

# EGYSÉGGYÖKÖK ÉS TESZTJEIK<sup>1</sup>

HUNYADI LÁSZLÓ

*Budapesti Közgazdaságtudományi Egyetem*

A cikkben áttekintjük azokat az alapfogalmakat, amelyek a sztochasztikus idősorelemzéshez, és az azt felhasználó ökonometriai vizsgálatokhoz szükségesek, majd pontosan megfogalmazzuk az egységgyök problémát, annak szerepét a modellépítésben. Ezt követően a legegyszerűbb esetre viszonylag részletesen bemutatjuk a tesztelés fontosabb irányait, míg a többi, fokozatosan bonyolultabb modellek esetére már csak az eredményeket adjuk közre, azokat is vázlatosan. A cikket a nyitva maradó problémák összegzése és a felhasznált irodalomjegyzék zárja.

## Bevezetés

Az egységgyökök problémája az ökonometria egyik divatos témája, amely a 80-as évek második felében az ökonometriai kutatások homlokterében állt. Mostanra kissé lepadt a hullám, de olyan mennyiségű kutatási eredmény született és tisztult le, hogy érdemes és célszerű azokat áttekinteni, rendszerezni. Ez a fő célja ennek a cikknek.<sup>2</sup>

Az egységgyök (unit root) elnevezés legegyszerűbb esetben azt jelenti, hogy egy *elsőrendű autoregresszív folyamatban* (amely a sztochasztikus idősorelemzés és egyben a korszerű ökonometria egyik kitüntetett fontosságú építőköve), a késleltetett változó együtthatója abszolút értékben 1. Magasabb rendű autoregresszív folyamatok esetén az ezzel analóg fogalom azt jelenti, hogy a karakterisztikus polinom gyökei egységnyiek – innen az elnevezés. Mint azt a továbbiakban részletesen is kimutatjuk, az egységgyök(ök) milyensége döntő módon befolyásolja az idősor tulajdonságait. Ugyanakkor, mivel a megfelelő idősormodell paramétereit csak minta alapján, becsléssel tudjuk meghatározni, a megfelelő együtthatók, illetve gyökök is tartalmaznak mintavételi, illetve véletlen hibát. Ezért teszteket kell alkalmaznunk annak megállapítására, hogy a kérdéses együttható (gyök) valóban tekinthető-e egységnyinek,

<sup>1</sup> A cikk a *Gazdasági folyamatok előrejelzésének elméleti kérdései* c. 293. sz. OTKA kutatás keretében 1992-ben elkészült *Idősorok feltáró elemzése* c. tanulmány átdolgozott, rövidített, illetve néhány újabb eredménnyel kibővített változata.

<sup>2</sup> A szerző ezúton mond köszönetet Mátyás Lászlónak, aki az első változat átolvasása után igen hasznos tanácsokat és szempontokat adott a cikk átdolgozásához.

avagy attól szignifikáns mértékben különbözik-e. Az egységgyökök és tesztek áttekintésével a nemzetközi szakirodalomban több cikk és tanulmány (pl. [1,4]) is foglalkozik, amelyeket e cikkben forrásmunkaként használtunk fel.

## 1. Alapfogalmak

A bevezetőben már említettük, hogy a jelenlegi cikk a gazdasági idősorok egy speciális problémájának vizsgálatával foglalkozik. Már itt le kell szögezni, hogy csak egydimenziós idősorok elemzését tűztük ki célul. A többdimenziós idősorok (idősorrendszerek) ilyen szemléletű elemzése nem kevésbé érdekes és fontos feladat, de meghaladja e cikk kereteit.

A további tárgyalás előkészítéseként tisztáznunk kell néhány fogalmat, amelyeknek a későbbiekben nagy szerepük lesz. Az elemzések egyik központi fogalma az *adatgeneráló folyamat* (Data Generating Process=DGP), amin azt az ismeretlen, de feltételezésünk szerint *létező és időben stabil törvényszerűséget* értjük, ami a vizsgált (megfigyelt) idősort létrehozza, ennélfogva az egész folyamatra jellemző. A DGP változóját a továbbiakban  $Y_t$ -vel, paramétereit általában görög betűkkel jelöljük. A DGP generálja a *megfigyeléseket*, amelyek a kutató rendelkezésére állnak, és amelyek alapján megkísérli azonosítani a DGP-t. Ennek az azonosításnak az eszköze a *modell*, azaz a kutató által feltételezett DGP, amelynek változóját  $y_t$ -vel, paramétereit pedig szintén görög betűkkel jelöljük. A feladat tehát az, hogy olyan modellt találjunk, amely – mint feltételezett DGP – összhangban áll a megfigyelésekkel. Ha ilyent találunk, akkor feltételezhetjük, hogy ez *lehet* az igazi DGP.

Már ez a bevezetés is sejteti a vizsgálat nehézségeit, amelyek közül most csupán hármat emelünk ki. Egyrészt igen erős feltételezés az időben stabil DGP létének feltételezése, hiszen elegendő bármely makromutatóra gondolnunk ahhoz, hogy (főként átalakuló gazdaság esetén) ez a feltétel megkérdőjelezhető legyen. Másrészt a gazdasági jelenségek egymással szorosan összefüggő halmaza eleve kérdésessé teszi az egyváltozós elemzések létjogosultságát. Végül, és talán döntő módon nehézséget okoz az, hogy a közgazdaságtudomány (mint sok más társadalomtudomány, de esetenként egyes természettudományok is) *nem kísérleti* jellegű tudomány, ennek folytán a jelenségek időbeli alakulásának törvényszerűségeit nem tudja kontrollált kísérletek segítségével felderíteni, hanem csak a jelenségek egyszeri lefutásából képes következtetéseket levonni. Másszóval az  $Y_t$  valószínűségi változók tulajdonságainak és kapcsolatainak feltárására minden  $t$  időszakban (időpontban) csak egyetlen  $y_t$  megfigyeléssel rendelkezünk. Ahhoz, hogy ezeket a megfigyeléseket statisztikai elemzési célra fel tudjuk használni, szükség van a *stacionaritás* fogalmának

bevezetésére.<sup>3</sup> A stacionaritás a fő jellemzők időbeli stabilitását jelenti.

Nagyon fontos megkülönböztetni a DGP és a modell stacionaritását! A DGP szempontjából a stacionaritás a folyamat jellegét lényegesen befolyásoló tulajdonság ugyan, de nem döntő fontosságú abból a szempontból, hogy elmezhető-e a megfelelő DGP. Más a helyzet a modell esetében. Mivel a modell alapvető célja az, hogy azt becslési vagy hipotézisvizsgálati célra felhasználjuk, itt döntő mozzanat az, hogy a modell stacionárius legyen, hiszen csak ez esetben becsülhetők jellemzői az adott megfigyelésekből, csak ekkor tekinthető a megfigyeléssorozat statisztikai mintának. Az idősorlemzés talán legnagyobb problémája az, hogy a gazdasági változók DGP-je általában *nem stacionárius*, azok a módszerek viszont, amelyekkel ezeket modellezni, elemezni tudjuk, csak *stacionárius* sorok esetén alkalmazhatók.

Ennek az ellentmondásnak a feloldása alapvetően két módon történhet:

- az elemzés során olyan változókat szerepeltetünk magyarázó pozícióban, amelyek megmagyarázzák az időbeli változásokat és így a stacionaritás kérdése már csak a maradékok esetében vethető fel. Ez a *szintekre* épített regressziós (ökonometriai) modell megközelítése;
- az elemzés változóját – ha tudjuk, vagy gyanítjuk, hogy az nem stacionárius folyamatból származik – *előzetes transzformációk segítségével* stacionáriussá alakítjuk. Ekkor a transzformált DGP kedvező esetben már stacionárius lesz, és azonosítása már stacionárius modellek segítségével lehetséges. Ez a módszer a klasszikus idősorlemzés sajátja.

Az a)-ban említett megközelítés – bár vonzó, és a klasszikus ökonometriai modellépítés alapvető eszköze volt sokáig – manapság sok bírálat tárgya leginkább azért, mert az esetleg nem stacionárius idősorokra épített regresszió *hamis* hatásokat tükrözhet, félrevezető eredményeket adhat. Ezért egyre elterjedtebb az a felfogás, hogy a regressziós elemzés előtt a változók idősorait a stacionaritás szempontjából vizsgálni kell, és azokat szükség esetén alkalmas transzformációval stacionáriussá kell alakítani.

Az ilyen előzetes elemzések fő célja tehát az egyes idősorokról megállapítani azt, hogy az azok mögött rejlő *DGP stacionárius-e, és ha nem, akkor milyen módon tehető stacionáriussá* lehetőleg természetesen úgy, hogy az alkalmazott transzformáció ne változtassa meg az eredeti DGP (és idősor) egyéb tulajdonságait. A stacionaritás megállapítása egyszerűbb esetekben történhet a megfigyelések ábrájának tanulmányozásával, egyszerűbb mutatóinak

<sup>3</sup>Stacionaritáson a továbbiakban gyenge, avagy másodrendű (kovariancia)stacionaritást értünk. Stacionáriusnak tekintünk egy DGP-t, vagy modellt akkor, ha a megfelelő változó várható értéke független  $t$ -től, a  $k$ -ad rendű autokovariancia függvénye pedig csak  $k$  függvénye (azaz ez sem függ  $t$ -től).

közvetlen számítása és elemzése útján, de ezek valójában nem adnak megnyugtató megoldást. Ezért a stacionaritás megállapítása is már statisztikai próbák használatát igényli.

Szűkebb értelemben véve a stacionaritás valójában nem tesztelhető feltevés, hiszen a tesztek mindegyike abból indul ki, hogy rendelkezésre áll egy statisztikai minta, ami alapján a próbafüggvény megkonstruálható. Valójában azonban ahhoz, hogy az  $y_1, y_2, \dots, y_n$  megfigyeléseket (homogén) mintának tekinthessük, szükség van a stacionaritásra. Ez a kör feloldhatatlannak látszik. Az ellentmondást a statisztikai gyakorlat szemérmesen úgy oldja fel, (vagy inkább úgy kerüli meg) hogy nem explicite a stacionaritás tesztelésével, hanem annak egyes speciális eseteivel, az egyes DGP-kben való megjelenésének vizsgálatával foglalkozik. A nevezett probléma persze ugyanúgy megmarad, de rejtve. Némiképp más a helyzet akkor, ha egy feltételezett DGP-ről elméletileg kimutatjuk, hogy paramétereinek bizonyos értékei esetén az stacionárius, más értékek esetén nem stacionárius folyamatot generál, és ekkor a becült paraméterek értékére alkalmazunk tesztet. Rejtve bár, de itt megjelenik a stacionaritás (implicit) feltételezése.

Ez utóbbi eljárások ugyanakkor *konstruktívak* abban az értelemben, hogy általában arra is rámutatnak, hogy mi a nem-stacionaritás vélhető oka, így lehetőséget adnak annak kiküszöbölésére is. A nem-stacionaritás oka mindig valamiféle általános trendhatás<sup>4</sup>, ami azonban többféle lehet. A *determinisztikus trend* egy olyan, létezőnek tekintett pályát jelent, ami körül a folyamat (szerencsés esetben stacionáriusan) ingadozik. Így ekkor a determinisztikus trend kiszűrése után a megmaradt folyamat a stacionárius idősorokra kidolgozott eszközökkel (pl. Box-Jenkins modellezés) már jól elemezhető. A *sztochasztikus trend* ezzel szemben nem fix, előre létezőnek feltételezett pályából indul ki, hanem – feltételezése szerint – maga az időbeli változás is véletlen ingadozásoknak van kitéve. Ez esetben a trendhatás kiszűrése más módon történik és mások lesznek a kapott, a trendtől megtisztított idősor tulajdonságai is. A most következő elemzés éppen arra vonatkozik, hogy elválassza egyrészt a stacionárius és a nem stacionárius eseteket, illetve nem stacionárius esetben rámutasson arra, hogy milyen a nem-stacionaritás természete. Ez egyben azt is meghatározza, hogy milyen modellezési eszközzel nyúljunk a problémához.

