# A VEZETŐI DÖNTÉSHOZATAL FOLYAMATÁNAK TÁMOGATÁSA SZEMÉLYI SZÁMÍTÓGÉPEN, WINDOWS KÖRNYEZETBEN[1]

CSÁKI PÉTER, CSISZÁR LEVENTE, FÖLSZ FERENC, KELLER KRISZTINA, LÓRÁNT GÁBOR, MÉSZÁROS CSABA, RAPCSÁK TAMÁS, TURCHÁNYI PIROSKA

*MTA SZTAKI Operációkutatás és Döntési Rendszerek Osztály*

Az MTA SZTAKI Operációkutatás és Döntési Rendszerek Osztálya több éve fejleszt személyi számítógépen (azok lokális hálózatán) Windows környezetben futó döntéstámogató rendszert, amely olyan döntési helyzetekben alkalmazható, mikor döntéshozók egy csoportjának több alternatívát kell több szempont szerint értékelnie, rangsorolnia. A WINGDSS nevű rendszer rugalmas keretrendszer, mely dBase kompatibilis adatbázisokkal tart dinamikus kapcsolatot, az adatok megjelenítésére és frissítésére adatlap generálóval, eljárások (hasznossági függvények) definiálására saját belső fordítóval és érzékenységvizsgálati modullal rendelkezik. Felkészített más programokkal való kapcsolódásra: pl. táblázatkezelő rendszer – EXCEL, lineáris programozási feladat megoldó szoftver és térinformatikai rendszerek. A rendszert több gyakorlati probléma megoldásánál alkalmaztuk, mint pl. szociális pályázatok kiértékelése, szállodák vagyonértékének meghatározása, az Alföld környezeti problémáinak vizsgálata.

## 1. Bevezetés

Napjainkban a döntéshozói csoportok, testületek körében egyre nő az igény az olyan számítógépes rendszerek iránt, amelyek az információ-szolgáltatás, s azon túlmenően, az információkon alapuló *döntési folyamat* emberi oldalát helyezik előtérbe. Könnyen kezelhető, felhasználóbarát, adatbázisok rugalmas építését, lekérdezését, módosítását, az adatok szemléletes megjelenítését, meglévő információkból a felhasználó által választott, meghatározott eljárások segítségével új adatokat, információkat generáló intelligens rendszerekre van szükség. Az ilyen fajta információ-feldolgozás körébe tartoznak a döntési folyamatokat támogató és előkészítő rendszerek is. Az irodalomban döntési modelleknek több megközelítése terjedt el, mint pl. a páros összehasonlításon

[1] Beérkezett 1994. október 10.

alapuló és algebrai technikát (AHP) [33,34], ill. gráfelméleti technikákat alkalmazó modellek [5,32], az optimális elemhez hasonlító modell [12], vagy az egyszerű többkritériumos rangsorolás (SMART). A modellek számítógépes megvalósítása is megtörtént: EXPERT CHOICE [38], ELECTRE II [32,38], PROMETHE [38], KIPA [13,24], JOKER [13]. Több módszer részletes ismertetése megtalálható [38]-ban. Magyarországon is sikeresen alkalmazták ezeket a szoftvereket gyakorlati problémáknál [18,19,31,37]. A csoportos döntéshozatal axiomatikus megközelítésével több dolgozat is foglalkozik [11,14, 15,16,21,22,23,27,38].

A WINGDSS elnevezésű rendszer rendkívül rugalmas, moduláris keretrendszer, mely dBase kompatibilis adatbázisokkal és adatbázis-kezelőkkel dinamikus kapcsolatot tart fenn, az adatok megjelenítésére adatlap generálóval, eljárások (makrók) definiálására saját belső fordítóval rendelkezik. Támogatja mind az egyéni, mind a csoportos döntéshozatali folyamatot.

Az alternatívák értékelése a döntéshozók által közösen elfogadott, hierarchikus szempontrendszer alapján történik. Az értékelésben objektív és szubjektív megítélések is szerepet kapnak, és döntéshozatali prioritások közötti különbségek is érvényesíthetők.

A WINGDSS rendszerben az értékeléskor figyelembe vehetők a döntéshozók ítéleteinek bizonytalanságai és nyomon követhető a hatásuk. Megvizsgálható, hogy egy alternatíva rangsorbeli helyzete mennyire stabil, illetve kívánság szerint változtatható-e. Kimutatható egy-egy értékelési szempont esetleges dominanciája az alternatívák rangsorának alakulásában. Rendszerünk fejlesztésénél nagy hangsúlyt fektettünk a grafikus szemléltetésre. Több sikeres alkalmazás áll mögöttünk, amelyek egyúttal a rendszer továbbfejlesztésének irányait is kijelölték.

## 2. A WINGDSS rendszer fejlesztésének és működésének alapelvei

A WINGDSS az egyéni és a csoportos döntéshozatal folyamatát támogatja. A rendszer előző verzióinak angol nyelvű leírása megtalálható [8,9]-ben. Olyan feladatok elvégzésére alkalmazható, amikor egy vagy több szakértőnek kell értékelnie, rangsorolnia az alternatív lehetőségeket több szempont szerint, vagy több alternatíva közül a szempontoknak leginkább megfelelőt szükséges kiválasztani. Tehát a WINGDSS az ún. többszempontú döntéshozatal (angolul: multicriteria decision making) témakörébe tartozó feladatok megoldásában nyújt segítséget.

Természetesen a WINGDSS rendszer nem helyettesíti a döntéshozók munkáját, de feltételezve, hogy az értékelők célja a megegyezés, a folyamatot sokoldalúan támogatja. Mint később részletesen ismertetjük, a rendszer fejlesztési alapelve az, hogy ne egy megoldási módszert kényszerítsünk a felhasználókra, hanem a rendszer interaktív módon segítse a szakértőket a döntési probléma megértésében, a szempontrendszer megválasztásában és az értékelési folyamat rugalmas alakításában. A döntéshozatal számítógépes támogatásánál csak akkor remélhetünk sikereket, ha az emberi, pszichológiai tényezőkre is hangsúlyt helyezünk [1,2,3].

Azok a szakértők, menedzserek, akik a WINGDSS több éves fejlesztése során a rendszer alkalmazásával próbálkoztak, és eközben értékes javaslatokat adtak a rendszer továbbfejlesztéséhez, eltérő számítógépes kultúrával rendelkeztek és a WINGDSS „filozófiájának" megértése is eltérő mélységű problémát jelentett számukra. Tapasztalnunk kellett, hogy a menedzserek nem kedvelik a számukra fekete dobozként működő rendszereket, ahol a probléma megoldására csak be kell adni az adatokat, s kijön egy eredmény, amelyről a rendszer készítői azt állítják, hogy az adott feltételek mellett optimális. Ezeket még akkor sem részesítik előnyben, ha több megoldási algoritmus áll a rendelkezésükre.

Véleményünk szerint nagyon fontos, hogy ne az alternatívák algoritmikus értékelésén legyen a hangsúly, hanem a döntéshozatal összetett folyamatából minél több lépést támogassunk a probléma megfogalmazásától, strukturálásától az értékelés utáni eredmény analizálásáig, sőt az analízisből származó módosítási igények figyelembevételét, a döntési folyamat egyes lépéseinek a megismétlését is biztosítsuk. Olyan rendszerekkel remélhetünk sikereket, mellyel a döntéshozók új ismereteket szereznek a problémáról, megértik és megtanulják a rendszer lehetőségeit, irányíthatják a működését, saját maguk fogalmazhatják meg a döntési szempontokat, kísérletezhetnek a szempontok értékelését befolyásoló döntési paraméterekkel és az értékelési eljárásokkal. Az alkalmazásoknál kerül előtérbe azon vizsgálatok szükségessége, hogy a paraméterek változásai milyen hatással vannak az alternatívák sorrendjére, vagy épp fordítva, van-e mód megvizsgálni, hogy a kívánt rangsor elérhető-e.

Mindezek, valamint annak igénye, hogy rendszerünket különféle területeken, különböző (ugyanakkor a többszempontú döntéshozatal témakörébe illő) feladatok megoldására kívántuk hasznosítani, rendkívüli rugalmasságot, könnyen kezelhető felhasználói felületet, sok grafikus szemléltetést követeltek a WINGDSS készítőitől. Rendszerünk több éves kutatás-fejlesztés eredménye.

A következő fejezetekben részletesen ismertetjük a döntési alapproblémát, a WINGDSS által támogatott döntéshozatali fázisokat, a rendszer szoftver specifikumait, valamint a WINGDSS rendszer alkalmazásait.

## 3. A döntési probléma ismertetése

Az általunk vizsgált döntési szituációban egy vagy több döntéshozó véges sok szempont alapján értékel ugyancsak véges számú alternatívát. A klasszikus döntési modell Bridgman (1963) [6] nevéhez fűződik, melyet mi általánosabb formában tárgyalunk.

Tekintsünk $n$ alternatívát és $m$ szempontot. Jelölje $A_1, A_2, \ldots, A_n$ az alternatívákat és $C_1, C_2, \ldots, C_m$ a szempontokat. Tételezzük fel továbbá, hogy az alternatívákhoz tartozó adatok ismertek és a szempontokat fontosságuk szerint súlyoztuk. Jelölje $a_{ij} > 0$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ a $j$-edik alternatíva $i$-edik szempont szerinti értékét, $\omega_i > 0$, $i = 1, \ldots, m$ az $i$-edik szempont súlyát, $x_j$, $j = 1, ..., n$ pedig a keresett végső rangsort adó értékeket. Ezen adatokat táblázat formában a következőképpen írhatjuk fel:

$$\begin{array}{ccc}
 & & \begin{array}{ccc} x_1 & \ldots & x_n \\ A_1 & \ldots & A_n \end{array} \\
\begin{array}{c}\omega_1\\ \vdots \\ \omega_m\end{array} & \begin{array}{c} C_1 \\ \vdots \\ C_m\end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn}\end{pmatrix}
\end{array} \tag{1}$$

A döntési probléma az alternatívák kiértékelése, azaz egy olyan $\mathbf{x}$ vektor meghatározása a szempontok és a hozzá tartozó súlyok figyelembevételével, mely „jól megfelel" az (1) mátrix sorainak. A döntési elv az egyes szempontok értékelő-vektora és az $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ vektor általánosított Kullback I-divergenciából képzett súlyozott összeg minimalizálása.

Ez az elv a következő entrópia programozási feladatként fogalmazható meg [25,26]:

$$\min \frac{\sum_{i=1}^{m} \omega_i D(\mathbf{x}||\mathbf{a_i})}{\sum_{i=1}^{m} \omega_i} \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = c\,,$$

$$x_j \geq 0, \qquad j = 1, \ldots, n\,,$$

ahol az általánosított Kullback I-divergencia az $\mathbb{R}^n_+$ pozitív ortánsban van értelmezve és a definíció szerint [28,29]

$$D(\mathbf{x}||\mathbf{a}_i) = \sum_{j=1}^{n} x_j \log\left(\frac{x_j}{a_{ij}}\right) - \sum_{j=1}^{n} x_j + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,,$$

$\mathbf{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})^T$, $i = 1, \ldots, m$ és $c$ tetszőleges valós szám.

Vezessük be a $\sum_{i=1}^{m} \omega_i = \omega$ jelölést. Ekkor a (2) feladat optimális megoldása explicit alakban megadható:

$$x_j = c \frac{\prod_{i=1}^{m} a_{ij}^{\frac{\omega_i}{\omega}}}{\sum_{k=1}^{n} \prod_{i=1}^{m} a_{ik}^{\frac{\omega_i}{\omega}}}\,, \qquad j = 1, \ldots, n\,. \tag{3}$$

Megjegyezzük, hogy ez a modell általánosabb, mint az eredeti Bridgman modell, mert az általánosított I-divergencia értelmezési tartománya $\mathbb{R}_+^n$ az $\mathbb{R}_+^n \cap \{\, \mathbf{x} \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \,\}$ halmaz helyett, amely utóbbi a diszkrét valószínűségi eloszlásokat definiálja.

Ismert, hogy az általánosított I-divergencia nem szimmetrikus az $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ változókban, így új döntési elvet az $\mathbf{a}_i$ ($i = 1, \ldots, m$) és az $\mathbf{x}$ vektoroknak a célfüggvényben való felcserélésével kaphatunk, ami egy másik Bridgman-típusú modellhez vezet:

$$\min \frac{\sum_{i=1}^{m} \omega_i D(\mathbf{a}_i \| \mathbf{x})}{\sum_{i=1}^{m} \omega_i} \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = c\,, \qquad x_j \geq 0\,, \quad j = 1, \ldots, n\,.$$

A Bridgman-típusú modell optimális megoldásának explicit alakja:

$$x_j = c \frac{\sum_{i=1}^{m} \frac{\omega_i}{\omega} a_{ij}}{\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \frac{\omega_i}{\omega} a_{ik}}\,, \qquad j = 1, \ldots, n\,. \tag{5}$$

Ebből következik, hogy a legismertebb döntési elvek (a mértani és a számtani közép) ugyanolyan típusú, entrópia programozási feladatok explicit, optimális megoldásaiból nyerhetők. Ezeknek a döntési elveknek nagy előnye, hogy a döntési probléma matematikai programozási feladatra vezet. Ezenkívül a Kullback I-divergencia skalárinvariáns, statisztikus (a valószínűség legjobb közelítése a relatív gyakoriság) és a Bregmann tulajdonság teljesül (ha egy tetszőleges pontot egy altér egy alacsonyabb dimenziós alterére vetítünk, ezt úgy is megkaphatjuk, ha előbb a pontot az altérre vetítjük, majd a vetületet az alacsonyabb dimenziós altérre). A Kullback I-divergencia axiomatikus megalapozásával foglalkozik Csiszár a [10] dolgozatában. A fenti tulajdonságoknak köszönhetően az entrópia modelleket széleskörűen használják a különböző tudományterületeken és a mérnöki alkalmazásokban [20]. Mivel a statisztikában és a mérnöki tudományokban gyakran szerepelnek más eltérésfüggvények is (pl. Pearson és Hellinger), ezeket is választhatnánk a (4) feladat célfüggvényének. Így a döntési elvek egy általános osztályát kapjuk.

A döntési feladatok érzékenység-vizsgálatára szolgál a (4) feladat intervallum-aritmetikai módszerekkel való megoldása. Ha az explicit megoldás valamely általánosított közép formájában felírható, azaz

$$x_j = \Phi^{-1}\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\omega_i}{\omega}\Phi(a_{ij})\right), \qquad j = 1,\ldots,n, \tag{6}$$

ahol $\Phi$ egy szigorúan monoton, valós függvény, akkor az általunk kifejlesztett, későbbiekben ismertendő érzékenység-vizsgálat alkalmazható. Így az előbb megadott döntési elv osztályt tovább szélesítettük a (6) feltétel segítségével, implicit módon megadott döntési elvekkel.

A döntési elveknek ez az osztálya végtelen sok elemet tartalmaz, ugyanis a

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\omega_i}{\omega} a_{ij}^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

általánosított számtani és mértani közepek lesznek az optimális megoldásai annak az entrópia programozási feladatnak, amelynél a

$$H_\alpha(x\|a_i) = \frac{1}{\alpha(1-\alpha)}\sum_{j=1}^{m}\left(\alpha x_j + (1-\alpha)a_{ij} - x_j^{\alpha}a_{ij}^{\alpha-1}\right), \qquad \alpha \in I\!R, \tag{7}$$

Hölder-Young eltéréseket választjuk célfüggvénynek (ahol $H_\alpha(x\|a_i)$ határértékként van értelmezve az $\alpha = 0$ és az $\alpha = 1$ esetekre) [26]. Megjegyezzük továbbá, hogy a Bridgman-típusú modell (6)-ból a $\Phi(x) = x$ választással, a Bridgman modell pedig a $\Phi(x) = \log(x)$ választással adódik.

A gyakorlati alkalmazásoknál nagyon lényeges, hogy több döntési elv közül választhassunk, mivel a széleskörűen elterjedt számtani közepet különböző dimenziójú mennyiségekre alkalmazva nem mindig kapunk értelmes eredményt [17].

A cikkben olyan döntési problémákkal foglalkozunk, amelyek a Bridgman és a Bridgman-típusú modellek általánosításaként tekinthetők. Az egyes alternatívák egy-egy adatrendszerrel jellemezhetők, amelyek adatbázisban vannak tárolva, így nagyszámú alternatíva is kezelhetővé válik. A szempontok összefüggőek is lehetnek, közöttük alá- és fölérendeltség is értelmezhető a fastruktúra bevezetésével. Az egyes alternatíváknak a különböző szempontok szerint vett értékei helyett tetszőleges, interaktívan működő hasznossági függvény szolgáltatja a kívánt értéket. A feladatban több döntéshozó is lehet, ami már önmagában komoly nehézséget jelent.

## 3. A WINGDSS rendszerrel támogatható döntési folyamat lépései, a rendszer speciális moduljai

### 3.1 A döntési probléma megfogalmazása a rendszer eszközeivel

Elsőként a döntéshozók meghatározzák az értékelési szempontokat. Nagymértékben segíti az áttekinthetőséget, hogy a szempontok csoportosíthatók, s az összetett szempontokat egyszerűbbekre bontva felépíthető a ***döntési szempontok fája***. A tovább nem egyszerűsíthető szempontok a fa „levelei". A fa felépítését, módosítását egy könnyen kezelhető ***szempontrendszer-szerkesztő modul*** biztosítja. A döntéshozók közösen építik fel a szempontrendszert, de később nem kötelesek minden szempontot értékelni.

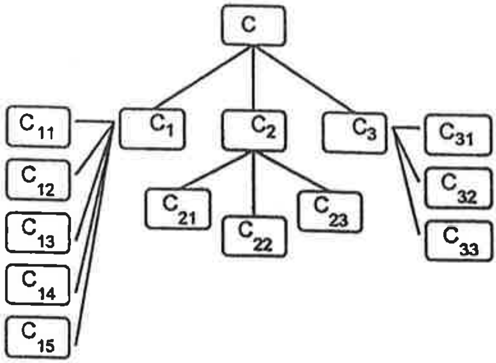
Rendszerünkben feltételezzük, hogy az ***alternatívák*** már valamilyen módon adottak, tehát (egyelőre) nem a WINGDSS rendszer állítja elő azokat. Pályázatra beérkezett ajánlatok, programrendszer által generált megoldások, beruházásra kijelölt térségek halmaza jelentheti például az értékelendő alternatívákat, amelyek első lépésben valamilyen külső adathordozón találhatók. Ugyanígy adottnak tekintjük a ***döntéshozók*** csoportját.

Az alternatívák és a döntéshozók adatai bármely, Windows alatt működő adatbázisban tárolhatók. Egy alternatíva vagy döntéshozó a megfelelő adatbázis egy-egy rekordjának felel meg. Tervezzük azt is, hogy a relációs adatbáziskezelőknél megszokott módon, több adatbázisból származó rekord összekapcsolása révén jöhessen létre egy-egy alternatíva a WINGDSS rendszerben. A külső adatbázis rekordjaiból kiválogatva kerülnek át az alternatívák és a döntéshozók adatai a rendszer belső adatbázisába. Ott még további szűrésre is van lehetőség, vagyis az adott feladathoz szükséges adatok igény szerint kapcsolhatók a rendszerhez. Természetesen, a rendszerben használt adatok és a külső adatbázisok között ***dinamikus*** a kapcsolat, a rendszerben ***új adatbázisok***at hozhatunk létre, jogosultság esetén meglevő adatbázisokat ***módosíthatunk***. Az adatok megtekintésére, módosítására ***adatlap szerkesztő modul***t fejlesztettünk ki, amelynek segítségével igény szerinti csoportosításban és elrendezésben tekinthetők meg (és módosíthatók) az alternatívák, illetve a döntéshozók adatai.

### 3.2 Az értékelési folyamat

A WINGDSS rendszerben alkalmazott értékelő módszer megértése szempontjából nagyon lényeges, hogy az alapfogalmakat tisztázzuk.

