Krekó Béla (1915 – 1994)

A Matematikai és Számítástudományi Intézet oktatói és munkatársai ismét búcsúznak egy kollégájuktól, aki negyven éven át tanított az egykori Matematikai Tanszéken majd később az Intézetben. 1994 december 7-én elhunyt Dr. Krekó Béla egyetemi tanár.

1915-ben született. Egyetemi tanulmányait Budapesten a Pázmány Péter Tudományegyetemen végezte, ahol 1940-ben matematika-fizika szakos tanári oklevelet szerzett. A matematikának a közgazdaságtudományban való szerepére már korán felfigyelt és tanári diplomájának megszerzése után hallgatója lett a Műegyetem Közgazdasági Karának, ahol 1947-ben kiegészítő diplomát kapott matematikából. Ugyanezen a karon nyújtotta be egyetemi doktori disszertációját, majd 1948-ban doktori oklevelet kapott. A közgazdasági Egyetem munkájába 1954-ben kapcsolódott be a Matematikai Tanszéken egyetemi docensi minőségben.

Korán felismerte a lineáris algebra majd az erre épülő lineáris programozás fontosságát és egyre növekvő szerepét a közgazdasági egyetemi oktatásban. Ugyanakkor az is világos volt előtte, hogy a Közgazdasági Egyetem valamenynyi hallgatója számára kellő mélységben ezek a módszerek az erős matematikaigényesség miatt nem oktathatók. Ezért kezdeményezte egy olyan kislétszámú szak beindítását, amelybe erre a célra kiválasztott hallgatók kerülnek be. Így jött létre a Tervmatematika szak, amelynek első évfolyama 1960-ban be is indult. A szak szükségességének elismertetése és megindítása abban az időben nem volt könnyű feladat.

A szak létszáma éveken keresztül 20 körül mozgott. A szak sikerességét igazolja, hogy a kis létszám ellenére az itt végzettek többsége ma ott található a gazdasági közélet és a Közgazdasági Egyetem kiemelkedő posztjain.

Oktatási elképzeléseit előkészítendő 1957-ben megírta Bevezetés a lineáris programozásba c. könyvét, ami a Közgazdasági és Jogi Könyvkiadónál jelent meg. Később ezt követték a Lehrbuch der linearen Optimierung, VEB Verlag, (1964), Linear Programming, Pitman, (1968), Nichtlineare Optimierung, Akadémiai Kiadó, (1974), Lineáris algebra, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, (1976) könyvei. 1964-ben kinevezték az akkor alakuló Egyetemi Számítóközpont igazgatójává, ahonnan 1980-ban ment nyugdíjba. Intézeti igazgatósága alatt is az Egyetemen félállású oktatóként vett részt a Matematikai Intézet munkájában, 1970-től egyetemi tanári minőségben.

1975-ben elnyerte a matematikai tudományok kandidátusa akadémiai fokozatot.

Több külföldi egyetemen is oktatott vendégtanárként, így Belgrádban, Berlinben, Újvidéken. Gyakran tartott előadássorozatot a Szabadkai Egyetemen, ahol több tanítványa dolgozik ma is.

Az IFIP komputerdidaktikai szakbizottságának magyar képviselője volt, valamint a Közgazdasági Egyetem számos bizottságának tagja.

Az utóbbi években biztosítási matematikai problémákkal is foglalkozott támogatván a Matematikai és Számítástudományi Intézet programját, amelynek keretében biztosítási matematikai tárgyak oktatása és egy ilyen irányú szak (aktuárius szakirány) indítása vált szükségessé. Erre a célra írta meg a tervezett Biztosítási Matematika könyvsorozat keretében az Életbiztosítás I. c. egyetemi jegyzetét. Sajnos a II. számú folytatást már nem írhatja meg.

Mondhatni az utolsó pillanatig dolgozott és oktatott. 1994. december 6-án Pécsett még előadásokat tartott.

Példamutató volt mély humanitása, a klasszikus magyar és külföldi irodalom szeretete és ismerete.

A Közgazdasági Egyetem és a Matematikai Intézet egyik legkiválóbb oktatóját vesztette el benne.

Oktatói és szakmai munkássága, emberi kvalitásai az egyetemi és intézeti kollégák valamint tanítványai emlékezetében múlhatatlan nyomokat hagytak.

Én magam Krekó Béla halálával nemcsak egy kiváló kollégát, hanem egy jó barátot is elvesztettem.

Szép Jenő

A DINAMIKUS OLIGOPOL PROBLÉMA IRÁNYÍTHATÓSÁGÁRÓL[1]

MOLNÁR SÁNDOR – SZIDAROVSZKY FERENC
Központi Bányászati Fejlesztési Intézet – Arizonai Egyetem

Dolgozatunkban N-személyes dinamikus oligopol játékok termelési vektorának teljes irányíthatóságával foglalkozunk. Szükséges és elégséges irányíthatósági feltételt bizonyítunk be a linearitás és adaptív becslések esetén. Speciális esetként kimutatjuk, hogy Cournot becslések feltételezése mellett a termelési vektor akkor és csak akkor teljesen irányítható, ha két nem-szimmetrikus játékos alkotja a termelői oldalt.

1. Bevezetés

Dolgozatunkban az N-személyes dinamikus oligopol játékokat, mint diszkrét dinamikus rendszereket vizsgáljuk. Az alapmodell a következő. Tegyük fel, hogy N termelő (továbbiakban játékos) ugyanazt a terméket állítja elő és ugyanazon a piacon értékesíti. Jelölje x_k ($k = 1, 2, \ldots, N$) a k-dik termelő által előállított mennyiséget és jelölje C_k ugyanezen termelő költségfüggvényét. Feltesszük, hogy az egységár a teljes termelt mennyiség függvénye: $p(x_1 + x_2 + \ldots + x_N)$. Ekkor a k-adik termelő profitfüggvénye:

$$\varphi_k(x_1, \ldots, x_n) = x_k p(x_1 + \ldots + x_n) - C_k(x_k) . \tag{1}$$

Ha $S_k = [0, \infty)$ a k-adik ($k = 1, 2, \ldots, N$) játékos stratégiahalmaza, akkor a fentiekkel egy N-személyes játékot definiálhatunk:

$$\Gamma = \{ N; S_1, \ldots, S_N; \varphi_1, \ldots, \varphi_N \} ,$$

amelyet N-személyes *oligopol-játéknak* nevezünk. A játék egyensúlypontjának létezéséről és az egyensúlypont egyértelműségéről Okuguchi (1976) ad összefoglalást. A játék többtermékes kiterjesztésével és az egyensúlypontok numerikus meghatározásával Okuguchi és Szidarovszky (1990) foglalkozik. A továbbiakban az oligopol játék dinamikus kiterjesztését vizsgáljuk. Tegyük

[1] **A kutatást a Magyar-Amerikai Tudományos és Technológiai Közös Alap (JF No. 224) és az NSF (INT-9312030) támogatta.**

fel, hogy minden $t = 0, 1, 2, \ldots$ időpontban az összes játékos először megbecsüli a többiek által együttesen termelt mennyiséget, majd optimalizálja saját várható profitját. Jelölje $s_k^E(t)$ a k-adik játékos becslését a többiek által termelt mennyiségről, akkor várható haszna az

$$x_k p(s_k^E(t) + x_k) - C_k(x_k) \tag{2}$$

formulával számítható. Ha feltesszük, hogy a kormány ártámogatással, adókedvezménnyel, költségátvállalással kívánja befolyásolni a piacot, akkor ezt az irányítást matematikailag úgy modellezhetjük, hogy a játékosok költségfüggvényét egy $u(t)$ irányítási változóval beszorozzuk. Ekkor minden t időpontban minden játékos stratégiaválasztása az

$$x_k(t) = \arg\max_{x_k \geq 0} \{x_k p(s_k^E(t) + x_k) - C_k(x_k)u(t)\} \tag{3}$$

szabállyal adódik. Vegyük észre, hogy ez a dinamizmus függ az $s_k^E(t)$ becslési módszertől. Ebben a dolgozatunkban feltételezzük, hogy az összes játékos *adaptív* becslést alkalmaz:

$$s_k^E(t) = s_k^E(t-1) + \alpha_k [\sum_{l \neq k} x_l(t-1) - s_k^E(t-1)] \,, \tag{4}$$

amelyet úgy értelmezhetünk, hogy az aktuális becslés az előző időpontbeli becslésből úgy adódik, hogy ahhoz a becslési hiba egy részét hozzáadjuk. Itt feltételezzük, hogy $0 < \alpha_k \leq 1$ minden k esetén. Helyettesítsük a (4) egyenlőséget a (3) egyenletbe:

$$x_k(t) = \arg\max_{x_k \geq 0} \{x_k p(s_k^E(t-1) + \alpha_k [\sum_{l \neq k} x_l(t-1) - s_k^E(t-1)] + x_k) - C_k(x_k)u(t)\} . \tag{5}$$

A (4) és (5) egyenletek egy dinamikus rendszert definiálnak, ahol x_k ($1 \leq k \leq N$) jelöli az állapotváltozókat és u az irányítást. A következő paragrafusban ennek a rendszernek az irányíthatóságát vizsgáljuk meg.