<sup>4</sup>Végső soron ilyen trendhatást fejeznek ki a különböző ARCH (AutoRegressive Conditional Heteroscedasticity) folyamatok is, amelyekkel itt részleteiben nem foglalkozunk. Ezek sajátos helyet foglalnak el a sztochasztikus folyamatokon belül, hiszen várható értékük és varianciájuk is időtől független, feltételes varianciájuk viszont időfüggő. Így, bár látszatra stacionáriusak, valójában a nemstacionárius folyamatok közé sorolhatók. Az ARCH modellek némiképp ellentmondásos megítélése a gyenge stacionaritás fogalmának ellentmondásosságára is rávilágít.

## 2. Az egységgyök probléma

Az egységgyök, mint azt korábban már említettük, az autoregresszív folyamatok jellemzője. Értelmezéséhez írjuk fel az általános ( $p$ -ed rendű) autoregresszív folyamatot:

$$Y_t = \rho_1 Y_{t-1} + \rho_2 Y_{t-2} + \dots + \rho_p Y_{t-p} + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim NID(0, \sigma^2) \quad (1)$$

illetve átrendezve

$$Y_t - \rho_1 Y_{t-1} - \rho_2 Y_{t-2} - \dots - \rho_p Y_{t-p} = (1 - \rho_1 L - \rho_2 L^2 - \dots - \rho_p L^p) Y_t = \varepsilon_t$$

alakban<sup>5</sup>, és definiáljuk az ehhez tartozó karakterisztikus egyenletet az alábbi módon:

$$(1 - \rho_1 x - \rho_2 x^2 - \dots - \rho_p x^p) = 0.$$

A karakterisztikus egyenletnek  $p$  számú gyöke van (amelyek lehetnek valósak, vagy komplexek). Ha az  $i$ -edik gyök abszolút értéke 1, azaz  $|x_i| = 1$ , akkor azt mondjuk, hogy  $x_i$  egységgyöke a folyamatnak. A későbbiekben többször hivatkozunk majd a gyökök milyenségére. Erre vonatkozóan fontos tétel az, hogy ha a fenti karakterisztikus polinom minden gyöke az *egységkörön kívül* helyezkedik el, akkor a folyamat stacionárius, ha pedig van az egységkörön elhelyezkedő gyök (egységgyök), és/vagy az egységkörön belüli gyök, akkor a folyamat nem stacionárius.

Legegyszerűbb esetben, az elsőrendű autoregresszív folyamat (AR1) esetén  $Y_t = \rho Y_{t-1} + \varepsilon_t$  vagy más felírásban  $Y_t - \rho Y_{t-1} = \varepsilon_t$ , avagy  $(1 - \rho L) Y_t = \varepsilon_t$ . A megfelelő karakterisztikus egyenlet ekkor  $1 - \rho x = 0$ , ennek egyetlen gyöke pedig  $x = \frac{1}{\rho}$ . Ha  $\rho = 1$ , akkor  $x = 1$  *egységgyök*, azaz a gyök az egységkörön helyezkedik el. Ha  $|\rho| > 1$ , akkor  $x < 1$ , tehát a gyök az egységkörön belül van. Azonnal látható, hogy ez esetben a folyamat nem stacionárius. Ezzel szemben, ha  $|\rho| < 1$ , akkor  $x > 1$ , tehát (aszimptotikusan) stacionárius folyamat gyöke egységkörön kívül helyezkedik el.

A legegyszerűbb AR1 folyamat esetén az egységgyök a stacionárius ( $|\rho| < 1$ ) és az expozív ( $|\rho| > 1$ ) eset határán van. A  $|\rho| > 1$  expozív esetre könnyű kimutatni az alábbi tulajdonságokat:

- a folyamat  $t$  időpontbeli várható értéke a kiinduló  $Y_0$  függvénye, azaz az induló érték szerepe nem tűnik el az idő múlásával;
- varianciája és  $k$ -adrendű autokovarianciája  $t$  függvénye, így a folyamat nem stacionárius;

<sup>5</sup>A fenti formulákban NID független, normális eloszlású változókat jelent,  $L$  pedig a késleltetés (lag) operátor.

– varianciája  $t$  növekedésével végtelenbe tart.

Ez utóbbi tulajdonság az, amiért az expozív elnevezést kapta, hiszen elég nagy  $t$  esetén a végtelenbe tartó variancia kezelhetetlenné, ellenőrizhetetlenné teszi a folyamatot. Ezért ezt a nemstacionárius alternatívát viszonylag ritkán használjuk, és figyelmünket a további vizsgálatok során inkább a  $|\rho| < 1$  illetve a  $|\rho| = 1$  esetek közti választásra irányítjuk.

$|\rho| < 1$  esetén a folyamat stacionárius, egyre csökkenő szórással lecseng a kiinduló pontból és egy fehér zaj folyamathoz tart. Lényeges tulajdonsága ennek az esetnek az, hogy a modell idővel "felejt", azaz a véletlen hatásokban megjelenő ugrás, sokk továbbá ugyan, beépül a folyamatba, de hatása idővel elenyészik, elfelejtődik. Ugyancsak fontos tulajdonsága ennek a folyamatnak, hogy hosszú (kisfrekvenciás) hullámokat nem, de rövidtávú ingadozásokat annál inkább tartalmaz. A gazdasági változók alakulásának leírásakor gyakran alkalmazható ez a folyamat akár önmagában, akár – még inkább – a trendtől, vagy valamiféle regressziótól való eltérések magyarázataként.

Ezzel szemben a  $|\rho| = 1$  eset (véletlen bolyongás, Random Walk=RW)<sup>6</sup> nemstacionárius folyamatot ír le, melynek várható értéke ugyancsak 0, de varianciája időben növekvő. Ellentétben az előző felejtő modellel, ez emlékezik; a véletlenszerűen belépő sokkok hatása tovább él. A véletlen bolyongási folyamatra a hosszú hullámú (kisfrekvenciás) ingadozás a jellemző.

Talán még pregnansabban megmutatkozik az eltérés a két eset közt, ha a folyamatok várható értékét nem kötjük meg 0-ra, hanem valami  $\alpha \neq 0$  várható értéket feltételezünk. Ekkor alapfolyamatunk az alábbi lesz:

$$Y_t = \alpha + \rho Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Ez  $|\rho| < 1$  esetén az előzőekkel teljesen analog módon viselkedik, mindössze azzal a különbséggel, hogy nem 0-hoz, hanem  $\frac{\alpha}{1-\rho}$ -hoz konvergál a folyamat. Egészen más lesz azonban a  $|\rho| = 1$  eset (véletlen bolyongás eltolással) tartalma. Ekkor ugyanis egyszerű átalakítások után (és  $Y_0 = c$  kezdőértéket feltételezve) adódik az, hogy

$$Y_t = c + \alpha t + \sum_{i=1}^t \varepsilon_i,$$

ami nem más, mint a már említett *sztochasztikus (lineáris) trend*.

<sup>6</sup> A sztochasztikus folyamatok elméletében (lásd pl. [14]) (véletlen) bolyongási folyamatnak a diszkrét állapotterű és diszkrét időparaméterű feltételező folyamatokat nevezik. Ennek általánosítása folytonos állapotterű és folytonos időt feltételező esetekre a Brown mozgás, vagy másnéven a Wiener folyamat, amely fontos szerepet játszik egyebek közt az itt bemutatandó tesztek elméletében.

Az elnevezést az indokolja, hogy determinisztikus trend esetén a meredekségi paraméter konstans, így az egész folyamat előre determinált, a véletlen maradékváltozó csak a hosszútávú trendre rakódik rá, míg a fenti esetben  $\alpha + \varepsilon$ , azaz a meredekség valószínűségi változó. Az  $Y_t$ -re felírt (redukált) formában a determinisztikus és a sztochasztikus trend között a különbség csak a sztochasztikus változóban (maradéktag) van meg, hiszen egyik esetben ez  $\varepsilon_t$ , míg a másik esetben  $\sum_{i=1}^t \varepsilon_i$  annak minden következményével egyetemben.

Ha tehát az AR1 folyamat várható értéke nem 0, akkor még markánsabb különbség van a gyök minősége szerint, hiszen ekkor egy konstanshoz igazodó stacionárius folyamat áll szemben egy trendfolyamattal. Emellett ebben az esetben lehetségessé válik a sztochasztikus és determinisztikus trend közti választás, illetve felmerül a választás problémája.

Az egységgyök probléma szorosan kapcsolódik a *kointegráció* fogalmához. A kointegráció a korszerű idősoros modellépítés egyik fontos fogalma, lényege a következő.

Egy  $Y_t$  folyamatot  $d$ -ed rendben integrálnak nevezünk akkor, ha  $d$ -edik differenciái már stacionárius folyamatot eredményeznek, de  $d - 1$ -edik differenciái még nem. Ha mind  $Y_t$ , mind  $X_t$   $d$ -ed rendben integráltak, és létezik olyan  $\alpha \neq 0$  konstans, hogy az  $Y_t - \alpha X_t$  folyamat már csak  $d - b$ -ed rendben integrált ( $b > 0$ ), akkor azt mondjuk, hogy  $Y_t$  és  $X_t$   $b$ -ed rendben *kointegráltak*. Gyakorlati feladatok esetén a  $d = 1, b = 1$  eset a legegyszerűbb és leggyakoribb. Ez azt jelenti, hogy két elsőrendűen integrált folyamatból – ha azok kointegráltak – "kikeverhető" stacionárius folyamat.

A kointegráció szerepe és jelentősége a modellépítésben igen nagy: eleendő itt utalnunk arra, hogy kointegrált esetben a rövid- és hosszútávú hatások úgy választhatók szét, hogy szerves kapcsolatuk megmarad. A kointegrált változókra épített modell felírható hibakorrekciós formában, ami a jelenségekben meglévő negatív visszacsatolásokra mutat(hat) rá numerikusan elemezhető módon. Belátható továbbá, hogy a kointegráció felfogható a dinamikus egyensúly (hosszú távú együttlmozgás) jellemzőjeként, és az is könnyen belátható, hogy értelmes modellfelírás csak kointegrált változók között képzelhető el. Végül megemlítjük, hogy kointegrált idősorokra épített regressziós modell legkisebb négyzetekkel történő becslése esetén a paraméterek a szokásosnál gyorsabban konvergálnak elméleti értékükhöz, sőt aszimptotikusan mentesek lesznek a szimultaneitásból adódó esetleges torzításoktól is. Ez utóbbi tulajdonságokat szokták Stock tanulmánya [30] nyomán *szuperkonzisztenciának* nevezni. Mivel e cikkben feladatunk nem a kointegráció szerepének bemutatása<sup>7</sup>, csupán arra utalunk, hogy a kointegráció megfo-

<sup>7</sup>Erre lásd pl. Engle és Granger úttörő cikkét [6], valamint Neményi J. legfrissebb munkáját [19]

galmazható az egységgyökök segítségével is, hiszen a fentiekben  $Y_t$  és  $X_t$   $d$  számú,  $Y_t - \alpha X_t$  pedig  $d - b$  számú egységgyököt tartalmaz. Ez azért lényeges, mivel a kointegráltság megállapítása éppen erre az értelmezésre épül: az tesztljük, hogy valóban az egyes folyamatokban van-e egységgyök, illetve hány egységgyök van.