A döntési feladat megoldása során alternatívákat minősítünk egy fa struktúrába szervezett szempontrendszer alapján. Minden döntéshozó egyénileg dolgozik, az egyéni értékelés végeredménye alternatívánként egy-egy pontszám. Képzeljük el a következő egyszerű szempontfát:




Levél-szempontnak nevezzük a tovább nem bontott $C_{11,\ldots,15}$, $C_{21,\ldots,23}$, $C_{31,\ldots,33}$ szempontokat, magasabb rendűnek a $C_{1,2,3}$ szempontokat. Egy részfába tartozónak tekintjük például $C_{31,\ldots,33}$ vagy a $C_{1,2,3}$ szempontokat.

### 3.2.1 Szempontok súlyozása

A döntéshozók különbséget tehetnek a szempontok között fontosság alapján, amit a szempontokhoz rendelt számokkal fejeznek ki; ezeket nevezzük preferenciasúlyoknak.

Bizonyos döntéstámogató rendszerek azt feltételezik, hogy az alternatívák értékelése az egyes szempontok szerint adott, így a döntéshozó feladata már csak a szempontok súlyozására korlátozódik. A WINGDSS rendszer lehetőséget nyújt az alternatívák szubjektív szempontok szerinti értékelésére is, ezért a preferencia súlyok megadása csak az értékelés induló lépésének tekinthető.

A súlyok megadására a szakirodalomban számos módszer található. A két legelterjedtebb technika a páros összehasonlítás és a súlyok direkt megadása. A WINGDSS rendszerben a súlyok az eredeti elképzelés szerint közvetlenül adhatók meg, majd páros összehasonlítással tovább finomíthatók. A döntéshozó számára egy részfa jelenik meg, amely egy főbb szempont alá tartozó, egy szinten levő alszempontokból áll. (Például a $C_{1,2,3}$ szempontok, vagy a $C_{31,\ldots,33}$ szempontok.) A szempontoknak a megoldandó döntési probléma esetében „beszédes" nevük van, az alkalmazásokat ismertető fejezetben említett vagyonértékelési modellben például „Állag", „Hozam", vagy „Goodwill". A szempontokhoz a döntéshozó beírja az általa jónak gondolt súlyt, vagy a számítógép egere segítségével a szempontok súlyait jelképező téglalapok szélességét változtatva fejezi ki preferenciáját. A súlyozást a döntéshozók egyénileg végzik, mindenki más súlyrendszert ad(hat) meg. Célszerű a szempontfán a gyökértől lefelé (a levélszint irányában) haladva végezni ezt a műveletet. A súlyok bármikor módosíthatók, nemcsak az ide tartozó menürendszeren belül, hanem más menüpontokból is visszatérhetünk a súlyozáshoz. Később, az egyéni döntések aggregálása során a rendszer a különböző egyéni súlyokból egy közös csoportsúlyt képez (a fa minden egyes csúcsán).

Súlyozáskor a döntéshozó tulajdonképpen mindig páronként mérlegel, s háromnál több szempont súlyozása esetén már nehezen tud következetes maradni. Az expliciten megadott súlyok páros összehasonlítással történő finomabb beállítására szolgál a *súlyfinomítás* modul. A rendszer kiszámolja a szempontok páronkénti arányát (egy-egy részfán) a súlyokra vonatkozóan, és megjeleníti egy mátrixban. A döntéshozó ezektől eltérő arányokat állíthat be, melyek alapján a rendszer új súlyrendszert javasol egy közelítő eljárás segítségével [35]. Hasonló eljárást alkalmazott Temesi és Forgó az alternatívák pontszámainak meghatározásához [18].

### 3.2.2 Alternatívák minősítése az egyes szempontok szerint

A döntéshozók minden egyes alternatívát megvizsgálnak, azaz minősítenek a szempontok szerint. Ez a levél-szempontokon egy minősítő eljárás segítségével történik. Egyszerű pontozás esetén például egy alternatíva egy levélszemponton 1 és 5 közötti pontszámot kap, de természetesen bonyolultabb függvényeljárásra is szükség lehet az értékeléshez (szállodák vagyonértékelése esetén például a közgazdaságtanból ismert állag, hozam, goodwill függvényeket is alkalmaztuk).

Ez utóbbi minősítés objektív vagy szubjektív aszerint, hogy eredménye csak az adott alternatíva tulajdonságaitól, vagy a döntéshozó személyétől is függ. Egy "hozam" függvény esetében például a döntéshozók határozhatják meg a diszkontáló tényezőt.

Mivel szempontonként és feladatonként eltérő minősítő eljárásokra van szükség, kidolgoztunk egy saját *szerkesztő-fordító modult* a WINGDSS rendszerben, mely lehetővé teszi az egyes döntési feladatoknál az éppen szükséges minősítő eljárások alkalmazását. Ugyanakkor minősítő eljárásokat feladattól függetlenül is tárolhatunk, új feladat esetén módosítva felhasználhatunk.

### 3.2.3 Döntéshozók szakértelmének, kompetenciájának értékelése szempontonként

Szállodák vagyonértékeléséhez, beruházások környezeti hatásvizsgálatához felkért döntéshozók igen különböző képzettséggel, szakismerettel rendelkezhetnek. A döntéshozatali folyamatnak egyik kritikus része ezen különbözőségek figyelembevétele és kifejezésre juttatása a végső döntésben. A WINGDSS rendszer ezt szavazóerők formájában oldja meg. A szavazóerőkkel a döntéshozókat bíráljuk felül, technikailag pedig ismét súlyozunk. Feltehetjük, hogy a döntéshozatali folyamatban a döntésért felelős személy (supervisor) is képviselteti magát, aki nem értékeli az alternatívákat, de megállapítja a döntéshozók szavazóerőit. Minden egyes szemponton más-más szavazóerőt kaphat egy-egy döntéshozó, és különbséget lehet tenni a döntéshozó „súlyozási" és „minősítési" szakértelme között.

### 3.2.4 Alternatívák rangsorának képzése egy-egy döntéshozó esetén

Ha a döntéshozók megállapították a preferenciasúlyokat, már megtörtént a levél-szempontokon az alternatívák minősítése, akkor a WINGDSS rendszer minden egyes alternatívára – jelenleg számtani vagy mértani közepet számolva, de a rendszer modularitása miatt más módszer alkalmazását is megengedve – kiszámolja először a részfák gyökeréhez, majd tovább haladva, a teljes szempontfa gyökeréhez tartozó értéket, más néven pontszámot. A pontszámok alapján pedig természetesen adódik az alternatívák rangsora a következő képlet alapján:

$$\sum_j \omega_j^k a_{ij}^k = A_i^k \,, \tag{8}$$

azaz döntési elvnek a számtani közepet választva az egy részfába tartozó $C_j$ levél-szempontokon a $k$-adik döntéshozó által adott súlyokkal ($\omega_j^k$) és a minősítő függvényből az $i$-edik alternatívára kapott $a_{ij}^k$ értékekkel, a részfa gyökér szempontjánál így számolja a rendszer az $i$-edik alternatívára a $k$-adik döntéshozóhoz tartozó pontszámot. Az alternatívák végső rangsorát úgy kapjuk, hogy a (8)-beli eljárás ismétlődik a fán a gyökér felé haladva.

### 3.2.5 Az alternatívák csoportos rangsora

Mivel döntéshozónként különböző pontszámok, ezáltal különböző rangsorok adódnak az alternatívákra, joggal merül fel a kérdés, hogyan alakítható ki egy, minden döntéshozó által elfogadott csoportos rangsor. Előfordulhat, hogy a csoportnak már van is előzetesen egy rangsora az alternatívákról, s a rendszertől azt várják, hogy ezt a rangsort a lehető legjobban megközelítse. E szemlélet természetesen vitatható, hiszen egy előzetes döntés utólagos igazolásának is tekinthető, de a szakirodalomban elfogadott.

Mint említettük, csoportos döntési feladatokra általában jellemző, hogy a döntéshozók különböző szakterületek képviselői, döntéshozatalbeli kompetenciájuk nem egyforma, s ezért vezettük be a WINGDSS rendszerben a szavazóerők használatát. Az egyéni preferenciasúlyokból, s az egyénekhez tartozó szempontonkénti szavazóerőkből képezi a rendszer a döntéshozóktól független csoportsúlyokat a (8) képlettel analóg módon, azaz

$$\sum_k V(\omega)_j^k \omega_j^k = \overline{\omega}_j \, , \tag{9}$$

ahol döntési elvnek a számtani közepet választva egy $C_j$ levél-szemponton a $k$-adik döntéshozó által adott súlyokkal ($\omega_j^k$) és a $C_j$ szempontra kapott szavazóerővel ($V(\omega)_j^k$) így számolja a rendszer a döntéshozóktól független csoportsúlyt, a csoportos minősítési értékeket pedig (alternatívánként) a minősítésre adott $V(q)_j^k$ szavazóerőkkel a következő képletet adja:

$$\sum_k V(q)_j^k a_{ij}^k = Q_{ij} \, , \tag{10}$$

ahol $i$ az $i$-edik alternatívára vonatkozó index. Így a szempontfán csoportsúlyok és csoportos minősítési értékek képződnek, amelyek az egyéni döntéshozatalnál említett módon adják meg az $i$-edik alternatíva csoportos pontszámát. A (10) képlettel kapott alternatívák csoportos rangsora kielégíti a Keeney-féle axiomákat [22]. Temesi és Stahl hasonló képlettel számolta ki az alternatívák csoportos pontszámait [37] dolgozatában.

### 3.2.6 Bizonytalanságok figyelembevétele

Mivel az értékelés során esetenként több paramétert (például az egyéni preferenciákat kifejező súlyokat) nehéz pontosan megadni, a WINGDSS rendszer arra is lehetőséget nyújt, hogy bizonyos értékek a döntéshozó által javasolt határok között mozogjanak, s megmutatja, hogy az engedélyezett bizonytalanság milyen változásokat okoz az alternatívák pontszámában, s ezáltal a rangsorában. Megvizsgálható az is, hogy egy bizonyos szempont mennyire domináns az értékelésben, egy-egy alternatíva rangsorbeli helyzete mennyire stabil, s végül, egy választott alternatíva értékelése javítható-e a döntési paraméterek értékeinek megengedett mértékű változtatásával. Ezek a kérdések különösen fontosak akkor, ha a felhasználó csupán a legjobb vagy néhány legjobb alternatívát kívánja meghatározni (kiválasztási probléma, részleges rendezési probléma [36]).

Ezeket a vizsgálatokat tartalmazza az *érzékenység-vizsgálat modul,* mely két problémakörre terjed ki:

- bizonytalanságok hatása az alternatívák végső pontszámára az egyéni/csoportos rangsorban,
- a rangsor változtathatóságának vizsgálata.

A döntéshozók a döntési paraméterek rögzített értékei helyett az értékhez adott relatív vagy abszolút, pozitív és negatív eltérésekkel dolgozhatnak, melyeket a továbbiakban intervallumoknak hívunk. Természetesen egy vagy több ilyen „mozgó" súlynak vagy minősítési értéknek a hatását követni kell az értékelés teljes menetében.

Minden egyes nem-gyökér szemponton megadott intervallum kétféle lehet: input vagy output, aszerint, hogy a döntéshozó adja meg, vagy már egy alacsonyabb szinten megadott bizonytalanság eredményeként adódik. A szempontfa gyökerén az alternatíva végső pontszáma található, tehát ezen csak output jellegű intervallum lehet.

Az első problémakörbe tartozik tehát a klasszikus érzékenység-vizsgálat, mely inputként adott bizonytalanságok hatását vizsgálja a felsőbb szintű szempontokon, és az egyes részfák, majd a teljes szempontfa gyökerén kiszámolja az eredő bizonytalanságokat.

A második problémakörbe három vizsgálat tartozik:

- a teljes rangsor stabilitása,
- egy kiválasztott szemponthoz tartozó paraméterek (súly, szavazóerő, minősítési érték) változásának hatása a rangsorra,
- egy kiválasztott alternatívához tartozó paraméterek változásának hatása a rangsorra, illetve annak vizsgálata, hogy az alternatíva előre vagy hátra léphet-e a rangsorban a megadott intervallumok alkalmazása esetén.

Az említett vizsgálatok matematikai hátterének részletes leírása a [30] dolgozatban található.

### 3.3 Adatbázisok és kezelésük a WINGDSS rendszerben

Nagymértékben növeli a csoportos döntéstámogató rendszerek, és természetesen az eredmények használhatóságának körét, ha a döntési feladathoz szükséges bemenő és számított adatok a rendszertől függetlenül tárolhatók, ugyanakkor a rendszer és az adatbázisok közötti dinamikus kapcsolat révén az adatbázisok a rendszerből is módosíthatók.

A WINGDSS rendszer működéséhez szükséges és a használata során keletkező adatok a következők:

- a szakértők személyi adatai (név, szakterület, ...),
- az alternatívákra vonatkozó tényadatok,
- a döntési szempontok (fába rendezve),
- a döntéshozók által adott szempont súlyok (preferenciák) és szubjektív minősítések az alternatívák egyes attribútumaira,
- a döntéshozók szakértelmét, prioritását jelző szavazóerők,

- a döntési paraméterekben adható bizonytalansági intervallumok,
- az értékelés részeredményei a szempontfa egyes szintjein (a minősítő eljárással kapott pontszámok a szempontfa levelein, majd a magasabb szinthez tartozó számított értékek),
- az értékelés végeredménye, azaz az alternatívák végső pontszáma,
- az értékelés rész- és végeredményében adódó bizonytalanságok döntéshozónként, illetőleg aggregálva,
- az érzékenység-vizsgálatnál felsorolt kérdésekre adott válaszok.

A bemenő adatbázisok a rendszerből is létrehozhatók, lekérdezhetők, jogosultság esetén módosíthatók. A minősítő eljárások is tárolhatók a rendszertől függetlenül, text fájlokban. Ez a tárolási mód sok előnnyel jár:

- tetszőleges, dBase kompatibilis adatbázis-kezelőnek átadhatók (DOS, illetőleg WINDOWS alatt),
- a WINGDSS rendszerben az ilyen típusú adatok bármikor, több döntési feladatban (természetesen, a szükséges módosításokkal) felhasználhatók,
- az eredmények más rendszerekkel is feldolgozhatók.

A szempontfa és az adatok megjelenítéséhez szükséges elemek (adatboxok, adatlapok) is feladattól függetlenül tárolhatók, ezáltal egy szempontfa, adatmegjelenítési forma többször hasznosítható.

### 3.4 Nyomtatás

A WINGDSS döntéstámogató rendszer a fontos adatokat, főbb eredményeket a monitoron folyamatosan kijelzi. Emellett természetes igényként merül fel mindezen információnak nyomtatott formában való rögzítése is. Ez az elért eredmények archiválását és dokumentálását is lehetővé teszi.

A nyomtatással kapcsolatban az alapvető nehézséget az jelentette, hogy míg a képernyőn tetszőlegesen nagyméretű ábrákat lehet az ablak görgetése segítségével megjeleníteni, addig egy kinyomtatható lap mérete korlátozott. Másrészt, míg a képernyőn történő megjelenítésnél elsődleges szempont az interaktivitást szolgáló eszközök kényelmes használhatósága, addig a nyomtatásnál alapvetően az adatok tömör és áttekinthető dokumentálására kell törekedni.

A WINGDSS rendszerben a kinyomtatandó adatok meghatározásához egy kényelmes felhasználói felület áll rendelkezésre. A szempontfa kivételével az összes adat egy, kettő, illetve három kulcs szerint rendezhető. A kulcsok alatt a döntéshozót, az alternatívát, a szempontot és a második alternatívát (a differenciához) értjük. Például az alternatívára adott egyéni minősítés függ az alternatívától és a szemponttól. Az adatok szerkezete, mérete nagyon változó lehet, például egyszer sok döntéshozó fordul elő, másszor sok alternatíva. Ezért a megjelenítést rugalmasan kell kezelni és a felhasználóra kell bízni a csoportosítást, a külalak megtervezését.

Alapvetően kétféle nyomtatási lehetőség létezik. Az egyik esetben az adatok egyszerű táblázatos formában jelennek meg. Az első táblázatban azok az adatok, amelyek csak az elsődleges kulcstól, a másodikban azok, amelyek csak az első két kulcstól függenek és így tovább. A táblázatok első oszlopaiban jelennek meg az aktuális kulcsértékek:

| [ALT] | neve |
|---|---|
| Komm. hull | hulladék |

| [ALT] | [DM] | utónév | QA | gQA |
|---|---|---|---|---|
| Komm. hull | Barna | István | 22.58 | 38.80 |
| Komm. hull | Fekete | Elek | 12.56 | 56.12 |

| [ALT] | [DM] | [CRIT] | QAC | gQAC |
|---|---|---|---|---|
| Komm. hull | Barna | első. hat. | 12.91 | 13.09 |
| Komm. hull | Barna | másod. hat. | 56.89 | 26.91 |
| Komm. hull | Fekete | első. hat. | 21.45 | 13.09 |
| Komm. hull | Fekete | másod. hat | 34.56 | 26.91 |

A másik lehetőség az, hogy ugyanezek az adatok strukturáltan, az alsóbb szintű kulcsoktól is függő tételek beljebb kezdődően kerülnek kinyomtatásra. Így elkerülhető a magasabb szintű kulcsok felesleges ismétlése:

| [ALT] | neve |
|---|---|
| Komm. hull | hulladék |

| [ALT] |
|---|
| Komm. hull |

| [DM] | utónév | QA | gQA |
|---|---|---|---|
| Barna | István | 22.58 | 38.80 |
| Fekete | Elek | 12.56 | 56.12 |

| [ALT] |
|---|
| Komm. hull |

| [DM] |
|---|
| Barna |

| [CRIT] | QA | gQA |
|---|---|---|
| első. hat. | 12.91 | 13.09 |
| másod. hat. | 56.89 | 26.91 |

| [ALT] |
|---|
| Komm. hull |

| [DM] |
|---|
| Fekete |

| [CRIT] | QA | gQA |
|---|---|---|
| első. hat. | 21.45 | 13.09 |
| másod. hat. | 34.56 | 26.91 |

A táblázatok egy-egy sora tetszőlegesen hosszú lehet és általános esetben nem is fér el egy – pl. A4-es – lapon. Ezért a nyomtatást végző eljárás először elkészíti a táblázat egy sorát, majd ha ez egy lapra kifér, úgy hagyja, ha nem, akkor egy szövegszerkesztőhöz hasonló módon betördeli. Természetesen ekkor minden egyes adatnál külön ki kell írni a nevét. Az áttekinthetőség érdekében a paragrafusok – maradva a szövegszerkesztős hasonlatnál – között nagyobb a távolság, mint a normál sorok között. Ezzel az eljárással tetszőlegesen nagy adatstruktúra kinyomtathatóvá vált.

A szempontfát a fastruktúra megjelenítéséhez igazodó bekezdésekkel lehet kinyomtatni, ami meglehetősen tömör, de a monitoron megjelenő grafikus ábrázoláshoz képest kevéssé szemléletes. A grafikus nyomtatás elkészült, lényege, hogy egy kinyomtatott oldalon csak a fa egy kis részlete látható a teljes fához az oldalakat megfelelően össze kell illeszteni.

## 4. Döntési feladatok megoldása a WINGDSS rendszerrel

A rendszer fejlesztésével párhuzamosan több döntési modell felépítése is megtörtént. A gyakorlati alkalmazások ösztönzőleg hatottak a fejlesztésre, kijelölve annak irányait.

A rendszer 2.1 [9] változatával értékeltünk szociális pályázatokat a Népjóléti Minisztérium megbízásából. A pályázatokat több döntéshozó értékelte, egymástól függetlenül, azonos szempontrendszer alapján. A szempontok szubjektívek voltak, azaz a levél-szempontok minősítési értékei függtek a döntéshozóktól. A rendszer ezen változata nehezen kezelte az ezernél több pályázatot, illetve azok adatait, így született meg az igény, hogy az alternatívákat és a hozzájuk tartozó adatokat adatbázisban tároljuk, sőt a modellben szereplő alternatívákat adatbázisból válogassuk ki, szűrő feltételek alapján.

