, c) = B$) azt kapjuk, hogy

$$\sup_{(b,z) \in \overline{B(P)}} z \leq \inf_{y \in Y^*, A'(y) \geq_P c} y(b) \leq y_0(b) \leq z' \; . \tag{7}$$

Mivel $z' > z^*$ tetszőlegesen választott volt, így

$$\sup_{(b,z) \in \overline{B(P)}} z = \inf_{y \in Y^*, A'(y) \geq_P c} y(b) \; .$$

Tegyük fel, hogy a (D) program konzisztens és van véges értéke. Ekkor a gyenge dualitástételből (7. tétel) következik, hogy a (P) feladat nem lehet szuperkonzisztens véges szuperérték nélkül (különben a (D) programnak nem lenne megengedett megoldása). Továbbá, ha (P) nem lenne szuperkonzisztens, akkor a fenti bizonyításban z'-t tetszőlegesen kis értéknek lehetne választani, tehát a (7) egyenlőtlenség miatt a (D) feladatnak nem lenne értéke, ami ellentmondás. Tehát a (P) program szuperkonzisztens és van véges szuperértéke.

A *2. pont*: A gyenge dualitástétel (7. tétel) miatt, ha a (D) feladat konzisztens és nincs értéke, akkor a (P) feladat nem lehet szuperkonzisztens.

A *3. pont*: A gyenge dualitástétel (7. tétel) miatt, ha a (P) feladat szuperkonzisztens és nincs vége szuperértéke, akkor a (D) feladat nem lehet konzisztens.

A *4. pont*: Tekintsük a következő feladatpárt:

$$\begin{array}{llcl} (P_{pl}): & (1,x) & \to & \max \\ f.h. & 0(x) & = & -1 \\ & x & \in & \mathbb{R}^d_+ \end{array} \qquad \begin{array}{llcl} (D_{pl}): & (-1,y) & \to & \min \\ f.h. & 0(y) & \geq & 1 \\ & y & \in & \mathbb{R}^d \end{array}$$

ahol 0 egy d-ed rendű csupa nullákból álló kvadratikus mátrix. Ekkor sem (P_{pl}) nem (szuper)konzisztens (véges esetben a konzisztencia és a szuperkonzisztencia ekvivalensek) sem (D_{pl}) nem konzisztens. □

Érdemes összevetni az erős dualitástételt a Karush-Kuhn-Tucker–tétellel (Karush, 1939; Kuhn és Tucker, 1951). Mindkét tétel az operációkutatás fő tételei közé tartozik, és mindkét tétel bizonyításában kulcsszerepe van a Farkas-lemmának. Azt mondhatjuk tehát, hogy mindkét tétel mögött egy konvex, zárt halmaz ponttól való erős szeparálására vonatkozó tétel, a Farkas-lemma bújik meg.

6 Összefoglalás

A cikkben ismertettük a végtelen LP-kre felírható primál-duál–párokat, kimondtuk és bizonyítottuk a végtelen LP-kre vonatkozó erős dualitástételt. A tárgyalás során igyekeztünk példák segítségével megmutatni, hogy mik az okai a végtelen eset a véges esethez képesti eltérésének, illetve a cikk felépítése segítségével a Farkas-lemma, mint speciális szeparációs tétel szerepét is hangsúlyoztuk. A hangsúlyozás meglátásunk szerint nem öncélú, mert a Karush-Kuhn-Tucker–tétel szintén „a Farkas-lemmában gyökerezik", a „közös gyökerek" pedig a két tétel közötti hasonlóságra mutatnak.

Irodalom

1. Aliprantis C. D., Border K. C. (2006) *Infinite Dimensional Analysis*, Third Edition. Springer-Verlag.

2. Anderson E. J., Nash P. (1987) *Linear Programming in Infinite-Dimensional Spaces, Theory and Applications.* John Wiley & Sons, Inc.

3. Bartl D. (2007) Farkas' Lemma, other theorems of the alternative, and linear programming in infinite-dimensional spaces: a purely linear-algebraic approach. *Linear and Multilinear Algebra* 55(4):327–353.

4. Bartl D. (2008) A Short algebraic proof of the Farkas lemma. *SIAM Journal on Optimization* 19(1):234–239.

5. Broyden C. (1998) A simple algebraic proof of Farkas's lemma and related theorems. *Optimization Methods and Software* 8:185–199.

6. Chernikov S. (1968) *Linear Inequalities* (in Russian). Nauka.

7. Dax A. (1993) The relationship between theorems of the alternative, least norm problems, steepest descent directions, and degeneracy: A review. *Annals of Operations Research* 46:11–60.

8. Dax A., Sreedharan V. (1997) Theorems of the alternative and duality. *Journal of Optimization Theory and Applications* 94:561–590.

9. Fan K. (1956) On systems of linear inequalities. In: Kuhn H. W., Tucker A. W. (eds) *Linear inequalities and related systems*, Annals of Mathematics Studies, vol 38. Princeton University Press.

10. Farkas G. (1894) A Fourier-féle mechanikai elv alkamazásai. *Mathematikai és Természettudományi Értesítő* 12:457–472.

11. Farkas G. (1902) Über die Theorie der Einfachen Ungleichungen. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* 124:1–27.

12. Gale D. (1960) *The Theory of Linear Economic Models.* McGraw-Hill.

13. Good A. (1959) Systems of linear relations. *SIAM Review* 1:1–31.

14. Kánnai Z. (2008) The sectoroid version of the Farkas Lemma. *Mathematica Pannonica* 19(1):117–124.

15. Karush W. (1939) Minima of Functions of Several Variables with Inequalities as Side Constraints. Master's thesis, Department of Mathematics, Univ. of Chicago, Chicago, Illinois.

16. Kuhn H. W., Tucker A. W. (1951) Nonlinear programming. In: *Proceedings of 2nd Berkeley Symposium*, Berkeley: University of California Press, pp. 481–492.

17. Pintér M. (2011) Algebraic duality theorems for infinite LP problems. *Linear Algebra and its Applications* 434(3):688–693, doi 10.1016/j.laa.2010.09.007, http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S00243795 10004702.

18. Roos C., Terlaky T. (1999) Note on a paper of Broyden. *Operations Research Letters* 25:183–186.

19. Tucker A. W. (1956) Dual systems of homogeneous linear relations. In: Kuhn H. W., Tucker A. W. (eds) *Linear Inequalities and Related Systems*, Annals of Mathematics Studies, vol 38, Princeton University Press, pp. 3–18.

STRONG DUALITY THEOREM FOR INFINITE LPS

This paper considers a strong duality theorem for inifinite linear programs. We state and prove the infinite dimensional version of the Farkas lemma, and by this result we prove a strong duality theorem for inifinite linear programs (Anderson and Nash, 1987). We discuss the main notions of the field and by the means of examples we shed light on the intuitions lying behind the results.