A fentiekben nagyon röviden bemutattuk azt, hogy mi az egységgyökök jelentősége az egyes modellek kiválasztásában, illetve az egységgyökök léte, vagy hiánya menynyiben jelent más tulajdonságú folyamatokat. Szólni kell emellett arról, hogy milyen *elemzési eszközöket* implicál egyik, vagy másik eset. Mivel azt láttuk, hogy a sztochasztikus idősormodellezés csak stationárius eseteket tud kezelni, a modellépítés másként jelentkezik egységgyök léte, illetve hiánya esetén. Ha a vizsgált folyamatban *nincs* egységgyök, akkor az a stationárius ARMA modellekre kidolgozott eszközökkel (becslés, teszt, előrejelzés) gond nélkül kezelhető. Ha azonban van egységgyök, akkor először olyan átalakítást kell végezni, amely biztosítja a maradékok stationaritását. Ilyen a differenciák képzése (differenciázás).

A gyakorlati feladatok esetén, ha a vizsgálandó idősorban látható trendhatás van, akkor lényeges az a kérdés, hogy ez determinisztikus, vagy sztochasztikus trend-e, azaz a további elemzéshez szükséges stationaritást *differenciázással*, vagy *determinisztikus trend meghatározásával és kiszűrésével* érjük el. Ez esetben is az egységgyökök megléte vagy hiánya adhat útmutatást.

### 3. Az AR1 folyamat elemzése

Miután áttekintettük az egységgyök problémát, annak fontosságát, modellezésben betöltött szerepét, következményeit, a továbbiakban megvizsgáljuk azt a kérdést, hogy milyen módon lehet megfigyelt idősor alapján tesztelni az egységgyökök létét. Ennek módszere az lesz, hogy a legegyszerűbb (AR1) modellen viszonylag részletesen vesszük sorra a fontosabb tesztek, képzésük elveit, használatuk módját, a velük kapcsolatos esetleges gyakorlati instrukciókat, sőt bemutatunk egy egyszerű gyakorlati alkalmazást is, míg később, az összetettebb modellek esetén már csak röviden adjuk meg a megfelelő tesztek.

#### 3.1 Az AR1 folyamat tesztjei

Az AR1 az egyik legegyszerűbb sztochasztikus folyamat. Szerepe nem is csak az, hogy konkrét feladatokban számoljunk vele, hanem az is, hogy bevezetőül, mintaként és építőelemként szolgáljon a bonyolultabb folyamatokhoz. Maga



a folyamat

$$Y_t = \rho Y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (2)$$

alakú, ahol  $Y_0$  kezdőértékre és  $\varepsilon_t$  maradéktagra különböző feltevések lehetnek. Mi a továbbiakban alapesetként az  $Y_0 = 0$  és az  $\varepsilon_t \sim NID(0, \sigma^2)$  specifikációból indulunk ki, ugyanakkor megjegyezzük, hogy a kezdeti érték és a maradéktag tulajdonságai szempontjából a későbbi, bonyolultabb folyamatok különböznek egymástól.

Az AR1 folyamat tesztelésének kiindulópontja most a (2) DGP, az  $\varepsilon_t$ -kre és az  $Y_0$ -ra vonatkozó alapfeltevézésekkel. Nullhipotézisünk  $H_0 : |\rho| = 1$ , alternatív hipotézis pedig kettő is lehet, nevezetesen  $H_1 : |\rho| \neq 1$  kétoldali alternatív hipotézis, avagy  $H_2 : |\rho| < 1$  egyoldali (stacionárius) alternatíva. Ezekkel kapcsolatban megjegyezzük, hogy  $H_0$  (egységgyök-hipotézis) fennállása esetén a nem-stacionaritás differenciázással azonnal kiküszöbölhető. Más megfogalmazással: ha  $H_0$  igaz, akkor  $Y_t$  elsőrendűen integrált ( $I(1)$ ) folyamat. Az alternatív hipotézisek közül inkább a  $H_1$ -t, az általánosabb kétoldali alternatívát használjuk.

Az egységgyök tesztek kiindulópontja az, hogy a (2) DGP-nek megfelelő modellt felírva

$$y_t = \rho y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (3)$$

majd  $\rho$ -t a megfigyelési adatokból becsülve, a becsült együtttható eloszlása meghatározható. Ha  $\varepsilon_t$ -re feltételezzük a normális eloszlást, akkor  $\rho$  maximum likelihood becslése:

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}_{ML} = \frac{\sum_{t=2}^n y_t y_{t-1}}{\sum_{t=2}^n y_t^2}$$

lesz. Nagy minták esetén  $\hat{\rho}$  eloszlása viszonylag egyszerűen megkapható. A likelihood elméletre támaszkodva belátható ugyanis, hogy  $|\rho| < 1$  esetén

$$\hat{\rho} \sim N\left(\rho, \frac{1 - \rho^2}{n}\right)$$

aszimptotikusan érvényes.<sup>8</sup> Az is látszik azonban a formulából, hogy  $\rho = 1$  esetén  $\hat{\rho}$  eloszlása egy pontba zsugorodik össze; a  $\rho = 1$  egységgyök szinguláris pont.

<sup>8</sup>Bár nem tartozik szorosan a tárgyhoz, érdemes megemlíteni, hogy a  $H_0 : \rho = 0$  nullhipotézisre épülő szokásos autokorrelációs tesztek részben erre a nagymintás eredményre építenek, hiszen azonnal adódik ebből, hogy  $\rho = 0$  esetén

$$\hat{\rho}\sqrt{n} \sim N(0, 1),$$

ami egyebek közt a Durbin-féle  $h$  teszt, valamint a portmanteau tesztek kiindulópontja.

Még nehezebb a helyzet kis minták esetén, ahol a fenti aszimptotika még  $|\rho| < 1$  esetén sem érvényesül. (Ezeket a nehézségeket mutatja az egyszerűbb,  $\rho < 1$  esetre a Durbin-Watson teszt nem standard eloszlása.) Az igazi problémát a kis minták esetére a  $H_0 : \rho = 1$  egységgyök hipotézis okozza. Ezt az esetet szisztematikusan először Fuller [10], valamint Dickey és Fuller [2] vizsgálták. Megállapításaik szerint ez esetben  $\hat{\rho}$  eloszlásáról az alábbiak állíthatók:

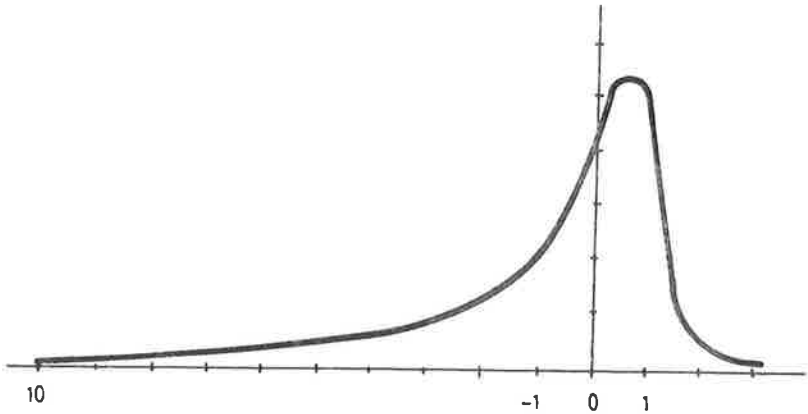
- nem normális, vagy  $t$  eloszlást követ, mint ahogy az a regressziós együtt-  
hatók esetében általában megszokott;
- $O_p(n^{-1})$  nagyságrendben konvergál, szemben a regressziós együtt-  
hatók esetén megszokott  $O_p(n^{-1/2})$  nagyságrenddel;
- explicite nehezen kezelhető, de jól szimulálható formára hozható, ami  
lehetőséget ad az eloszlás kiterjedt táblázására.

A fent említettek miatt célszerű a  $\hat{\rho}$  helyett az  $n(\hat{\rho} - 1)$ -et kitáblázni; ez a Dickey-Fuller féle  $\rho$  teszt próbafüggvénye. A megfelelő eloszlás értékeket Dickey és Fuller táblázatai ([2]) mutatják.

A teszt végrehajtása igen egyszerű, hiszen bármely standard regressziós programcsomaggal becsülni lehet  $\hat{\rho} = \hat{\rho}_{ML}$ -t (ami egyben OLS becslés is), ebből pedig azonnal számítható az  $n(\hat{\rho} - 1)$  mennyiség. Ha ez a megfelelő táblázat kritikus értékei közé esik, akkor  $H_0$  elfogadható (azaz van egységgyök), ha nem, akkor  $H_0$  elutasítandó a kétoldali alternatíva javára.

A fentiek kiegészítéseként néhány megjegyzést kell még tennünk. Ezek szerint

- a próba nyilvánvalóan kétoldali, tehát a stacionárius és a nem-stacionárius alternatíva ellen is alkalmazható.
- A táblázat kumulált (eloszlásfüggvény) értékeket ad meg; ezt a használatnál figyelembe kell venni.
- A  $\hat{\rho}$  és az  $n(\hat{\rho} - 1)$  is aszimmetrikus, a sűrűségfüggvényük jobbra ferde (balra elnyúló). Ezt mutatja az 1. ábra. Ennek megfelelően a próba erősebb, jobban szelektál a jobboldalon, azaz a nem stacionárius alternatívákkal szemben, míg a stacionárius alternatívákkal szemben viszonylag gyenge.
- Ez a próba azon kevesek közé tartozik, amelyek a gyakorlatban is előforduló kis minták esetére is alkalmazható.

1. ábra: Az  $n(\hat{\rho} - 1)$  sűrűségfüggvénye

A regressziós modellből kiindulva a megfelelő regressziós együttható helyett a Student  $t$  próba analógiájára is készíthető próba a (2) modellre. Ekkor újból a  $\hat{\rho} = \hat{\rho}_{ML}$  becslésből indulunk ki, de ezúttal az  $n(\hat{\rho} - 1)$  helyett a

$$\hat{\tau} = \frac{(\hat{\rho} - 1)}{\sqrt{\text{var}(\hat{\rho})}}$$

statisztikát határozzuk meg a mintából. Ez a Dickey-Fuller féle  $\tau$  teszt próbafüggvénye. A  $\text{var}(\hat{\rho})$  a  $\hat{\rho}$  becslésének szokásos, becsült varianciája:

$$\text{var}(\hat{\rho}) = \frac{\sum_{t=1}^n e_t^2}{n-2} \quad \text{és} \quad e_t = y_t - \hat{\rho}y_{t-1}.$$

Az így számított  $\hat{\tau}$  statisztika sem standard eloszlású (ellentétben a regressziós  $t$ -vel), de eloszlása szimulációs úton kitáblázható (lásd [2,13]). Ez a próba is kétoldali alternatív hipotézisek ellen használható; a tapasztalatok szerint ez erősebb a *stacionárius alternatívákkal szemben* mint az előbb tárgyalt Dickey-Fuller féle  $\rho$  teszt, ezért alkalmazását azzal szemben preferálják. Gyakorlati végrehajtása semmiféle különös problémát nem jelent, hiszen a standard regressziós programok által a (3) egyenlet becslésekor kapott (becsült) paraméterek és standard hibák segítségével a próbafüggvény értéke azonnal kiszámítható. Az egyetlen gondot az okozza, hogy a rendelkezésre álló táblázatok nem elég részletesek, ami esetenként interpolációt tehet szükségessé.

