EGY DISZKRÉT DINAMIKUS TERMELŐI-FOGYASZTÓI MODELL STABILITÁSÁRÓL[1]

MOLNÁR SÁNDOR ÉS SZIDAROVSZKY FERENC
Központi Bányászati Fejlesztési Intézet – Arizonai Egyetem

Dolgozatunkban Arrow (1960) dinamikus piacmodelljét és dinamikus oligopol modelleket kapcsolunk össze egy olyan diszkrét dinamikus rendszerré, amely egyaránt kezelni tudja a termelők és fogyasztók hiányos ismereteit, becsléseit és az optimális termelési program kialakítására vonatkozó döntéseit. A teljes információs eseten kívül megvizsgáljuk a statikus, adaptív és extrapolatív becslések eseteit is, és szükséges és elégséges feltételeket vezetünk le az így adódó rendszerek globális aszimptotikus stabilitására. A dolgozat befejezéseként a stabilitási feltételeket hasonlítjuk össze.

1. Bevezetés

Dinamikus oligopol játékok stabilitására számos gyakorlatilag is alkalmazható eredményt ismerünk. A klasszikus elméletet Okuguchi (1976) foglalta össze, majd a többtermékes esetre vonatkozó eredményeket és módszereket Okuguchi és Szidarovszky (1990) ismertette. Ezek a modellek a termelési oldalról közelítették meg dinamikus piacok vizsgálatát. A fogyasztói oldallal is számos kutató foglalkozott. Arrow (1960) klasszikus cikkében egy olyan többtermékes piaccal foglalkozott, ahol az árdinamikát a kereslet-kínálat egyensúlya vezérli; többletkínálat esetén az ár csökken, többletkereslet mellett növekszik, egyensúly esetén pedig változatlan marad. Arrow modellje folytonos időskálát feltételezett. Jelen dolgozatunkban az Arrow-féle modell diszkrét változatát összekapcsoljuk dinamikus oligopol játékokkal, ily módon egy olyan diszkrét dinamikus modell adódik, amely figyelembe veszi mind a termelői, mind a fogyasztói oldalt. Teljes információt tételezünk fel a múltbeli adatokra vonatkozólag, az előrejelzések esetére pedig három módszert vizsgálunk: statikus, adaptív és extrapolatív becsléseket. Az így adódó rendszerek globális aszimptotikus stabilitását vizsgáljuk meg. Először a matematikai modellt ismertetjük, majd a teljes információs esetet mutatjuk be. A három következő paragrafusban a három különböző előrejelzési módszerrel foglalkozunk. A

[1] A kutatást a Magyar-Amerikai Tudományos és Technológiai Közös Alap (JF No. 224) és az NSF (INT-9312030) támogatta. Beérkezett 1994. szeptember 10.

stabilitási feltételeket hasonlítjuk össze, és a dolgozat befejezéseként az eredmények közgazdasági értelmezését tárgyaljuk.

2. A matematikai modell

Egy olyan piacot vizsgálunk, amelyben N termelő ugyanazt a terméket termeli és értékesíti. Ha x_k jelöli a k-dik termelő által előállított mennyiséget, akkor jelölje $C_k(x_k) = B_k x_k^2 + b_k x_k + c_k$ a költségfüggvényét, ahol az összes együttható pozitív. Feltesszük, hogy minden egyes $t = 0, 1, 2, \ldots$ időpontban az összes termelő megbecsüli a várható árat, és az így adódó várható hasznát maximalizálja. Ha $p_k^E(t)$ jelöli a k-dik termelő árbecslését a t időpontban, akkor várható haszna: $x_k p_k^E(t) - C_k(x_k)$, így feltételezzük, hogy a t időpontban az egyes termelők az

$$x_k(t) = \arg\max_{x_k \geq 0} \left\{ x_k p_k^E - C_k(x_k) \right\} \tag{1}$$

szabállyal választják meg termékmennyiségeiket. Feltéve, hogy $x_k(t) > 0$, egyszerű differenciálással adódik, hogy