Ugyanezzel a változattal készült el egy ***környezetértékelési modell*** is a Környezetvédelmi és Területfejlesztési Minisztérium megbízásából, különböző környezeti egységeknek minősítési értékeket adva, kb. 100 szempont figyelembevételével. A sok objektív szempont (a levél-szempontok minősítési értékei függetlenek a döntéshozóktól) kezelésének megkönnyítésére szétválasztottuk a szubjektív és az objektív szempontokat. Az elsőnél az egyes döntéshozók szubjektív ítélete a mérvadó, míg a többi döntéshozóktól függetlenül értékelhető. A modellépítés egyik legnehezebb lépése a súlyrendszer meghatározása, amelyet a saját fejlesztésű súlyfinomító modul segít.

A 2.1 [9] változatnál már megvalósult az alternatívák adatbázisban való tárolása, ami lehetővé tette a rendszer kipróbálását éles adatbázisokon. A feladat *szállodák vagyonértékének* megállapítása volt. Ezt a modellt részletesen is ismertetjük. A modell érdekessége, hogy nem az alternatívák relatív sorrendjét, hanem abszolút közgazdasági értékeket kellett meghatározni közgazdasági és szubjektív értékelések alapján. Ezért szükségessé vált a közgazdasági értékek paramétereinek (diszkontáló ráta, tőkésítési kamatláb) érzékenység-vizsgálata, azaz mennyire függ az értékelés ezek megválasztásától.

Az adatok és levél-szempontok szétválasztására is sor került. Az adatlap szerkesztő modul rugalmas, könnyen kezelhető eszköz a különböző típusú adatlapok definiálására, amelyek az adatok adatbázisokba történő felvitelét és módosítását könnyítik meg.

Az *Alföld környezetvédelmi problémái* vizsgálatában kb. 60 döntéshozó vett részt. A rendszerben megadható döntési paraméterek (ez esetben szavazóerők) beállítása fáradtságos és időigényes feladat volt. A legújabb változatban a döntési feladat számos paramétere alapértelmezésben megadható, s csak az attól különbözőket kell megváltoztatni.

## 4.1 Vagyonértékelés

Kísérletképpen a WINGDSS rendszer 2.1 változatával vagyonértékelést végeztünk néhány szállodára [7].

A szállodák vagyonértékeléshez közgazdaságtani jellemzőket és néhány szubjektív megítélésre lehetőséget adó szempontot vettünk figyelembe.

Mint az 1. ábrán is látható, a szempontokat három fő csoportra osztottuk:

- *közgazdasági,*
- *piaci,*
- *egyéb* minősítő szempontok.

A közgazdasági szempontok háromfélék: *állag, hozam, goodwill;* piaci szempont a *piaci ingatlan érték;* az egyéb minősítő szempontok hétfélék: *besorolás, szobaeladás, vendégösszetétel, szolgáltatások, szobafoglaltság, szobaeloszlás, személyzet minősége (management).*

A WINGDSS rendszer függvény-szekesztő moduljával készültek a szempontok értékelésére szolgáló függvények.

A *hozamot* a következőképpen számítottuk:

$$H(p,q,T) = \sum_{i=1}^{T-1} \frac{S_i}{(1+\frac{p}{100})^i} + \frac{S_T}{\frac{q}{100}(1+\frac{p}{100})^T} ,$$

ahol

$T$ az időszak hossza (év),

$p$ diszkontáló tényező,

$q$ tőkésítési kamatláb,

$S_i$ az $i$-edik évi nyereség.

Az $S_i$ nyereség az $i$-edik évbeli bevételek (szobai árbevétel, élelmezési bevétel, egyéb bevételek) és kiadások (fenntartási, élelmezési, tőke-ráfordítási költségek) különbsége. Amennyiben $S$ az utolsó évben negatív, a képletbeli utolsó tag helyett 0-t vettünk. A programban a $p$ diszkontáló tényezőt és a $q$ tőkésítési kamatlábat, valamint az időszak $T$ hosszát a felhasználó adhatja meg, tehát változtatható, a többi érték adatbázisból nyerhető.

Az épület *állagot* a következőképpen számítottuk:

$$A(a,e,f) = K + a \cdot e \cdot E + f \cdot F ,$$

ahol

$K$ a készletek, berendezések értéke,

$E$ az épület összterülete,

$F$ a telek összterülete,

$e$ az épület fajlagos értéke,

$f$ a földterület fajlagos értéke,

$a$ az épület korszerűsítési tényezője.

Az állag és a hozam kombinációjával számítottuk a *goodwill*-t:

$$G(A,H,p,T) = A + \frac{H - A \cdot \frac{p}{100}}{1 + \frac{p}{100}} .$$

Ha a szállodát nem szállodaként, hanem ingatlanként kívánják értékesíteni, lényeges az épület $P(e,f)$ *piaci érték*ének meghatározása:

$$P(e,f) = e \cdot E + f \cdot F ,$$

ahol

$E$ az épület összterülete,

$F$ a telek összterülete,

$e$ az épület fajlagos értéke,

$f$ a földterület fajlagos értéke.

Mindhárom számításban az $E$, $F$, $K$ értékek adatbázisból nyerhetők, míg az $e$, $f$ fajlagos értékeket, valamint a kamatlábakat és a korszerűsítési tényezőt a szakértők adhatják meg.

A WINGDSS rendszer lehetőséget ad szubjektívebb, a döntéshozó személyétől részben függő minősítésre is a szállodák összehasonlítása érdekében, ezért figyelembe vettük még az alábbi jellemzőket is, melyek az egyéb kategóriába kerültek.

A szálloda a kategória *besorolás* feltételeinek eleget tesz-e a 18/1979(X.17) BkM rendelet (a kereskedelmi szálláshelyek osztályba sorolásáról, XIII/37 Közlöny) szerint, azaz minden egyes kötelező szolgáltatás hiánya a kategória értéket eggyel csökkenti, és a kapott kategóriaértéket az eredeti kategóriaértékhez viszonyítjuk.

*Szobaeladás:* kategóriánként a szakértő megállapíthatja az optimális átlagos napi szobaárbevételt, ehhez viszonyítjuk a tényleges átlagos napi szobaárbevételt, az optimális üzemelési időszak pedig a teljes év.

*Vendégösszetétel:* a fejlett országbeli vendégek száma az összes vendég számának százalékában.

*Szolgáltatások:* az adatbázisból kiolvasható, a képernyőn megjelenő szolgáltatások alapján a szakértő 0-100-ig pontozza a szállodákat.

*Szobafoglaltság:* a tényleges szobafoglaltságot az optimálisnak tekintett 80%-os foglaltsághoz viszonyítjuk.

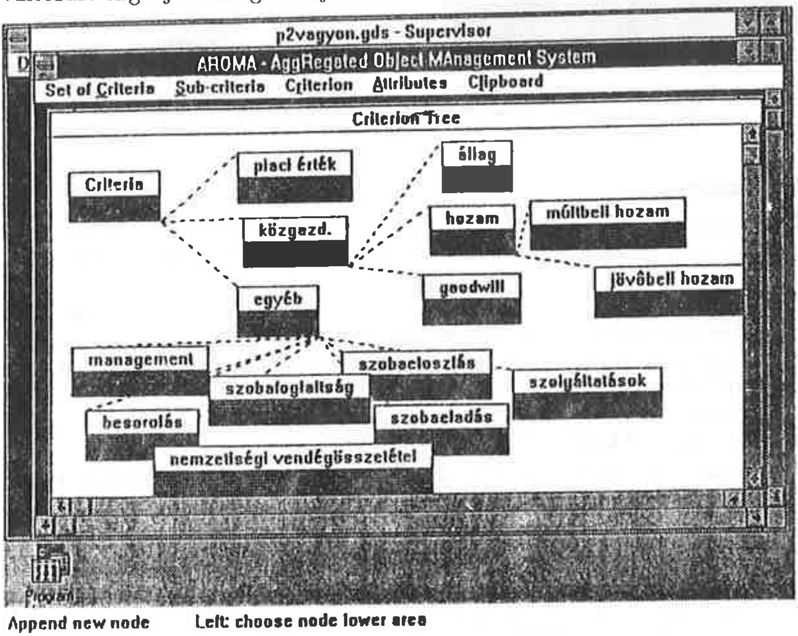
*Szobaeloszlás:* a szobák megoszlását abban az esetben tekintettük optimálisnak, ha a kétágyas szobák aránya 70%, az egyágyas szobák+lakosztályok aránya 10%, a többié pedig 20%.

Lehetőség van még a személyzet jellemzésére (a vezetők és a beosztottak aránya, a vezetők felkészültségi szintje alapján) ehhez azonban nem kaptunk adatokat.

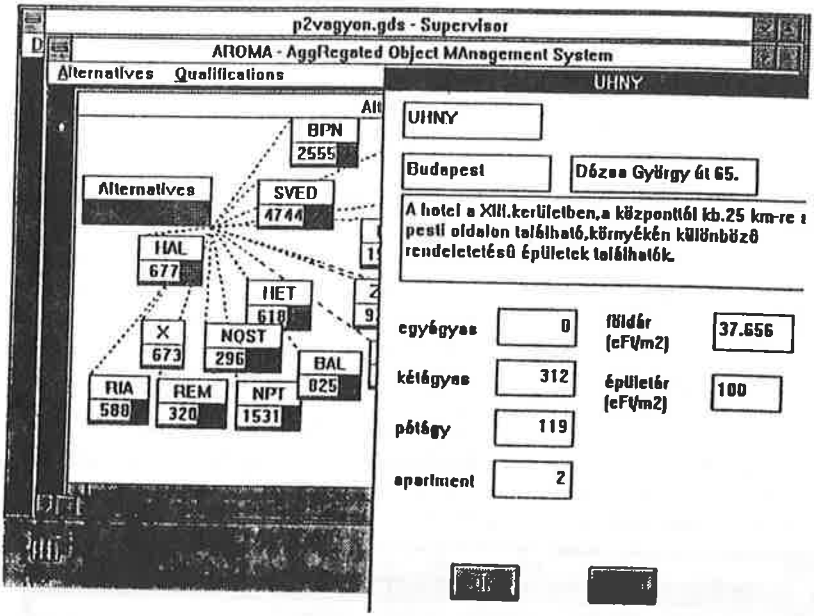
A WINGDSS rendszer csoportos minősítésre készült. Ez azt jelenti, hogy jelen esetben a szállodákat több szakértő együttesen értékelheti, különbözően súlyozva az egyes szempontokat, a hozam és goodwill számításnál különböző diszkontáló tényező értéket, kamatlábat véve figyelembe. Hasonlóan döntéshozónként változhat a korszerűsítési tényező az állagszámításnál, vagy a szolgáltatások, a management minősítésekor a pontszám.

A WINGDSS rendszerben megtehetjük, hogy az egyes szempontok szerinti eredményeket tetszőlegesen kombinálva vizsgáljuk. Ez a szempontok súlyozásával valósítható meg: ha egy szempontot vagy szempontcsoportot el akarunk hagyni, nulla súlyt adunk neki. A nem nulla súlyok is változtathatók aszerint, hogy a döntéshozó milyen fontosságot tulajdonít egy-egy szempontnak. Természetesen az értékelés végeredménye függvénye a súlyok értékeinek.

A szempontok értékeléséhez szükséges adatok, akár számok, akár szöveges információk vagy logikai feltételek, a WINGDSS rendszerben minden egyes szempontnál, az éppen értékelendő szállodára érvényes módon jelennek meg a számítógép képernyőjén (lásd a 2. ábrát). Bizonyos adatok (pl. diszkontáló tényező a hozam vagy goodwill számításakor, szakértői minősítési tényező az épület állagára vonatkozóan) az egyes szakértők által adandók meg, míg a szállodákra vonatkozó tényadatokat adatbázisban tároljuk, s onnan jelenítjük meg a képernyőn. Ez a modell adta az ötletet az érzékenység-vizsgálat modul kifejlesztéséhez. Lényegesnek bizonyult annak vizsgálata, hogy a súlyok adott mértékű változtatása esetén (tehát például minden súlynál 50%-os eltérést megengedve) hány százalékban változik a szállodák vagyonértéke, azaz a gyökér-szemponthoz tartozó szám, s ez a változás hogyan borítja fel a korábbi, fix súlyokhoz tartozó sorrendet. Fordítva, ha azt kívánjuk, hogy két szálloda „helyet cseréljen", akkor mondja meg a rendszer, hogy mekkora százalékos változást engedjünk meg a súlyoknál.




*1. ábra: Az értékelési szempontok fa struktúrába rendezve*




*2. ábra: A szobaeloszlás minősítésekor megjelenő információk*

## Irodalom


1. Angehrn, A. A., Modeling by Example: A Link Between Users, Models and Methods in DSS, European Journal of Operations Research 55 (1991) 269–308.
2. Angehrn, A. A., Designing Humanized Systems for Multiple Criteria Decision Making, Human System Management 10 (1989) 221–232.
3. Angehrn, A. A., Jelassi, T., DSS Research and Practice in Perspective, Working Papers INSEAD 93/04/TM.
4. Arimoto, S., An Algorithm for Computing the Capacity of Arbitrary Discrete Memoryless Channels, IEEE-IT 18 (1972) 14-20.
5. Brans, J. P., Vincke, Ph., A Preference Ranking Organization Method, Management Science 31 (1985) 647–656.
6. Bridgman, P. W., Dimensional Analysis, Yale University Press, New Haven, 1963.
7. Csáki, P., Csiszár, L., Fölsz, F., Keller, K., Mészáros, Cs., Rapcsák, T., Turchányi, P., A Decision Model for Appraisal of Hotels, Proceeding of the Third Conference on Artifical Intelligence, ed.: P. Koch, John von Neumann Society for Computer Sciences, 1993, 69–78.

8. Csáki, P., Csiszár, L., Fölsz, F., Keller, K., Mészáros, Cs., Rapcsák, T., Turchányi, P., A Flexible Framework for Group Decision Support: WINGDSS 3.0, Annals of Operations Research (1995) (in print).
9. Csáki, P., Rapcsák, T., Turchányi, P., Vermes, M., Research and Development for Group Decision Aid in Hungary by WINGDSS, a Microsoft Windows Based GDSS, Decision Support Systems 14 (1995).
10. Csiszár, I., Why Least Squares and Maximum Entropy? An Axiomatic Approach to Inverse Problems, The Annals of Statistics 19 (1991) 2032–2066.
11. De Sanctis, G., Gallupe, R. B., A Foundation for the Study of Group Decision Support Systems, Management Science 23 (1987) 589–609.
12. Dobó, A., Szajcz, S., A hasonlósági függvény és néhány tulajdonsága, Szigma 1-2 (1977) 25–48.
13. Dobó, A., Számítógépes összehasonlító minőségértékelési módszerek, Minőség és Megbízhatóság 5 (1987) 359–365.
14. Dyer S., Sarin, K., Measurable Multiattribute Value Functions, Operations Research 27 (1979) 810–822.
15. Fischburn, P. C., Utility Theory for Decision Making, John Wiley & Sons, New York, 1970.
16. Fischburn, P. C., Decision and Value Theory, John Wiley & Sons, New York, London, Sydney, 1964.
17. Fleming, P. J., Wallace, J. J., How Not to Lie with Statistics: the Correct Way to Summarize Benchmark Results, Communications of the ACM 29 (1986) 218–221.
18. Forgó, F., Temesi, J., Computer Aided Licence Selection, Engineering Costs and Production Economics, 11 (1987) 161–170.
19. Futó, I., Gábor, A., Temesi, J., The Risk Evaluation Expert System of World EXPO 1996, Journal of Computing and Information Technology 1 (1993) 57–68.
20. Kapur, J. N., Maximum-entropy Models in Science and Engineering, John Wiley & Sons, New York, Chichester, Brisbane, 1989.
21. Keeney, R. L., Multiplicative Utility Functions, Operations Research 22(1974) 22–34.
22. Keeney, R. L., Group Preference Axiomatization with Cardinal Utility, Management Science 23 (1976) 140–145.
23. Keeney, R. L., Building Models of Values, European Journal of Operations Research 37 (1988) 149–157.
24. Kindler, J., Papp, O., Komplex rendszerek vizsgálata, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1977.
25. Klafszky E., Ottmár, B., An Application of the Informational Divergence by Evaluating Building Structures, Proceedings of the Bicentury Anniversary of Technical University of Budapest, 1983, 65–68.
26. Klafszky, E., A Hölder-Young eltérés és alkalmazása a többtényezős értékelés feladataiban, Tanulmány a PRODINFORM számára, Budapest, 1992.

27. Korhonen, P., Moskowitz, H., Wallenius, J., Multiple Criteria Decision Support – A Review, European Journal of Operations Research 63 (1992) 361–375.

28. Kullback, S., Leibler, P., On Information and Sufficiency, Annals of Mathematical Statistics 22 (1951) 79–86.

29. Kullback, S., Information Theory and Statistics, John Wiley & Sons, New York, Chichester, 1959.

30. Mészáros Cs., Rapcsák, T., A Sensitivity Analysis on Decision Problems, Research Report CAI HAS WP 93–7 (June 1993) accepted in Decision Support Systems.

31. Pór, A., Stahl, J., Temesi, J., Decision Support System for Production Control: Multiple Criteria Decision Making in Practice, Engineering Costs and Production Economics 20 (1990) 213–218.

32. Roy, B., Vincke, Ph., Multicriteria Analysis: Survey and New Directions, European Journal of Operation Research 8 (1981) 207–218.

33. Saaty, T. L., Axiomatic Foundation of the Analytic Hierarchy Process, Management Science 32 (1980) 841–855.

34. Saaty, T. L., The Analytic Hierarchy Process: A 1993 Overview, Central European Journal for Operations Research and Economics 2 (1993) 119–137.

35. Soofi, S., Retzer, J., Adjustment of Importance Weights in Multiattribute Value Models by Minimum Discrimination Information, European Journal of Operations Research 60 (1992) 99–108.

36. Temesi, J., Szubjektív információk kezelése a többtényezős problémák megoldásában, Szigma 1-4 (1991) 53–62.

37. Temesi, J., Stahl, J., An Application of Group Decision Methods for Tender Evaluation, PU.M.A. Ser. C 2 (1991) 15–22.

38. Vincke, Ph., Multicriteria Decision-aid, John Wiley & Sons, New York, Chichester, 1989.

## GROUP DECISION SUPPORT ON PC UNDER MS WINDOWS

WINGDSS is a flexible framework for group decision support, on PC-s in Microsoft Windows environment, with a dynamic connection to dBase compatible databases, an interpreter for defining problem specific evaluation procedures and a lot of interactive features from the data form editor for user-friendly data query and input until the sensitivity analysis on individul/group ranking. It has a possibility for access to other softwares, like EXCEL and GIS.

# MEGHIÚSULÁSOK KOMPENZÁLÁSA LAKOSSÁGI FELVÉTELEKBEN: EGY SPECIÁLIS LINEÁRIS INVERZ PROBLÉMA[1]

MIHÁLYFFY LÁSZLÓ
*Központi Statisztikai Hivatal*

## 1. Bevezetés

A dolgozatban vizsgált probléma matematikai szempontból a lineáris inverz problémák körébe tartozik, amelyekről Csiszárnak a Szigmában nemrégen megjelent dolgozata [2] nyújt részletes áttekintést. A javasolt megoldás Darroch és Ratcliff „SMART" algoritmusával rokon – amelyről az említett dolgozat ugyancsak beszámol –, és annál valamivel egyszerűbb. Formális szempontból adva van egy nemnegatív elemű $m \times n$-es $A = (a_{ij})$ mátrix, egy pozitív elemekből álló $n$-dimenziós $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)^T$ vektor, továbbá egy ugyancsak pozitív elemekből álló $m$-dimenziós $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)^T$ vektor, és egy olyan pozitív (vagy nemnegatív) elemekből álló $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ vektort keresünk, amelyre

$$Ax = b \tag{1.1}$$

és amely valamilyen értelemben „jól közelíti" az $x^0$ vektort. A megoldás triviális akkor, ha $x^0$ kielégíti ezt az egyenletet, a gyakorlatban azonban rendszerint nem ez a helyzet.