Összehasonlítva a  $\hat{\tau}$  eloszlását a megfelelő szabadságfokú  $t$  eloszlással azt tapasztaljuk, hogy az előbbi (szemben a szimmetrikus  $t$ -vel) jobbra ferde (balra elnyúló), akárcsak a korábban említett  $\rho$  teszt eloszlása, bár annál

kevésbé ferde. Az is tapasztalható, hogy ez az eloszlás elég közel áll a  $t$  eloszláshoz, ugyanakkor aszimmetriája folytán a jobboldalon szelektívebb, erősebb, míg a baloldalon, ahol a stacionárius alternatívák találhatók, megengedőbb, gyengébb.

Mint láttuk, a Dickey-Fuller alaptesztek, amelyek végső soron az egész témakört urálják, az  $Y_0 = 0$  és az  $\varepsilon_t \sim NID(0, \sigma^2)$  feltételezésekből indulnak ki. Evans és Savin [7] e két feltétel feloldását kísérelték meg úgy, hogy ezeket rendre az  $Y_0 = c$  illetve az  $\varepsilon_t \sim IID(0, \sigma^2)$  feltételekkel pótolták. Kimutatták, hogy  $\hat{\rho}$  eloszlása főként kis minták esetében függ a  $c/\sigma^2$  aránytól. Ennek megfelelően táblázatokat is készítették  $\hat{\rho}$  feltételes eloszlására a  $c$  és a  $\sigma^2$  függvényében, amelyek gyakorlati értékét eléggé rontja az, hogy sem  $c$  sem  $\sigma^2$  nem megfigyelhető mennyiségek, sőt  $c$ -nek még a becslése is gondot okoz. Mivel ezek az eloszlások – főként nagyobb minták esetén – közel állnak a  $c = 0$  esethez, a gyakorlati modellezés oldaláról nem kérdőjelezzik meg az említett Dickey-Fuller tesztek létjogosultságát. Hasonlóképpen kevésbé érzékenyek bizonyult vizsgálataik szerint  $\hat{\rho}$  eloszlása az  $\varepsilon_t$ -re tett eloszlásbeli megkötések feloldására. (Felhívjuk viszont a figyelmet arra, hogy egyéb exogén változók (akár egy konstans tag is) lényegesen befolyásolják  $\hat{\rho}$  eloszlását. Ezzel a kérdéssel a következő, bonyolultabb DGP-k elemzésénél még sokat foglalkozunk.) Evans és Savin elemzéseiből az is kitűnik, hogy nagyobb  $c$  és kisebb  $\sigma^2$  növeli a  $\tau$  próba erejét. Tapasztalataik szerint az erőfüggvény aszimmetriája jellemző a  $\tau$  próbára is.

A Sargan és Bhargava féle  $R$  tesztek a regressziós reziduuumokra épülnek. Az itt tárgyalandó próba valójában az  $R$  tesztek legegyszerűbb változata, amennyiben *nem igényel paraméterbecslést*. A próba nullhipotézise az, hogy a (2) DGP-ben  $\rho = 1$ , az alternatív hipotézis pedig  $0 \leq \rho < 1$ , azaz a stacionárius alternatívák. Az alkalmazott próbafüggvény a megfigyelt idősről számított von Neumann hányados  $\rho = 1$  mellett:

$$R = \frac{\sum_{t=2}^n (y_t - y_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n (y_t - \bar{y})^2} \quad \text{ahol} \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n y_t \quad (4)$$

Ennek (exakt) eloszlását explicite eddig nem sikerült megadni, de közelítő értékeit táblázatok [13,27] mutatják. A teszt e táblázatok segítségével hajtható végre. Maguk a táblázatok nagyon hasonlítanak a közismert Durbin-Watson táblázatokhoz, már ami az alsó és a felső határokat, és a semleges sávot (zónát) illeti. Mivel esetünkben a becsülni kívánt paraméterek száma 0, így egyelőre csak a táblázatok első sorát használjuk, ahol  $R_L = R_U$ , azaz a semleges zóna eltűnik. (A táblázatok többi sorát a később ismertetendő, bonyolultabb tesztekhez fogjuk használni.) A próba végrehajtása roppant egyszerű, hiszen a megfigyelt idősről ki kell számítanunk a (4) próbafüggvény empirikus értékét, és ha ez kisebb, mint a táblázatban található

megfelelő érték, akkor a  $H_0$  elfogadható (létezik egységgyök), ellenkező esetben  $H_2$  (a stacionárius alternatíva) fogadható el.

A (2) alapmodellre bemutatott próbák összehasonlítása – mint azt korábban már említettük – csak korlátozott érvényességű szimulációs vizsgálatokon alapul. Ezek néhány fontos megállapítása az alábbi:

- a  $\rho < 1$  alternatívára általában a  $\rho$  teszt, míg a  $\rho > 1$  alternatívára a  $\tau$  teszt erősebb (lásd *Dickey-Fuller* [2]);
- a  $\rho = 1$  környezetében az  $R$  teszt erősebb a stacionárius alternatívával szemben, mint a *Dickey-Fuller* tesztek (v.ö. *Dickey-Fuller* [3]), ugyanakkor
- a *Dickey-Fuller* tesztek robusztusabbak mind a maradéktagra, mind a kiinduló értékre tett feltételezésekre, így alkalmazásuk az  $R$  teszttel szemben preferált (lásd *Diebold-Nerlove* [4]). Előnye még a *Dickey-Fuller* teszteknek az is, hogy – mint látni fogjuk – kiterjesztésük bonyolultabb DGP-k és modellek esetére viszonylag egyszerűen megy;
- ezzel szemben az  $R$  tesztek jól beépíthetők regressziós modellekbe, kiterjesztésük ebbe az irányba viszonylag egyszerű.

### 3.2 Egy gyakorlati alkalmazás

A következőkben az eddig tárgyalt alaptesztek egy alkalmazását mutatjuk be. Az egységgyök tesztek, mint általában az ökonometriai elemzések, jobbra makroadatokat feltételeznek, az alkalmazások is jórészt makro jellegűek. A gyakorlati feladatok esetében azonban bizonyos kétségek merültek fel a vizsgált modellek és tesztek makromodellekben történő alkalmazásaival kapcsolatban.

A gyakorlatiszámítások ugyanis azt mutatták (pl. [18]), hogy a makrogazdasági sorok a várakozásokhoz képest túl gyakran mutatnak egységgyököt. Ennek egyik okát az alkalmazott tesztek jellegében kell keresni (vö 4.5), másrészt azonban adódhatnak az aggregáció hatásaiból is. Az elmúlt években sokat ígérő kutatások indultak be abban az irányban, hogy az aggregáció hatását vizsgálják meg az egyes idősorok integráltsága, illetve kointegráltsága szempontjából (pl. [15]). Mivel ezek a kutatások még csak részben tisztázták a mikro és makro sorok integráltságának viszonyát, ezért szerencsésebbnek, és főleg problémamentesebbnek tűnik a korábban tárgyalt tesztek mikro- adatokon bemutatni.

Az alábbi példa *Rappai G.* egy előkészületben lévő tanulmányából [26] származik, amely a hatékony tőkepiac hipotézisét vizsgálja racionális várakozási modellek segítségével. E vizsgálat egyik eleme a Budapesti Értéktőzsdén

bevezetett néhány részvény árfolyamának idősoros elemzése. A hatékony tőkepiac hipotézise – mint az kimutatható – bizonyos feltételek között ekvivalens azzal az állítással, hogy az árfolyamok idősora AR1 formában egységgyököt tartalmaz. A hatékony tőkepiac hipotézis ellenőrzése ekkor tehát egyenértékű azzal, hogy megvizsgáljuk ezeket az árfolyam idősorokat a megismert egységgyök tesztekkel.

A számítások céljaira 5 részvényt választottunk ki; ezek a FOTEX, az IBUSZ, a KONZUM, a MARTFŰ és a PICK. Azért éppen erre az ötre esett a választás, mert ezek egyrészt jellemzők, meghatározók voltak a tőzsdei forgalomban, másrészt pedig ezek esetében viszonylag sok volt a mozgás, ami legalábbis demonstratív célokra kedvező tulajdonság. A modell, amit alkalmaztunk, természetesen az

$$y_t = \rho y_{t-1} + \varepsilon_t$$

volt, a tesztelendő nullhipotézis  $H_0 : \rho = 1$ , ellenhipotézis pedig  $H_1 : \rho \neq 1$ . Az adatok forrása az idézett tanulmány [26], a becslések OLS módszerrel készültek. A számítások fontosabb eredményeit az 1. táblázat mutatja.<sup>9</sup>

1. táblázat: 5 részvény árfolyamának idősorából becsült, illetve számított statisztikák

Részvény	$n$	$\hat{\rho}$	$n(\hat{\rho} - 1)$	$\hat{\tau}$	$R$
FOTEX	180	1.0002	+0.0360	+0.1120	0.0257
IBUSZ	143	0.9827	-2.4739	-3.2917	0.0587
KONZUM	248	0.9993	-0.1736	-0.2617	0.0665
MARTFŰ	330	1.0041	+1.3530	+1.8666	0.0110
PICK	168	1.0036	+0.6048	+1.6320	0.0108

A próbafüggvények értékeléséhez természetesen szükség van a megfelelő mutatók táblázataira is. A Dickey-Fuller féle  $\rho$  teszt eloszlásának megfelelő értékeit a 2. táblázat mutatja (Fuller [10]).

2. táblázat: Az  $n(\hat{\rho} - 1)$  statisztika eloszlásfüggvényének  $p$ -ed rendű kvantilis értékei  $\rho = 1$  esetén

$n$	0.01	0.1	0.9	0.99
100	-13.3	-5.6	0.95	2.09
250	-13.6	-5.7	1.28	2.04
500	-13.7	-5.7	1.28	2.04
$\infty$	-13.8	-5.7	1.28	2.03

<sup>9</sup>A szerző ezúton mond köszönetet Rappai Gábornak azért, hogy adatait és félkész tanulmányát rendelkezésre bocsátotta, s emellett segítséget nyújtott a számítások elvégzésében is.

Ebből azonnal látható, hogy a próbafüggvény számított értékei minden, itt feltüntetett szignifikancia szinten a megfelelő határok közé esnek, azaz megfigyeléseink egyik esetben sem mondanak ellent a nullhipotézisnek, azaz valamennyi vizsgált sor tartalmaz egységgyököt.

A Dickey-Fuller féle  $\tau$  teszt végrehajtásához szükséges eloszlásértékek a 3. táblázatban találhatók meg (Fuller [10]).

3. táblázat: A  $\hat{\tau}$  statisztika eloszlásfüggvényének  $p$ -ed rendű kvantilis értékei  $\rho = 1$  esetén

$n$	0.01	0.1	0.9	0.99
100	-2.60	-1.61	+0.90	2.03
250	-2.58	-1.62	+0.89	2.01
500	-2.58	-1.62	+0.89	2.00
$\infty$	-2.58	-1.62	+0.89	2.00

A próbafüggvény értékei ezúttal lényegesen jobban szóródnak: az IBUSZ esetében  $H_0$ -t alacsony (1%-os) szignifikancia szinten elvetjük a stacionárius alternatíva javára, míg a MARTFŰ és a PICK esetében 10%-os szignifikancia szinten vehető el a nullhipotézis, ezúttal a nemstacionárius (explozív) alternatíva javára. Alacsonyabb szignifikancia szinten ez a próba ezeknél a változóknál is az egységgyök jelenlétére utal.

Végül a Sargan-Bhargava próba eloszlásának kritikus értékei  $n = 100$  esetre  $p = 0.95$ -nél 0,259,  $p = 0,99$ -nél 0,376. Mivel az 1. táblázatban szereplő  $R$  értékek ezeknél jóval kisebbek, ezért ez a próba egyik vizsgált esetben sem mond ellent a nullhipotézisnek.