$$x_k(t) = \frac{p_k^E(t) - b_k}{2B_k} . \tag{2}$$

Ha $p_0^E(t)$ jelöli a fogyasztás által becsült árat, akkor feltesszük, hogy $d(t) = Dp_0^E(t) + d$ $(D < 0,\ d > 0)$ a piaci kereslet. Arrow (1960) gondolatmenetét átvéve feltesszük, hogy az ár növekszik, ha a kereslet nagyobb, mint a kínálat; az ár csökken, ha a kínálat nagyobb mint a kereslet; és változatlan marad, ha a kereslet és a kínálat egyensúlyban van. Ez a követelmény úgy modellezhető, ha feltesszük, hogy

$$p(t+1) = p(t) + Ky(t) , \tag{3}$$

ahol $K > 0$ egy adott konstans, és

$$y(t) = d(t) - \sum_{k=1}^{N} x_k(t) \tag{4}$$

jelenti a többlet-igényt.

A (2) és (3) egyenletek egy diszkrét lineáris rendszert definiálnak, amelynek dinamizmusa alapvetően függ attól, hogy a termelők és a fogyasztók milyen módon becslik az árat. Dolgozatunkban négy esettel foglalkozunk.

(i) A *teljes információs eset*ről akkor beszélünk, ha

$$p_k^E(t) = p(t) , \tag{5}$$

azaz a k-dik termelő ($k \geq 1$ esetén) és/vagy a fogyasztók ($k = 0$ esetén) a pontos árat ismerik.

(ii) *Statikus becslés*ről akkor beszélünk, ha

$$p_k^E(t) = p(t-1) , \tag{6}$$

azaz a k-dik termelő vagy a fogyasztók felteszik, hogy az ár ugyanaz marad a t időpontban, mint a $(t-1)$ időpontban volt.

(iii) *Adaptív becslés* esetén feltételezzük, hogy

$$p_k^E(t) = M_k p(t-1) + (1 - M_k) p_k^E(t-1) , \tag{7}$$

vagyis a $p_k^E(t)$ becslés egy alkalmas érték az előző ár és árbecslés között. Megjegyezzük, hogy az $M_k = 1$ esetben a (7) becslés statikussá redukálódik. Adaptív becslések esetén általában feltesszük, hogy $0 < M_k \leq 1$.

(iv) *Extrapolatív becslések* esetén

$$p_k^E(t) = M_k p(t-1) + (1 - M_k) p(t-2) \qquad (M_k > 0) . \tag{8}$$

A továbbiakban az így adódó diszkrét dinamikus rendszerek aszimptotikus stabilitását vizsgáljuk meg.

3. A teljes információs eset

A (2), (3), (4) és (5) egyenletek kombinálásával azonnal adódik, hogy

$$\begin{aligned} p(t+1) &= p(t) + K\left(Dp(t) + d - \sum_{k=1}^{N} \frac{p(t) - b_k}{2B_k}\right) \\ &= \left(1 + KD - K\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2B_k}\right) p(t) + \left(Kd + K\sum_{k=1}^{N} \frac{b_k}{2B_k}\right) \end{aligned} \tag{9}$$

Ez az egydimenziós rendszer akkor és csak akkor globálisan aszimptotikus stabilis, ha

$$-1 < 1 + KD - K\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2B_k} < 1$$

(ld. például Szidarovszky és Bahill, 1992), amely ekvivalens a

$$D > \frac{1}{2K}\left(K\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{B_k} - 4\right) \tag{10}$$

egyenlőtlenséggel. Ahhoz, hogy ennek a feltételnek eleget tevő $D < 0$ érték egyáltalán létezzék, szükséges, hogy

$$K < \frac{4}{\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{B_k}} \tag{11}$$

teljesüljön. Ez az egyenlőtlenség azt jelenti, hogy az árváltozás K együtthatója elegendően kicsi kell, hogy legyen, és rögzített K érték mellett a (10) feltétel akkor teljesül, ha $|D|$ elegendően kicsi, azaz a piaci keresletfüggvény nem nagyon csökkenő.