Valószínűségi mintákból, különösképpen lakossági mintákból való becslés esetén a szóban forgó probléma a következőképpen vetődik fel. Egy ilyen minta alapján értékösszeget, más szóval létszámadatot általában a

$$\sum_i w_i Y_i \tag{1.2}$$

alakban becslünk, ahol $Y_i$ a vizsgált ismérv értéke a minta $i$-edik elemére (egységére) vonatkozóan, $w_i$ az ehhez tartozó mintasúly (rendszerint az egység kiválasztási valószínűségének a reciproka), és az összegzést a minta összes

[1] Beérkezett 1994. október 10. A szerző köszönettel tartozik Budavári Péternek, akinek észrevételei lehetővé tették a kézirat néhány pontatlanságának kijavítását.

elemére vonatkozóan kell elvégezni. Mintán ebben az összefüggésben egyaránt érthetünk országos mintát, vagy annak egy jól meghatározott részét, például egy megyei részmintát. A mintavételi hibát is figyelembe véve az (1.2) összefüggés torzítatlan becslést eredményezne, ha nem lenne meghiúsulás, azaz, ha a minta minden egységére vonatkozóan sikerülne megszerezni a szükséges információt. A lakossági mintákra azonban világszerte jellemző az esetenként kisebb, máskor meg éppen jelentős mértékű válaszkimaradás, meghiúsulás, amit a $w_i$ mintasúlyok korrekciójával szoktak ellensúlyozni. Általánosan elterjedt az a megoldás, miszerint a (súlyozott) minta nemek és korcsoportok szerinti megoszlását valamilyen területi részletezésben a megfelelő sokaságbeli megoszlás(ok)hoz igazítják, rendszerint a népszámlálás továbbvezetett adatainak a felhasználásával. Bizonyos esetekben a korrekciót nem a megoszlások, hanem a létszámadatok szintjén végzik; ez azt jelenti, hogy a nemek, korcsoportok, illetve földrajzi egységek által meghatározott cellákban a létszámadatok korrigált becslése megegyezik a továbbvezetett népszámlálási adatokkal. Az ilyen korrekciós eljárásoknak általában az a hátránya, hogy a minta háztartásain belül az egyes személyekhez különböző korrigált súlyokat rendelnek, ami rendkívül megnehezíti a személyekre, illetve a háztartásokra vonatkozó adatok/táblázatok összhangjának biztosítását. Ezen a következőképpen lehet segíteni.

Egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy egy Nógrád megyei mintával van dolgunk, és a korrekcióban a 0–4, 5–9, 10–14, ..., 70–74, 75–X öt évenkénti korcsoportokat fogjuk alkalmazni. A minta minden egyes $j$ háztartásához egy

$$Y_{\cdot j} = (Y_{1j}, \ldots, Y_{16j}, Y_{17j}, \ldots, Y_{32j})^T$$

vektort rendelünk úgy, hogy $1 \leq i \leq 16$ esetén $Y_{ij}$ az $i$-edik korcsoporthoz tartozó férfiak (fiúk), $Y_{i+16j}$ pedig az $i$-edik korcsoporthoz tartozó nők (lányok) száma ebben a háztartásban. Legyen $w_j^0$ a $j$-edik háztartáshoz tartozó *korrigálatlan* mintasúly (ez a háztartás minden tagjára nézve azonos), és $1 \leq i \leq 16$ esetén jelölje $N_i$, illetve $N_{i+16}$ az $i$-edik korcsoporthoz tartozó férfiak, illetve nők számát az adott megyében,

$$\mathbf{N} = (N_1, \ldots, N_{32})^T \ .$$

Jelölje $J$ azoknak a háztartásoknak a számát, amelyekről legalább egy kitöltött kérdőív készült (Nógrádban $J \approx 600$ a munkaerőfelmérésben); a meghiúsulások miatt

$$\sum_{j=1}^{J} w_j^0 Y_{\cdot j} \neq \mathbf{N}$$

vagy

$$\mathbf{Y} w^0 \neq \mathbf{N} \ , \tag{1.3}$$

ahol $Y = (Y_1, \ldots, Y_J)$, $w^0 = (w_1^0, \ldots, w_J^0)$, és itt az eltérés jóval meghaladja a mintavételi hibával magyarázható mértéket. Értelemszerűen olyan korrigált $w_1, w_2, \ldots, w_J$ súlyokat keresünk, amelyek pozitívok, az eredeti $w_1^0, w_2^0, \ldots, w_J^0$ súlyokat jól közelítik, és kielégítik az (1.3) egyenletet. Az $\mathbf{Y} \sim A$, $w \sim x$, $w^0 \sim x^0$, $\mathbf{N} \sim b$ helyettesítésekkel a korrekciós probléma a standard lineáris inverz problémába megy át. A dolgozatban felváltva használjuk a kétféle jelölésrendszert aszerint, hogy mikor melyik célravezető.

## 2. Algoritmus

A bevezetésben leírt feladat megoldásának kézenfekvő eszköze lehetne a kvadratikus programozás, pl. a

$$\sum_{j=1}^{J}(w_j - w_j^0)^2$$

célfüggvénnyel, amikor azonban a feladat felvetődött, a megfelelő szoftver nem volt kéznél, s ugyanakkor gyors megoldásra volt szükség. Így jött létre az alábbi algoritmus.

Tekintsük az (1.1) egyenletet. $t = 0$ esetén legyen $x(t) = x^0$, és $t = 0, 1, 2, \ldots$ esetén tegyük a következőket.

$i = 1, 2, \ldots, m$ esetén legyen

$$r_i(t) = \frac{b_i}{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j(t)} \; ; \qquad (2.1)$$

$j = 1, 2, \ldots, n$ esetén legyen

$$u_j(t) = \frac{\sum_{k=1}^{m} a_{kj} r_k(t)}{\sum_{k=1}^{m} a_{kj}} \; , \qquad (2.2)$$

az $r_i(t)$-k súlyozott számtani közepe, és legyen végül $j = 1, 2, \ldots, n$ esetén

$$x_j(t+1) = x_j(t) u_j(t) \; . \qquad (2.3)$$

Ellenőrizzük az eljárás konvergenciáját, és szükség esetén folytassuk az eljárást (2.1)-nél. A (2.1)–(2.3) összefüggésekre az alábbiakban úgy is fogunk hivatkozni, mint az algoritmus 1., 2., illetve 3. lépésére.

Az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy

$$\sum_{k=1}^{m} a_{kj} = 1 \qquad (2.4)$$

minden $j$-re, vagyis, hogy az $A$ mátrix oszlopösszegei egységnyiek. (2.1)–(2.3) ekkor a következő kompakt alakba írható:

$$x_j(t+1) = x_j(t) \sum_{k=1}^{m} a_{kj} \frac{b_k}{\sum_{h=1}^{n} a_{kh} x_h(t)} . \tag{2.5}$$

A Darroch-Ratcliff féle SMART algoritmnus ([2], (5.16) összefüggés) jelöléseinkkel az

$$x_j(t+1) = x_j(t) \prod_{k=1}^{m} {b_k}^{a_{kj}} \Big( \sum_{h=1}^{n} a_{kh} x_h(t) \Big)^{-a_{kj}}$$

alakba írható; eszerint javasolt eljárásunk ennél annyival egyszerűbb, amennyivel könnyebb a súlyozott számtani átlagok kiszámítása a súlyozott mértani átlagok kiszámításánál. A kétféle átlag közötti kapcsolat alapján arra is számíthatunk, hogy eljárásunk valamivel gyorsabb lesz a SMART-nál, hiszen minden egyes iterációban valamivel nagyobbat lép.

A SMART algoritmus az (1.1) egyenletnek olyan nemnegatív $x$ megoldását eredményezi – amennyiben ilyen létezik –, amelyre az

$$I(x\|x^0) = \sum_j \Big( x_j \log \frac{x_j}{x_j^0} - x_j + x_j^0 \Big)$$

$I$-divergencia minimális. A (2.1)–(2.3) algoritmus által szolgáltatott $x$ megoldással kapcsolatban egyenlőre nincs ilyen eredményünk, tehát nem tudjuk megmondani, hogy $x$ milyen értelemben közelíti az $x^0$ induló vektort. Erre a kérdésre a 4. fejezetben még visszatérünk.

## 3. Az eljárás konvergenciája

Egyszerűség kedvéért az iterációs lépés $t$ sorszámát az esetek többségében el fogjuk hagyni; ilyenkor a változók aktuális értékét egyszerűen $r_i$-vel, $x_j$-vel, illetve $u_j$-vel jelöljük, míg a következő iterációhoz tartozó megfelelő értékeket vesszővel különböztetjük meg: $r_i'$, $x_j'$, illetve $u_j'$. Vezessük be a következő jelöléseket: $i = 1, 2, \ldots, m$ esetén legyen

$$f_i = y_i - b_i + b_i \log(b_i/y_i) = y_i - b_i + b_i \log r_i \, .$$

Könnyen belátható, hogy az $f_i$ függvények rendelkeznek az alábbi tulajdonságokkal:

- szigorúan konvexek és akárhányszor deriválhatók az $I\!R_+ \setminus \{0\}$ halmazon (a pozitív valós számok halmazán);

- $f_i(y_i) \to \infty$, ha $y_i \to +0$ vagy ha $y_i \to +\infty$;
- $y_i \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ esetén $f_i(y_i) \geq 0$, és $f_i(y_i) = 0$ akkor és csak akkor, ha $y_i = b_i$.

Az $m$-változós

$$F(y) = F(y_1, y_2, \ldots, y_m) = f_1(y_1) + f_2(y_2) + \ldots + f_m(y_m)$$

függvény a $D = \{ y \mid y_1 > 0, y_2 > 0, \ldots, y_m > 0 \}$ halmazon ugyancsak nemnegatív, szigorúan konvex – a második parciális deriváltakból álló Hesse-féle mátrixa $H = \mathrm{diag}(b_1/y_1^2, b_2/y_2^2, \ldots, b_m/y_m^2)$ –, plusz végtelenhez tart továbbá, ha legalább egy $i$-re $y_i \to +\infty$, s végül, $F(y) = 0$ pontosan akkor, ha $f_i(y_i) = 0 \quad i = 1, 2, \ldots, m$ esetén. Megjegyezzük, hogy $F(y)$ az $m$-dimenziós $b$ és $y$ vektorok közötti $I$-divergencia: $F(y) = I(b\|y)$.

A $G(x) = G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ függvényt a következőképpen definiáljuk:

$$G(x) = F(Ax) .$$

Komponensekre nézve ez azt jelenti, hogy

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j , \qquad i = 1, 2, \ldots, m . \tag{3.1}$$

$G(x)$ konvex – általában nem szigorúan konvex – függvény, a

$$G(x) = \min, \qquad x \in \mathbb{R}_+^n \tag{3.2}$$

feladat tehát konvex programozási feladat. Bár $G(x)$ értelmezési tartománya nem a teljes $\mathbb{R}_+^n = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0 \}$ halmaz, hanem annak csupán

$$D_G = \{ x \geq 0 \mid y = Ax \in D \}$$

részhalmaza, (3.2) megfogalmazása korrekt, ugyanis minden olyan esetben, amikor $x \in D_G \to x^* \in \mathbb{R}_+^n \setminus D_G$, $G(x)$ a plusz végtelenhez tart.

Ki fogjuk mutatni, hogy a 2. pontban leírt algoritmus olyan $x(t)$, $t = 0, 1, 2, \ldots$ pontsorozatot definiál, amelynek bármely $x^*$ torlódási pontja a (3.2) feladat optimális megoldása. A feladat speciális voltából adódóan a Kuhn-Tucker feltételek ([1], 107. p.) most a következő alakot öltik:

$$\frac{\partial G(x)}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{m} a_{kj} - \sum_{k=1}^{m} b_k \frac{a_{kj}}{y_k} = 1 - \sum_{k=1}^{m} b_k \frac{a_{kj}}{y_k} \geq 0 , \qquad j = 1, \ldots, n , \tag{3.3}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial G(x)}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{n} x_j \Big( 1 - \sum_{k=1}^{m} b_k \frac{a_{kj}}{y_k} \Big) = 0 , \tag{3.4}$$

ahol $y_k$ értékét a (3.1) összefüggés határozza meg, $k = 1, 2, \ldots, m$ esetén. $x^*$ optimalitásából következni fog annak egyértelműsége is, abban az értelemben, hogy az $x(t)$ sorozatnak csak egy torlódási pontja van, tehát konvergens. A Kuhn-Tucker feltételeket célszerű az alábbi alakba átírni, ahol $r_1, r_2, \ldots, r_m$, $u_1, u_2, \ldots, u_n$ értékét a (3.3)–(3.4)-at kielégítő $x$-re vonatkozóan (2.1)–(2.2) alapján határozzuk meg:

$$\frac{\partial G(x)}{\partial x_j} = 1 - \sum_{k=1}^{m} r_k a_{kj} = 1 - u_j \geq 0 , \tag{3.3'}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial G(x)}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{n} x_j \Big(1 - \sum_{k=1}^{m} r_k a_{kj}\Big) = \sum_{j=1}^{n} x_j (1 - u_j) = 0 . \tag{3.4'}$$

**3.1 Tétel.** *Legyen $A$ $m \times n$-es, nemnegatív elemekből álló mátrix, $x^0$ és $b$ pozitív komponensekből álló, $n$-, illetve $m$-dimenziós vektor. Ha $A$ minden sora különbözik nullától, akkor a (2.1)–(2.3) algoritmussal meghatározott $x(t)$ sorozat ($t = 0, 1, 2, \ldots$; $x(0) = x^0$) a (3.2) konvex programozási feladat egy optimális megoldásához tart.*

**Bizonyítás.** Az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy (2.4) fennáll, azaz $A$ oszlopösszegei egységnyiek. Ekkor (2.5) mindkét oldalát $j$-re összegezve ($j = 1, \ldots, n$)

$$x_1(t) + x_2(t) + \ldots + x_n(t) = b_1 + b_2 + \ldots + b_m \tag{3.5}$$

adódik minden nullánál nagyobb $t$-re. Legyen $x$ és $x'$ két egymás utáni pont az algoritmus által meghatározott sorozatban; kimutatjuk, hogy $G(x) > G(x')$. Legyen $0 \leq \lambda \leq 1$, és tekintsük a $\phi(\lambda) = G\big((1-\lambda)x + \lambda x'\big)$ függvényt. (3.5) miatt $G(x)$ és ezzel együtt $\phi(\lambda)$ lineáris része nullával egyenlő, és ezért

$$\phi(\lambda) = \sum_{i=1}^{m} b_i \log b_i - \sum_{i=1}^{m} b_i \log \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j (\lambda u_j + 1 - \lambda)$$

és

$$\phi'(\lambda) = \frac{\mathrm{d}\phi(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} = -\sum_{i=1}^{m} b_i \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j (u_j - 1)}{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j (\lambda u_j + 1 - \lambda)} ;$$

itt (2.3)-nak megfelelően $x'$ komponenseit $x_j u_j$-vel helyettesítettük, $j = 1, 2, \ldots, n$. (2.1)–(2.2) valamint (3.5) felhasználásával az utóbbi összefüggésből a következőkhöz jutunk:

$$\phi'(0) = -\sum_{j=1}^{n} x_j u_j^2 + \sum_{j=1}^{n} x_j , \qquad \phi'(1) = -\sum_{j=1}^{n} x_j + \sum_{i=1}^{m} b_i \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j}{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j u_j} ;$$

kimutatjuk, hogy $\phi'(0) < 0$ és $\phi'(1) \leq 0$. Mivel defníció szerint $x_j = x_j(t)$ pozitív minden (véges) $t$-re,

$$0 \leq \sum_{j=1}^{n} x_j(u_j - 1)^2 = \sum_{j=1}^{n} x_j u_j^2 - \sum_{j=1}^{n} x_j \ , \tag{3.6}$$

ahol az egyenlőség a (3.5) összefüggés következménye. Ha a "$\leq$" jelnél is az egyenlőség lenne érvényes, akkor szükségképpen $u_j = 1$ teljesülne minden $j$-re, tehát az aktuális $x$ pont a (3.3')–(3.4') Kuhn-Tucker feltételek értelmében optimális megoldása lenne a (3.2) feladatnak. Feltehetjük tehát, hogy most a "$<$" érvényes, ami éppen a $\phi'(0)$-ra vonatkozó állításunkat igazolja. A $\phi'(1)$ kifejezés második részösszegében $u_1, u_2, \ldots, u_n$ súlyozott átlagainak reciprokai szerepelnek, s ezért $\phi'(1)$ a $z = 1/u$ függvény konvexitásának figyelembevételével a következőképpen becsülhető:

$$\phi'(\lambda) \leq -\sum_{j=1}^{n} x_j + \sum_{i=1}^{m} \frac{b_i}{\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \frac{1}{u_j} = -\sum_{j=1}^{n} x_j + \sum_{i=1}^{m} r_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \frac{1}{u_j}$$

$$= -\sum_{j=1}^{n} x_j + \sum_{j=1}^{n} u_j x_j \frac{1}{u_j} = 0$$

Mivel $\phi(\lambda)$ konvex, első deriváltja növekvő, s így szükségképpen nem pozitív a $0 \leq \lambda \leq 1$ intervallumon, és ennek következtében

$$\phi(1) - \phi(0) = \int_0^1 \phi'(\lambda)\, d\lambda < 0 \, .$$

A $G\big(x(0)\big)$, $G\big(x(1)\big)$, $G\big(x(2)\big)$, ... függvényértékek sorozata tehát monoton fogyó, következésképpen egy $G_{\min}$ határértékhez tart, amely $G(x) = F(Ax)$ tulajdonságai miatt nemnegatív. Itt jegyezzük meg, hogy az $x = x(t)$ sorozat (vagy annak bármely részsorozata) nem tarthat a $D_G$ értelmezési tartomány határához, akkor ugyanis $G\big(x(t)\big)$ felülről nem lehetne korlátos. Másfelől a pozitív komponensekből álló $x = x(t)$ vektorsorozat (3.5) miatt korlátos, tehát van torlódási pontja. Ha $x^*$ egy ilyen torlódási pont, akkor arra egyrészt $G(x^*) = G_{\min}$;, másrészt a (3.6) egyenlőtlenség egyenlőség formájában teljesül:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^*(u_j - 1)^2 = 0 \, , \tag{3.6'}$$

egyébként ugyanis $x^*$ -ból kiindulva, az algoritmus szerint egy a $G_{\min}$-nél kisebb függvényértékhez lehetne eljutni, ellentmondásban a $G\big(x(t)\big)$ sorozatról mondottakkal. (3.6') szerint tetszőleges $j$-re ($1 \leq j \leq n$) az

$$x_j^* = 0 \qquad \text{és az} \qquad u_j = 1$$

egyenlőségek közül legalább az egyik teljesül. A (3.3')–(3.4') Kuhn-Tucker feltételek teljesüléséhez elegendő azt kimutatnunk, hogy $x_j^* = 0$ esetén szükségképpen $u_j \leq 1$.