2. A rendszer irányíthatósága

A matematikai kezelhetőség érdekében tegyük fel a következőket:

(*a*) $p(s) = b - As \quad (b, A > 0)\,;$

(*b*) $C_k(x_k) = c_k x_k + d_k \quad (c_k, d_k > 0) \quad (k = 1, 2, \ldots, N)\,;$

(c) $\quad x_k(t) > 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, N; \; t = 0, 1, 2, \ldots)$

Ekkor $x_k(t)$ maximalizálja az

$$x_k\{b - A[s_k^E(t-1) + \alpha_k(\sum_{l \neq k} x_l(t-1) - s_k^E(t-1)) + x_k]\} - (c_k x_k + d_k)u(t) \quad (6)$$

függvényt. A c) feltétel mellett egyszerű deriválással adódik, hogy

$$x_k(t) = -\frac{\alpha_k}{2}\sum_{l \neq k} x_l(t-1) - \frac{1-\alpha_k}{2} s_k^E(t-1) + \frac{b}{2A} - \frac{c_k}{2A}u(t) \,. \quad (7)$$

Vezessük be az új állapotváltozókat:

$$z_k = x_k - \frac{b}{A(N+1)} \quad \text{és} \quad w_k = s_k^E - \frac{b(N-1)}{A(N+1)} \,, \quad (8)$$

ekkor egyszerű helyettesítéssel adódik, hogy a (7) egyenlőségben a $b/(2A)$ konstans tag kiesik. Tehát a (7) és (4) egyenlet a következőre redukálódik:

$$z_k(t) = -\frac{\alpha_k}{2}\sum_{l \neq k} z_l(t-1) - \frac{1-\alpha_k}{2} w_k(t-1) - \frac{c_k}{2A}u(t) \quad (9)$$

$$w_k(t) = \alpha_k \sum_{l \neq k} z_l(t-1) + (1-\alpha_k)w_k(t-1) \,. \quad (10)$$

Feladatunk tehát a z_k állapotváltozó irányítása. Minthogy a w_k becslési változó is állapotváltozó, problémánk nem egy egyszerű állapotirányítás, hiszen nem célunk w_k irányítása. A probléma az ún. output-irányítási feladattá redukálódik, ha a rendszer outputját úgy definiáljuk, hogy az csak az $x_1, x_2, \ldots, x_N$ állapotváltozókat tartalmazza. Modellünk tömören a következő alakban írható át:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t-1) + \mathbf{b}u(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (11)$$

ahol

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{D} \\ -2\mathbf{B} & -2\mathbf{D} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = (\mathbf{I}, \mathbf{0})$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\alpha_1}{2} & \cdots & -\frac{\alpha_1}{2} & -\frac{\alpha_1}{2} \\ -\frac{\alpha_2}{2} & 0 & \cdots & -\frac{\alpha_2}{2} & -\frac{\alpha_2}{2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -\frac{\alpha_N}{2} & -\frac{\alpha_N}{2} & \cdots & -\frac{\alpha_N}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -\frac{c_1}{2A} \\ -\frac{c_2}{2A} \\ \vdots \\ -\frac{c_N}{2A} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \mathrm{diag}\left(\frac{\alpha_1 - 1}{2}, \frac{\alpha_2 - 1}{2}, \dots, \frac{\alpha_N - 1}{2}\right),$$

és az $\mathbf{x}$ állapotvektor az $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N, \mathbf{s}_1^E, \mathbf{s}_2^E, \dots, \mathbf{s}_N^E$ vektorokat tartalmazza ebben a sorrendben. A lineáris rendszerelméletből tudjuk, hogy $t \geq 0$ esetén

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}^t\mathbf{x}(0) + \left(\mathbf{A}^{t-1}\mathbf{b}u(1) + \dots + \mathbf{A}\mathbf{b}u(t-1) + \mathbf{b}u(t)\right), \tag{12}$$

így a rendszer outputja:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{A}^t\mathbf{x}(0) + \left(\mathbf{C}\mathbf{A}^{t-1}\mathbf{b}u(1) + \dots + \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{b}u(t-1) + \mathbf{C}\mathbf{b}u(t)\right). \tag{13}$$

Ebből az egyenlőségből közvetlenül leolvasható, hogy tetszőleges $\mathbf{x}(0)$ kezdeti állapotból kiindulva a rendszer outputja tetszőleges $\mathbf{y}(t)$ értékre irányítható a $[0, t]$ intervallumon akkor és csak akkor, ha a

$$\mathbf{K}_M(t) = \left(\mathbf{C}\mathbf{b}, \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{b}, \dots, \mathbf{C}\mathbf{A}^{t-1}\mathbf{b}\right) \tag{14}$$

módosított Kalman-mátrix rangja N. Egyszerű számolással igazolható, hogy

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{C}\mathbf{b} & = & \mathbf{c} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{b} & = & \mathbf{B}\mathbf{c} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^2\mathbf{b} & = & (\mathbf{B} - 2\mathbf{D})\mathbf{B}\mathbf{c} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{t-1}\mathbf{b} & = & (\mathbf{B} - 2\mathbf{D})^{t-2}\mathbf{B}\mathbf{c}, \end{array} \tag{15}$$

ennek következtében a módosított Kalman-mátrix tovább egyszerűsödik:

$$\mathbf{K}_M(t) = \left(\mathbf{c}, \mathbf{B}\mathbf{c}, (\mathbf{B} - 2\mathbf{D})\mathbf{B}\mathbf{c}, \dots, (\mathbf{B} - 2\mathbf{D})^{t-2}\mathbf{B}\mathbf{c}\right). \tag{16}$$

Minthogy a $\mathbf{B} - 2\mathbf{D}$ mátrix $N \times N$ típusú, a Cayley-Hamilton tételből (ld. például Szidarovszky és Yakowitz, 1978) azonnal következik, hogy

$$\mathrm{rank}(\mathbf{K}_M(N+1)) = \mathrm{rank}(\mathbf{K}_M(N+2)) = \dots, \tag{17}$$

vagyis a $\mathbf{K}_M(t)$ mátrix rangja nem növekszik $t \geq N + 1$ esetén. Az output irányíthatósága szempontjából ez azt jelenti, hogyha az output nem válik teljesen irányíthatóvá a $t = N+1$ időpillanatig, akkor már nem válhat teljesen irányíthatóvá később sem. A fentiek a következőképpen foglalhatók össze:

Tétel. *A dinamikus oligopol játék termelési vektora akkor és csak akkor teljesen irányítható, ha a $\mathbf{K}_M(N+1)$ módosított Kalman-mátrix rangja N.*

Tekintsük először az $N = 2$ speciális esetet. Ekkor

$$\mathbf{B}-2\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1-\alpha_1 & -\frac{\alpha_1}{2} \\ -\frac{\alpha_2}{2} & 1-\alpha_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\alpha_1}{2} \\ -\frac{\alpha_2}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -\frac{c_1}{2A} \\ -\frac{c_2}{2A} \end{pmatrix},$$

így

$$\mathbf{Bc} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_1 c_2}{4A} \\ \frac{\alpha_2 c_1}{4A} \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{B}-2\mathbf{D})\mathbf{Bc} = \begin{pmatrix} \frac{2(1-\alpha_1)\alpha_1 c_2 - \alpha_1\alpha_2 c_1}{8A} \\ \frac{-\alpha_1\alpha_2 c_2 + 2(1-\alpha_2)\alpha_2 c_1}{8A} \end{pmatrix}.$$

A termelési vektor teljesen irányítható a $[0,2]$ intervallumon, ha a

$$\mathbf{K}_M(2) = \begin{pmatrix} -\frac{c_1}{2A} & \frac{\alpha_1 c_2}{4A} \\ -\frac{c_2}{2A} & \frac{\alpha_2 c_1}{4A} \end{pmatrix} \tag{18}$$

mátrix rangja 2. Minthogy

$$\det(\mathbf{K}_M(2)) = \frac{-\alpha_2 c_1^2 + \alpha_1 c_2^2}{8A^2},$$

ez a feltétel akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \neq \frac{c_1^2}{c_2^2}. \tag{19}$$

Egyszerű számolással igazolható, hogy a $\mathbf{K}_M(3)$ mátrix rangja kisebb, mint 2 akkor és csak akkor, ha $\alpha_1 = \alpha_2$ és $c_1 = c_2$. Ez a feltétel a játék szimmetriáját jelenti, és nyilvánvalóan nem teljesen irányítható a termelési vektor, hiszen szimmetrikus kezdeti vektorból kiindulva a termelési vektor szimmetrikus marad, így nem-szimmetrikus vektorra semmiképpen sem irányítható.

Tekintsük ezután az $N \geq 3$ esetet. Ha valamilyen két játékos mellett $c_k = c_l$ és $\alpha_k = \alpha_l$, akkor a $\mathbf{K}_M(t)$ mátrix k-adik és l-edik sora megegyezik, azaz rangja kisebb, mint N. Így a termelési vektor nem teljesen irányítható, ami ugyanúgy is magyarázható, mint az $N = 2$ esetben. Megjegyezzük, hogy a nem-szimmetrikus eset nem garantálja a teljes irányíthatóságot. Ilyenkor a feltétel sokkal bonyolultabb, a $\mathbf{K}_M(N+1)$ mátrix rangját kell meghatároznunk. Két konkrét példával illusztráljuk, hogy akkor mindkét eset lehetséges.

1. Példa. Tegyük fel, hogy $N = 3$, $A = \frac{1}{2}$, $c_1 = c_2 = c_3 = 1$ és $\alpha_1 = \frac{1}{2}$,

$\alpha_2 = \frac{1}{3}$, $\alpha_3 = \frac{1}{4}$. Ekkor

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{8} \end{pmatrix},$$

így

$$\mathbf{B} - 2\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Bc} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{B} - 2\mathbf{D})\mathbf{Bc} = \begin{pmatrix} \frac{5}{48} \\ \frac{7}{72} \\ \frac{1}{12} \end{pmatrix}.$$

Tehát

$$\mathbf{K}_M(3) = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{48} \\ -1 & \frac{1}{3} & \frac{7}{72} \\ -1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}, \qquad \text{és} \qquad \det\big(\mathbf{K}_M(3)\big) = \frac{-1}{576} \neq 0,$$

vagyis a termelési vektor teljesen irányítható a $[0, 3]$ intervallumon.