4. Statikus becslések esete

A (2), (3), (4) és (6) egyenletek összevonásával egy másodrendű differenciaegyenletet kapunk:

$$\begin{aligned} p(t+1) &= p(t) + K\left(Dp(t-1) + d - \sum_{k=1}^{N} \frac{p(t-1) - b_k}{2B_k}\right) \\ &= p(t) + \left(KD - K\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2B_k}\right) p(t-1) + \left(Kd + K\sum_{k=1}^{N} \frac{b_k}{2B_k}\right) \end{aligned} \tag{12}$$

feltételezve, hogy az összes termelő és a fogyasztók is statikus becslést alkalmaznak. A (12) rendszer karakterisztikus egyenlete:

$$\lambda^2 - \lambda - \left(KD - K\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2B_k}\right) = 0\,. \tag{13}$$

A (12) rendszer stabilitásának vizsgálatához szükségünk van a következő segédtételre (ld. Okuguchi és Szidarovszky, 1990):

1. Lemma. *A $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$ (a_1 és a_2 valós együtthatók) egyenlet gyökei akkor és csak akkor vannak az egységkörben, ha*

$$a_2 < 1\,, \qquad a_2 > -a_1 - 1 \quad \text{és} \quad a_2 > a_1 - 1 \tag{14}$$

Tehát a (13) egyenlet gyökei akkor és csak akkor vannak az egységkörben, ha

$$-K\left(D - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2B_k}\right) < 1$$

és

$$-K\left(D-\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2B_k}\right)>\max\{1-1;-1-1\}=0$$

Minthogy a második egyenlőtlenség mindig fennáll, a (12) rendszer akkor és csak akkor globálisan aszimptotikus stabilis, ha

$$D>\frac{1}{2K}\left(K\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{B_k}-2\right). \tag{15}$$

Ennek a feltételnek eleget tevő $D<0$ érték csak akkor létezik, ha

$$K<\frac{2}{\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{B_k}} \tag{16}$$

Ez esetben pedig a (15) feltétel azt jelenti, hogy $|D|$ elegendően kicsi legyen, azaz hasonlóan a teljes információs esethez, rögzített K mellett a (15) feltétel csak akkor teljesül, ha a piaci keresletfüggvény nem nagyon csökkenő.

Tegyük fel ezután, hogy a termelők továbbra is a statikus becslést alkalmazzák, viszont a fogyasztók ismerik a pontos árat. Ekkor a (12) modell a következőképpen módosul:

$$\begin{aligned} p(t+1) &= p(t)+K\left(Dp(t)+d-\sum_{k=1}^{N}\frac{p(t-1)-b_k}{2B_k}\right)\\ &= (1+KD)p(t)-\left(K\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2B_k}\right)p(t-1)+\left(Kd+K\sum_{k=1}^{N}\frac{b_k}{2B_k}\right) \end{aligned} \tag{17}$$

A rendszer karakterisztikus egyenlete:

$$\lambda^2-(1+KD)\lambda+K\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2B_k}=0\,,$$

amelynek gyökei akkor és csak akkor vannak az egységkörben, ha

$$K\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2B_k}<1$$

és

$$K\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2B_k}>\max\{KD,-2-KD\}\,.$$

Ezek az egyenlőtlenségek ekvivalensek a következőkkel:

$$K < \frac{2}{\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{B_k}}\,; \qquad D > \frac{1}{2K}\left(-K\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{B_k} - 4\right). \tag{18}$$

Ez a feltételrendszer ugyanúgy értelmezhető, mint azt az előző esetben bemutattuk.

5. Adaptív becslések esete

Ha az összes termelő és a fogyasztók egyaránt adaptíven becsülik az árat, akkor a (2), (3), (4) és (7) egyenletek összekapcsolásával a

$$\begin{aligned} p(t+1) &= p(t) + K\left(Dp_0^E(t) + d - \sum_{k=1}^{N}\frac{p_k^E(t) - b_k}{2B_k}\right) \\ p_k^E(t+1) &= M_k p(t) + (1-M_k)p_k^E(t) \qquad (k = 0,1,2,\ldots,N) \end{aligned} \tag{19}$$

rendszeregyenleteket nyerjük, amelyek együtthatómátrixa

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & KD & -\frac{K}{2B_1} & \cdots & -\frac{K}{2B_N} \\ M_0 & 1-M_0 & & & \\ M_1 & & 1-M_1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ M_N & & & & 1-M_N \end{pmatrix}.$$