Próbáink eredményeit összefoglalva, a vizsgált 3 teszt egyetlen eset kivételével egybehangzóan az egységgyök létét valószínűsíti, egyedül az IBUSZ időszora igényel további, alaposabb vizsgálatokat.

## 4. Összetettebb folyamatok egységgyök tesztjei

Az eddigiekben csak a legegyszerűbb, elsőrendű autoregresszív folyamat egységgyök tesztjeiről szóltunk. A továbbiakban – igaz csak nagyon vázlatosan, de – kiterjesztjük az elemzést a bonyolultabb folyamatokra is.

### 4.1 A nem 0 várható értékű elsőrendű autoregresszív folyamatok

A nem 0 várható értékű elsőrendű autoregresszív folyamatról korábban már szóltunk. Arra is rámutattunk, hogy ez a  $H_0 : \rho = 1$  esetén az eltolásos

véletlen bolyongási folyamatot (random walk with drift) írja le, ami azért fontos számunkra, mivel ez a sztochasztikus trendek legegyszerűbbike.

Ennek a folyamatnak az egységgyök tesztsjei a korábban bemutatott elvekre épülnek: Dickey és Fuller eredményeiket többé-kevésbé mechanikusan általánosították erre az esetre. Kiindultak abból, hogy  $H_0$  alatt (amely esetre a  $\hat{\rho}$  illetve a  $\hat{\tau}$  eloszlását vizsgálták) az eltolást jellemző  $\alpha$  paraméter 0, s így jutottak el a korábbiakkal analóg módon elvégezhető Dickey-Fuller féle  $\rho_\mu$  és  $\tau_\mu$  tesztekhez.

Ezt az eljárást Schmidt [28] bírálta abból az alapállásból, hogy a  $H_0$ -ban nem helyes az  $\alpha = 0$  feltételt is figyelembe venni. Kimutatta, hogy ha a DGP-ben lévő eltolás nagy ( $\alpha \rightarrow \infty$ ), akkor nagy minták esetén a Dickey-Fuller féle  $\hat{\tau}$   $n - 2$  szabadságfokú student eloszláshoz konvergál, ha pedig  $\alpha$  kicsi (de nem 0), akkor  $\hat{\tau}$  eloszlása se nem student, de nem is egyezik meg az eredeti Dickey-Fuller eloszlással. (Az  $\alpha = 0$  eset természetesen megfelel Dickey és Fuller feltételeinek, így eloszlási eredményeik ekkor érvényesek maradnak.) Ezért Schmidt az eredeti Dickey-Fuller féle  $\rho$  és  $\tau$  tesztek táblázatain vezette át ezt a korrekciót [28]. E táblázatok használatának nehézsége abban áll, hogy bennük paraméterként megjelenik  $\alpha$  értéke is, ami általában ismeretlen. Gyakorlatilag ez azért nem okoz gondot, mivel  $\alpha$  helyettesíthető becslült értékével, ami a regresszióból azonnal adódik.

Evans és Savin [8] az eltolásból adódó problémát úgy oldották meg, hogy  $Y_0$ -t nem 0-nak, hanem 0-tól különböző konstansnak tekintették és az eredeti DGP-t transzformálták kezelhető formára.

Kiindulva az  $Y_t = \alpha + \rho Y_{t-1} + \varepsilon_t$  folyamatból (ahol  $\varepsilon_t \sim NID(0, \sigma^2)$ ) bevezetik a  $Z_t = \frac{Y_t - Y_0}{\sigma}$  transzformációt, valamint definiálják a  $\gamma = \frac{\alpha + (\rho - 1)Y_0}{\sigma}$  együtthatót és a  $w_t = \frac{\varepsilon_t}{\sigma} \sim NID(0, 1)$  valószínűségi változót. Könnyen belátható, hogy ekkor az eredeti DGP

$$Z_t = \gamma + \beta Z_{t-1} + w_t$$

alakba írható át. Erre a transzformált modellre keresik a  $\hat{\beta}_{OLS} = \hat{\beta}_{ML}$  becslőfüggvény eloszlását  $H_0$  alatt,  $\gamma$  különféle értékei mellett. A kapott eloszlások nem követnek valamiféle ismert eloszlást; táblázataik megtalálhatók [13]-ban.

A transzformációból látható, hogy  $H_0$  alatt a  $\gamma$  paraméter  $\alpha/\sigma$ -vá egyszerűsödik, ezt nevezik *standardizált eltolásnak*. A táblázat tanulsága szerint, ha  $\gamma$  kicsi (0 körüli érték), akkor  $\hat{\rho}$  eloszlás közel áll a megfelelő Dickey-Fuller eloszláshoz, míg nagy eltolás esetén  $\hat{\rho}$  eloszlása közelít a  $N(0, 1)$  eloszláshoz, még akkor is, ha a minta viszonylag kicsi.

Az Evans-Savin teszt gyakorlati alkalmazásának is az a fő nehézsége, hogy mind  $\alpha$ , mind pedig  $\sigma$  ismeretlen, ezekre becslést kell készíteni, ami rontja a próba erejét. Ezért ezt a próbát a gyakorlatban ritkán alkalmazzák.



A probléma megoldására sajátos utat választott Nankervis és Savin [17], akik azzal kísérleteztek, hogy a Dickey - Fuller féle  $\hat{\tau}_\mu$  statisztikát (közelítőleg) ismert standard eloszlású változóvá alakítsák. Ezt empirikus elemzésekre épített spline interpolációkon alapuló közelítésekkel próbálták megtenni, de csak  $\rho < 1$  stacionárius esetekre kaptak elfogadható közelítést. Jóllehet állításuk szerint eredményeik  $\rho = 1$  tetszőleges kis környezetében érvényesek maradnak, az elemzések kimutatták, hogy ekkor a próba ereje drasztikusan csökken, így ennek az eljárásnak a gyakorlati jelentősége az egységgyök tesztekénél sajnos elhanyagolható.

Végül érdemes néhány *összehasonlító* megállapítást tenni az itt tárgyalt tesztek kapcsán:

- a  $\rho_\mu$  teszt az esetek nagyobb részében erősebb, mint a  $\tau_\mu$  teszt, ugyanakkor ez utóbbi robusztusabb, ezért „bizonytalan környezetben” (és a gyakorlati alkalmazások jó része ilyennek tekinthető) ez utóbbi preferált;
- mind a  $\rho$ , mind pedig a  $\tau$  tesztek esetén célszerű a Schmidt-féle táblázatokkal számolni, hiszen azok a határok elyben korrektek. Kiváltképp igaz ez arra az esetre, amikor az eltolás (drift) nagyságára nézve elképzeléseink (pl. külső információink) vannak;
- Az Evans-Savin és a Schmidt féle tesztek gyakorlatilag megegyeznek (Schmidt is az Evans-Savin által megkezdett utat járja). Ezért – pusztán technikai megfontolásokból – (részletesebb táblák) célszerűbb a Schmidt féle teszt használata;
- a Nankervis-Savin teszt a  $\rho = 1$  környezetében gyenge, így gyakorlati alkalmazása az egységgyök esetre nem ajánlható. Ez a teszt ugyanakkor más  $H_0$  esetén (pl. az autokorreláció meglétének tesztelése) hasznos lehet.

## 4.2 A determinisztikus trend körüli AR1 folyamat

A folyamat tesztelése ismét Dickey és Fuller eredményeire épül, melyek részben közvetlen következményei a korábban bemutatott teszteknek. A Dickey-Fuller féle  $\rho_\tau$  és  $\tau_\tau$  tesztek ezúttal is csak a főparaméterek vizsgálatára szorítkoznak. Konstrukciójukat tekintve analógak a korábban bemutatottakkal, még ha a regresszió némiképp bonyolultabb is azoknál. A becült főparaméterek eloszlását táblázatokba foglalták [2], és kiegészítésként legfeljebb csak annyit lehet mondani, hogy az elemzés szempontjából másodlagos (nuisance) paraméterek eloszlása nem különbözik a regressziós elméletben megszokottól: Student, illetőleg nagy minták esetén normális eloszlást követnek.

Tekintve azonban a folyamat összetett jellegét (sztochasztikus és determinisztikus trend, 3 paraméter), célszerű az egyszerű (egy paraméterre vonatkozó) nullhipotézis mellett összetett (több paraméterre vonatkozó) feltevések helyességét is vizsgálni. Ekkor ugyanis egyszerre vizsgálva a különféle nullhipotéziseket nemcsak arra a kérdésre kaphatunk választ, hogy van-e (lehet-e) sztochasztikus lineáris trend a DGP-ben, hanem arra is, hogy igaz-e a determinisztikus trend feltételezése, avagy éppen feltehetjük azt a kérdést is, hogy a trend determinisztikus, vagy sztochasztikus.

Az  $(\alpha, \beta, \rho)$  paramétervektort  $q$ -val jelölve, a RW folyamatot a  $q = (0, 0, 1)$  nullhipotézis, a *csak* determinisztikus trend esetét a  $q = (\alpha_0, \beta_0, 0)$ , míg mindkét trend relevanciáját a  $q = (\alpha_0, \beta_0, 1)$  nullhipotézis fejezi ki. A feladat persze szűkíthető is, hiszen pl. a  $q^* = (0, 1)$  hipotézis eleve kizárja a determinisztikus trendet és így a korábban tárgyalt esetnek egy alternatív tesztje.

Az ilyen, több paraméterre vonatkozó hipotézisek a regressziós elemzésekben parciális, vagy globális  $F$  próbával vizsgálhatók. A regressziós  $F$  próbák analógiájára készítette el Dickey és Fuller az ilyen nullhipotézisek tesztelésére alkalmas  $\Phi$  próbákat, hiszen az nyilvánvaló, hogy ezeknél a modelleknél a hagyományos  $F$  próbák érvényüket veszítik.

Dickey és Fuller [3] likelihood arány teszteket készítettek el a megfelelő  $H_0$ -ra és ezek eredményeként azt kapták, hogy a likelihood hányadosok a szokásos regressziós  $F$  próbák monoton függvényei. Az így kapott likelihood hányadosok eloszlását szimulálva jutottak el táblázataikhoz ([3],[13]). Ezek – mint a likelihood hányadosok általában – akkor utasítják el a  $H_0$ -t, ha a számított empirikus tesztfüggvény érték *nagyobb*, mint a táblázat megfelelő értéke.

A likelihood elmélet alapján viszonylag könnyen belátható, hogy ennél a folyamatnál is a regressziós  $F$  analógiának tekinthető  $\Phi$  mutató monoton függvénye lesz a likelihood arány próbafüggvénye, azaz a próbafüggvény mintabeli értéke standard regressziós csomagok segítségével meglehetősen egyszerűen előállítható.

Az összehasonlítás a 4.1-ben és a 4.2-ben említett tesztek között természetesen nem igazán jogos, hiszen más a vizsgált nullhipotézis, és mások az ellenhipotézisek is. Mivel a  $\rho$  és a  $\tau$  típusú tesztek csak egy-egy paraméterre koncentrálnak, így azok általában erősebbek, mint a  $\Phi$  tesztek, még akkor is, ha ez utóbbi csak a megfelelő főparaméterekre van felírva. Valójában a két eset más és más feladatot jelöl ki, így igazából ezek nem jelentenek egymás számára reális alternatívát.

### 4.3 A magasabb rendű autoregresszív folyamatok

A  $p$ -ed rendű autoregresszív folyamatok tesztelése is alapvetően a Dickey-

Fuller hagyományokon alapul. Kiindulópontunk most is az (1) egyenlet, és feladatunk a  $\hat{\rho}_1$  főparaméter tesztelése a  $H_0 : |\rho_1| = 1$  és  $H_1 : |\rho_1| \neq 1$  hipotézisekkel.