2. Példa. Legyen most is $N = 3$, $A = \frac{1}{2}$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$ és $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 3$. Ekkor az előző példához hasonlóan látható be, hogy $\operatorname{rank}\big(\mathbf{K}_M(4)\big) < 3$, így a termelési vektor nem teljesen irányítható.

Befejezésül az $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_N = 1$ esetet vizsgáljuk meg általában. Megjegyezzük, hogy ebben a speciális esetben a (4) egyenlet leegyszerűsödik:

$$s_k^E(t) = \sum_{l \neq k} x_l(t-1) . \tag{20}$$

Ezt a módszert *Cournot-féle* becslésnek nevezik az irodalomban, és arra a hipotézisre épül, hogy minden időpontban az összes játékos azt feltételezi, hogy a többiek által együttesen termelt mennyiség ugyanaz marad, mint az előző időpontban volt. Ebben a speciális esetben $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ és $\mathbf{B} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{E})$, ahol $\mathbf{I}$ az N-edrendű egységmátrix, és $\mathbf{E}$ összes eleme 1. Így

$$\mathbf{K}_M(t) = \big(\mathbf{c}, \mathbf{Bc}, \mathbf{B}^2\mathbf{c}, \ldots, \mathbf{B}^{t-1}\mathbf{c}\big) . \tag{21}$$

Kimutatjuk ezután, hogy $\mathbf{K}_M(t)$ rangja legfeljebb 2 lehet, így Cournot-féle becslések esetén a termelési vektor soha sem teljesen irányítható, ha $N > 2$. Minthogy $\mathbf{E}^2 = N\mathbf{E}$,

$$\mathbf{B}^2 = \frac{1}{4}(\mathbf{I} - 2\mathbf{E} + \mathbf{E}^2) = \frac{1}{4}(\mathbf{I} + (N-2)\mathbf{E}) = \frac{N-1}{4}\mathbf{I} - \frac{N-2}{2}\mathbf{B} ,$$

így

$$\mathbf{B}^2\mathbf{c} = \frac{N-1}{4}\mathbf{c} - \frac{N-2}{2}\mathbf{B}\mathbf{c} , \tag{22}$$

és indukcióval azonnal adódik, hogy $\mathbf{B}^3\mathbf{c}$, $\mathbf{B}^4\mathbf{c}$, ... mind kifejezhetők $\mathbf{c}$ és $\mathbf{B}\mathbf{c}$ lineáris kombinációjaként. Ha $\mathbf{c}$ és $\mathbf{B}\mathbf{c}$ lineárisan függetlenek, akkor $\mathbf{K}_M(t)$ rangja 2, különben 1.

3. Megjegyzések

A matematikai modell felírásánál feltételeztük, hogy az irányítási változó a költségfüggvény szorzójaként szerepel. Valóban ez a helyzet, ha az irányítás költségcsökkentő (vagy költségnövelő) a termelői oldalon. Azonban fogyasztói ártámogatás esetén az árfüggvény szorzójaként kell szerepeljen. Ha az irányításban mindkét szempont érvényesül, akkor elvileg két irányítási változót kellene bevezetnünk, azonban az (5) optimum-feladat megoldása csak ezek hányadosától függ. Ezért tehát elegendő egyetlen irányítási változóval foglalkoznunk, mint ahogy ezt a modellben mi is tettük.

Az általános esetben a $\mathbf{K}_M(N+1)$ mátrix rangját kell meghatároznunk. A Gauss-féle kiküszöbölés (ld. például Szidarovszky és Yakowitz, 1978) igen gyors és könnyen kezelhető módszer. Néhány speciális esetben, például Cournot becslések mellett, vagy szimmetrikus esetekben a termelési vektor nem lehet teljesen irányítható. A Cournot esetben bebizonyítottuk, hogy $N > 3$ esetén a termelési vektor nem lehet teljesen irányítható. Befejezésül megjegyezzük, hogy ez az eredmény analóg Theocharis (1959) híres tételével, miszerint $N > 3$ esetén a diszkrét lineáris dinamikus oligopol játék nem lehet globálisan aszimptotikusan stabilis.

Irodalom

1. OKUGUCHI, K. (1976) *Expectations and Stability in Oligopoly Models.* Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York.
2. OKUGUCHI, K. és SZIDAROVSZKY F. (1990) *The Theory of Oligopoly with Multi/Product Firms.* Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York.
3. SZIDAROVSZKY, F. és A. T. BAHILL (1993) *Linear Systems Theory.* CRC Press, Boca Raton/London.

4. SZIDAROVSZKY, F. és S. YAKOWITZ (1978) *Principles and Procedures of Numerical Analysis.* Planem Press, New York/London.
5. THEOCHARIS, R. D. (1959) On the Stability of the Cournot Solution on the Oligopoly Problem. *Review of Econ. Studies*, Vol. 27, pp. 133–134.

ON THE CONTROLLABILITY OF THE DYNAMIC OLIGOPOLY PROBLEM

In this paper the controllability of production vector of the N-person dynamic oligopoly games is examined. Sufficient and necessary controllability conditions are given under linearity and adaptive expectations. Under Cournot expectations the controllability of the production vector is proven.

DISZKRÉT DINAMIKUS OLIGOPOL JÁTÉKOK STABILITÁSÁRÓL[1]

SZIDAROVSZKY FERENC – MOLNÁR SÁNDOR
Arizonai Egyetem – Központi Bányászati Fejlesztési Intézet

Diszkrét időskála mellett vizsgálunk dinamikus oligopol játékokat. A játékok egyensúlypontjának globális aszimptotikus stabilitását vizsgáljuk meg először, feltételezve, hogy a játékosok adaptívan becslik meg minden időszakban a többi játékos által együttesen termelt mennyiségeket. Speciális esetként a Cournot-féle becslés esetére kapunk eredményeket. Az alapmodellen kívül megvizsgáljuk azokat az eseteket is, amikor a játékosok csak korlátozottan változtathatják stratégiáikat, vagy a stratégia-változtatás költségekkel jár. Befejezésül egy speciális szekvenciális modellt tanulmányozunk, amikor egy-egy időszakban csak egy-egy játékos változtat (valamilyen sorrendben) stratégiáján.

1. Bevezetés

Diszkrét dinamikus oligopol játékok stabilitásával sok kutató foglalkozott az elmúlt évtizedekben. Theocharis (1959) klasszikus eredményének továbbfejlesztéseit foglalja össze Okuguchi (1976) könyve, amely részletes irodalmi összefoglalást és elemzést is tartalmaz. Ennek a ma már klasszikusnak nevezhető elméletnek továbbfejlesztését és többtermékes kiterjesztését adja meg Okuguchi és Szidarovszky (1990), amikor a többtermékes dinamikus oligopol játék stabilitására mutatnak be feltételeket. Részletesen vizsgálják a Cournot-féle, az adaptív, az extrapolatív, és a kombinált becslések esetét, viszont eredményeinknek hiányossága az, hogy a becslési paraméterekről általában felteszik, hogy a különböző játékosok esetére azonosak. Jelen tanulmányunkban ezt a hiányosságot kívánjuk részben megszüntetni, amikor az adaptív esetben a szimmetria feltételezése nélkül adunk szükséges és elégséges stabilitási feltételeket.

[1] A kutatást a Magyar-Amerikai Tudományos és Technológiai Közös Alap (JF No. 224) és az NSF (INT-9312030) támogatta.

2. A matematikai modell

Tegyük fel, hogy N termelő (játékos) ugyanazt a terméket termeli és értékesíti egy közös piacon. Ha x_k jelöli a k-adik $(1 \leq k \leq N)$ termelő által előállított termékmennyiséget (stratégiát), akkor feltesszük, hogy profitfüggvénye a

$$\varphi_k(x_1, \ldots, x_n) = x_k p(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) - C_k(x_k)\ . \tag{1}$$

alakban adható meg, ahol

$$p(s) = b - As \qquad (b, A > 0\,, \quad s = x_1 + x_2 + \ldots + x_N)$$

az árfüggvény és

$$C_k(x_k) = c_k x_k + d_k \qquad (c_k, d_k > 0)$$

a k-adik termelő költségfüggvénye. Tegyük fel, hogy minden $t \geq 0$ időpontban $(t = 0, 1, 2, \ldots)$ mindegyik termelő először megbecsüli a többiek által termelendő mennyiséget. Jelölje $s_k^E(t)$ a becslési értéket a k-adik termelő esetén. Ezután maximalizálja várható hasznát, amely a fenti feltételek mellett az

$$x_k\big(b - Ax_k - As_k^E(t)\big) - (c_k x_k + d_k)$$

alakban adható meg. Feltéve, hogy az optimális megoldás pozitív, egyszerű differenciálással adódik, hogy

$$x_k(t) = -\frac{1}{2}s_k^E(t) + \frac{b - c_k}{2A}\,. \tag{2}$$

Feltesszük, hogy az $s_k^E(t)$ becslések adaptívak, azaz

$$s_k^E(t) = s_k^E(t-1) + \alpha_k\Big[\sum_{l \neq k} x_l(t-1) - s_k^E(t-1)\Big]\,, \tag{3}$$

ahol $0 < \alpha_k \leq 1$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$. A (2) és (3) egyenlet alapján a következő rendszeregyenletet nyerjük:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_N(t) \\ s_1^E(t) \\ s_2^E(t) \\ \vdots \\ s_N^E(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{D} \\ -2\mathbf{B} & -2\mathbf{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t-1) \\ x_2(t-1) \\ \vdots \\ x_N(t-1) \\ s_1^E(t-1) \\ s_2^E(t-1) \\ \vdots \\ s_N^E(t-1) \end{pmatrix} + \alpha\,, \tag{4}$$

ahol

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\alpha_1}{2} & \cdots & -\frac{\alpha_1}{2} & -\frac{\alpha_1}{2} \\ -\frac{\alpha_2}{2} & 0 & \cdots & -\frac{\alpha_2}{2} & -\frac{\alpha_2}{2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -\frac{\alpha_N}{2} & -\frac{\alpha_N}{2} & \cdots & -\frac{\alpha_N}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \mathrm{diag}\Big(\frac{\alpha_1 - 1}{2}, \frac{\alpha_2 - 1}{2}, \ldots, \frac{\alpha_N - 1}{2}\Big).$$

α egy alkalmas konstans vektor.