Ha $x_j^* > 0$ minden $j$-re, akkor (3.6') miatt $u_1 = u_2 = \ldots = u_n = 1$, és (3.3')–(3.4') teljesülése triviális. Tegyük fel, hogy $x_j^* = 0$ valamilyen $j$ indexre, és bontsuk fel a nemnegatív egész számok $S = \{0, 1, 2, \ldots\}$ sorozatát két részsorozatra a következőképpen:

$$S_1 = \{\, t \in S \mid u_j(t) \geq 1 \,\}\,, \qquad S_2 = \{\, t \in S \mid u_j(t) < 1 \,\}\,.$$

$S_2$ nem lehet véges, mert különben $x_j(t+1) = x_j(t)u_j(t)$ miatt $x_j(t)$-nek nem lenne $x_j^* = 0$-hoz tartó (rész)sorozata. Ha $S_1$, véges, akkor nyilván

$$\lim_{t\to\infty} x_j(t) = 0 \qquad \text{és} \qquad \limsup_{t\to\infty} u_j(t) \leq 1\,.$$

Ha viszont $S_1$ is végtelen, akkor könnyen belátható, hogy minden olyan $S' = \{\, t_1, t_2, \ldots\}$ részsorozathoz, amelyre

$$\lim_{k\to\infty} x_j(t_k) = 0\,,$$

található olyan $S'' = \{\, t_1', t_2', \ldots\} \subset S_2$ részsorozat, hogy $k = 1, 2, \ldots$ esetén $t_k' < t_k$ és $x_j(t_k') \leq x_j(t_k)$, tehát

$$\lim_{k\to\infty} x_j(t_k') = 0 \qquad \text{és} \qquad \limsup_{k\to\infty} u_j(t_k') \leq 1\,.$$

Ezzel kimutattuk, hogy $x(t)$ bármely torlódási pontja teljesíti a Kuhn-Tucker feltételeket, tehát optimális megoldása a (3.2) feladatnak. Konvex programozási feladatról lévén szó, tetszőleges két optimális megoldás, $x^*$ és $x''$ esetén $\frac{1}{2}(x^* + x'')$ is optimális megoldás. Az $F(y)$ függvény szigorú konvexitása miatt

$$F\big(\frac{1}{2}(y^* + y'')\big) = F\big(\frac{1}{2}(Ax^* + Ax'')\big) < \frac{1}{2}\big(F(y^*) + F(y'')\big)\,,$$

hacsak $Ax^* \neq Ax''$; $x^*$ és $x''$ optimalitása miatt ebből szükségszerűen az következik, hogy $Ax^* = Ax''$. Eszerint $y(t) = Ax(t)$ konvergens, és hasonlóképpen konvergálnak az $r_i(t) = b_i/y_i(t)$ sorozatok is, $i = 1, 2, \ldots, m$ esetén. Ebből következik az $u_j(t) = \sum_{k=1}^{m} a_{kj} r_k(t)$ valamint az $x_j(t+1) = x_j(t)u_j(t)$ sorozat konvergenciája, és ezzel állításunkat bizonyítottuk.

**3.2 Korollárium.** *Ha az (1.1) egyenletnek van nemnegatív $x$ megoldása, akkor a (2.1)-(2.3) algoritmus egy ilyen megoldást eredményez, feltéve, hogy az $x^0$ induló vektor minden komponense pozitív; $x^0$ egyébként tetszőleges lehet.*

A korollárium az előző tétel egyszerű következménye.

## 4. Alkalmazások

A módszer eddigi alkalmazásai a KSH lakossági felvételeiből származó problémákra korlátozódtak, tehát bizonyos pozitív $w_1^0, w_2^0, \ldots, w_J^0$ súlyok, mint induló értékek birtokában a

$$\sum_{j=1}^{J} w_j Y_{\cdot j} = \mathbf{N} \tag{4.1}$$

egyenlet $w = (w_1, w_2, \ldots, w_J)^T$ megoldását kerestük – a jelölések értelmezését lásd a bevezetésben. A konkrét alkalmazások közül megemlítjük az 1992. évi jövedelem felvétel, valamint az 1993. évi nemzetiségi felvétel feldolgozását. Mivel a (2.1)–(2.3) algoritmus bizonyos változók (súlyok) korrigált értékeként nullát eredményezhet, a (4.1) feladatot a

$$v_j = w_j - 0.15 w_j^0$$

transzformációval a

$$\sum_{j=1}^{J} v_j Y_{\cdot j} = \mathbf{N}^1 \tag{4.2a}$$

feladatba vittük át, ahol

$$\mathbf{N}^1 = \mathbf{N} - 0.15 \sum_{j=1}^{J} w_j^0 Y_{\cdot j}\,, \qquad v \geq 0\,, \tag{4.2b}$$

és $v_j^0$ kezdeti értéke

$$v_j^0 = 0.85 w_j^0 \tag{4.2c}$$

volt. A "0.15" tényezőt heurisztikus alapon választottuk, éspedig azzal a céllal, hogy $b^1$ minden komponense pozitív legyen, továbbá, hogy (4.1')-nek legyen nemnegatív megoldása. Ez a választás azt is biztosította, hogy a korrigált $w_j = v_j + 0.15 w_j^0$ súlyok szélsőséges esetben sem lehettek kisebbek induló értékük 15%-ánál.

*1. Táblázat: Számítástechnikai tapasztalatok a korrekciós eljárással kapcsolatban (Minta: nemzetiségi felvétel, 1993. szeptember-november)*

| Megye | Háztartások száma | Személyek száma | Iterációk száma | | Gépidő (mp) | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | RAS | SMART | RAS | SMART |
| Budapest | 2872 | 6802 | 19 | 19 | 4,74 | 5,32 |
| Baranya | 911 | 2512 | 34 | 33 | 1,85 | 2,09 |
| Bács-Kiskun | 1416 | 3674 | 35 | 35 | 2,86 | 3,16 |
| Békés | 1002 | 2574 | 41 | 40 | 2,09 | 2,34 |
| Borsod-A.-Z. | 1719 | 4754 | 34 | 34 | 3,39 | 3,83 |
| Csongrád | 978 | 2408 | 36 | 36 | 1,91 | 2,16 |
| Fejér | 952 | 2614 | 31 | 31 | 1,83 | 2,10 |
| Győr-M.-S. | 956 | 2687 | 34 | 34 | 1,91 | 2,18 |
| Hajdú-Bihar | 1215 | 3239 | 30 | 30 | 2,29 | 2,60 |
| Heves | 888 | 2371 | 20 | 20 | 1,53 | 1,74 |
| Komárom-E. | 732 | 1988 | 22 | 23 | 1,29 | 1,49 |
| Nógrád | 599 | 1608 | 31 | 31 | 1,16 | 1,31 |
| Pest | 2088 | 5781 | 44 | 44 | 4,34 | 5,12 |
| Somogy | 785 | 2134 | 29 | 30 | 1,47 | 1,72 |
| Szabolcs-Sz.-B | 1299 | 3878 | 25 | 25 | 2,40 | 2,75 |
| J.-N.-Szolnok | 1059 | 2892 | 26 | 26 | 1,97 | 2,28 |
| Tolna | 689 | 1856 | 34 | 35 | 1,34 | 1,57 |
| Vas | 617 | 1722 | 30 | 30 | 1,20 | 1,37 |
| Veszprém | 914 | 2561 | 27 | 27 | 1,75 | 1,97 |
| Zala | 687 | 1942 | 29 | 30 | 1,32 | 1,53 |

A (4.1) feladatnak a (4.2a-c) átfogalmazása azzal a kérdéssel függ össze, amelyet a 2. fejezet végén említettünk, miszerint nem ismeretes, hogy a (2.1)-(2.3) algoritmus milyen értelemben eredményezi az induló $x^0$ ($w^0$) vektor „jó" közelítését. Nem sokat segítene, ha – mint a Darroch-Ratcliff féle SMART esetében – ki lehetne mutatni, hogy $w$ és $w^0$ eltérése $I$-divergenciával mérve minimális, ha ettől még egy-két korrigált súly értéke zérus lenne, ami a megfelelő megfgyeléseknek a vizsgálatból való kirekesztését jelentené.

Célszerű itt még azt is megjegyezni, hogy a konkrét alkalmazások során – amelyek tapasztalatainak egy részét az 1. táblázatban mutatjuk be – módszerünk és a SMART algoritmus gyakorlatilag ugyanazt a megoldást eredményezte. Ez arra utal, hogy a kutatást ebben az irányban folytatni kellene.

A táblázat a nemzetiségi felvétel feldolgozása során szerzett tapasztalatainkat mutatja be. A korrekciós számítások FORTRAN-77 programja a KSH HP9000-867-es szerverén futott. Az egyes megyei szintű feladatok méretéről a háztartások, illetve a személyek száma ad felvilágosítást. Budapest esetén például a feladat mátrixa 32 × 2872-es volt (a nemek-korcsoportok szerinti keresztosztályok száma ugyanis 32), és ebben a mátrixban csak 6802 elem volt nullától különböző. A program a mátrixnak csak a nullától különböző elemeit tárolta, pozíció szerint. A táblázat utolsó négy oszlopa az iterációs lépések számát, illetve a gépidő-felhasználást mutatja; itt mód nyílik eljárásunknak a Darroch-Ratcliff féle SMART algoritmussal való összehasonlítására (a RAS módszerhez való hasonlósága miatt a táblázatban eljárásunkat a "RAS" címkével azonosítottuk). Az iterációk számát az a feltétel szabta meg, hogy a (3.2) összefüggésben szereplő $G(x)$ célfüggvény értéke 1-nél kisebb legyen, ami Budapest esetén például azt jelenti, hogy a város magánháztartásokban élő népességének 1 982 708 létszámát (továbbvezetett, becsült adat, 1993. január 1.) egységnyi pontossággal sikerült megközelíteni.

Mint látható, az egyes feladatokban eljárásunk és a SMART eljárás gyakorlatilag ugyanannyi iteráció után ért célhoz, az elhasznált gépidő azonban, amelynek értékét a libU77 könyvtár DTIME függvényeljárásának segítségével határoztuk meg, a SMART módszernél mindig nagyobb, mint a dolgozatban közölt eljárás alkalmazásánál. Ennek nyilvánvalóan az az oka, hogy eljárásunk a változók értékét az egyes iterációkban az egyenletek hibájának (a bal és jobb oldal eltérésének) súlyozott számtani átlaga segítségével javítja, míg a SMART algoritmus ugyanezeknek a mennyiségeknek a mértani átlagával operál.

Az 1. táblázat megfelelőjét összeállítottuk a munkaerőfelmérés 1994. júliusi adatai alapján is, mely esetben a mintanagyság kb. egyharmada a nemzetiségi felvételben megfigyelt minta nagyságának. Gyakorlatilag ugyanaz a tendencia érvényesült ott is, mint az 1. táblázatban, a felhasznált gépidő mindenütt közel egyharmada volt annak, amire a háromszor akkora minta esetén volt szükség. Ami meglepő volt, az az iterációk számának oszlopában mutatkozott, ott ugyanis semmiféle szabályszerűséget sem lehetett felfedezni. Egy-egy példa (nemzetiségi felvétel – munkaerőfelmérés sorrendben): Budapest 19-24, Bács-Kiskun 35-18, Borsod 34-30, Komárom 22-25, Nógrád 31-47, Veszprém 27-40.

## Irodalom

1. Collatz, L. – W. Wetterling: *Optimierungsaufgaben.* Springer Verlag, Berlin / Heidelberg / New York 1971.

2. Csiszár, I.: Entrópiamaximalizálás és rokon módszerek: axiomatika, algoritmusok. *Szigma* XXIV(1993), 111–137.

## ADJUSTMENT FOR NON-RESPONSE IN HOUSEHOLD SURVEYS: A SPECIAL LINEAR INVERSE PROBLEM

Data from household surveys are often adjusted for non-response by updated census counts. In such cases adjustment means re-weighting the observations in such a way that estimated totals for the adjustment cells defined as cross-classes by age, sex and geographical domains comply with the corresponding updated census counts. If in any sample household each member must have the same (adjusted) sample weight, the problem becomes a special linear inverse problem, i.e. we are given a system of linear equations with an initial unsatisfactory solution, and have to find an acceptable solution to this system, which is close to the initial solution in some sense. The initial and the final solutions consist of the original and the adjusted sample weights, respectively, and all quantities occurring in the problem are non-negative. In the paper a new method for solving the special linear inverse problem is given, and its application in the household surveys of the Hungarian Central Statistic Office is discussed.

# MEGJEGYZÉSEK FORGÓ FERENC EGY PROBLÉMÁJÁHOZ[1]

GOLDNER GÁBOR[2] – VIZVÁRI BÉLA[3]
*Babeş-Bólyai Egyetem, Kolozsvár – ELTE, Budapest*

Forgó Ferenc tárgyalja az alábbi problémát [3]. Tekintsünk egy gazdasági egységet, amely $n$ darab további részből áll, amelyek maguk is lehetnek gazdasági egységek vagy munkacsoportok vagy természetes személyek. Az utóbbiakat [3] kifejezésével élve tagoknak nevezzük. A probléma abban áll, hogy lehet-e a gazdasági egység jövedelmét úgy szétosztani a tagok között, vagyis a tagokat úgy ösztönözni, hogy ez az ösztönzés egyszerre legyen hatékony, azaz hatására az egység jövedelme a lehető legjobban növekedjék, és racionális, azaz az ösztönzés az összjövedelmet mind a jövedelem komponensei, mind az elvégzett munka szerint additív módon ossza szét úgy, hogy a ténylegesen jövedelmet termelő tagoktól ne vonjon el jövedelmet. Feltételezve, hogy a jövedelemfüggvény kvadratikus, [3] arra a következtetésre jut, hogy az ösztönzés elé állított fenti két követelmény egyidejűleg rendkívül ritkán teljesíthető. Véleményünk szerint ez a feltételezés a modell nem minden értelmezése esetén engedhető meg, és ezen esetekben a probléma matematikai hátterében bonyolultabb problémák fekszenek. Mindazonáltal alább részletezendő okoknál fogva a végkövetkeztetéssel magunk is egyetértünk.

## 1. A Forgó modell matematikai keretei

Az $i$ tag munkájának intenzitását $x_i$ jelöli. Az ezen munkaintenzitásokból alkotott $x$ vektor az $n$-dimenziós egységkocka egy tetszőleges pontja, vagyis $x_i = 0$ esetén az $i$ tag egy kiinduló szinten, míg $x_i = 1$ esetén maximális intenzitással dolgozik. Az egység jövedelme a munkaintenzitások függvényében $f(x)$, ahol $f$ az egységkockát a valós számokba folytonosan differenciálható módon leképező függvény, melynek gradiensét a sorvektorként értelmezett $\nabla f(x)$ kifejezés jelöli.

---

[1] Beérkezett 1994. október 10.

[2] Goldner Gábor a kutatás ideje alatt a kolozsvári Soros Alapítvány által támogatott egyetemközi csereegyezmény keretében az ELTE-n volt vendégtanár, és egyben élvezte a "Pro Cultura" alapítvány támogatását is.

[3] Vizvári Béla a Rutgers Egyetem RUTCOR vendégtanára volt a dolgozat írása idején.

Tegyük fel, hogy a munkaintenzitások pillanatnyi vektora $a$. Annak feltétele [3] szerint, hogy a hatékony és racionális ösztönzés itt egybeessék, az

$$\frac{f(a)}{\nabla f(a)a}\nabla f(a) = \int_0^1 \nabla f(ta)\,dt \tag{1}$$

egyenlet teljesülése. Itt a balodal a maximális jövedelemnövekedés irányába mutató vektor, ami a hatékonyságot fejezi ki, míg a jobboldal [1] nyomán az említett kötelményeket kielégítő, vagyis racionális ösztönzés.

## 2. A szükséges feltétel új értelmezése

Ha az (1) egyenletet csak az $a$ pontban követeljük meg, akkor mindössze annyi dönthető el, hogy a gazdasági egység történetének egy adott pillanatában, esetleg csak véletlenszerűen, a hatékonyság és a racionalitás követelménye egybeeshet-e. De keveset mond abból a szempontból, hogy ennek az egybeesésnek a megkövetelése, mint a gazdasági egység vezetésének munkamódszere, hosszabb távon fenntartható-e. Az utóbbi esetben ezért az (1) egyenletet nem mint egyetlen pontra vonatkozó egyenletet kell felfogni, hanem mint az egységkockát a valós számokba folytonosan leképező függvények osztályán értelmezett függvényegyenletet, amely kiválasztja azon jövedelemfüggvényeket, amelyek esetén az említett követelmény bármikor teljesíthető.

## 3. Egy függvényosztály

Ebben a szakaszban az a célunk, hogy megmutassuk, hogy az ú.n. Euler-féle homogén függvények kielégítik az (1) függvényegyenletet.

**1. Definició:** *Tegyük fel, hogy a $D \subset I\!R^n$ halmaz eleget tesz annak, hogy $\forall t > 0$ és $\forall x \in D$ esetén $tx \in D$. Legyen $\mu$ egy rögzített valós szám. Egy $g : D \to I\!R$ függvényt* $\mu$-ed rendű homogén függvénynek *nevezünk a $D$ halmazon, ha*

$$\forall t > 0 : \forall x \in D : \ g(tx) = t^\mu g(x)\,. \tag{2}$$

A legegyszerűbb példa homogén függvényre a $g(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i^\mu$ formula, ahol $a_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ valós szám. Általában $\mu+\nu$-ed rendű függvényt kapunk, ha $a_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ $\nu$-ed rendű homogén függvénye az $x$ vektorváltozónak.

**1. Lemma:** *Ha $g : D \to I\!R$ egy $\mu$-ed rendű homogén függvény, ahol $D \subset I\!R^n$ egy megfelelő halmaz, és valamely $i \in \{1, \ldots, n\}$ index esetén a $\frac{\partial g}{\partial x_i}$ parciális* *derivált létezik a $D$ halmaz belsejében, akkor a $\frac{\partial g}{\partial x_i}$ függvény egy $(\mu-1)$-ed rendű homogén függvény a $D$ halmaz belsejében.*

**Bizonyítás:** Rögzítsünk tetszőlegesen egy $x^0 \in \mathrm{int}D$ vektort és egy $t_0 >$ 0 számot. Ekkor $t_0 x \in \mathrm{int}D$, és

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(t_0 x^0) = \lim_{x_i \to x_i^0} \frac{g(t_0 x_1^0, \ldots, t_0 x_{i-1}^0, t_0 x_i, t_0 x_{i+1}^0, \ldots, t_0 x_n^0) - g(t_0 x^0)}{t_0 x_i - t_0 x_i^0} =$$

$$t_0^{\mu-1} \lim_{x_i \to x_i^0} \frac{g(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0) - g(x^0)}{x_i - x_i^0} = t_0^{\mu-1} \frac{\partial g}{\partial x_i}(x^0) . \blacksquare$$

Ismert a differenciálható homogén függvényekre az Euler-féle jellemzési tétel (v.ö. pl. [2], 361-362. o.)

**2. Tétel:** *Legyen $D \subset \mathbb{R}^n$ olyan halmaz, amelyre minden $t > 0$ és $x \in D$ esetén $tx \in D$ teljesül. Legyen $g$ a $D$ halmazon differenciálható függvény. Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy $g$ $\mu$-ed rendű homogén függvény legyen az, hogy minden $x \in D$ pontban teljesüljön a*

$$\mu g(x) = \nabla g(x) x$$

*egyenlőség.* $\blacksquare$

A következő tétel képezi matematikai szempontból dolgozatunk fő mondanivalóját. A tétel megad egy függvényosztályt, amire a kérdéses függvényegyenlet teljesül.