Belátható, hogy a Dickey-Fuller tesztek eredményei kiterjeszthetők erre az esetre is az alábbiak szerint: kimutatható, hogy létezik olyan  $c$  skalár, amely mellett a  $cn(\hat{\rho}_1 - 1)$  statisztika eloszlása megegyezik a Dickey-Fuller féle  $\rho$  statisztika eloszlásával. Továbbá, a korábbiaknak megfelelően  $(\hat{\rho}_1 - 1) = O_p(n^{-1})$ , a  $(\hat{\rho}_j - \rho_j) = O_p(n^{-1/2})$   $j = 2, 3, \dots, p$  konvergencia sebességű változók, és ez utóbbi különbség aszimptotikusan normális eloszlású változót ad. Sajnos a gyakorlati hipotézisvizsgálat esetén  $c$  paraméter meghatározása nehézségeket okoz, ezért nem a Dickey-Fuller féle  $\rho$ , hanem a Dickey-Fuller féle  $\tau$  próba alkalmazása a célravezető, ahol ilyen probléma nem merül fel. Ennek alkalmazása ugyanúgy történik, mint ahogy azt korábban leírtuk.

Ha a folyamat bonyolultabb, eltolást és/vagy determinisztikus trendet tartalmaz, akkor is érvényesek maradnak Dickey és Fuller eredményei; ez esetekben a  $\tau_\mu$ , vagy a  $\tau_\tau$  próbák alkalmazása ajánlható. Hasonlóképpen alkalmazhatók esetenként a Dickey-Fuller féle  $\Phi$  tesztek is.

Ha azonban feladatunk az, hogy ne csak egy (az első) egységgyök létezését ellenőrizzük, hanem azt, hogy lehet-e több egységgyök (a folyamat maximum  $p$  számú egységgyök létezését engedi meg), akkor együtt kell tesztelni a több egységgyököt  $F$  típusú próbával. Az (1) DGP-nek megfelelő regresszió becsült paramétereirez tartozó szokásos regressziós együtthatók parciális  $F$  próbáját kell elvégezni. A különbség a regressziós eljárásokhoz képest mindössze annyi, hogy a kapott  $F$  statisztikák nem standard  $F$ , hanem speciális eloszlásúak. Aszimptotikus eloszlásukat  $H_0$  alatt (több egységgyök létezése) Hasza és Fuller [12] készítette el és táblázta ki.

Ennek az eljárásnak a gyakorlati problémája abban áll, hogy általában nem tudjuk előre az egységgyökök számát (legfeljebb arra gyanakodhatunk, hogy egynél több van). Kimutatható, hogy ha a DGP több egységgyököt tartalmaz, mint amennyit a fenti  $F$  próba nullhipotézisekor feltételeztünk, akkor a próba empirikus mérete (szignifikancia szintje) nagyobb lesz a nominális szintnél, azaz a próba félrevezető eredményt adhat. Ha pl. két gyököt feltételeztünk (és ezt teszteljük), holott valójában 3 van, akkor a táblából választott szintnél (pl. 5%-nál) nagyobb lesz a döntés elsőfajú hibája. Ezért Dickey és Pantula (idézi Diebold és Nerlove [4]) a következő szekvenciális stratégiát javasolják: induljunk ki fordított sorrendben és határozzuk meg azt az  $m$  számot, amelynél több egységgyök biztos nem fordul elő. A  $H_0$ -ban ezt adjuk meg, és ezt teszteljük a  $H_1 : m - 1$  számú egységgyök ellen. Az eljárást így folytatva eljuthatunk a szignifikáns egységgyökök számához. Az is kimutatható, hogy ilyen stratégia mellett a teszt fent említett torzítása nem jelentkezik.

#### 4.4 Autoregresszív, mozgó átlagolású folyamatok

Az autoregresszív, mozgó átlagolású folyamatok (ARMA) egységgyök tesztjeinél az

$$Y_t = \rho Y_{t-1} + \varepsilon_t + \beta \varepsilon_{t-1} \quad |\beta| < 1 \quad (5)$$

formából indulunk ki, amely egyszerű átalakítások után  $H_0$  alatt

$$\Delta Y_t = \beta[-\Delta Y_{t-1} - \beta \Delta Y_{t-2} - \beta^2 \Delta Y_{t-3} - \dots] + \varepsilon_t$$

alakra hozható. Ebben a formában a tesztelendő  $\rho$  paraméter már meg sem jelenik, ezért ahhoz, hogy a  $\rho = 1$  feltevést tesztelni tudjuk, ezt be kell építeni, természetesen úgy, hogy  $H_0$  alatt a (5)-öt kapjuk vissza. Ennek természetes módja az, hogy a  $(\rho - 1)Y_{t-1}$  tagot, ami éppen a  $H_0$  miatt tűnt el az egyenletből, visszairjuk. Ekkor az a regressziós modell, amely a tesztelés alapjául szolgál, az alábbi lesz:

$$\Delta y_t = (\rho - 1)y_{t-1} + \gamma_1 \Delta y_{t-1} + \gamma_2 \Delta y_{t-2} + \dots + \varepsilon_t.$$

Ezt az egyenletet bővítet *Dickey-Fuller regresszió*nak (Augmented Dickey-Fuller regression=ADF) nevezünk; ez a hasonló nevet viselő teszt alapja. A tesztelés célja ezúttal a  $H_0 : \rho - 1 = 0$  nullhipotézis vizsgálata a stacionárius alternatíva ellen. A probléma látszólag egyszerű, az ADF regresszióval kapcsolatban azonban sok probléma merül fel. Ezek – melyek részben hasonlósok az osztott késleltetésű regressziós modellben felmerülő becslési problémákhoz – nevezetesen az alábbiak:

- A regresszió végtelen sok magyarázó változót tartalmaz, ugyanakkor a becslés gyakorlati végrehajtásához ezek számát végesre kell "vágni". Ez a csonkítás torzítja a becslést.
- A magyarázó változók között multikollinearitás van, ami kis  $\beta$  értékek esetén elenyészik ugyan, de nagyobb  $\beta$ -k esetén már zavaró lehet (vö. [13]).
- A regresszió együtthatói nem függetlenek, hiszen  $\gamma_1 = -\beta$ ,  $\gamma_2 = -\beta^2$  stb, ami annyit jelent, hogy nemlineáris paraméterkorlátozások (lennének) szükségesek a torzítatlan és hatásos OLS becsléshez.

Mindezen problémák ellenére szimulációs vizsgálatok azt mutatták, hogy ezek viszonylag kevésbé érintik a  $\rho - 1$  főparaméter becslését, így az, de még inkább annak studentizált statisztikája viszonylag kis  $\beta$ -k esetén alkalmas a  $H_0$  tesztelésére.

Ennek gyakorlati végrehajtásához a regresszió első  $k$  tagját szokták használni, ahol általában a  $k \approx n^{1/4}$  csonkítás ajánlott. A paraméterek becslését *korlátozások nélkül* végezzük el, kiszámítjuk a  $\hat{\rho} - 1$ -hez tartozó regressziós  $t$  értéket, és ezt a Dickey-Fuller féle  $\tau$  táblázat kritikus értékeivel összehasonlítva juthatunk döntéshez. Nagy minták esetén az így számított statisztika valóban a Dickey-Fuller féle  $\tau$  eloszlásához közelít, de a konvergencia meglehetősen lassú, így kis minták (és nagy  $\beta$ ) esetén az eljárás értéke kétséges. Ha az induló folyamatban  $Y_t$  várható értéke nem 0, akkor a  $\tau_{\mu}$ -t illetően célszerűbb a Schmidt-féle táblázatokkal dolgozni.

A fenti problémák – elsősorban a végtelen dimenziós nuisance paraméterek, illetve azok végessé váló csonkítása hatásának – kiküszöbölésére Phillips és Perron [22,23,24] olyan teszteleket készítettek (PP1 és PP2 tesztelek), amelyek az eredeti AR1 modell DF eloszlásából indulnak ki és ezt korrigálják a különböző modellfeltételezéseknek megfelelően. Összehasonlító elemzésekkel vizsgálták, hogy a probléma megoldására ajánlott három teszt (ADF, PP1, PP2) milyen tulajdonságú. Mindkét PP teszt konvergenciája lassúnak bizonyult, és mindkettő esetén a nagy abszolút értékű MA paraméter ( $\beta$ ) esetén a tesztelek nominális és empirikus mérete eltérőnek bizonyult, azaz a tesztelek a vártnál és a látszólagosnál nagyobb elsőfajú hibát eredményeztek. E szempontból ugyan a PP1 látszott a legjobbnak és a PP2 a legrosszabbnak, de a PP1 inkonzisztenciája miatt – minden hibája ellenére – az elemzők (pl. Diebold-Nerlove [4]) a bővített Dickey-Fuller teszt (ADF) használatát ajánlják.

Az ADF hiányosságai miatt további alternatív eljárások készültek a MA hibatagok kezelésére. Ezek közül Solo Lagrange multiplikátor tesztje aszimptotikusan ekvivalens az ADF-fel, kis minta tulajdonságai pedig nem ismertek, így az eddigiekhez képest nem ad többletet. Érdekes lehet viszont a Hall, illetve a Hall és Pantula által kifejlesztett eljárás (idézi Diebold és Nerlove [4]), amely az ADF regressziót, pontosabban annak becslését kívánja javítani *instrumentális változók* bevezetésével, és ezáltal kis minták esetére is erősebb tesztelek kifejlesztésével.

#### 4.5 A parciális trend folyamat

A parciális trend folyamat (PT) vizsgálata valójában a töréssel, vagy ugrással jellemezhető folyamatokat jelenti. A PT folyamatot először Perron [22] vizsgálta az egységgyökök oldaláról, és a feladat, amit meg akart oldani vele, az volt, hogy „ugrásos”, illetve „töréses” trendmodellben szétválassza a determinisztikus, illetőleg a sztochasztikus trendet. Ő is a Dickey-Fuller hagyományokra épít, de felismeri, hogy az ugrás, vagy a törés *hamis* egységgyököt vihet a rendszerbe, ugyanakkor a minta szétválasztása (két vagy több rész-mintára) túlságosan rövid megfigyelési sorokat eredményezne, ami rontaná

a Dickey-Fuller tesztek egyébként sem nagy erejét. Megállapítása tehát az, hogy akkor, ha ugrás, vagy törés van a trendben, az eddig tárgyalt egységgyök tesztek nem konzisztensek a trendstacionárius alternatívával szemben. Ezért ezekre az esetekre Dickey-Fuller elveken alapuló új teszteket javasol.

Az eljárás gyenge pontja az, hogy az ugrás, vagy a törés helyét a priori adottnak feltételezi, arra becslést nem készít. Az ugrás, vagy törés helyét az elemző előre – ismét csak az ábra, illetve a megfigyelésekből származtatható empirikus tulajdonságok vizsgálata alapján – dönti el. Ez a töréspont, vagy ugráspont tehát a teszt számára – és természetesen a teszt táblázataiban is – kívülről adott paraméter. Végül utalnunk kell arra, hogy bár a teszt alapváltozatát Perron  $IID(0, \sigma^2)$  eloszlású hibatagokra dolgozta ki, később kimutatta, hogy a származtatott eloszlások (és táblázatok) érvényesek maradnak a maradékváltozók általános ARMA specifikációja esetén is.