3. Stabilitási feltételek

Ismeretes a lineáris rendszerelméletből (ld. például Szidarovszky és Bahill, 1992), hogy ez a diszkrét rendszer akkor és csak akkor globálisan aszimptotikusan stabilis, ha az együtthatómátrix összes sajátértéke az egységkörön belül van. A megfelelő feltételrendszer előállítása érdekében írjuk fel az együttható-mátrix sajátérték egyenletét:

$$\begin{aligned} -\frac{\alpha_k}{2}\sum_{l\neq k} u_l + \frac{\alpha_k - 1}{2} v_k &= \lambda u_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, N) \\ \alpha_k \sum_{l\neq k} u_l + (1-\alpha_k) v_k &= \lambda v_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, N)\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Az első egyenlet kétszeresét a másodikhoz adva a baloldal eltűnik:

$$0 = \lambda(2u_k + v_k)\,.$$

Minthogy esetleges zérus sajátértékek nem befolyásolják a rendszer stabilitását, feltehetjük, hogy $v_k = -2u_k$ amelyet az első egyenletbe helyettesítve a

$$-\frac{\alpha_k}{2}\sum_{l\neq k} u_l + (1-\alpha_k)u_k = \lambda u_k \tag{6}$$

relációt nyerjük. Vegyük észre, hogy az egyenletek azonosak az

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1-\alpha_1 & -\frac{\alpha_1}{2} & \cdots & -\frac{\alpha_1}{2} \\ -\frac{\alpha_2}{2} & 1-\alpha_2 & \cdots & -\frac{\alpha_2}{2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\frac{\alpha_N}{2} & -\frac{\alpha_N}{2} & \cdots & 1-\alpha_N \end{pmatrix}$$

mátrix sajátérték feladatával. E mátrix karakterisztikus egyenletét könnyen felírhatjuk a következő lemma felhasználásával:

Lemma. *Ha* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in I\!R^N$, *és* $\mathbf{I}$ *az* N*-dimenziós egységmátrix, akkor*

$$\det(\mathbf{I} + \mathbf{a}\mathbf{b}^T) = 1 + \mathbf{a}^T\mathbf{b} \ . \tag{7}$$

Bizonyítás. A lemmát teljes indukcióval igazoljuk. $N = 1$ esetén

$$\mathbf{I} + \mathbf{a}\mathbf{b}^T = 1 + a_1 b_1$$

így az állítás igaz. Tegyük fel az állítás igazságát $i < k$ esetére. Ekkor

$$D_k = \det(\mathbf{I} + \mathbf{a}\mathbf{b}^T) = \det \begin{pmatrix} 1 + a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots & a_1 b_k \\ a_2 b_1 & 1 + a_2 b_2 & \cdots & a_2 b_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_k b_1 & a_k b_2 & \cdots & 1 + a_k b_k \end{pmatrix} .$$

Vonjuk le a $(k-1)$-dik sor a_k/a_{k-1}- szeresét a k-dik sorból, majd a $(k-2)$-dik sor a_{k-1}/a_{k-2}-szeresét a $(k-1)$-dik sorból, és így tovább, végül pedig az első sor a_2/a_1-szeresét a második sorból. Ekkor azonnal látjuk, hogy

$$D_k = \begin{pmatrix} 1 + a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots & a_1 b_{k-1} & a_1 b_k \\ -\frac{a_2}{a_1} & 1 & & & \\ & -\frac{a_3}{a_2} & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 & \\ & & & -\frac{a_k}{a_{k-1}} & 1 \end{pmatrix} , \tag{8}$$

amelyet utolsó oszlopa szerint kifejtve a

$$D_k = D_{k-1} \cdot 1 + (-1)^{k-1} a_1 b_k \frac{a_2}{a_1} \frac{a_3}{a_2} \cdots \frac{a_k}{a_{k-1}} (-1)^{k-1} = D_{k-1} + a_k b_k$$

rekurzió adódik, amelyből a Lemma állítása azonnal következik. ■

A Lemma alapján az $\mathbf{A}$ mátrix karakterisztikus polinomja a következőképpen állítható elő:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \det\Big(\mathrm{diag}\big(1 - \frac{\alpha_1}{2} - \lambda, \ldots, 1 - \frac{\alpha_N}{2} - \lambda\big) + \begin{pmatrix} -\frac{\alpha_1}{2} \\ \vdots \\ -\frac{\alpha_N}{2} \end{pmatrix} (1, \ldots, 1)\Big)$$

$$= \det\Big(\mathrm{diag}(1-\frac{\alpha_1}{2}-\lambda,\ldots,1-\frac{\alpha_N}{2}-\lambda)\Big)\times$$

$$\times \det\left(\mathbf{I}+\mathrm{diag}(1-\frac{\alpha_1}{2}-\lambda,\ldots,1-\frac{\alpha_N}{2}-\lambda)^{-1}\begin{pmatrix}-\frac{\alpha_1}{2}\\ \vdots \\ \frac{\alpha_N}{2}\end{pmatrix}(1,\ldots,1)\right)$$

$$= \prod_{k=1}^{N}(1-\frac{\alpha_k}{2}-\lambda)\left[1+(1,\ldots,1)\begin{pmatrix}\frac{1}{1-\frac{\alpha_1}{2}-\lambda} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{1-\frac{\alpha_N}{2}-\lambda}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{\alpha_1}{2}\\ \vdots \\ -\frac{\alpha_N}{2}\end{pmatrix}\right]$$

$$= \prod_{i=1}^{N}(1-\frac{\alpha_k}{2}-\lambda)(1-\sum_{k=1}^{N}\frac{\alpha_k}{2(1-\frac{\alpha_k}{2}-\lambda)}) . \tag{9}$$

Tegyük fel most, hogy az a_k együtthatókat úgy sorszámoztuk, hogy az $a_1 > a_2 > \ldots > a_r$ értékek szerepeljenek rendre m_1, m_2, ..., m_r multiplicitással. Ha $m_j = 1$, akkor az $1-\frac{\alpha_j}{2}-\lambda$ tényező kiesik, így $1-\frac{\alpha_j}{2}$ nem sajátérték. Ha $m_j > 1$, akkor $1-\frac{\alpha_j}{2}$ (m_j-1)-szeres sajátérték. A többi sajátérték pedig a

$$\sum_{j=1}^{r}\frac{\alpha_j m_j}{2-\alpha_j-2\lambda} = 1 \tag{10}$$

egyenlet megoldásaival azonos. Jelölje ezután $g(\lambda)$ az egyenlet baloldalát. Nyilvánvalóan

$$\lim_{\lambda\to-\infty} g(\lambda) = \lim_{\lambda\to+\infty} g(\lambda) = 0 ,$$

$$\lim_{\lambda\to 1-\frac{\alpha_j}{2}-0} g(\lambda) = \infty \qquad \text{és} \qquad \lim_{\lambda\to 1-\frac{\alpha_j}{2}+0} g(\lambda) = -\infty ,$$

így a (10) egyenletnek nincs komplex gyöke, pontosan r valós gyöke van, egy-egy a $(-\infty, 1-\frac{\alpha_1}{2})$, $(1-\frac{\alpha_1}{2}, 1-\frac{\alpha_2}{2})$, ..., $(1-\frac{\alpha_{r-1}}{2}, 1-\frac{\alpha_r}{2})$ intervallumban. Az α_k együtthatókra tett feltételeink alapján

$$\frac{1}{2} \le 1-\frac{\alpha_j}{2} < 1 ,$$

így $\mathbf{A}$ összes sajátértéke -1 és $+1$ közé esik akkor és csak akkor, ha $g(-1) < 1$. Ezzel bebizonyítottuk a következő tételt:

1. Tétel. *A diszkrét dinamikus oligopol játék egyensúlypontja adaptív becslések mellett akkor és csak akkor globálisan aszimptotikusan stabilis, ha*

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{\alpha_k}{4-\alpha_k} < 1 . \tag{11}$$

Megjegyezzük, hogy az $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 1$ speciális esetben *Cournot-féle* becslésről beszélünk. Ekkor a (11) egyenlőtlenség akkor és csak akkor áll fenn, ha $N < 3$. Ezzel Theocharis (1959) híres eredményét általánosítottuk.