Az **A** mátrix sajátérték-feladata:

$$\begin{aligned} u + KDv_0 - \sum_{k=1}^{N}\frac{K}{2B_k}v_k &= \lambda u \\ M_k u + (1-M_k)v_k &= \lambda v_k \qquad (k = 0,1,\ldots,N) \end{aligned} \tag{20}$$

A második egyenletből

$$v_k = \frac{M_k}{\lambda - (1-M_k)}u\,, \tag{21}$$

ahol feltesszük, hogy $\lambda \neq 1 - M_k$. Minthogy $M_k \in (0,1]$, az esetleges $1 - M_k$ sajátérték nem befolyásolja a rendszer stabilitási tulajdonságait. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $M_0 = M_1 = \ldots = M_N = M$. Ekkor a (21) egyenlőséget a (20) első egyenletébe helyettesítve a

$$\frac{KDM}{\lambda - (1-M)} - \left(\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2B_k}\right)\cdot\frac{KM}{\lambda-(1-M)} = \lambda - 1$$

egyenlőséget nyerjük. Egyszerű számolással adódik, hogy ez az egyenlet ekvivalens a következő másodfokú egyenlettel:

$$\lambda^2 + \lambda(M-2) + \left(1 - M - KDM + KM \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2B_k}\right) = 0\,. \tag{22}$$

Az 1. Lemma alapján az egyenlet gyökei akkor és csak akkor vannak az egységkör belsejében, ha

$$1 - M - KDM + KM \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2B_k} < 1$$

és

$$1 - M - KDM + KM \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2B_k} > \max\{-M+1; M-3\}\,.$$

Egyszerű számolással belátható, hogy ez a feltételrendszer ekvivalens a (15) egyenlőtlenséggel. Tehát stabilitás szempontjában ez az eset ekvivalens a statikus becslések esetével.

Tegyük fel ezután, hogy az összes termelő továbbra is adaptív becslést alkalmaz, viszont a fogyasztók ismerik a pontos árat. Ekkor a (19) modell a következőképpen módosul:

$$\begin{aligned} p(t+1) &= p(t) + K\left(Dp(t) + d - \sum_{k=1}^{N} \frac{p_k^E(t) - b_k}{2B_k}\right) \\ p_k^E(t+1) &= M_k p(t) + (1-M_k)p_k^E(t) \qquad (k = 1, 2, \ldots, N)\,. \end{aligned} \tag{23}$$

A rendszer együtthatómátrixa

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1-KD & -\frac{K}{2B_1} & \cdots & -\frac{K}{2B_N} \\ M_1 & 1-M_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ M_N & & & 1-M_N \end{pmatrix}$$

Hasonlóan az előző esethez kimutatható, hogy a $M_1 = M_2 \ldots = M_N = M$ speciális esetben a (22) karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^2 + \lambda(M-2-KD) + \left(1 - M + KD - KDM + KM \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2B_k}\right) = 0\,, \tag{24}$$

amelynek gyökei akkor és csak akkor vannak az egységkör belsejében, ha $0 < M < 1$ esetén

$$\frac{M}{2(1-M)K}\left(2 - K\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{B_k}\right) > D > -\frac{2}{K} - \frac{M}{2(2-M)} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{B_k} \tag{25}$$

és $M = 1$ esetén

$$K \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{B_k} < 2 \qquad \text{és} \qquad D > \frac{1}{2K}\left(-K\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{B_k} - 4\right). \tag{26}$$

Vegyük észre, hogy a (26) feltételek ugyanazok, mint amelyeket a statikus esetben korábban kaptunk. Ez természetes, hiszen az $M = 1$ esetben statikussá redukálódik az adaptív becslés. Tetszőleges $0 < M < 1$ esetén a (25) egyenlőtlenségnek akkor és csak akkor van D-re megoldása, ha

$$K \le \frac{2}{\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{B_k}}. \tag{27}$$