\* \* \*

A fentiekben áttekintettük a fontosabb folyamatokat és egységgyök tesztjeiket, amelyek mind a hagyományos tesztelveken nyugszanak. Ezek jellemzője az, hogy kiemelten kezelik a nullhipotézist, és elvetését csak akkor javasolják, ha *erős ellenérv*ek szólnak az ellenhipotézis mellett. Nagyon sok esetben, amikor mindkét alternatíva nagyjából azonos súlyúnak tűnik, a klasszikus tesztelvekből adódóan a nullhipotézist fogadjuk el. Ez az általános megállapítás igaz az egységgyök tesztekre is.

A már-már legendássá váló Nelson-Plosser vizsgálat [18] gyakorlati makro-  
adatokon szinte minden esetben egységgyök jelenlétét mutatta ki Dickey-Fuller tesztekkel. Hasonló eredményekre jutottak más kutatók is, amit csak részben magyaráz az aggregált idősorok integrációjára vonatkozó néhány, egyébként fontos megállapítás [15], és az a tény, hogy a Dickey-Fuller féle tesztek elég gyengék a stacionárius alternatívákkal szemben.

Ennek a problémának a megoldására született az az ötlet, hogy cseréljük fel a nullhipotézis és az ellenhipotézis szerepét, és csak akkor fogadjuk el egységgyök létét, vagy nemlétét, ha azt a két, egymáshoz képest fordított szereposztás egybehangzóan megerősíti. Ennek, a manapság egyre inkább elfogadott elvnek a részletes tárgyalása helyett csupán röviden szeretnénk utalni két olyan kísérletre, ahol ezt alkalmazták. DeJong et al. [5] Dickey-Fuller típusú tesztjeiknél a fordított szereposztást úgy próbálták megvalósítani, hogy a stacionárius alternatívát tekintették nullhipotézisnek. Azt a problémát, ami abból adódott, hogy ez a nullhipotézis összetett hipotézis, úgy oldották meg, hogy  $H_0$ -nak néhány jellemzőnek tekinthető értéket (pl.  $\rho = 0.85$ -öt) vettek, és így végezték el a próbákat. Kwiatkowski et al. [16] ezzel szemben némiképp átparametrizált modellből indultak ki. Modelljük:

$$Y_t = at + r_t + \varepsilon_t; \quad r_t = r_{t-1} + u_t; \quad u_t \sim IID(), \sigma_u^2; \quad r_0 = 0.$$

Ilyen modellfelírás mellett a stacionaritás nullhipotézisét a  $\sigma_u^2 = 0$  írja le, mégpedig  $a = 0$  esetben  $r_0$  körüli,  $a \neq 0$  esetben pedig egy trend körüli stacionaritás formájában.

Még egyszer hangsúlyozzuk, hogy itt csak két példát mutattunk be, a lényeg maga a tesztelési elv, ami úgy tűnik, az egységgyök teszteken túlmenően is használható.

## 5. További folyamatok, általánosítások

Miután a fentiekben áttekintettük a fontosabb ARMA folyamatok egységgyök tesztjeit, szólnunk kell röviden az ezektől eltérő szemléletű, illetve általánosabb keretek közt megjelenő modellek problémáiról is. Ezen modellek közös jellemzője, hogy tartalmaznak autoregresszív tagot, de ugyanakkor olyan szerkezetűek, hogy a gyakorlatban felmerülő bonyolultabb DGP-k leírására is alkalmasak (lehetnek).

Ezek közül mindenek előtt az integráltság fogalmát időben kiterjesztő eseteket említjük meg. Alapesetben eddig (ha hallgatólagosan is) csak éves idősorokban gondolkodtunk. A gazdasági elemzések egy sor területén azonban évesnél gyakoribb megfigyelések is léteznek, és ezen jelenségek modellezésekor gyakran találkozunk szezonális hatással, amely átmeneti kiszűrése fontos eleme lehet a megfelelő idősor elemzésének és előrejelzésének. Ha az idősor  $d$ -edrendű szezonális differenciái stacionárius sort alkotnak, azaz az idősor szezonális differenciázással stacionáriussá alakítható, akkor az idősort  $d$ -ed *rendben szezonálisan integrált idősrónak* nevezzük.

Gyakran adódik olyan eset, amikor egy idősor  $d$ -ed rendű differenciázása nem elég, a  $d+1$ -ed rendű differenciázás pedig már sok, azaz túldifferenciázáshoz vezet. Ilyen esetekben a differenciázás helyes – a stacionaritást biztosító – rendje  $d$  és  $d+1$  közti tört szám. Ez azt jelenti, hogy ilyen esetekben célszerű bevezetni a nem egész rendű, ún. frakcionális (fractional) integráltság fogalmát. Egy  $Y_t$  idősort  $d$ -ed *rendben frakcionálisan integrált*nak nevezünk akkor, ha az ismert

$$(1 - L)^d Y_t = \varepsilon_t \sim IID(0, \sigma^2)$$

összefüggés nem egész  $d$  értékekre is fenn áll. Ez esetben természetesen az  $(1 - L)^d$  értelmezése jelent problémát, amit általában egy McLaurin soron alapuló közelítés alapján az alábbi módon szoktak definiálni (lásd pl. Sowell [29] cikkét):

$$(1 - L)^d = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(-d + j)}{\Gamma(-d)\Gamma(j + 1)} L^j$$

és ahol  $\Gamma$  az ismert Gamma függvényt jelöli. A szezonálisan és frakcionálisan integrált idősorok vizsgálata jelenleg a kutatások egyik fontos területe.

A NILT (Near Integrated, Local Trend) modell az eddig tárgyalt AR folyamatok és a determinisztikus trend egy sajátos összekapcsolását jelenti. Konstrukciójának kiindulópontja az, hogy az AR modellek  $\rho$  paraméterének becslése a  $\rho = 1$  pontban egészen másként viselkedik, mint a  $\rho < 1$  esetekben. Ezért támadt az az ötlet (Phillips [25]), hogy olyan modellt írnak fel, amelyben folytonos átmenet teremthető a két eset közt. Erre szolgál a NI folyamatok koncepciója, amelynek lényege az, hogy fix  $\rho$  helyett azt egy ugyancsak fix  $c$  és egy változó  $T$  paraméter függvényében írjuk fel az alábbi módon:

$$\rho = 1 + \frac{c}{T}$$

Ekkor  $c$  előjelétől függően  $T$  növelésével  $\rho$  tetszés szerint közel kerül 1-hez és az átmenet folytonossá tehető.

Mivel az elemzések másik kritikus eleme a determinisztikus trend léte, hiszen ez is diszkrét módon, ugrásszerűen befolyásolja a modellt, illetve a tesztek tulajdonságait, itt is hasonló folytonos átmenetet konstruáltak a trendet tartalmazó, és az azt nem tartalmazó modellek közt. Ezt a helyi trend (Local Trend = LT) koncepciójával úgy oldották meg, hogy  $\beta$ -t nem tekintették továbbá rögzítettnek, hanem ezt is egy konstans  $b$  és egy változó  $T$  segítségével írták fel pl. az alábbi módon:

$$\beta = \frac{b}{\sqrt{T}}$$

Ekkor  $T$  minden határon túli növelésével a determinisztikus trend eltűnik, véges  $T$  esetén viszont a trend megmarad. A két kritikus komponens felírására természetesen más lehetőség is adódik, de az így specifikált

$$Y_t = \alpha + \frac{b}{\sqrt{T}}t + \left(1 + \frac{c}{T}\right)Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

alakú NILT folyamatban éppen a sztochasztikus illetve determinisztikus trend közti választás lehetősége van kiemelve, hiszen a  $T \rightarrow \infty$  határátmenet, a véges, vagy végtelen  $T$  éppen ezt a két fontos esetet választja el egymástól<sup>10</sup>. Erre a folyamatra, amely tehát bizonyos értelemben általánosabban tartalmazza az eddig vizsgált problémákat Haldrup és Hyllenberg [11] építettek tesztek.

<sup>10</sup>A  $T$ -vel, illetőleg a  $\sqrt{T}$ -vel való (eltérő) normálási az indokolja, hogy a két paraméter (az AR1, illetve a trend együtthatója)  $H_0$  alatt eltérő konvergencia sebességű. ( $\frac{1}{T}$ , illetve  $\frac{1}{\sqrt{T}}$ ). Az itteni felírás már kiküszöböli az eltérő konvergencia sebességek okozta aránytalanságot.



A másik általánosítás az ún. meg nem figyelhető komponensű folyamatok (és modellek) felé mutat. Ezek lényege az, hogy két vagy több folyamat összegeként állnak elő, megfigyelési szinten viszont csak az összegre vonatkozó megfigyelések állnak rendelkezésre. Ezért adódnak becslési, pontosabban azonosítási (identifikációs) problémák az egyes folyamatok szétválaszthatósága kapcsán. (Ezért nevezik ezeket a folyamatokat általában meg nem figyelhető komponensű (UnObservable Component=UOC) modelleknek.) Esetünkben egy nagyon egyszerű UOC folyamat akkor adódik, ha a hagyományos additív specifikációjú idősortmodellt leegyszerűsítve, a szezonális és a ciklikus hatásoktól megtisztítva az alábbi formában írjuk fel:

$$Y_t = T_t + \varepsilon_t \quad (6)$$

A *determinisztikus trend* ekkor

$$T_t = \alpha + \beta t$$

alakú lesz, és ekkor (6) -ből

$$E(Y_t) = \alpha + \beta t, \quad \text{Var}(Y_t) = \sigma^2, \quad \text{Cov}(Y_t Y_{t-k}) = 0$$

adódik. Ez nem más, mint a hagyományos determinisztikus trendmodell, ahol  $Y_t$  tehát trendstacionárius. A *sztochasztikus trend* ugyanebben a keretben

$$T_t = T_{t-1} + \beta + \eta_t \quad (7)$$

alakban írható fel, ahol  $\beta$  konstans,  $\eta_t$  pedig  $\eta_t \sim IID(0, \sigma_\eta^2)$  eloszlású valószínűségi változó. Ha feltesszük, hogy (6)-ban  $\varepsilon_t \sim IID(0, \sigma_\varepsilon^2)$ , akkor a modell átalakított („redukált”) formája:

$$Y_t = t\beta + \sum_{i=1}^t \eta_i + \varepsilon_t$$

továbbá

$$E(Y_t) = t\beta, \quad \text{Var}(Y_t) = t\sigma_\eta^2 + \sigma_\varepsilon^2, \quad \text{Cov}(Y_t Y_{t-1}) = (t-1)\sigma_\eta^2.$$

A (7) egyenlet specifikációjából látható az, hogy ha  $\sigma_\eta^2$  kicsi, akkor ez szélső esetben magában foglalja a determinisztikus trendet, míg ha  $\sigma_\varepsilon^2 \rightarrow 0$ , akkor a másik szélső esetként a RW folyamat adódik. Így a  $\sigma_\eta^2$  és  $\sigma_\varepsilon^2$  viszonya mutatja meg azt, hogy determinisztikus vagy sztochasztikus trend feltételezése a helyes a (7) DGP esetén. Az UOC folyamat elemzése tehát (implicit módon, a determinisztikus és sztochasztikus trend közti választással) lehetőséget ad az egységgyök tesztelésére. Ezt az elvet használják fel az egységgyökök

tesztelésére készített UOC alapú tesztek, így a Nyblom [20], a Nyblom-Mäkeläinen [21], valamint a Franzini-Harvey [9] tesztek.

Végül az általánosabb modellek közt kell szólni a regressziós keretek közt felmerülő egységgyök problémáról. Ez esetben a klasszikus regressziós hipotézisek helyett élünk azzal a feltételezéssel, hogy a maradékváltozó autokorrelált, és esetenként ez az autokorreláció egységnyi is lehet. Ilyen esetekben a korábban, az AR1 tesztelésénél már említett Sargan-Bhargava típusú (R) tesztek alkalmazása látszik célszerűnek.