4. Korlátozott stratégia-változtatás esete

Ebben a paragrafusban az előbbiekben leírt modell olyan változatával foglalkozunk, amikor a t-dik időpontban az egyes játékosok nem profitmaximalizáló termelési programot választanak, hanem valamilyen értéket a megelőző és a profitmaximalizáló termelési érték között. Jelölje most $x_k^*(t)$ a (2) egyenlettel megadott optimális termelési értéket. Ekkor tehát azt feltételezzük, hogy minden $t \geq 0$ és k játékos esetén

$$\begin{aligned} x_k(t) &= (1-\gamma_k)x_k(t-1) + \gamma_k x_k^*(t) \\ &= (1-\gamma_k)x_k(t-1) + \gamma_k\left[-\frac{1}{2}s_k^E(t) + \frac{b-c_k}{2A}\right] \quad (0 < \gamma_k \leq 1) \end{aligned} \tag{12}$$

Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a játékosok Cournot-féle becslést használnak, az általános eset ahhoz hasonlóan, de sokkal bonyolultabban tárgyalható. Ekkor

$$s_k^E(t) = \sum_{l \neq k} x_l(t-1)\,, \tag{13}$$

amelyet a (12) egyenlőségbe helyettesítve egy lineáris differenciaegyenletet nyerünk, amely együttható mátrixa

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1-\gamma_1 & -\frac{\gamma_1}{2} & \cdots & -\frac{\gamma_1}{2} \\ -\frac{\gamma_2}{2} & 1-\gamma_2 & \cdots & -\frac{\gamma_2}{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\gamma_N}{2} & -\frac{\gamma_N}{2} & \cdots & 1-\gamma_N \end{pmatrix}.$$

Vegyük észre, hogy ez a mátrix azonos az előző paragrafusban bemutatott **A** mátrixszal, ha az $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ paramétereket a $\gamma_1, \ldots, \gamma_N$ együtthatókkal helyettesítjük. Így az 1. Tétel továbbra is igaz:

2. Tétel. *A (12) modell Cournot-féle becslések esetén globálisan aszimptotikusan stabilis akkor és csak akkor, ha*

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{\gamma_k}{4-\gamma_k} < 1\,. \tag{14}$$

Megjegyezzük, hogy a $\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_N = 1$ speciális esetben az összes játékos a profitoptimalizáló termékmennyiséget választja. Ekkor (14) akkor és csak akkor teljesül, ha $N < 3$. Így Theocharis (1959) eredményének egy újabb általánosítását kaptuk.

5. Stratégiaváltoztatás költségtényezővel

Ebben a paragrafusban az alapmodell olyan módosításával foglalkozunk, amikor az egyes időszakaszok alatti stratégiaváltoztatás költségekkel jár. Ezt a feltételezést úgy építjük be a modellbe, hogy a k-dik termelő várható profitja a t-dik időpontban most a

$$x_k\left(b - Ax_k - As_k^E(t)\right) - (c_k x_k + d_k) - K_k\left(x_k - x_k(t-1)\right)^2 \tag{15}$$

formulával számolható, ahol $K_k > 0$ adott konstans. Az utolsó tag jelenti a stratégiaváltoztatás költségét. Feltéve ismét, hogy a profitmaximalizáló termékmennyiség pozitív, egyszerű differenciálással adódik, hogy

$$x_k(t) = \frac{2K_k x_k(t-1) - As_k^E(t) + b - c_k}{2A + 2K_k}. \tag{16}$$

Tegyük fel ismét az egyszerűség kedvéért, hogy a játékosok Cournot-féle becslést alkalmaznak. A (16) differenciaegyenlet ismét lineáris, és együtthatómátrixa a következő alakú:

$$C = \begin{pmatrix} \frac{K_1}{A+K_1} & -\frac{A}{2(A+K_1)} & \cdots & -\frac{A}{2(A+K_1)} \\ -\frac{A}{2(A+K_2)} & \frac{K_2}{A+K_2} & \cdots & -\frac{A}{2(A+K_2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{A}{2(A+K_2)} & -\frac{A}{2(A+K_2)} & \cdots & \frac{K_2}{A+K_2} \end{pmatrix}.$$

Ha bevezetjük most a $\gamma_k = A/(A + K_k)$ jelölést, akkor ez a mátrix pontosan megegyezik az előző paragrafusok **A** és **B** mátrixával, így az 1. Tétel továbbra is érvényben marad:

3. Tétel. *A (16) modell Cournot-féle becslések esetén globálisan aszimptotikusan stabilis akkor és csak akkor, ha*

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{A}{3A+4K} < 1. \tag{17}$$

Tekintsük ezután a speciális esetet, amikor $K_1 = K_2 = \ldots = K$. Ekkor az összes játékos azonos többletköltséggel rendelkezik azonos stratégiaváltoztatás mellett. A (17) egyenlőtlenség ekkor azt jelenti, hogy K elég nagy kell, hogy legyen:

$$K > \frac{N-3}{4}A\,. \tag{18}$$

Az N=2 speciális esetben a (17) egyenlőtlenség tetszőleges $K_k > 0$ együtthatók mellett fennáll, azaz duopol játékok esetén mindig globálisan aszimptotikusan stabilis a (16) rendszer egyensúlypontja.

6. Szekvenciális stabilitás

Tekintsük ezután azt az esetet, amikor az egyes időpontokban mindig csak egyetlen játékos változtathat stratégiáján, feltételezve, hogy az teljes információval rendelkezik a többiek által korábban választott stratégiákról. Ily módon a (12) egyenlőség továbbra is érvényben marad azzal a változtatással, hogy a t időpontban egy t-től függő $k(t)$ játékos választ új stratégiát. Tehát $k \neq k(t)$ esetén $x_k(t) = x_k(t-1)$ és

$$\begin{aligned} x_{k(t)}(t) &= (1-\gamma_{k(t)})x_{k(t)}(t-1) + \gamma_{k(t)}\left(-\frac{1}{2}\sum_{l\neq k(t)} x_l(t-1) + \frac{b-c_k}{2A}\right) \\ &= x_{k(t)}(t-1) + \gamma_{k(t)}\left(-x_{k(t)}(t-1) - \frac{1}{2}\sum_{l\neq k(t)} x_l(t-1) + \frac{b-c_k}{2A}\right)\,. \end{aligned} \tag{19}$$

Vegyük észre, hogy ez a folyamat megegyezik a közismert relaxációs módszerrel (ld. például Szidarovszky és Yakowitz, 1978), amikor azt a

$$\mathbf{Hx} = \mathbf{b}$$

egyenletrendszer megoldására alkalmazzuk, ahol

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \cdots & \frac{1}{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{és} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \frac{b-c_1}{2A} \\ \frac{b-c_2}{2A} \\ \vdots \\ \frac{b-c_N}{2A} \end{pmatrix}.$$

A $\mathbf{H}$ mátrix szimmetrikus és pozitív definit, hiszen sajátértékei $\frac{1}{2}$ és $\frac{N+1}{2}$. Ily módon a relaxációs módszer konvergenciájáról szóló ismert eredményeket közvetlenül alkalmazhatjuk. Tetszőleges $\mathbf{x}$ vektor mellett vezessük be az $\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \mathbf{b} - \mathbf{H}\mathbf{x}$ jelölést és jelöljük $\mathbf{r}$ komponenseit az $r_1, \ldots, r_N$ szimbólummal. Tegyük fel, hogy a $k(t)$ játékost úgy választjuk ki tetszőleges $t \geq 0$ esetén, hogy fennálljon az

$$|r_{k(t)}(\mathbf{x}(t-1))| \geq \beta\,|r_k(\mathbf{x}(t-1))| \tag{20}$$

egyenlőtlenség tetszőleges k játékos mellett, ahol $\beta \in (0,1]$ egy adott konstans. Ismeretes, hogy ez esetben a (19) folyamat a $\mathbf{H}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer megoldásához konvergál (ld. például Faddeev és Faddeeva, 1963). Minthogy az egyenletrendszer megoldása egybeesik a statikus egyensúlyponttal (Nash-Cournot egyensúlypont), az egyensúly globális aszimptotikus stabilitása következik a (20) feltételből.

A (20) feltétel helyett most tegyük fel a következőt. Létezik olyan $M > 0$ pozitív állandó, hogy tetszőleges $t \geq 0$ mellett a $k(t+1)$, $k(t+2)$, ..., $k(t+M)$ sorozat tartalmazza az $1, 2, \ldots, N$ számok mindegyikét. Ekkor a (19) folyamat ismét konvergál a $\mathbf{H}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer megoldásához. Ennek az eredménynek a bizonyítása is megtalálható Faddeev és Faddeeva fenti könyvében. Ez utóbbi feltételt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy az $1, 2, \ldots, N$ indexeknek létezik fix ismétlési intervalluma.

7. Megjegyzések

Az adaptív becslések értelmezéséhez írjuk át a (3) rekurziót az

$$s_k^E(t) = \alpha_k \sum_{l \neq k} x_l(t-1) + (1-\alpha_k) s_k^E(t-1)$$

alakba, amelyből közvetlenül leolvasható, hogy $s_k^E(t)$ a közvetlenül megelőző időponthoz tartozó becslés és tényadat konvex lineáris kombinációja. A (3) egyenletből azt is látjuk, hogy $s_k^E(t)$ úgy adódik, hogy a megelőző becsléshez hozzáadjuk hibájának egy bizonyos részét. Ha a teljes hibát adjuk az előző becsléshez, akkor az $\alpha_1 = 1$ választással élünk, amely megfelel a Cournot-féle becslési módszernek.