6. Extrapolatív becslések esete

Tegyük fel először, hogy az összes termelő és a fogyasztók is extrapolatív becslést választanak. A (2), (3), (4) és (8) egyenletek összevonásával most a következő rendszer adódik:

$$\begin{aligned} p(t+1) &= p(t) + K\Big[D\big(M_0 p(t-1) + (1-M_0)p(t-2) + d - \\ &\quad - \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{B_k}\big(M_k p(t-1) + (1-M_k)p(t-2) - b_k\big)\Big] \end{aligned} \tag{28}$$

amely egy harmadrendű lineáris differenciaegyenlet. Azonnal látható, hogy a karakterisztikus egyenlet harmadfokú:

$$\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda\left(-KDM_0 + K\sum_{k=1}^{N}\frac{M_k}{2B_k}\right) + \left(KD(M_0-1) + K\sum_{k=1}^{N}\frac{1-M_k}{2B_k}\right) = 0\,. \tag{29}$$

A gyökök vizsgálatánál felhasználjuk majd a következő eredményt:

2. Lemma. *A $\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$ (a_1, a_2 és a_3 valós együtthatók) egyenlet gyökei akkor és csak akkor vannak az egységkörben, ha az*

$$1+a_1+a_2+a_3, \qquad 1-a_1+a_2-a_3, \qquad 3+a_1-a_2-3a_3, \qquad 3-a_1-a_2+3a_3$$

és az

$$1 - a_3^2 + a_1 a_3 - a_2$$

mennyiségek valamennyien pozitívak.

A lemma bizonyítása megtalálható az Okuguchi és Irie (1989) dolgozatban.

Feltéve ismét, hogy $M_0 = M_1 = \ldots = M$, egyszerű számolással adódik, hogy a (28) rendszer akkor és csak akkor globálisan aszimptotikusan stabilis, ha

$$D > \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{B_k} + \frac{1-\sqrt{1+4(1-M)^2}}{2K(1-M)^2}. \tag{30}$$

Megjegyezzük, hogy a (30) egyenlőtlenségnek akkor és csak akkor van negatív D megoldása, ha

$$K < \frac{\sqrt{1+4(1-M)^2}-1}{(1-M)^2\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{B_k}}. \tag{31}$$

Tekintsük végül azt az esetet, amikor a termelők továbbra is extrapolatív becsléseket választanak, viszont a fogyasztók ismerik a pontos árat. Ekkor a (28) egyenlet a következőképpen módosul:

$$p(t+1) = p(t)+K\left[Dp(t)+d-\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2B_k}(M_kp(t-1)+(1-M_k)p(t-2)-b_k)\right] \tag{32}$$

amely karakterisztikus egyenlete ismét harmadfokú:

$$\lambda^3-\lambda^2(1+KD)+\lambda K\sum_{k=1}^{N}\frac{M_k}{2B_k}+K\sum_{k=1}^{N}\frac{1-M_k}{2B_k}=0.$$

A 2. Lemma alapján egyszerű számolással látható, hogy a gyökök akkor és csak akkor vannak az egységkörben,
ha $M<1$ esetén

$$\min\left\{\frac{2}{K}+(2M-3)\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2B_k};\ \frac{4-K^2(1-M)^2\left(\sum\limits_{k=1}^{N}\frac{1}{B_k}\right)^2-2K\sum\limits_{k=1}^{N}\frac{1}{B_k}}{2K^2(1-M)\sum\limits_{k=1}^{N}\frac{1}{B_k}}\right\}>$$

$$>D>\max\left\{-\frac{2}{K}-(2M-1)\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2B_k};\ -\frac{4}{K}-(3-4M)\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2B_k}\right\};$$

$M=1$ esetén

$$K\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{B_k}<2 \qquad \text{és} \qquad D>-\frac{2}{K}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{B_k}$$

és $M > 1$ esetén

$$\frac{2}{K} + (2M-3)\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2B_k} > D >$$

$$\max\left\{-\frac{2}{K} - (2M-1)\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2B_k};\ -\frac{4}{K} - (3-4M)\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2B_k};\ Q\right\},$$

ahol

$$Q = \frac{-4 + K^2(1-M)^2\left(\sum\limits_{k=1}^{N}\frac{1}{B_k}\right)^2 + 2K\sum\limits_{k=1}^{N}\frac{1}{B_k}}{2K^2(M-1)\sum\limits_{k=1}^{N}\frac{1}{B_k}}$$

7. Megjegyzések

Modellünkben a dinamizmust a hiány, illetve többlettermelés vezérelte. Az itt bemutatotthoz hasonlóan vizsgálható egy alternatív modell, amelyben minden időpontban feltesszük a kereslet és kínálat egyensúlyát, és amelyben a dinamizmust az előrejelzési módszer vezérli. A stabilitási vizsgálat is hasonlóan történhet. A részletek megtalálhatók a Szidarovszky és Yen (1994) dolgozatban.