Ezek kiindulópontja az

$$Y_t = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i X_{it} + u_t$$

regressziós folyamat, ahol  $u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$  és  $H_0 : \rho = 1$ , azaz nullhipotézisünk szerint a maradékváltozó véletlen bolyongási folyamatot követ.  $H_0$  alatt  $\Delta u_t = \varepsilon_t$ , így a regressziót a differenciákra felírva

$$\Delta Y_t = \sum_{i=1}^k \beta_i \Delta X_{it} + \varepsilon_t$$

adódik. Az eredeti és a differenciázott egyenletek maradékváltozóinak, illetve reziduumainak összehasonlítására épülnek a Sargan-Bhargava típusú tesztek, melyek közül kiemelendők Sargan és Bhargava von Neumann típusú, és Durbin-Watson típusú tesztjei, valamint a Berenblut-Webb teszt. Ezek a fenti közös elvre épülve más-más tesztfüggvényeket használnak. Közös jellemzőjük, hogy a tesztfüggvények eloszlása nem független az  $X$  változóktól, így általános (minden  $X$  esetére érvényes) eredmények nem léteznek. Hasonlóan a közismert Durbin-Watson teszthez, ez esetben is két út járható: vagy minden egyes konkrét  $X$  matrixhoz egyedileg előállítjuk a megfelelő eloszlást (és az ennek megfelelő kritikus értékeket), vagy – és ez a gyakoribb – közelítő érvényű eloszlásokat (és táblázatba foglalt kritikus értékeket) használunk. A próbák egyes részletei (próbafüggvények, táblázatok) a többször említett OTKA tanulmányban [13], az eloszlások indoklása Sargan és Bhargava cikkében [27] található meg.

Ahogy az eddigiek során az egyre bonyolultabb esetek felé haladtunk, láthattuk, hogy a tesztelés során egyre több tényezőt kellett figyelembe vennünk, az eredmények ugyanakkor egyre bizonytalanabbá válnak. A gyakorlat azonban még inkább összetett: egyszerre jelentkeznek determinisztikus, sztochasztikus trendek, nem is mindig első fokon, megjelenhetnek strukturális törések és ugrások, ráadásul ezek azonosítását gyakran a makrostatisztikákra olyannyira jellemző bizonytalan, nem mindig összehasonlítható tartalmú, rö-

vid idősorok alapján kell elvégezni. Mindezt jól példázza Neményi J. legfrissebb tanulmánya [19], amely a magyar gazdaság néhány makromutatójának alakulását elemzi jórészt az itt bemutatott eszközökkel, és gondos, alapos vizsgálatok után is inkább kérdések mintsem határozott állítások megfogalmazásáig jut el. Ez alapján úgy tűnik, hogy még sok munka van hátra ahhoz, hogy a gyakorlati esetekre is jól alkalmazható vizsgálati eszközök álljanak e téren a kutatók rendelkezésére.

## 6. Összefoglalás

a) A cikkben bemutattuk az egységgyök probléma lényegét, szerepét az elemzésekben, kapcsolatát a modellépítés egyes tartalmi és technikai kérdéseivel.

b) Rámutattunk arra, hogy mivel a megfigyeléseink mindig mintából származnak, az azokból számított statisztikákat mintavételi hiba terheli, ezért fontos az egységgyökök vizsgálatánál a minél alaposabb tesztelés.

c) A tesztelés – és általában az idősorok elemzésének – talán legnagyobb nehézsége abban áll, hogy a folyamatoknak csak egyetlen realizációját ismerjük, ismételt kísérletekre nincs módunk. Ez szigorúbban véve minden becslés és tesztelés alapját jelentő stacionaritási feltétel tesztelését lehetetlenné teszi. Gyakorlatban ezért megelégszünk a stacionaritás intuitív belátásával, illetőleg közvetett tesztekkel.

d) Az egységgyök teszteket a legegyszerűbb AR1 folyamaton mutattuk be részletesen. Rámutattunk, hogy ezek fő nehézsége a becsült autoregresszív paraméter nem-standard eloszlása. Ezt az eloszlást (illetve bonyolultabb alapmodellek esetén ezeket az eloszlásokat) elsősorban Dickey és Fuller ezirányú eredményei alapján, illetve azokból kiindulva foglalták táblázatokba. Az egész témakört domináló Dickey - Fuller tesztek nagy előnye más tesztekhez képest, hogy próbafüggvényeik értéke standard regressziós eredménytáblából azonnal megkapható.

e) A bonyolultabb folyamatok egységgyök tesztjei részben az előzőekre épülnek, ezeket egészítik ki, ezeket ágyazzák be általánosabb folyamatokba, részben azonban más utakat és elveket követnek. Ezekre csak néhány jellegzetes példát említettünk.

f) A vizsgálat természetesen nem terjedhetett ki az összes felmerülő kérdésre. A fontos, de itt nem, vagy csak felszínesen érintett kérdések közül kiemelendő a regressziós elemzésekhez kapcsolódó részletesebb maradékelemzés, a több egységgyök és a kointegráció tesztelése, a többdimenziós idősorvektorok elemzése és a részleges (frakcionális) integráltság elemzése.

Ezek, és a témakörrel kapcsolatos egyéb kérdések elsősorban a J.A.S.A. és az *Econometrica* cikkei alapján tanulmányozhatók.

## Irodalom

1. D. A. DICKEY – W. R. BELL – R. B. MILLER: Unit Roots in Time Series Models: Tests and Implications. *The American Statistician*, Vol. 40 (1986), No. 1, pp 12–26.
2. D. A. DICKEY – W. A. FULLER: Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root. *Journal of the American Statistical Association (J.A.S.A.)*, Vol.74 (1979), No.366, pp 427–431.
3. D. A. DICKEY – W. A. FULLER: Likelihood Ratio Statistics for Autoregressive Time Series with a Unit Root. *Econometrica*, Vol.49 (1981), No.4, pp 1057–1072.
4. F. X. DIEBOLD – M. NERLOVE: Unit Roots in Economic Time Series. A Selective Survey. *Advances in Econometrics*, Vol.8 (1990), pp 3–69, JAI Press Inc.
5. D. N. DEJONG – J. C. NANKERVIS – N. E. SAVIN – C. H. WHITEMAN: Integration versus Trend Stationarity in Macroeconomic Time Series. Working Paper No. 89–99. Department of Economics, University of Iowa, Iowa City, 1989.
6. R. F. ENGLE – C. W. J. GRANGER: Co-integration and Error Correction: Representation, Estimation and Testing. *Econometrica*, Vol. 55 (1987), No 2, pp 251–276.
7. G. B. A. EVANS – N. E. SAVIN: Testing for Unit Roots 1. *Econometrica*, Vol. 49 (1981), No. 4, pp 753–779.
8. G. B. A. EVANS – N. E. SAVIN (1984): Testing for Unit Roots 2. *Econometrica*, Vol. 52 (1983), No. 5, pp 1241–1269.
9. L. FRANZINI – A. C. HARVEY: Testing for Deterministic Trends and Seasonal Components in Time Series Models. *Biometrika*, Vol. 70 (1983), pp 673–682.
10. W. A. FULLER: *Introduction to Statistical Time Series*. Wiley & Sons Inc, 1976, New York.
11. N. HALDRUP – S. HYLLEBERG: *Integration, Near-Integration and Deterministic Trends*. Institute of Economics, University of Aarhus, 1991. (Mimeo)
12. D. P. HASZA – W. A. FULLER: Estimation for Autoregressive Processes with Unit Roots. *Annals of Statistics*, Vol. 7 (1979), pp 1106–1120.
13. HUNYADI L.: *Idősorok feltáró elemzése*. OTKA Tanulmány, kézirat, Budapest, 1992.
14. S. KARIN – H. M. TAYLOR: *Sztocasztikus folyamatok*. Gondolat, Budapest, 1985.
15. KÖRÖSI G. – LOVRICS L. – MÁTYÁS L.: *Aggregation and the Long Run Properties of Economic Time Series*. International Congress on Modelling and Simulation, Perth, 1993.

16. D. KWIATKOWSKI – P. C. B. PHILLIPS – P. SCHMIDT – Y. SHIN: Testing the Null Hypothesis of Stationarity against the Alternative of a Unit Root: How Sure are we that Economic Time Series have a Unit Root? *Journal of Econometrics*, 1992. No. 1/3, pp 159–169.
17. J. C. NANKERVIS – N. E. SAVIN: The Student's  $t$  Approximation in a Stationary First Order Autoregressive Model. *Econometrica*, Vol.56 (1988), No. 1, pp 119–145.
18. C. R. NELSON – C. I. PLOSSER: Trends and Random Walks in Macroeconomic Time Series. *Journal of Monetary Economics*, Vol. 10 (1982), pp 139–152.
19. NEMÉNYI J.: A strukturális változások kezelése az átmenet gazdaságának ökonometriai modelljeiben. *Közgazdasági Szemle*, XLI(1994), 967–988 old.
20. J. NYBLÖM: Testing for Deterministic Linear Trend in Time Series. *J.A.S.A.*, Vol. 81 (1986), No. 394, pp 545–549.
21. J. NYBLÖM – T. MÄKELÄINEN: Comparisons of Tests for the Presence of Random Walk Coefficients in a Simple Linear Model. *J.A.S.A.*, Vol. 78 (1983), No. 384, pp 856–864.
22. P. PERRON: The Great Crash, the Oil Price Shock and the Unit Root Hypothesis. *Econometrica*, Vol. 57 (1989), No. 6, pp 1361–1401.
23. P. PERRON: Tests of Joint Hypotheses for Time Series Regression with a Unit Root. *Advances in Econometrics*, Vol. 8 (1990), pp 135–159, JAI Press Inc.
24. P. C. B. PHILLIPS: Time Series Regression with a Unit Root. *Econometrica*, Vol. 55 (1987), No. 2, pp 277–301.
25. P. C. B. PHILLIPS: Regression Theory for Near-Integrated Time Series. *Econometrica*, Vol. 56 (1988), No. 5, pp 1021–1043.
26. RAPPAI G.: Tőkepiaci elméletek. Kézirat, Pécs, 1994.
27. J. D. SARGAN – A. BHARGAVA: Testing Residuals from Least Squares Regression for Being Generated by Gaussian Random Walks. *Econometrica*, Vol. 51 (1983), No. 1, pp 153–174.
28. P. SCHMIDT: Dickey-Fuller Tests with Drift. *Advances in Econometrics*, Vol. 8 (1990), pp 161–200, JAI Press Inc.
29. F. SOWELL: The Fractional Unit Root Distribution. *Econometrica*, Vol. 58 (1990), No. 2, pp 495–505.
30. J. H. STOCK: Asymptotic Properties of Least Squares Estimators of Cointegrating Vectors. *Econometrica*, Vol. 55 (1987), No. 5, pp 1035–1056.

#### UNIT ROOTS AND THEIR TESTS

The article gives an up to date survey on the unit root problem. First it summarizes the basic concepts of stochastic time series analysis underlining the contradictions

of the stationarity assumption and the tests of stationarity. Then it exposes the unit root problem in economic time series and its relation to the cointegration and econometric model building. For the simplest processes and models Dickey-Fuller tests are analyzed in details and their practical application is demonstrated by a simple example of the Budapest Exchange Stock. Unit root tests for more sophisticated processes are treated in a less detailed way. Among the further problems of the unit root literature seasonal and fractional integration, nearly integrated and local trend processes, the unobservable component models and the general regression models are briefly mentioned. As a conclusion, the study shows that even the most complex models seem to be too simple to describe the movement of the main macro indicators of the Hungarian economy in the period of transition. So further research in this field seems to be inevitable.