A 4. és 5. paragrafusban a matematikai egyszerűség érdekében használtuk az egyszerűbb Cournot-féle becslést. A bonyolultabb általános adaptív eset hasonlóan tárgyalható, és az itt bemutatottakhoz hasonló stabilitási feltételek nyerhetők. Az 1. és 2. Tétel továbbra is érvényben marad, ha az α_k (ill. γ_k) értékét a $(0,2)$ intervallumra kiterjesztjük, hiszen ilyenkor $-1 < 1 - \frac{\alpha_i}{2} <$

1 továbbra is. A (11) ill. (14) feltétel azt jelenti, hogy az α_k (ill. γ_k) paraméterek elegendően kicsik legyenek. A (17) feltétel pedig úgy is megfogalmazható, hogy ha a K_k együtthatók elegendően nagyok, akkor függetlenül a játékosok számától a globális aszimptotikus stabilitás mindig biztosítható. Adaptív becslések esetén az $\alpha_k > 1$ eset azt jelenti, hogy az előző becslési hibánál nagyobb értéket adunk az előző becsléshez, a (12) modellben pedig $\gamma_k > 1$ úgy magyarázható, hogy $x_k(t)$ az előző $x_k(t-1)$ stratégiából úgy származik, hogy a profitmaximalizáló termelési mennyiség irányába haladunk, és azt túl is lépjük.

A szekvenciális modell globális aszimptotikus stabilitása akkor is érvényben marad, ha a $\gamma_{k(t)}$ együtthatók időfüggőek. Ilyenkor fel kell még tennünk, hogy tetszőleges $t \geq 0$ esetén

$$\varepsilon < \gamma_{k(t)}(t) < 2 - \varepsilon ,$$

ahol $\varepsilon > 0$ adott konstans. A (20) feltételben a $\beta = 1$ speciális eset azt jelent, hogy azt a játékost választjuk ki minden időpillanatban, amelynek megfelelő r_k komponens a legnagyobb abszolút értékű.

Modelljeinkben feltettük, hogy a termelők költségfüggvényei lineárisak. Kvadratikus költségek esete az itt bemutatottakhoz hasonlóan tárgyalható, hiszen a differenciáláskor lineárissá válik, és így a kapott differenciaegyenletek továbbra is lineárisak maradnak. A részletek kidolgozását az érdeklődő Olvasóra bízzuk.

Megjegyezzük végül, hogy az itt bemutatott modellek könnyen kiterjeszthetők a többtermékes esetre. Ilyenkor a kapott differenciaegyenletek együtthatómátrixa is hasonló az előbbiekben bemutatottakhoz azzal a különbséggel, hogy az egyes mátrixelemeket kisebb méretű $M \times M$ típusú mátrixok helyettesítik, ahol M jelöli a figyelembe vett termékek számát. A blokkmátrixokat ugyanúgy kell kezelnünk, mint ahogy azt Okuguchi és Szidarovszky (1990) bemutatta.

Irodalom

1. OKUGUCHI, K. (1976) Expectations and Stability in Oligopoly Models. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York
2. OKUGUCHI, K. és SZIDAROVSZKY F. (1990) The Theory of Oligopoly with Multi/Product Firms. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York.
3. SZIDAROVSZKY, F. és A. T. BAHILL (1993) Linear Systems Theory. CRC Press, Boca Raton/London.
4. SZIDAROVSZKY, F. és S. YAKOWITZ (1978) Principles and Procedures of Numerical Analysis. Planem Press, New York/London.
5. THEOCHARIS, R. D. (1959) On the Stability of the Cournot Solution on the Oligopoly Problem. Review of Econ. Studies, Vol. 27, pp. 133–134.

6. FADDEEV, D. K. és FADDEEVA, V. N. (1963) Computational Methods of Linear Algebra. Freeman Publ., San Francisco.

ON THE STABILITY OF DISCRETE-TIME DYNAMIC OLIGOPOLY GAMES

Dynamic oligopoly games are examined with discrete time scales. The authors described the global asymptotical stability of the equilibrium points of the games. Both the basic model and those cases are examined, when players may change their strategies only in a restricted way or when they have to reckon with the cost of change of strategies. Finally a special sequential model is examined when (in a certain sequence) in every period there is only one player changing his/her strategy.

ÖKONOMETRIAI ELJÁRÁSOK A KISZORÍTÁSI HATÁS ELEMZÉSÉRE[1]

DARVAS ZSOLT – ZÖLD ESZTER[2]

II. Magyarország 1989–92

Tanulmányunk második részében megkíséreljük ökonometriailag elemezni a magyarországi államháztartási hiány kiszorító hatását az 1989–1992-es időszakban.[3] Mint az előző rész bevezetőjében említettük, tudatában vagyunk a gazdasági és politikai környezet alapvető megváltozásának, a hazai statisztikai rendszer anomáliáinak, a statisztikai fogalmak átdefiniálásának, az elemzésre alkalmas idősorok hiányának, s ezért az ökonometriai vizsgálatok korlátozott elfogadhatóságának. Ezek figyelemben tartásával két kérdésre keresünk választ: az egyik vizsgálandó kérdés a deficit kamatlábakra gyakorolt hatása, a másik a kamatlábak szerepe a beruházások rohamos csökkenésében. További fontos kérdés a pénzkereslet kamatérzékenysége, hiszen a hitelezésre rendelkezésre álló forrásokat részben ez befolyásolja, ezért verbálisan elemezzük a megtakarítások alakulását is. Ugyanakkor mind a kamatláb alakulás, mind a beruházás csökkenés számos más, az állami deficiten illetve a kamatlábon kívüli tényező függvénye is, így közgazdaságilag nem érezzük megalapozottnak az olyan egyszerűsítő kijelentéseket, hogy a költségvetés a magas kamatszint fenntartásával súlyosan hátráltatta a tőkeakkumulációt. Ezért először megvizsgáljuk a beruházások helyzetét, majd rátérünk a kamatszint kérdésére.

a) A beruházások alakulása és kamatérzékenysége

A beruházások kamatérzékenysége és a tőkeállomány összetétele különleges

[1]Beérkezett 1993. október 3. Tanulmányunk az 1993. évi Tudományos Diákköri Konferencián a Közgazdasági elmélet-Ökonometria szekcióban megosztott első díjban, a Politikai tudományok Intézete Alapítvány 1993. évi "Új generáció" c. pályázatán első díjban részesült, valamint a XXI. Magyar Operációkutatási Konferencián a Sztochasztikus modellek szekcióban előadott dolgozatunk módosított változata. A TDK megírásához köszönettel tartozunk Bugnics Richárdnak, László Gézának és Nadrai Lászlónak.

[2]A szerzők a Budapesti Közgazdaságtudományi Egyetem Közgazdasági szakos hallgatói.

[3]Tanulmányunk elkészülésének időpontja 1993 április, elemzésünk az 1989–92-es időszakra vonatkozik. Az 1992 őszétől bekövetkezett igen jelentős kül- és belgazdasági változásokat ezért a tanulmány végén, külön utószóban tekintjük át.

figyelemre tarthat számot, ugyanis hazánkban egyszerre kellett és kell olyan makroökonómiai eredményeket elérni, amelyek egymásnak ellentmondó intézkedéseket követelnének. Rendkívül fontos az infláció és az inflációs várakozások mérséklése, az államháztartás egyenlegének javítása és gazdasági súlyának csökkentése, a nagy elosztási rendszerek reformjának elkezdése, a privatizáció véghezvitele, a munkanélküliség kezelése és csökkentése, a külső helyzet stabilizálása, illetve a stabilitás megőrzése, valamint a visszaesés után egy stabil gazdasági növekedési pályára történő ráállás elősegítése. A beruházások kamatérzékenysége és a versenyképes kihasználatlan kapacitások léte kulcskérdés a megfelelő gazdaságpolitikai eszközök kiválasztásánál.

A kamatpolitika (is) eltérően érinti a fenti makroökonómiai célokat. A kamatláb csökkentése javíthatja minden hitelből finanszírozott tevékenység helyzetét: így például a beruházásokat, a termelést, a hitelből történő privatizációt, az exportot, s ezért a kereskedelmi mérleg helyzetét. A hatás attól függ, hogy az egyes tevékenységeknek milyen a kamatérzékenysége. A belföldi kamatok csökkenése javítja az államháztartás helyzetét annak a függvényében, hogy milyen mértékű az adósság belföldi piaci finanszírozásának aránya. A kamatcsökkentés mérsékelheti a belföldi megtakarításokat, így növelheti a belföldi keresletet, amely viszont a termelés, az import, és az infláció növekedéséhez vezethet. A hatás itt is a pénzkereslet kamatérzékenységétől, illetve a termelés, az import és az infláció „kereslet-érzékenységétől" függ. Ugyanakkor a kamatcsökkenésnek lehet inflációt mérséklő hatása is, amennyiben az inflációs várakozásokat csökkenti. Továbbá a kamatcsökkentés a fizetési mérleg romlásához vezethet, amennyiben annak kamatérzékenysége jelentős. Kamatemelés esetén a fentiek fordítottja játszódhat le.

Így a kiszorítás elemzésével kapcsolatban a beruházások és a pénzkereslet kamat-érzékenységét, valamint a kamatszint „államháztartás hiány-érzékenységét" kell megvizsgálni. Egy szocialista gazdaságban a beruházásokat elsődlegesen nem a kamatszint befolyásolja, így a kamatérzékenység meglehetősen gyenge. A rendszerváltással, a hatékonysági követelmények egyre erőteljesebb előtérbe kerülésével a helyzet megváltozik, sőt hazánkban az igen szigorú csődtörvény nagymértékben fokozta ezt a hatást. A hitelképes vállalatok, az újonnan alakuló vállalkozások feltehetően érzékenyen reagálnak a kamatláb módosulásaira; olyan tekintetben mindenképpen, hogy nem jól megalapozott hitelkérelem esetén az üzleti bankok nem nyújtanak hitelt. Azonban a gazdaság zömét adó, rossz profitkilátású, nagy részben még állami tulajdonban lévő vállalatok beruházásainak drasztikus csökkenését a kamatláb valószínűleg igen kis mértékben tudja módosítani. A hitelképtelen vagy kényszerűen sorban álló cégekre szintén gyenge hatással lehet a kamatláb csökkenése. Ezek bármilyen kamatláb mellett nehezen juthatnak hitelhez.