**3. Tétel:** *Legyen $D \subset \mathbb{R}^n$ egy rögzített nyílt halmaz úgy, hogy minden $t > 0$ és $x \in D$ esetén $tx \in D$. Ha $\mu > 1$ egy rögzített valós szám és $g : D \to \mathbb{R}$ egy folytonosan differenciálható, nem azonosan zérus, $\mu$-ed rendű homogén függvény, akkor $g$ kielégíti az (1) egyenletet minden $a \in D$ pontban.*

**Bizonyítás:** Az 1. Lemma szerint teljesül az

$$\int_0^1 \nabla g(ta) dt = \int_0^1 t^{\mu-1} \nabla g(a) dt = \frac{1}{\mu} \nabla g(a).$$

egyenlet. Így ha $\nabla g(a) a \neq 0$, akkor a 2. Tétel szerint

$$\frac{g(a)}{\nabla g(a) a} \nabla g(a) = \frac{1}{\mu} \nabla g(a) = \int_0^1 \nabla g(ta) dt.$$

Ha $\nabla g(a) a = 0$ és az $a$ pont bármely környezetében létezik egy $x \in D$ pont, amelyre $\nabla g(x) x \neq 0$, akkor a differenciál folytonosságából elfogadhatjuk, hogy

$$\frac{g(a)}{\nabla g(a) a} \nabla g(a) = \lim_{x \to a, \nabla g(x) x \neq 0} \frac{g(x)}{\nabla g(x) x} \nabla g(x) = \lim_{x \to a} \frac{1}{\mu} \nabla g(x) = \frac{1}{\mu} \nabla g(a),$$

ahol használtuk a 2. Tételt. Így teljesül az (1) egyenlet. Ha $\nabla g(a)a = 0$ és $a$-nak van olyan környezete, amelynek bármely $x \in D$ pontjában $\nabla g(x)x = 0$, akkor a 2. Tétel szerint $g$ az azonosan zérus függvény, ami ellentmond a feltevésnek. ■

Legyen $D$ nyílt halmaz és $[0,1]^n \subset D$. Ha $g$ homogén a $D$ halmazon, akkor az egész $D$ halmazon, és így a közgazdasági probléma által megkövetelt egységkockán is kielégíti a kérdéses egyenletet. Hasonló mondható akkor is, ha $D$ zárt, de ekkor a $\nabla g(a)$ értékeket int$D$ halmaz elemeiből álló sorozatokhoz tartozó megfelelő határértékként értelmezzük.

A 3. Tétel nem intézi el teljesen a felvetett problémát, mert csak elegendő feltételt ad meg az (1) egyenlet teljesülésére. Mivel nem sikerült ellenpéldát találnunk a tétel megfordítására, ezért úgy érezzük, hogy igaz az alábbi állítás.

**Sejtés:** *Ha $g$ legalább kétváltozós függvény, amely egy alkalmas, az egységkockát tartalmazó $D$ kúpon mindenütt pozitív parciális deriváltakkal rendelkezik és kielégíti az (1) egyenletet, akkor valamely alkalmas $\mu$ mellett $\mu$-ed rendű homogén függvény.*

## 4. A matematikai eredmények interpretációja

A fentiekben megmutattuk, hogy egy gazdasági egység jövedelme szétosztható az egység tagjai között hatékony és racionális módon a tagok munkájának bármely intenzítása mellett, ha az egység jövedelme, mint a tagok munkája intenzitásának függvénye egy $\mu$-ed rendű ($\mu > 1$) homogén függvény. Ha az előző szakasz végén megfogalmazott sejtés igaz, akkor lényegében az ilyen szétosztás csak ebben az esetben lehet az egység belső mechanizmusának része. Mivel a homogén függvények a folytonosan differenciálható függvények osztályán belül csak egy kis részhalmazt képviselnek, ezért azt gondoljuk, hogy a jövedelem szétosztásának a jelen dolgozatban is vizsgált két követelménye, a hatékonyság és a racionalitás az esetek döntő többségében nem egyeztethető össze.

## Irodalom

1. L. J. Billera, D. C. Heath, Allocation of shared costs: a set of axioms yielding a unique procedure, Mathematics of Operations Research, 7(1982),
2. G. Denkinger, Analízis, Tankönyvkiadó, Budapest, 1980.
3. Forgó F., A hatékony és racionális elosztás (in-)konzisztenciája: egy axiomatikus megközelítés, Szigma, XXIII(1992), 1–2. sz., 1–6.

# EGY DISZKRÉT DINAMIKUS TERMELŐI-FOGYASZTÓI MODELL STABILITÁSÁRÓL[1]

MOLNÁR SÁNDOR ÉS SZIDAROVSZKY FERENC
*Központi Bányászati Fejlesztési Intézet – Arizonai Egyetem*

Dolgozatunkban Arrow (1960) dinamikus piacmodelljét és dinamikus oligopol modelleket kapcsolunk össze egy olyan diszkrét dinamikus rendszerré, amely egyaránt kezelni tudja a termelők és fogyasztók hiányos ismereteit, becsléseit és az optimális termelési program kialakítására vonatkozó döntéseit. A teljes információs eseten kívül megvizsgáljuk a statikus, adaptív és extrapolatív becslések eseteit is, és szükséges és elégséges feltételeket vezetünk le az így adódó rendszerek globális aszimptotikus stabilitására. A dolgozat befejezéseként a stabilitási feltételeket hasonlítjuk össze.

## 1. Bevezetés

Dinamikus oligopol játékok stabilitására számos gyakorlatilag is alkalmazható eredményt ismerünk. A klasszikus elméletet Okuguchi (1976) foglalta össze, majd a többtermékes esetre vonatkozó eredményeket és módszereket Okuguchi és Szidarovszky (1990) ismertette. Ezek a modellek a termelési oldalról közelítették meg dinamikus piacok vizsgálatát. A fogyasztói oldallal is számos kutató foglalkozott. Arrow (1960) klasszikus cikkében egy olyan többtermékes piaccal foglalkozott, ahol az árdinamikát a kereslet-kínálat egyensúlya vezérli; többletkínálat esetén az ár csökken, többletkereslet mellett növekszik, egyensúly esetén pedig változatlan marad. Arrow modellje folytonos időskálát feltételezett. Jelen dolgozatunkban az Arrow-féle modell diszkrét változatát összekapcsoljuk dinamikus oligopol játékokkal, ily módon egy olyan diszkrét dinamikus modell adódik, amely figyelembe veszi mind a termelői, mind a fogyasztói oldalt. Teljes információt tételezünk fel a múltbeli adatokra vonatkozólag, az előrejelzések esetére pedig három módszert vizsgálunk: statikus, adaptív és extrapolatív becsléseket. Az így adódó rendszerek globális aszimptotikus stabilitását vizsgáljuk meg. Először a matematikai modellt ismertetjük, majd a teljes információs esetet mutatjuk be. A három következő paragrafusban a három különböző előrejelzési módszerrel foglalkozunk. A

[1] A kutatást a Magyar-Amerikai Tudományos és Technológiai Közös Alap (JF No. 224) és az NSF (INT-9312030) támogatta. Beérkezett 1994. szeptember 10.

stabilitási feltételeket hasonlítjuk össze, és a dolgozat befejezéseként az eredmények közgazdasági értelmezését tárgyaljuk.

## 2. A matematikai modell

Egy olyan piacot vizsgálunk, amelyben $N$ termelő ugyanazt a terméket termeli és értékesíti. Ha $x_k$ jelöli a $k$-dik termelő által előállított mennyiséget, akkor jelölje $C_k(x_k) = B_k x_k^2 + b_k x_k + c_k$ a költségfüggvényét, ahol az összes együttható pozitív. Feltesszük, hogy minden egyes $t = 0, 1, 2, \dots$ időpontban az összes termelő megbecsüli a várható árat, és az így adódó várható hasznát maximalizálja. Ha $p_k^E(t)$ jelöli a $k$-dik termelő árbecslését a $t$ időpontban, akkor várható haszna: $x_k p_k^E(t) - C_k(x_k)$, így feltételezzük, hogy a $t$ időpontban az egyes termelők az

$$x_k(t) = \arg\max_{x_k \geq 0} \left\{ x_k p_k^E - C_k(x_k) \right\} \tag{1}$$

szabállyal választják meg termékmennyiségeiket. Feltéve, hogy $x_k(t) > 0$, egyszerű differenciálással adódik, hogy

$$x_k(t) = \frac{p_k^E(t) - b_k}{2B_k} . \tag{2}$$

Ha $p_0^E(t)$ jelöli a fogyasztás által becsült árat, akkor feltesszük, hogy $d(t) = Dp_0^E(t) + d$ ($D < 0$, $d > 0$) a piaci kereslet. Arrow (1960) gondolatmenetét átvéve feltesszük, hogy az ár növekszik, ha a kereslet nagyobb, mint a kínálat; az ár csökken, ha a kínálat nagyobb mint a kereslet; és változatlan marad, ha a kereslet és a kínálat egyensúlyban van. Ez a követelmény úgy modellezhető, ha feltesszük, hogy

$$p(t+1) = p(t) + Ky(t) , \tag{3}$$

ahol $K > 0$ egy adott konstans, és

$$y(t) = d(t) - \sum_{k=1}^{N} x_k(t) \tag{4}$$

jelenti a többlet-igényt.

A (2) és (3) egyenletek egy diszkrét lineáris rendszert definiálnak, amelynek dinamizmusa alapvetően függ attól, hogy a termelők és a fogyasztók milyen módon becslik az árat. Dolgozatunkban négy esettel foglalkozunk.

(i) A *teljes információs eset*ről akkor beszélünk, ha

$$p_k^E(t) = p(t) , \tag{5}$$

azaz a $k$-dik termelő ($k \geq 1$ esetén) és/vagy a fogyasztók ($k = 0$ esetén) a pontos árat ismerik.

(ii) *Statikus becslés*ről akkor beszélünk, ha

$$p_k^E(t) = p(t-1) \,, \tag{6}$$

azaz a $k$-dik termelő vagy a fogyasztók felteszik, hogy az ár ugyanaz marad a $t$ időpontban, mint a $(t-1)$ időpontban volt.

(iii) *Adaptív becslés* esetén feltételezzük, hogy

$$p_k^E(t) = M_k p(t-1) + (1 - M_k) p_k^E(t-1) \,, \tag{7}$$

vagyis a $p_k^E(t)$ becslés egy alkalmas érték az előző ár és árbecslés között. Megjegyezzük, hogy az $M_k = 1$ esetben a (7) becslés statikussá redukálódik. Adaptív becslések esetén általában feltesszük, hogy $0 < M_k \leq 1$.

(iv) *Extrapolatív becslések* esetén

$$p_k^E(t) = M_k p(t-1) + (1 - M_k) p(t-2) \qquad (M_k > 0) \,. \tag{8}$$

A továbbiakban az így adódó diszkrét dinamikus rendszerek aszimptotikus stabilitását vizsgáljuk meg.

## 3. A teljes információs eset

A (2), (3), (4) és (5) egyenletek kombinálásával azonnal adódik, hogy

$$\begin{aligned} p(t+1) &= p(t) + K\left(Dp(t) + d - \sum_{k=1}^{N} \frac{p(t) - b_k}{2B_k}\right) \\ &= \left(1 + KD - K\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2B_k}\right) p(t) + \left(Kd + K\sum_{k=1}^{N} \frac{b_k}{2B_k}\right) \end{aligned} \tag{9}$$

Ez az egydimenziós rendszer akkor és csak akkor globálisan aszimptotikus stabilis, ha

$$-1 < 1 + KD - K\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2B_k} < 1$$

(ld. például Szidarovszky és Bahill, 1992), amely ekvivalens a

$$D > \frac{1}{2K}\left(K\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{B_k} - 4\right) \tag{10}$$

egyenlőtlenséggel. Ahhoz, hogy ennek a feltételnek eleget tevő $D < 0$ érték egyáltalán létezzék, szükséges, hogy

$$K < \frac{4}{\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{B_k}} \tag{11}$$

teljesüljön. Ez az egyenlőtlenség azt jelenti, hogy az árváltozás $K$ együtthatója elegendően kicsi kell, hogy legyen, és rögzített $K$ érték mellett a (10) feltétel akkor teljesül, ha $|D|$ elegendően kicsi, azaz a piaci keresletfüggvény nem nagyon csökkenő.

## 4. Statikus becslések esete

A (2), (3), (4) és (6) egyenletek összevonásával egy másodrendű differenciaegyenletet kapunk:

$$\begin{aligned} p(t+1) &= p(t) + K\left(Dp(t-1) + d - \sum_{k=1}^{N} \frac{p(t-1) - b_k}{2B_k}\right) \\ &= p(t) + \left(KD - K\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2B_k}\right) p(t-1) + \left(Kd + K\sum_{k=1}^{N} \frac{b_k}{2B_k}\right) \end{aligned} \tag{12}$$

feltételezve, hogy az összes termelő és a fogyasztók is statikus becslést alkalmaznak. A (12) rendszer karakterisztikus egyenlete:

$$\lambda^2 - \lambda - \left(KD - K\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2B_k}\right) = 0\,. \tag{13}$$

A (12) rendszer stabilitásának vizsgálatához szükségünk van a következő segédtételre (ld. Okuguchi és Szidarovszky, 1990):

**1. Lemma.** *A $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$ ($a_1$ és $a_2$ valós együtthatók) egyenlet gyökei akkor és csak akkor vannak az egységkörben, ha*

$$a_2 < 1\,, \qquad a_2 > -a_1 - 1 \quad \text{és} \quad a_2 > a_1 - 1 \tag{14}$$

Tehát a (13) egyenlet gyökei akkor és csak akkor vannak az egységkörben, ha

$$-K\left(D - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2B_k}\right) < 1$$

és

$$-K\left(D-\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2B_k}\right)>\max\{1-1;-1-1\}=0$$

Minthogy a második egyenlőtlenség mindig fennáll, a (12) rendszer akkor és csak akkor globálisan aszimptotikus stabilis, ha

$$D>\frac{1}{2K}\left(K\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{B_k}-2\right). \tag{15}$$

Ennek a feltételnek eleget tevő $D<0$ érték csak akkor létezik, ha

$$K<\frac{2}{\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{B_k}} \tag{16}$$

Ez esetben pedig a (15) feltétel azt jelenti, hogy $|D|$ elegendően kicsi legyen, azaz hasonlóan a teljes információs esethez, rögzített $K$ mellett a (15) feltétel csak akkor teljesül, ha a piaci keresletfüggvény nem nagyon csökkenő.

Tegyük fel ezután, hogy a termelők továbbra is a statikus becslést alkalmazzák, viszont a fogyasztók ismerik a pontos árat. Ekkor a (12) modell a következőképpen módosul:

$$\begin{aligned}p(t+1) &= p(t)+K\left(Dp(t)+d-\sum_{k=1}^{N}\frac{p(t-1)-b_k}{2B_k}\right)\\ &= (1+KD)p(t)-\left(K\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2B_k}\right)p(t-1)+\left(Kd+K\sum_{k=1}^{N}\frac{b_k}{2B_k}\right)\end{aligned} \tag{17}$$

A rendszer karakterisztikus egyenlete:

$$\lambda^2-(1+KD)\lambda+K\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2B_k}=0\,,$$

amelynek gyökei akkor és csak akkor vannak az egységkörben, ha

$$K\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2B_k}<1$$

és

$$K\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2B_k}>\max\{KD,-2-KD\}\,.$$

Ezek az egyenlőtlenségek ekvivalensek a következőkkel:

$$K < \frac{2}{\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{B_k}}; \qquad D > \frac{1}{2K}\left(-K\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{B_k} - 4\right). \tag{18}$$

Ez a feltételrendszer ugyanúgy értelmezhető, mint azt az előző esetben bemutattuk.

## 5. Adaptív becslések esete

Ha az összes termelő és a fogyasztók egyaránt adaptíven becsülik az árat, akkor a (2), (3), (4) és (7) egyenletek összekapcsolásával a

$$\begin{aligned} p(t+1) &= p(t) + K\left(Dp_0^E(t) + d - \sum_{k=1}^{N}\frac{p_k^E(t) - b_k}{2B_k}\right) \\ p_k^E(t+1) &= M_k p(t) + (1 - M_k)p_k^E(t) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, N) \end{aligned} \tag{19}$$

rendszeregyenleteket nyerjük, amelyek együtthatómátrixa

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & KD & -\frac{K}{2B_1} & \cdots & -\frac{K}{2B_N} \\ M_0 & 1 - M_0 & & & \\ M_1 & & 1 - M_1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ M_N & & & & 1 - M_N \end{pmatrix}.$$

Az **A** mátrix sajátérték-feladata:

$$\begin{aligned} u + KDv_0 - \sum_{k=1}^{N}\frac{K}{2B_k}v_k &= \lambda u \\ M_k u + (1 - M_k)v_k &= \lambda v_k \qquad (k = 0, 1, \ldots, N) \end{aligned} \tag{20}$$

A második egyenletből

$$v_k = \frac{M_k}{\lambda - (1 - M_k)} u, \tag{21}$$

ahol feltesszük, hogy $\lambda \neq 1 - M_k$. Minthogy $M_k \in (0, 1]$, az esetleges $1 - M_k$ sajátérték nem befolyásolja a rendszer stabilitási tulajdonságait. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $M_0 = M_1 = \ldots = M_N = M$. Ekkor a (21) egyenlőséget a (20) első egyenletébe helyettesítve a

$$\frac{KDM}{\lambda - (1 - M)} - \left(\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2B_k}\right) \cdot \frac{KM}{\lambda - (1 - M)} = \lambda - 1$$

egyenlőséget nyerjük. Egyszerű számolással adódik, hogy ez az egyenlet ekvivalens a következő másodfokú egyenlettel:

$$\lambda^2 + \lambda(M-2) + \left(1 - M - KDM + KM\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2B_k}\right) = 0\,. \qquad (22)$$

Az 1. Lemma alapján az egyenlet gyökei akkor és csak akkor vannak az egységkör belsejében, ha

$$1 - M - KDM + KM\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2B_k} < 1$$

és

$$1 - M - KDM + KM\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2B_k} > \max\{-M+1; M-3\}\,.$$

Egyszerű számolással belátható, hogy ez a feltételrendszer ekvivalens a (15) egyenlőtlenséggel. Tehát stabilitás szempontjában ez az eset ekvivalens a statikus becslések esetével.

Tegyük fel ezután, hogy az összes termelő továbbra is adaptív becslést alkalmaz, viszont a fogyasztók ismerik a pontos árat. Ekkor a (19) modell a következőképpen módosul:

$$\begin{aligned} p(t+1) &= p(t) + K\left(Dp(t) + d - \sum_{k=1}^{N}\frac{p_k^E(t) - b_k}{2B_k}\right) \\ p_k^E(t+1) &= M_k p(t) + (1-M_k)p_k^E(t) \qquad (k = 1,2,\ldots,N)\,. \end{aligned} \qquad (23)$$

A rendszer együtthatómátrixa

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1-KD & -\frac{K}{2B_1} & \cdots & -\frac{K}{2B_N} \\ M_1 & 1-M_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ M_N & & & 1-M_N \end{pmatrix}$$

Hasonlóan az előző esethez kimutatható, hogy a $M_1 = M_2 \ldots = M_N = M$ speciális esetben a (22) karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^2 + \lambda(M-2-KD) + \left(1 - M + KD - KDM + KM\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2B_k}\right) = 0\,, \quad (24)$$

amelynek gyökei akkor és csak akkor vannak az egységkör belsejében, ha $0 < M < 1$ esetén

$$\frac{M}{2(1-M)K}\left(2 - K\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{B_k}\right) > D > -\frac{2}{K} - \frac{M}{2(2-M)}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{B_k} \qquad (25)$$

és $M = 1$ esetén

$$K \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{B_k} < 2 \qquad \text{és} \qquad D > \frac{1}{2K} \left( -K \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{B_k} - 4 \right) . \tag{26}$$

Vegyük észre, hogy a (26) feltételek ugyanazok, mint amelyeket a statikus esetben korábban kaptunk. Ez természetes, hiszen az $M = 1$ esetben statikussá redukálódik az adaptív becslés. Tetszőleges $0 < M < 1$ esetén a (25) egyenlőtlenségnek akkor és csak akkor van $D$-re megoldása, ha

$$K \leq \frac{2}{\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{B_k}} . \tag{27}$$

## 6. Extrapolatív becslések esete

Tegyük fel először, hogy az összes termelő és a fogyasztók is extrapolatív becslést választanak. A (2), (3), (4) és (8) egyenletek összevonásával most a következő rendszer adódik:

$$\begin{aligned} p(t+1) &= p(t) + K \Big[ D\big(M_0 p(t-1) + (1-M_0) p(t-2) + d - \\ &\quad - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{B_k} \big(M_k p(t-1) + (1-M_k) p(t-2) - b_k\big) \Big] \end{aligned} \tag{28}$$

amely egy harmadrendű lineáris differenciaegyenlet. Azonnal látható, hogy a karakterisztikus egyenlet harmadfokú:

$$\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda \left( -KDM_0 + K \sum_{k=1}^{N} \frac{M_k}{2B_k} \right) + \left( KD(M_0 - 1) + K \sum_{k=1}^{N} \frac{1 - M_k}{2B_k} \right) = 0 . \tag{29}$$

A gyökök vizsgálatánál felhasználjuk majd a következő eredményt:

**2. Lemma.** *A $\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$ ($a_1$, $a_2$ és $a_3$ valós együtthatók) egyenlet gyökei akkor és csak akkor vannak az egységkörben, ha az*

$$1 + a_1 + a_2 + a_3, \qquad 1 - a_1 + a_2 - a_3, \qquad 3 + a_1 - a_2 - 3a_3, \qquad 3 - a_1 - a_2 + 3a_3$$

*és az*

$$1 - a_3^2 + a_1 a_3 - a_2$$

*mennyiségek valamennyien pozitívak.*

A lemma bizonyítása megtalálható az Okuguchi és Irie (1989) dolgozatban.