A modell többtermékes kiterjesztése is hasonlóan történhet, mint azt Okuguchi és Szidarovszky (1990) mutatta be dinamikus oligopol problémák esetére. Ilyenkor a mátrixelemeket kisebb méretű mátrixok behelyettesítik, és az így adódó speciális szerkezetű hipermátrixok sajátértékeinek elhelyezkedését kell vizsgálnunk.

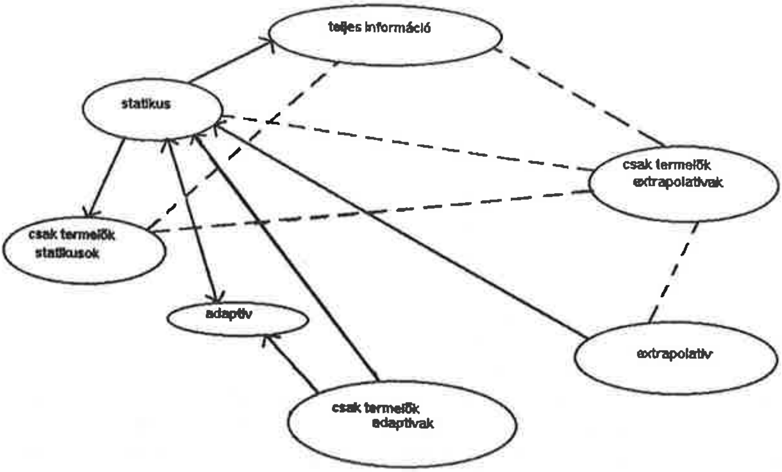
Feltesszük, hogy a termelők költségfüggvénye kvadratikus, és mindhárom együttható pozitív. A $B_k > 0$ feltétel szerint C_k konvex. Minthogy $b_k = C_k'(0)$ és $c_k = C_k(0)$, e két együttható pozitív volta is természetes követelmény. Azt is feltettük, hogy minden t időpontban az összes termelő profitmaximalizáló termelési programja pozitív. Ez a feltételezés is természetes, hiszen, ha valamelyik termelő optimális termelési programja zérus, akkor ez a termelő kilép a piacról, így a későbbi időpontokban nem kell vele számolnunk, azaz aszimptotikus vizsgálatokban mindezektől a termelőktől eltekinthetünk. A keresleti függvényben a $D < 0$ feltétel annak csökkenését jelenti, a $d > 0$ feltétel pedig azt, hogy zérus ár esetén pozitív kereslet jelentkezik. Mindkét feltétel ily módon reális. Az adaptív becslés értelmezése érdekében írjuk át a (7) egyenletet a

$$p_k^E(t) = p_k^E(t-1) + M_k\big(p(t-1) - p_k^E(t-1)\big)$$

alakba. Az új becslés a közvetlenül megelőzőből úgy adódik, hogy a becslési hiba egy részét ahhoz hozzáadjuk. Ha a teljes becslési hibát adjuk a megelőző becsléshez, akkor (az $M_k = 1$ speciális esetben) a statikus becslést nyerjük.

Az alapmodell dinamizmusát a (3) árdinamizmus vezérli. Vegyük észre, hogy ez az egyenlet Arrow (1960) megfelelő (folytonos időskálára vonatkozó) árdinamizmusának diszkrét megfelelője. Modellünk azonban nem tekinthető egyszerűen az Arrow-modell diszkrét változatának, hiszen egyaránt figyelembe veszi a termelői és fogyasztói oldal árbecslési módszerét és a termelék közötti versenyt is.