A bankok oldaláról vizsgálva a helyzetet, a beruházási célú hitelek állománya 1993. márc. 31-én még folyó áron is kisebb volt az 1989. dec. 31-i értéknél, arányuk pedig 28.3%-ról 18.9%-ra csökkent a teljes vállalati hitelállományon belül. (A beruházási hitelek arányának csökkenése természetesen nem feltétlenül jelenti a beruházásra fordított hitelek arányának csökkenését.) A beruházások kamatérzékenységénél a kínálati oldal döntő jelentőségű lehet, hiszen a hitelkamatlábak csökkenése esetén a megélénkülő keresletet a bankok ugyanúgy fogják kezelni, mint a jelenlegi helyzetben, azaz saját biztonságuk, a pénzintézeti törvény előírásainak szem előtt tartásával szigorú elbírálásban döntenek a hitelek odaítéléséről. Így a beruházások kamatérzékenységére végzett becsléseink nem biztos, hogy a valós kamatérzékenységet tükrözik, hiszen a megvalósult helyzetet elemzik. Disequilibrium modell felállítására nem vállalkozunk, ezért a kapott eredmények lehetnek kínálati korlátozottságúak is.

A rendelkezésre álló negyedéves beruházási KSH idősornak adatszolgáltatási köre nem teljes körű.[4] Ráadásul csak összgazdasági beruházási idősorral dolgozhattunk, mivel a privatizáció előrehaladása miatt az állami – nem állami felbontás alapvetően hibás lett volna, az 1992-től kialakított új ágazati besorolás pedig az ágazati idősorok felhasználását teszi lehetetlenné. Így a becslések kényszerűen azon a feltevésen nyugszanak, hogy az egész gazdaságban azonosak a rugalmasságok, vagy pedig az egyes szférák és ágazatok rugalmasságainak (súlyozott) átlaga megegyezik a kapott összgazdasági rugalmassággal. A kényszerű feltételek még inkább gyengítik a numerikus eredmények értelmezhetőségét. Negyedéves GDP publikálás hiányában kénytelenek voltunk különböző közelítéseket alkalmazni, így az eredmények inkább csak a tendenciák jelzésére alkalmasak. Két típusú függvényt illesztettünk: az egyik a hagyományos lineáris, a másik az OECD modellen alapuló nem lineáris regresszió. A szűkebb modellek:[5]

$$\begin{aligned} &rb = -4.088 - 0.119rk + 0.203rGDP \\ &\langle t\rangle \quad \langle -0.232\rangle \;\; \langle -0.402\rangle \;\; \langle 3.138\rangle \\ &\text{adj.}R^2 = 0.740 \quad D-W = 1.811 \qquad \langle OLS\rangle \\ &(\text{A függő változó átlaga és szórása: } FVA = 50.61,\ FVSZ = 6.76) \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} &rb = 0.200rk^{-0{,}029}rGDP \\ &\langle t\rangle \; \langle 19.61\rangle \; \langle -1.166\rangle \\ &\text{adj.}R^2 = 0.737 \quad D-W = 1.124 \qquad \langle NLS\rangle \end{aligned} \tag{16}$$

[4] Az idősorok forrását és az adattranszformációk leírását a *Függelék* tartalmazza.

[5] A lineáris egyenletekben a Chow-féle töréspont teszt szignifikáns volt 1990:2-nél, viszont a Jarque-Bera normalitás teszt, a Remsey-féle RESET-teszt, a White-féle heteroszkedaszticitás teszt, valamint az autokorreláció tesztelésére szolgáló Breusch-Godfrey, Box-Pierce és Ljung-Box próbák a szokásos szignifikanciaszinteken nem voltak szignifikánsak.

$$\begin{aligned}&rb = 0.025 rk^{-0.016} rGDP^{1.366} \\ &\langle t\rangle\ \langle 0.789\rangle\ \langle -0.638\rangle \quad \langle 6.161\rangle \\ &\text{adj.}R^2 = 0.764 \quad D-W = 1.423 \qquad \langle NLS\rangle\ ,\end{aligned} \tag{17}$$

ahol

rb: szezonálisan kiigazított változatlan áras beruházások,
rk: éven belüli lejáratú vállalati hitelek reálkamatlába,
$rGDP$: változatlan áras GDP.

A mintaperiódus negyedéves értékeket tartalmaz 1988:3–1992:4 között. A beruházások vizsgálatára általában célszerűbb hosszabb lejáratú kamatlábat alkalmazni. Azonban Magyarországon 1992 novemberében a kihelyezett hitelek mintegy 82%-a volt éven belüli lejáratú, 10%-ot képviseltek a leszámítolt váltók, és 8%-ot az éven túl lejáró hitelek. Az időszak korábbi részében is a rövid távú hitelek domináltak.

A szűkebb modellek megfelelnek az előzetes intuícióknak: a beruházások egyértelműen együtt mozognak a nemzeti termékkel, a reálkamatláb pedig bár negatív, de függvénytípustól függetlenül inszignifikáns hatással volt. Nem feledkezve el a következtetések korlátozott és a paraméterek inszignifikáns voltáról, a beruházási ráta −0.029 és a beruházások −0.016-os reálkamatláb-rugalmassága alapján, a reálkamatláb 1%-pontos csökkenése a beruházásoknak csak 0.172%, illetve az arány 0.312%-os növekedéséhez vezethetett volna (az igen magas, termelői árindex alapján számított 9.302%-os átlagos hitelezői reálkamatláb mellett a reálkamatláb 1%-os változása 0.093%-pont abszolút változást jelent, így 1%-pont változás 0.029/0.093 = 0.312%, illetve 0.016/0.093 = 0.172%-os változást okozhatna a beruházásokban), azaz a becslések meglehetős érzéketlenséget mutatnak a reálkamatlábra.

Több változót tartalmazó, szignifikáns paraméterekkel rendelkező beruházási függvényt nem sikerült illesztenünk. Példaként hozzuk az alábbi egyenletet, amely előjelhibás koefficienseket tartalmaz:

$$\begin{aligned}&rb = 53.675 - 0.414k + 0.094 rGDP - 0.033 rM2 + 0.147 ta - 1.968 ib \\ &\langle t\rangle\ \ \langle 1.376\rangle\ \langle -1.065\rangle\ \langle 1.302\rangle \qquad \langle -0.872\rangle \qquad \langle 1.154\rangle\ \langle -2.618\rangle \\ &\text{adj.}R^2 = 0.876 \quad D-W = 1.948 \qquad \langle OLS\rangle\ ,\end{aligned} \tag{18}$$

ahol

k: éven belüli lejáratú vállalati hitelkamatláb,
$rM2$: reálpénzállomány,
ta: termelői árindex az előző év azonos negyedévéhez viszonyítva,
ib: inflációs bizonytalanság.

A bizonytalanság változóját – az egyes értékpapírok kockázatának számításához hasonlatos módon – a megelőző négy negyedév inflációjának szórásaként definiáltuk.

A pénzállomány paramétere előjelhibás, de nem szignifikáns. A futtatások során szinte minden specifikációnál ez a két tulajdonsága mutatkozott meg. Ez azt a következtetést sugallja, hogy a likviditás bővülése nem volt jelentős hatással a beruházások alakulására. A termelői árindex szintén előjelhibás. A bizonytalansági változó koefficiense azonban szignifikáns és negatív, ami a változó elfogadhatóságára utal. (Amikor a (15)-ös egyenletben a reálkamat helyett a bizonytalanság változója szerepelt, jobb illeszkedés adódott eredményül. Míg (15)-nél a Wald-teszt nem vetette el a reálkamat változójának zérus nullhipotézisét, az inflációs bizonytalanság változójánál minden egyenletnél a szokásos szignifikanciaszinteken ez elvethető volt.) A legjobb illeszkedést akkor kaptuk, amikor (15)-ben az eltérésváltozók dinamikus specifikációját alkalmaztuk:

$$\begin{array}{llllll} rb_t = 1.847 & - 0.240 rk_t & + 0.188 rGDP_t & - 0.700 u_{t-1} & + 0.724 u_{t-4} & \\ \langle t \rangle \ \langle 0.203 \rangle & \langle -2.643 \rangle & \langle 5.979 \rangle & \langle 36.708 \rangle & \langle 27.209 \rangle & \\ \text{adj.} R^2 = 0.893 & D - W = 2.025 & & \langle OLS \rangle \ , & & \end{array} \tag{19}$$

A reálkamatláb ezen egyenlet szerint szignifikáns negatív hatással volt a beruházások reálértékére, ami a szignifikanciát illetően eltér az eddigi eredménytől. Ezért megvizsgáltuk, hogy kimutatható-e Granger-okság a két változó között.

Megismételve a tanulmány első részében ismertetett fogalom lényegét, egy X és Y változó közötti Granger-okság azt vizsgálja, hogy Y változót saját késleltetett értékei, vagy saját késleltetett értékei és X késleltetett értékei együttesen magyarázzák-e jobban. Ha ez utóbbi áll fenn, akkor X Granger-okozója Y-nak. Ha Granger-okság nem áll fenn, akkor a változó saját késleltetett értékei jobb magyarázatot adnak.

A beruházások és a reálkamatláb között minden késleltetésnél[6] minden szignifikanciaszinten a vizsgálat elfogadta a nullhipotézist, azaz a Granger-okság hiányát mindkét irányban.

A GDP és a beruházások tekintetében a beruházások semmilyen szignifikancia szinten sem Granger-okozói a GDP-nek. A fordított okság azonban három késletetésig 5%-os, négy késleltetésnél 10%-os szinten szignifikáns,[7] öt késleltetésnél azonban már inszignifikáns.