Feltéve ismét, hogy $M_0 = M_1 = \ldots = M$, egyszerű számolással adódik, hogy a (28) rendszer akkor és csak akkor globálisan aszimptotikusan stabilis, ha

$$D > \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{B_k} + \frac{1-\sqrt{1+4(1-M)^2}}{2K(1-M)^2} . \tag{30}$$

Megjegyezzük, hogy a (30) egyenlőtlenségnek akkor és csak akkor van negatív $D$ megoldása, ha

$$K < \frac{\sqrt{1+4(1-M)^2}-1}{(1-M)^2\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{B_k}} . \tag{31}$$

Tekintsük végül azt az esetet, amikor a termelők továbbra is extrapolatív becsléseket választanak, viszont a fogyasztók ismerik a pontos árat. Ekkor a (28) egyenlet a következőképpen módosul:

$$p(t+1) = p(t)+K\left[Dp(t) + d - \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2B_k}(M_k p(t-1) + (1-M_k)p(t-2) - b_k)\right] \tag{32}$$

amely karakterisztikus egyenlete ismét harmadfokú:

$$\lambda^3 - \lambda^2(1+KD) + \lambda K\sum_{k=1}^{N}\frac{M_k}{2B_k} + K\sum_{k=1}^{N}\frac{1-M_k}{2B_k} = 0 .$$

A 2. Lemma alapján egyszerű számolással látható, hogy a gyökök akkor és csak akkor vannak az egységkörben,
ha $M < 1$ esetén

$$\min\left\{\frac{2}{K} + (2M-3)\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2B_k} ; \frac{4-K^2(1-M)^2\left(\sum\limits_{k=1}^{N}\frac{1}{B_k}\right)^2 - 2K\sum\limits_{k=1}^{N}\frac{1}{B_k}}{2K^2(1-M)\sum\limits_{k=1}^{N}\frac{1}{B_k}}\right\} >$$

$$> D > \max\left\{-\frac{2}{K} - (2M-1)\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2B_k} ; -\frac{4}{K} - (3-4M)\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2B_k}\right\} ;$$

$M = 1$ esetén

$$K\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{B_k} < 2 \qquad \text{és} \qquad D > -\frac{2}{K} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{B_k}$$

és $M > 1$ esetén

$$\frac{2}{K} + (2M-3)\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2B_k} > D >$$

$$\max\left\{-\frac{2}{K} - (2M-1)\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2B_k};\ -\frac{4}{K} - (3-4M)\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2B_k};\ Q\right\}.$$

ahol

$$Q = \frac{-4 + K^2(1-M)^2\left(\sum\limits_{k=1}^{N}\frac{1}{B_k}\right)^2 + 2K\sum\limits_{k=1}^{N}\frac{1}{B_k}}{2K^2(M-1)\sum\limits_{k=1}^{N}\frac{1}{B_k}}$$

## 7. Megjegyzések

Modellünkben a dinamizmust a hiány, illetve többlettermelés vezérelte. Az itt bemutatotthoz hasonlóan vizsgálható egy alternatív modell, amelyben minden időpontban feltesszük a kereslet és kínálat egyensúlyát, és amelyben a dinamizmust az előrejelzési módszer vezérli. A stabilitási vizsgálat is hasonlóan történhet. A részletek megtalálhatók a Szidarovszky és Yen (1994) dolgozatban.

A modell többtermékes kiterjesztése is hasonlóan történhet, mint azt Okuguchi és Szidarovszky (1990) mutatta be dinamikus oligopol problémák esetére. Ilyenkor a mátrixelemeket kisebb méretű mátrixok behelyettesítik, és az így adódó speciális szerkezetű hipermátrixok sajátértékeinek elhelyezkedését kell vizsgálnunk.

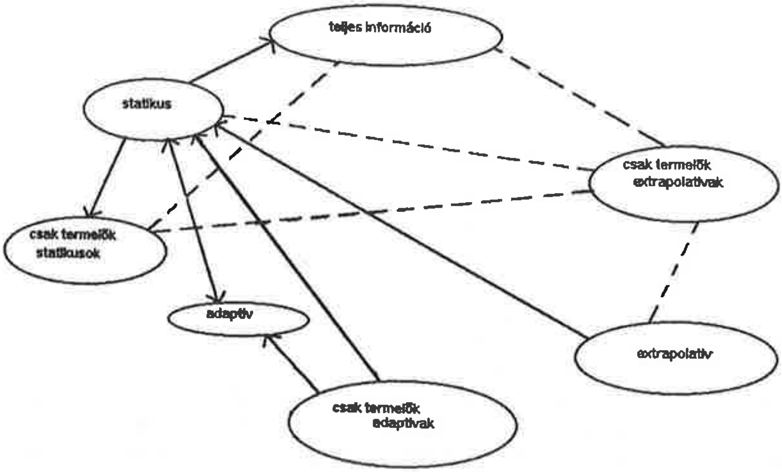
Feltesszük, hogy a termelők költségfüggvénye kvadratikus, és mindhárom együttható pozitív. A $B_k > 0$ feltétel szerint $C_k$ konvex. Minthogy $b_k = C_k'(0)$ és $c_k = C_k(0)$, e két együttható pozitív volta is természetes követelmény. Azt is feltettük, hogy minden $t$ időpontban az összes termelő profitmaximalizáló termelési programja pozitív. Ez a feltételezés is természetes, hiszen, ha valamelyik termelő optimális termelési programja zérus, akkor ez a termelő kilép a piacról, így a későbbi időpontokban nem kell vele számolnunk, azaz aszimptotikus vizsgálatokban mindezektől a termelőktől eltekinthetünk. A keresleti függvényben a $D < 0$ feltétel annak csökkenését jelenti, a $d > 0$ feltétel pedig azt, hogy zérus ár esetén pozitív kereslet jelentkezik. Mindkét feltétel ily módon reális. Az adaptív becslés értelmezése érdekében írjuk át a (7) egyenletet a

$$p_k^E(t) = p_k^E(t-1) + M_k\big(p(t-1) - p_k^E(t-1)\big)$$

alakba. Az új becslés a közvetlenül megelőzőből úgy adódik, hogy a becslési hiba egy részét ahhoz hozzáadjuk. Ha a teljes becslési hibát adjuk a megelőző becsléshez, akkor (az $M_k = 1$ speciális esetben) a statikus becslést nyerjük.

Az alapmodell dinamizmusát a (3) árdinamizmus vezérli. Vegyük észre, hogy ez az egyenlet Arrow (1960) megfelelő (folytonos időskálára vonatkozó) árdinamizmusának diszkrét megfelelője. Modellünk azonban nem tekinthető egyszerűen az Arrow-modell diszkrét változatának, hiszen egyaránt figyelembe veszi a termelői és fogyasztói oldal árbecslési módszerét és a termelék közötti versenyt is.

Összehasonlítva a teljes információ és a statikus becslés esetét, azonnal látható, hogy a (16) feltétel szigorúbb, mint a (11) egyenlőtlenség, valamint a (15) egyenlőtlenségből következik a (10) reláció. Tehát a teljes információ melletti globális aszimptotikus stabilitás következik a statikus eset globális aszimptotikus stabilitásából. Vegyük észre, hogy (18) első egyenlőtlensége azonos (16)-tal, valamint (16) fennállása esetén (15)-ből következik a (18) második feltétele. Tehát a (12) rendszer globális aszimptotikus stabilitásából következik a (17) rendszer globális aszimptotikus stabilitása. Megjegyezzük, hogy a (17) és a (9) rendszer globális aszimptotikus stabilitása független egymástól, hiszen a (16) feltétel erősebb (11)-nél, viszont (18) második egyenlőtlensége mindig gyengébb (10)-nél. Érdekes, hogy ha az összes termelő és a fogyasztók is adaptív becslést alkalmaznak, akkor a rendszer stabilitás szempontjából ekvivalens a statikus esettel. Egyszerű számolással igazolható, hogy $0 < M < 1$ esetben a (15) egyenlőtlenség jobb oldala mindig nagyobb, mint a (26) második egyenlőtlenségének jobb oldala. Ezért csak a termelők adaptív becslése esetén fellépő globális aszimptotikus stabilitásból következik ugyanaz a statikus esetre (ami ekvivalens azzal az esettel, amikor a termelők és a fogyasztók egyaránt adaptív becslést választanak). Vegyük észre, hogy a (31) egyenlőtlenség szigorúbb, mint (18) első egyenlőtlensége és így ebből következik (11). A (30) jobb oldala $M \neq 1$ esetén nagyobb, $M = 1$ esetben pedig azonos a (15) egyenlőtlenség jobb oldalával. Tehát az extrapolatív becslések melletti globális aszimptotikus stabilitásból következik ugyanaz a statikus esetre, ebből pedig ugyanaz a teljes információs esetre. Tekintsük ezután az utolsó vizsgált esetet, amikor az összes termelő extrapolatív becslést alkalmaz, amíg a fogyasztók pontosan ismerik az árat. Az $M = 1$ eset megfelel a statikus becslésnek, így a kapott eredmény is természetesen azonos az ott nyert feltételekkel. Az egyenlőtlenség-rendszer tovább nem egyszerűsíthető, hiszen egyik egyenlőtlenség sem szigorúbb általában, mint a másik. Ugyancsak egyetlen másik stabilitási feltétel sem következik általában ebből a feltételrendszerből, és ez a feltételrendszer sem következik egyetlen másik stabilitási feltételből sem általában. A különböző stabilitási feltételek kapcsolatát mutatja be az 1. ábra.




*1. ábra: A stabilitási kritériumok összehasonlítása*

## Irodalom

1. Okuguchi, K. (1976) Expectations and Stability is Oligopoly Models. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York.
2. Okuguchi, K. és Szidarovszky F. (1990) The Theory of Oligopoly with Multi-Product Firms. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York.
3. Arrow, K. J. (1960) Price-Quantity Adjustments in Multiple Markets with Rising Demands. In K. J. Arrow et. al. (eds) Mathematical Methods in the Social Sciences. Stanford University Press, Stanford, CA.
4. Szidarovszky F. és A. T. Bahill (1992) Linear Systems Theory. CRC Press, Boca Raton/London.
5. Okuguchi, K. és K. Irie (1989) The Schur and Samuelson Conditions for a Cubic Equation. Working Paper, Tokyo Metropolitan University, Tokyo, Japan.
6. Szidarovszky F. és J. Yen (1994) Adaptive and Cournot Expectations in a Special Consumer-Producer Market. Pure Mathematical and Application (Közlésre elfogadva).

## ON THE STABILITY OF A DISCRETE DYNAMIC PRODUCER–CONSUMER MODEL

In the paper Arrow's dynamic market model and dynamic oligopoly models are combined as a discrete-time dynamic system, which can handle the imperfect knowledge of the producers and the consumers, their estimations and decisions aiming at the optimal production program. Beyond the full information case, also the static, adaptive and extrapolative cases are examined. Necessary and sufficient conditions are derived for the global asymptotical stability of the corresponding systems. Finally, the stability conditions are compared with each other.

# ADAPTÍV ÉS EXTRAPOLATÍV BECSLÉSEK EGY SPECIÁLIS DISZKRÉT DINAMIKUS TERMELŐI-FOGYASZTÓI MODELLBEN[1]

SZIDAROVSZKY FERENC ÉS MOLNÁR SÁNDOR
*Arizonai Egyetem – Központi Bányászati Fejlesztési Intézet*

Dolgozatunkban egy speciális diszkrét dinamikus termelői-fogyasztói modellt vizsgálunk. Feltesszük, hogy minden időpontban egyensúlyban van a kereslet és a kínálat. A termelők először megbecsülik a várható árat, majd az így adódó várható hasznukat optimalizálják. A rendszer globális aszimptotikus stabilitását vizsgáljuk meg statikus, adaptív és extrapolatív becslések mellett.

## 1. Bevezetés

Korábbi dolgozatunkban (Szidarovszky és Molnár, 1994) egy diszkrét dinamikus termelői-fogyasztói modellt vizsgáltunk, amelyben a rendszer dinamizmusát Arrow egy modelljéhez (1960) hasonló diszkrét egyenlet vezérelte, amely hiány esetén árnövekedést, többlettermelés esetén pedig árcsökkenést eredményezett. A piacot annak keresleti függvényével jellemeztük, a termelőket pedig azok költségfüggvényeivel. Minden $t \geq 0$ időpontban feltettük, hogy az összes termelő először valamilyen módon megbecsüli a várható árat, és a becslés alapján adódó várható profitját maximalizálja. A Szidarovszky és Yen (1994) dolgozatban ezt a modellt úgy módosítják, hogy minden időpontban feltételezik a kereslet és kínálat egyensúlyát, és a rendszer dinamizmusát a dinamikus előrejelzések vezérlik.

Ebben a dolgozatunkban a Szidarovszky és Yen (1994) által bevezetett modellt vizsgáljuk meg, és a rendszer globális aszimptotikus stabilitásával foglalkozunk adaptív és extrapolatív becslések mellett.

## 2. A matematikai modell

A Szidarovszky és Molnár (1994) dolgozathoz hasonlóan egy olyan piacot vizsgálunk, amelyben $N$ termelő ugyanazt a terméket termeli. Legyen $x_k(t)$

[1] A kutatást a Magyar-Amerikai Tudományos és Technológiai Közös Alap (JF No. 224) és az NSF (INT-9312030) támogatta. Beérkezett 1994. október 10.

a $k$-dik termelő termelési mennyisége a $t$ időpontban ($k = 1, 2, \ldots, N$; $t = 0, 1, 2, \ldots$). Feltesszük, hogy költségfüggvénye kvadratikus:

$$C_k(x_k) = B_k x_k^2 + b_k x_k + c_k \,,$$

ahol az összes együttható pozitív. Minthogy

$$B_k = \frac{1}{2} C_k''(x_k)\,, \qquad b_k = C_k'(0) \qquad \text{és} \qquad c_k = C_k(0)\,,$$

egyedül az első, a konvexitást biztosító feltétel jelent csak megszorítást. Tegyük azt is fel, hogy minden időpontban az összes termelő először megbecsüli a piaci árat. Jelölje $p_k^E(t)$ a $k$-dik termelő becslését, és ezután az összes termelő maximalizálja várható hasznát. Vagyis $x_k(t)$ az

$$x_k(t) = \arg\max_{x_k \geq 0} \left\{ x_k p_k^E(t) - (B_k x_k^2 + b_k x_k + c_k) \right\} \tag{1}$$

szabállyal adódik. Feltesszük, hogy a profitmaximalizáló $x_k$ érték pozitív, ellenkező estben ugyanis a termelő kilép a piacról, így aszimptotikus vizsgálatok szempontjából nem kell többé számolnunk vele. Egyszerű differenciálással adódik, hogy

$$x_k(t) = \frac{p_k^E(t) - b_k}{2B_k} \,. \tag{2}$$

Feltesszük, hogy a piac keresleti függvénye lineáris: $d(t) = Dp(t) + d$, ahol $D < 0$ és $d > 0$. Az első feltétel az árban való csökkenést jelenti, $d > 0$ pedig szükséges ahhoz, hogy pozitív kereslet egyáltalán lehetséges legyen. Minden időszakban feltesszük a kereslet és kínálat egyensúlyát:

$$Dp(t) + d = \sum_{k=1}^{N} \frac{p_k^E(t) - b_k}{2B_k} \,,$$

azaz

$$p(t) = \sum_{k=1}^{N} \frac{p_k^E(t) - b_k}{2B_k D} - \frac{d}{D} \,. \tag{3}$$

Minthogy a $p_k^E(t)$ becslések a megelőző árak és becslések függvényei, ezzel az egyenlettel egy diszkrét dinamikus rendszert definiálunk, amelynek struktúrája és stabilitási tulajdonságai alapvetően a $p_k^E(t)$ becslésektől függenek.

## 3. Adaptív és statikus becslések

Ebben a paragrafusban feltesszük, hogy az összes termelő *adaptív* becslést alkalmaz:

$$p_k^E(t) = \alpha_k p(t-1) + (1 - \alpha_k) p_k^E(t-1) \,, \tag{4}$$

ahol $0 < \alpha_k \leq 1$. Ezeknek a becsléseknek az értelmezése és tulajdonságai megtalálhatók a Szidarovszky és Molnár (1994) dolgozatban. Megjegyezzük, hogy az $\alpha_k = 1$ speciális esetben a (4) becslést ***statikusnak*** mondjuk. A (3) és (4) egyenletek összevonásával egy elsőrendű lineáris differenciaegyenlet-rendszert nyerünk a $p(t)$, $p_1^E(t), \ldots, p_N^E(t)$ változókra, amelynek együttható-mátrixa:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{N} \frac{\alpha_k}{2B_kD} & \frac{1-\alpha_1}{2B_1D} & \cdots & \frac{1-\alpha_N}{2B_ND} \\ \alpha_1 & 1-\alpha_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \alpha_N & & & 1-\alpha_N \end{pmatrix}.$$

Tudjuk a lineáris rendszerelméletből (ld. például Szidarovszky és Bahill, 1992), hogy a globális aszimptotikus stabilitás szükséges és elégséges feltétele az, hogy az **A** mátrix sajátértékei az egységkör belsejében legyenek. **A** mátrix sajátérték-egyenlete a következő alakú:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{\alpha_k}{2B_kD}\right) u + \sum_{k=1}^{N} \frac{1-\alpha_k}{2B_kD} v_k &= \lambda u \\ \alpha_k u + (1-\alpha_k) v_k &= \lambda v_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, N). \end{aligned} \tag{5}$$

A második egyenletből közvetlenül leolvasható, hogy

$$v_k = \frac{\alpha_k}{\lambda - (1-\alpha_k)} u . \tag{6}$$

Itt feltesszük, hogy $\lambda \neq 1 - \alpha_k$. Ellenkező esetben $\lambda = 1 - \alpha_k$, így feltételeink alapján $0 \leq \lambda < 1$, amely nem befolyásolja a rendszer stabilitását. A (6) egyenlőséget az (5) első egyenletébe helyettesítve $u \neq 0$ alapján azonnal adódik, hogy

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{\alpha_k}{2B_kD} + \sum_{k=1}^{N} \frac{(1-\alpha_k)\alpha_k}{2B_kD(\lambda - (1-\alpha_k))} = \lambda . \tag{7}$$

Az egyenlet gyökeinek vizsgálata érdekében tegyük fel, hogy az $\alpha_k$ értékek között $r$ különböző van, és jelölje $G_l$ azon termelők halmazát, amelyek az $\alpha_k = a_l$ becslési együtthatót választják. Itt $a_1 > a_2 > \ldots > a_r$ jelöli a különböző $\alpha_k$ értékeket. Ekkor a (7) egyenlet a

$$\sum_{l=1}^{r} \left(\frac{1}{2D} \sum_{i \in G_l} \frac{1}{B_i}\right) a_l + \sum_{l=1}^{r} \left(\frac{1}{2D} \sum_{i \in G_l} \frac{1}{B_i}\right) \frac{(1-a_l)a_l}{\lambda - (1-a_l)} = \lambda$$

alakba is átírható, amely ekvivalens a

$$\sum_{l=1}^{r} \frac{(1-a_l)a_l\beta_l}{\lambda-(1-a_l)} = 2D\lambda - \sum_{l=1}^{r} \beta_l a_l \tag{8}$$

egyenlettel, ahol

$$\beta_l = \sum_{i\in G_l} \frac{1}{B_i} \, .$$

Ha $a_l = 1$ valamilyen $l$ mellett, akkor a (8) baloldalán eggyel kevesebb tag található, és a jobboldal struktúrája változatlan marad. Így feltesszük, hogy $a_l \neq 1$ $(l = 1, 2, \ldots, r)$, az elmondottak az $a_l = 1$ speciális esetre is érvényesek maradnak. Jelölje $g(\lambda)$ a (8) egyenlet baloldalát. Vegyük észre először, hogy az egyenlet ekvivalens egy $(r+1)$-edfokú polinom gyökeinek megkeresésével, így összesen $(r+1)$ valós vagy komplex gyök létezik. Könnyen látható, hogy

$$\lim_{\lambda\to 1-a_l+0} g(\lambda) = \infty \, , \qquad \lim_{\lambda\to 1-a_l-0} g(\lambda) = -\infty \, , \qquad \lim_{\lambda\to\pm\infty} g(\lambda) = 0 \, ,$$

és az összes folytonossági pontban $g$ lokálisan szigorúan csökkenő. A függvényt az 1. ábra mutatja, ahol az egyenlet jobboldalán szereplő lineáris függvényt is bemutatjuk. Az egyenletnek egy-egy gyöke van az $(1-a_1, 1-a_2)$, $(1-a_2, 1-a_3)$, …, $(1-a_{r-1}, 1-a_r)$ intervallumok belsejében, valamint $\lambda = 0$ is megoldás. Ez összesen $r$ valós gyököt ad. Minthogy az összes (valós és komplex) gyökök száma $r+1$, és komplex gyökök konjugáltjaikkal együtt szerepelnek, az $(r+1)$-dik gyök is valós. Könnyű látni, hogy a $g$ függvény konkáv $\lambda < 1 - a_1$ esetén, így a jobboldalt reprezentáló egyenes vagy érinti a görbét $\lambda = 0$ esetén (ekkor ez kétszeres gyök), vagy metszi azt még egy helyen. Így az összes gyök $-1$ és $+1$ közé esik akkor és csak akkor, amikor

$$g(-1) < -2D - \sum_{l=1}^{r} \beta_l a_l \, .$$

Egyszerű számolással látható, hogy ez az egyenlőtlenség ekvivalens a

$$D < -\sum_{k=1}^{N} \frac{\alpha_k}{(4-2\alpha_k)B_k} \tag{9}$$

feltétellel. Feltételeink mellett a jobboldal negatív, így a (9) egyenlőtlenség azt jelenti, hogy a keresletfüggvény $D$ meredeksége elegendően nagy kell, hogy legyen abszolút értékben.