Összehasonlítva a teljes információ és a statikus becslés esetét, azonnal látható, hogy a (16) feltétel szigorúbb, mint a (11) egyenlőtlenség, valamint a (15) egyenlőtlenségből következik a (10) reláció. Tehát a teljes információ melletti globális aszimptotikus stabilitás következik a statikus eset globális aszimptotikus stabilitásából. Vegyük észre, hogy (18) első egyenlőtlensége azonos (16)-tal, valamint (16) fennállása esetén (15)-ből következik a (18) második feltétele. Tehát a (12) rendszer globális aszimptotikus stabilitásából következik a (17) rendszer globális aszimptotikus stabilitása. Megjegyezzük, hogy a (17) és a (9) rendszer globális aszimptotikus stabilitása független egymástól, hiszen a (16) feltétel erősebb (11)-nél, viszont (18) második egyenlőtlensége mindig gyengébb (10)-nél. Érdekes, hogy ha az összes termelő és a fogyasztók is adaptív becslést alkalmaznak, akkor a rendszer stabilitás szempontjából ekvivalens a statikus esettel. Egyszerű számolással igazolható, hogy $0 < M < 1$ esetben a (15) egyenlőtlenség jobb oldala mindig nagyobb, mint a (26) második egyenlőtlenségének jobb oldala. Ezért csak a termelők adaptív becslése esetén fellépő globális aszimptotikus stabilitásból következik ugyanaz a statikus esetre (ami ekvivalens azzal az esettel, amikor a termelők és a fogyasztók egyaránt adaptív becslést választanak). Vegyük észre, hogy a (31) egyenlőtlenség szigorúbb, mint (18) első egyenlőtlensége és így ebből következik (11). A (30) jobb oldala $M \neq 1$ esetén nagyobb, $M = 1$ esetben pedig azonos a (15) egyenlőtlenség jobb oldalával. Tehát az extrapolatív becslések melletti globális aszimptotikus stabilitásból következik ugyanaz a statikus esetre, ebből pedig ugyanaz a teljes információs esetre. Tekintsük ezután az utolsó vizsgált esetet, amikor az összes termelő extrapolatív becslést alkalmaz, amíg a fogyasztók pontosan ismerik az árat. Az $M = 1$ eset megfelel a statikus becslésnek, így a kapott eredmény is természetesen azonos az ott nyert feltételekkel. Az egyenlőtlenség-rendszer tovább nem egyszerűsíthető, hiszen egyik egyenlőtlenség sem szigorúbb általában, mint a másik. Ugyancsak egyetlen másik stabilitási feltétel sem következik általában ebből a feltételrendszerből, és ez a feltételrendszer sem következik egyetlen másik stabilitási feltételből sem általában. A különböző stabilitási feltételek kapcsolatát mutatja be az 1. ábra.



1. ábra: A stabilitási kritériumok összehasonlítása

Irodalom

1. Okuguchi, K. (1976) Expectations and Stability is Oligopoly Models. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York.
2. Okuguchi, K. és Szidarovszky F. (1990) The Theory of Oligopoly with Multi-Product Firms. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York.
3. Arrow, K. J. (1960) Price-Quantity Adjustments in Multiple Markets with Rising Demands. In K. J. Arrow et. al. (eds) Mathematical Methods in the Social Sciences. Stanford University Press, Stanford, CA.
4. Szidarovszky F. és A. T. Bahill (1992) Linear Systems Theory. CRC Press, Boca Raton/London.
5. Okuguchi, K. és K. Irie (1989) The Schur and Samuelson Conditions for a Cubic Equation. Working Paper, Tokyo Metropolitan University, Tokyo, Japan.
6. Szidarovszky F. és J. Yen (1994) Adaptive and Cournot Expectations in a Special Consumer-Producer Market. Pure Mathematical and Application (Közlésre elfogadva).

ON THE STABILITY OF A DISCRETE DYNAMIC PRODUCER–CONSUMER MODEL

In the paper Arrow's dynamic market model and dynamic oligopoly models are combined as a discrete-time dynamic system, which can handle the imperfect knowledge of the producers and the consumers, their estimations and decisions aiming at the optimal production program. Beyond the full information case, also the static, adaptive and extrapolative cases are examined. Necessary and sufficient conditions are derived for the global asymptotical stability of the corresponding systems. Finally, the stability conditions are compared with each other.