Tekintsük ezután azt a speciális esetet, amikor $\alpha_k = 1$ mindegyik termelő esetén. Ekkor a (9) feltétel a következőképpen módosul:

$$D < -\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2B_k} \,. \tag{10}$$

## 4. Extrapolatív becslések

Feltesszük most, hogy az összes termelő *extrapolatív* becslést választ:

$$p_k^E(t) = \alpha_k p(t-1) + (1-\alpha_k)p(t-2) \,, \tag{11}$$

ahol $\alpha_k > 0$. Ezt az egyenlőséget a (3)-ba helyettesítve a

$$p(t) = \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{\alpha_k}{2B_k D}\right) p(t-1) + \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{1-\alpha_k}{2B_k D}\right) p(t-2) - \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{b_k}{2B_k D} + \frac{d}{D}\right) \tag{12}$$

rendszeregyenletet nyerjük, amelynek karakterisztikus polinomja:

$$\varphi(\lambda) = \lambda^2 - \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{\alpha_k}{2B_k D}\right) \lambda - \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{1-\alpha_k}{2B_k D}\right) .$$

A Szidarovszky és Molnár (1994) dolgozat 1. Lemmája alapján a sajátértékek akkor és csak akkor vannak az egységkör belsejében, ha

$$-\sum_{k=1}^{N} \frac{1-\alpha_k}{2B_k D} < 1$$

és

$$-\sum_{k=1}^{N} \frac{1-\alpha_k}{2B_k D} > \max\left\{\sum_{k=1}^{N} \frac{\alpha_k}{2B_k D} - 1\,; -\sum_{k=1}^{N} \frac{\alpha_k}{2B_k D} - 1\right\} .$$

Minthogy $D < 0$, ezek az egyenlőtlenségek a következőképpen foglalhatók össze:

$$D < \min\left\{\sum_{k=1}^{N} \frac{\alpha_k - 1}{2B_k}\,; \sum_{k=1}^{N} \frac{1-2\alpha_k}{2B_k}\right\} . \tag{13}$$

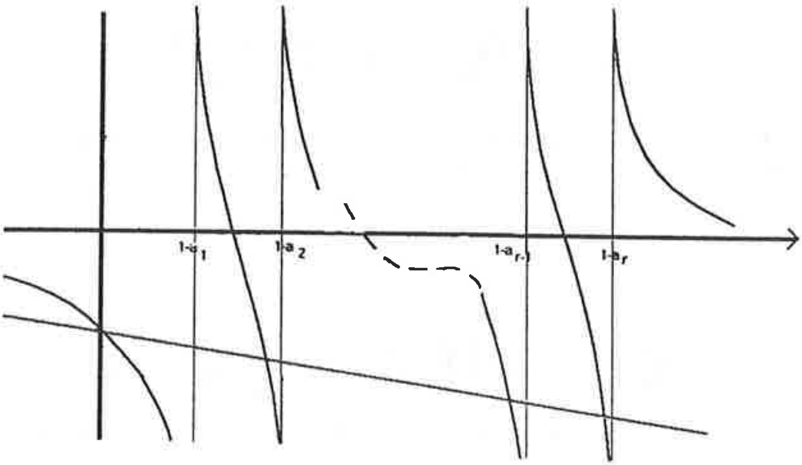
Ez a feltétel – hasonlóan az adaptív esetre – azt jelenti, hogy $|D|$ elegendően nagy kell, hogy legyen. Megjegyezzük, hogy az $\alpha_k = 1$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$

speciális esetben az extrapolatív becslések statikussá redukálódnak. Ekkor a (13) feltétel nyilvánvalóan a (10) egyenlőtlenséggé egyszerűsödik.

## 5. Következtetések

Dolgozatunkban a Szidarovszky és Molnár (1994) modell módosításával foglalkoztunk. Részletesen megvizsgáltuk a rendszer globális aszimptotikus stabilitását statikus, adaptív és extrapolatív becslések esetén. Stabilitási feltételként rendre a (10), (9) és (13) egyenlőtlenség adódott. Ha az összes többi paraméter rögzített, akkor e feltételek azt jelentik, hogy $|D|$ értéke elég nagy kell, hogy legyen. Ha a rendszer globálisan aszimptotikusan stabilis, akkor $|D|$ értékét növelve az továbbra is aszimptotikusan stabilis marad. Hasonlóan a $B_k$ értékek növelése esetén sem változik meg a rendszer globális aszimptotikus stabilitása.

Az itt bemutatott modell és a stabilitási feltételek többtermékes piacok esetére is átvihetők. Az általános modell ugyanúgy tárgyalható, mint a többtermékes oligopol modellek (ld. Okuguchi és Szidarovszky, 1990).




*1. ábra. A g függvény grafikonja*

## Irodalom

1. Szidarovszky F. és Molnár S. (1994) Egy diszkrét dinamikus termelői-fogyasztói modell stabilitásáról (Publikálásra leadva, SZIGMA).
2. Arrow K. J. (1960) Price-Quantity Adjustments in Multiple Markets with Rising Demands. In K. J. Arrow et al. (eds.) Mathematical Methods in the Social Sciences. Stanford University Press, Stanford, CA.
3. Szidarovszky, F. és J. Yen (1994) Adaptive an Cournot Expectations in a Special Consumer-Producer Market (Publikálásra leadva, Pure Math. and Appl.)
4. Szidarovszky, F. és A. T. Bahill (1992) Linear Systems Theory. CRC Press, Boca Raton/London.
5. Okuguchi, K. és Szidarovszky F. (1990) The Theory of Oligopoly with Multi-Product Firms. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York.

ADAPTIVE AND EXTRAPOLATIVE ESTIMATIONS IN A SPECIAL DISCRETE DYNAMIC PRODUCER-CONSUMER MODEL

In our paper a special discrete dynamic producer-consumer model is examined under the assumption that at each time period the demand and supply are balanced. We examined the global and asymptotical stability of the system.

# TÁRSASÁGI HÍREK

## Beszámoló az ORSA/TIMS 1994. október 23. és 26. között tartott detroiti országos konferenciájáról

Az Operations Research Society of America (ORSA) és a The Institute of Management Sciences (TIMS) 35. együttes országos konferenciáját 1994. október 23. és 26. között Detroitban tartották, *Global Manufacturing in the 21th Century* (Globális gyártásszervezés a 21. században) címmel. Mivel ebben az időszakban Fulbright-ösztöndíjasként éppen az USA-ban tartózkodtam, a University of New Hampshire Business School-jának Decision Sciences tanszéke nagyvonalú támogatásával el tudtam jutni erre az érdekesnek ígérkező konferenciára. Ez az esemény annyiból is különleges volt, hogy a két szervezet utoljára tartott együttes konferenciát, mivel az elmúlt konferenciákon mindkét szervezet tagsága egyöntetűen támogatta vezetőségének azt a javaslatát, hogy a két különálló társaság 1995. január 1-jétől egyesüljön.

Az olvasók többsége nyilván ismeri a különböző társaságok monstre konferenciáit, sőt, valószínűleg néhányan részt vettek már ORSA/TIMS országos konferencián is. Ezek az olvasók nem lepődnek meg azt hallva, hogy Detroitban több mint 1900 résztvevő gyűlt össze, a szekciókat 30 szakmai témakörhöz rendelték hozzá, s a körülbelül 450 szekcióban mintegy 2000 előadás hangzott el. Természetesen ez azt jelenti, hogy jómagam csak az előadások egy kicsiny töredékét hallgathattam meg, s itt most nem annyira egy szakmai beszámolót szeretnék adni erről az eseményről, hanem inkább benyomásaimat rögzíteni, s néhány, a konferencia kapcsán felvetődött gondolatomat megosztani a hazai operációkutató társadalommal.

A konferencia alcímei duplán hangsúlyozták a címben már amúgy is megjelenő gyakorlati irányultságot. Az egyik a főcímet egészítette ki: „Special Emphasis on Industrial Applications" (Külön hangsúlyt helyezve az ágazati alkalmazásokra), míg a másik alcím úgy szólt, hogy „Building Bridges Between Theoreticians, Practitioners and Managers" (Hídépítés az elméleti, a gyakorlati szakemberek és a vállalatvezetők között).

A konferenciát egynapos szakmai rendezvények előzték meg. Az érdeklődő szakmabeliek, de elsősorban inkább a gyakorlati szakemberek nyerhettek bepillantást egy-egy terület modern elméleti és módszertani eszköztárába. A hasonló jellegű előadások a későbbiekben is folytatódtak – természetesen külön regisztrációval, külön díjfizetéssel – „Global Executive Forum" címmel.

Az egynapos workshopok között szerepeltek például az alábbiak:

– Spreadsheet Decision Modeling with DPL. (A DPL egy hatékony döntéstámogató software, egyik legszebben kidolgozott része a döntési fák elemzését támogató modul.)

– Teaching the Art of Mathematical Modeling. (A kurzus célja elsősorban az volt, hogy a Management Science-t és az ehhez közeli területeket oktató egyetemi oktatókat naprakész metodológiai eszközökkel és anyagokkal lássa el.)

– Decision and Risk Analysis: The Unifying Vision. (Ez a workshop nem módszertani jellegű volt – nem is tartalmazott software-bemutatót, pedig a konferencián elég sok kockázatelemző számítógépes programot mutattak be egyébként –, hanem a kockázati elemeknek a nagyvállalatok döntési mechanizmusába való beépítéséről szólt, menedzserek számára.)

A konferencia mintegy kétezer előadását markáns témák köré szervezték, megtűzdelve plenáris előadásokkal és panelvitákkal. Az volt a benyomásom, hogy a legnagyobb szakmai értékűek ez utóbbiak voltak. A plenáris üléseken egy-egy témakör neves, felkért előadója igyekezett valóban releváns kérdéseket felvetni egyórás előadásában, a panelvitákon pedig felkészült előadók és a témában jártas, érdeklődő közönség találkozott. Itt is a gyakorlattal való kapcsolat dominált. Az előadók között szerepelt például a Ford Motor Company elnökhelyettese, illetve a General Motors Corporation észak-amerikai termelésirányítási központjának vezetője. Természetesen nem véletlen, hogy Detroitban, az amerikai autógyártás hagyományos fellegvárában ezek a nagy cégek magas szinten képviseltették magukat.

A konferencia nyitófogadását a Dearborn-i Henry Ford múzeumban rendezték. A hatalmas kiállítási csarnokban szinte elveszett a megjelent 1500–1600 ember. A szakmai és baráti beszélgetések közben végig lehetett sétálni a régi autómodellek és új autócsodák között, megszemlélni a fejlesztés állomásait, bemutatták a forgalomból már kivont elnöki autókat, s akit nem csak az autók érdekeltek, megtekinthette a közlekedés amerikai történetét idéző kiállításrészeket is a kerékpártól a repülőgépekig.

A szakmai szekciók a hagyományos tárgykörökön túlmenően (a 450 szekciócím között megtalálható volt például az Applied Statistics, Operations Management, Decision Analysis, Logistics, Artificial Intelligence, Manufacturing Planning, Scheduling and Design, Dynamic Programming, Stohastic Process Applications, New Network Algorithms, Methods for Integer Programming) rengeteg specifikus témát dolgoztak fel, például: Service Systems, Managing Quality, Robotics and Process Control, Airline Operations, Ergonomics, Performance Analysis of Telecommunication Systems, Coordination of Operations and Marketing, Workforce Management, Productivity Analysis vagy Energy and Pollution.

Számomra impozáns módon az előadások nagy tömege valós alkalmazásokat igyekezett bemutatni és továbbfejleszteni. Természetesen az általam látott és elolvasott esetek igen egyenlőtlen színvonalat képviseltek. Volt közöttük viszont jónéhány, amely szemmel láthatólag egy-egy vállalat és egyetem hosszú távú együttes munkájára épült. Az előadók sok sikeres konzultációs tevékenységről adtak számot. Többekkel beszélgetve úgy tűnt számomra, hogy az Egyesült Államokban újra egy olyan szakasz következik, ahol a vállalatok – főleg a nagyobbak és a bonyolultabb management-struktúrával rendelkezők – szívesen használnak fel döntéstámogató szakembereket és modelleket. A hihetetlenül magas szintre érkezett számítástechnikai háttér nagyon jó alapot ad arra, hogy az egyetemi konzultáns és a vállalati szakember a lényeggel, a döntési problémával foglalkozzon; az adatok beszerzése, számossága, a modell esetleges bonyolultsága nem okoz gondot, az idő- és költségtényező nem a technikában, hanem az élőmunkában jelentkezik.

Bár én igyekeztem kétkedni ebben, többen állították, s ez egyetemi környezetemben is megfigyelhető volt, hogy például a decision analysis eszközök a tantermekből kezdenek bevonulni a vállalati gyakorlatba. A menedzserek asztalán a számítógép nem dísz, az újabb generációk, s az elmúlt évtized MBA-nemzedéke használja is a számítógép kínálta módszereket – ha nem is feltétlenül a legbonyolultabbakat. Feltűnő volt számomra, hogy milyen sok önálló konzultációs cég képes megélni ezen a területen; elmondásuk szerint egyre jobban.

Ebből a konferenciából, vagy egyéb, valószínűleg korlátozott tapasztalataimból persze nem akarok általánosítani. Az a benyomásom azonban, hogy újra változik a világ ezen a területen, s mi újra le vagyunk maradva. Nem módszertanilag, s nem a kiművelt egyetemi emberfőkben; mi továbbra is hűségesen igyekszünk követni a nagyvilág trendjeit. Ahol az igazi elmaradás van, az a vállalati szféra, s csak reménykedni tudok abban, hogy a nyugati cégek megjelenése, a piacgazdasági szemlélet elterjedése magával fogja hozni azt az igényt is, amelynek kielégítéséről szólt az amerikai előadások többsége.

A konferencia fő tevékenysége, a szakmai tapasztalatcsere mellett egyéb rendezvények is zajlottak. A helyszín és a résztvevők köre alkalmat kínált a nagy szakmai konferenciákon szokásos állásbörzére és interjúk lefolytatására. Az európai és amerikai közgazdasági könyvkiadók zöme kiállította legújabb könyveit, bemutatta katalógusait, és lehetőség volt leszállított árú könyvek vásárlására vagy kedvezményes folyóirat-előfizetésre is. A konferencia időtartama alatt működő kiállításon mintegy 20–25 software-előállító cég is megjelent. Többféle, Windows alatt működő döntéstámogató rendszert, új grafikus programokat lehetett látni, s igen érdekes volt, hogy egyes területek mennyire divatosak, például négy különböző kockázatelemző programot kínáltak, s gyártásszervező programból is bemutattak legalább ötfélét (ezek közül néhány specializált volt, pl. az autóiparra).

A konferencia ideje alatt tartották üléseiket egyes szakmai csoportok, s a két nagy szervezet, a TIMS és az ORSA közgyűlésére is sor került. Végre valami, amiben otthonosan érezhettük magunkat: a gyűlések itt sem vonzottak túlságosan sok résztvevőt. A beszámolókra, a választásokra a tagok csekély töredéke volt kíváncsi, de a legitimáció miatt természetesen ezeknek az üléseknek megfelelő formában le kellett bonyolódniuk.

A két szervezet összeolvadása már eldöntött kérdés volt. A szakmai indokok mellett – nagyfokú párhuzamosság volt található a két szervezet működésében, célkitűzéseiben, akárhogy igyekeztek is megkülönböztetni magukat – nagy szerepet játszott a döntésben a két adminisztráció megszüntetésének igénye is. Miért tartsunk fenn és fizessünk két apparátust, akik szinte ugyanazt a kört célozzák meg, s nagyon hasonló tevékenységet végeznek? – kérdezték.

A kis magyar résztvevői kört Vastag Gyula, az észak-karolinai egyetem mellett Chapel Hill-en működő Kennan Institute főmunkatársa, Vörös József, a JPTE Közgazdasági Kar Gazdasági Matematika Tanszékéről és jómagam alkottuk. A fenti témáról beszélgetve, bennünk is felmerült a gondolat: vajon nem kellene-e felülvizsgálnunk azt az 1990 körül kialakult – elsősorban pénzügyileg hasznos, de talán a kollégák elképzeléseit is akkor jól tükröző – helyzetet, ami az operációkutatási szakmai szervezetek sokaságában jelentkezik? A nemzetközi tevékenység, a folyóiratok megjelentetése és fenntartása, a konferenciaszervezések egyszerűsítéséhez vezethetne egyetlen országos társaság léte, amelyen belül természetesen mód nyílna kisebb szakmai szerveződések önálló életére, műhelyviták szervezésére is.

Visszatérve a detroiti konferenciáról szóló beszámolóra, érdemes megjegyezni, hogy a fentebb vázolt programok, tevékenységek hihetetlenül szervezetten, gördülékenyen zajlottak le. A több mint százoldalas programfüzet az áttekinthető tervezésnek és a számítógépes szerkesztésnek köszönhetően, mindent könnyen kikereshetően tartalmazott. Természetesen detroiti tartózkodásunkat néhány szabadidős program is tarkította, s főszerkesztő kollégámmal együtt elmondhatjuk: mindenképpen kellemes szakmai és kulturális élményt jelentett számunkra a részvétel.

Temesi József