Összefoglalva azt állapíthatjuk meg, hogy a reálberuházásokra elsősorban a reáljövedelem és a bizonytalanság alakulása hatott, míg a vállalati hitelek reálkamatlábának változása csekély jelentőséggel bírt.

Ezt az elvi megfontolásokkal megegyező eredményt célszerű lenne figyelembe venni a gazdaságpolitika tervezésekor. 1993-ban a kamatpolitika lett

[6]Egytől ötig tartó késleltetést használtunk, további késleltetést az általunk használt MicroTSP programcsomag az idősorok hosszára való tekintettel nem tett lehetővé.

[7]Pontosabban a Granger okság hiányát állító nullhipotézist lehet az adott szinten elvetni.

a monetáris irányítás közbeeső célkitűzése, amíg fő céljainak – az infláció mérséklésének és a külső egyensúly megőrzésének – megvalósítása nincs veszélyben, a jegybank nem követ mennyiségi célokat. A kamatszint és a hozamgörbe változása pozitív hatással lehet a beruházásokra is, mindazonáltal a monetáris hatásoknál lényegesebbnek tartjuk a beruházások elősegítésében a fiskális lehetőségek újragondolását.

b) Költségvetési hiány és kamatszint

Ebben az alpontban ökonometriai eljárások segítségével vizsgáljuk meg hazánkra vonatkozóan azt a konvencionális makroökonómiai tételt, mely szerint az államháztartási hiány növekedése emeli a (reál és nominál) kamatszintet.

Az államháztartás egyenlegére két közelítést használtunk, az állami költségvetés hiányát az állam nettó hitelállományának változását. A proxy változókat változatlan áras idősorokként és a GDP-re vetített arányukként is vizsgáltuk. A vizsgált kamatszint pedig a fentiekben használt éven belüli lejáratú vállalkozói hitelkamat nominál és reálértéke.

A legkisebb négyzetek módszerét alkalmazva nem találtunk szignifikáns kapcsolatot a deficit változók és a kamatláb között.

A szimultaneitás lehetősége miatt más becslőeljárásokat is célszerű alkalmazni. A kétlépcsős módszer (2SLS) a relatív értékek tekintetében jelzett, a hagyományos felfogással ellentétes szignifikáns kapcsolatot az említett változók között:

$$
\begin{array}{l}
k = -11.311 - 35.614 def/GDP + 4.84 kiad/GDP + 0.719 dkj + 0.317 fa \\
\langle t \rangle \quad \langle -2.969 \rangle \ \langle -2.735 \rangle \qquad\qquad \langle 8.744 \rangle \qquad\qquad \langle 4.425 \rangle \qquad \langle 2.379 \rangle \\
\text{adj.} R^2 = 0.914 \quad D - W = 2.556 \quad \langle 2SLS \rangle\,, \\
(\text{A függő változó átlaga és szórása: } FVA = 29.33,\ FVSZ = 6.05)
\end{array}
\tag{20}
$$

ahol

def: költségvetési deficit[8] (az egyenleg −1-szerese),
kiad: költségvetési kiadások,
dkj: 90 napos diszkont kincstárjegy hozam,
fa: fogyasztói árindex az előző és azonos negyedévéhez viszonyítva.

A gazdaság méretéhez viszonyított deficit a regresszió alapján ellentétes hatással volt a kamatláb alakulására, míg a költségvetés gazdasági súlya növelőleg hatott. Érdekes módon a becslés eredménye megegyezik számos, az előző részben idézett szerzőknek az USA-ra vonatkozó eredményével. A jelenség verbális magyarázatát és egyszerű grafikus szemléltetését a *d) alpont*ban mutatjuk be.

[8] A hiány adatai nincsenek szezonálisan kiigazítva. A becslést ezért három dummy változó használatával is elvégeztük, melynek eredménye azonos volt a fentivel.

Az iteratív háromlépcsős eljárást *(Iterative Three Stages Least Squares)*[9] egy két egyenletes szimultán rendszerre a következő módon alkalmaztuk. A két változóra felírtunk egy sok regresszort tartalmazó egyenletrendszert, majd lefutattuk az *iteratív 3SLS* eljárást. A legkisebb t-hányadosú koefficiens változóját elhagytuk, és újra becsültük a rendszert az *iteratív 3SLS* módszerrel. Ezt addig folytattuk, míg minden koefficiens t-hányadosának értéke jelentősen az egyes érték fölé nem került. (Ahol egyáltalán elemezhető eredmény adódott, ott az utolsó lépésben mindegyik t-hányados meghaladta a 2-t is.)

Amikor a deficit változatlan áras idősorát szerepeltettük a kamatláb magyarázó változójaként és a másik egyenlet endogén változójaként, a szimultaneitás az alkalmazott eljárással megszűnt. (A deficit egyenletéből kiesett a kamatláb, a kamatláb egyenletéből kiesett a deficit.) Továbbá a rendszer mindkét egyenletének negatív többszörös determinációs együtthatója lett, ami az adott eljárás rendkívül kedvezőtlen eredményére utal.

A GDP-re vetített értékek tekintetében a két egyenletes rendszerben a *2SLS* eljárással kapott egyenlethez hasonló eredmény adódott:

$$\begin{array}{l} k = -22.127 - 89.020 def/GDP + 5.958 kiad/GDP + 1.352 dkj \\ \langle t\rangle \quad \langle -5.600\rangle \; \langle -2.940\rangle \qquad\qquad \langle 7.152\rangle \qquad\qquad \langle 14.275\rangle \\ \text{adj.}R^2 = 0.952 \quad D-W = 2.163 \\ \\ def/GDP = 0.032 + 0.002k - 0.002ib \\ \langle t\rangle \qquad\qquad \langle 0.938\rangle \; \langle 2.184\rangle \langle -2.562\rangle \\ \text{adj.}R^2 = -0.330 \quad D-W = 2.233 \qquad \langle I3SLS\rangle \;, \end{array} \tag{21}$$

A becslések alapján a deficit változatlan áras idősora a mintaperiódusban nem volt hatással a kamatlábra, a jövedelemhez viszonyított aránya pedig csökkentette. Az egyenletekből az következik, hogy a költségvetés kiadásai és gazdasági súlya azonos irányban változtatta a kamatlábakat, továbbá a kincstárjegy hozama stabil magyarázó változó.

Ami a deficit magyarázatát illeti, csak egy biztos pont van: a korrigált többszörös determinációs együttható negativitása miatt még a bizonytalanság sem biztos. Bár a paraméterek szignifikánsak, ami a kamatláb szimultán hatására utalna, a deficit relatív értékét a fenti egyenlettel nem lehet közelíteni. OLS eljárással sem sikerült megfelelő egyenletet illeszteni a hiány alakulásához. Ez arra utal, hogy az állami költségvetés egyenlegét olyan tényezők befolyásolják, amelyeket nem lehet e figyelembe vett idősorok segítségével ökonometriailag modellezni.

[9] Lineáris esetekben az eljárás aszimptotikusan teljes információjú maximum likelihood (FIML) becslés. Lásd: Dhrymes, P. J. [1973]: *Small Sample and Asymptotic Relations between Maximum Likelihood and Three Stage Least Squares Estimators*, Econometria, vol. 41, 357–364.old.

Összegezve: a különböző regressziós becslések alapján a deficit nem magyarázta a kamatláb alakulását a vizsgált mintaperiódusban, sőt a GDP-re vetített arányának emelkedésével egyidejűleg mérséklődött a kamatszint.

A kamatláb és a hiány mérőszámai közötti Granger-okság vizsgálata alapján egy-három késleltetés esetén minden szignifikancia szinten elfogadható az okság hiányának hipotézise, négy késleltetésnél pedig csak 10%-os szinten utasítható vissza a deficit változatlan áras értékétől a kamatláb felé. Fordított irányban az eredmény szinte ugyanez. A GDP-re vetített érték esetén négy negyedéves késésnél 5%-os szinten visszautasítható az okság hiányának feltételezése, a többi késleltetésnél viszont minden szinten elfogadható az aránytól a kamatláb felé. Fordított irányban viszont meglepő eredmény adódott: mind a négy esetben 10%-os szinten a kamatláb Granger-okozója a deficit arányának.

Összegezve: a Granger-okság vizsgálata alapján sem a deficit, sem a deficit GDP-re vetített értéke nem volt okozója a kamatláb alakulásának.

A harmadik típusú vizsgálat, melyet az idősorokkal elvégeztünk, a két változó kointegrációját teszteli. Megismételve a fogalom lényegét, kointegrált változók útja az időben együtt mozog, és nem térhetnek el egymástól egy bizonyos mértéknél jobban.

A számos kifejlesztett tesztelési mód közül a MicroTSP a kiterjesztett Dickey-Fuller *(Augmented Dickey-Fuller, ADF)* eljárást alkalmazza. A kointegrált regressziónál a sztenderd t-eloszlás kritikus értékei nem használhatók, helyettük a MacKinnon táblázat mutatja a szignifikanciát. Eredményeink a következőek: akár a (reál és nominál) kamatszintet és a változatlan áras deficitet, akár az egyik változót és a másik differenciáját, akár mindkét változó differenciáját szerepeltettük, a Dickey-Fuller t-statisztika abszolút értékben alulmúlta a MacKinnon 1%-os szinthez tartozó kritikus értéket is, így az egységgyök létezésének nullhipotézisét nem utasította vissza, azaz a deficit és a kamatláb nem volt kointegrált. Ugyanez az eredmény adódott a GDP-re vetített deficit esetén; továbbá az eredmények függetlenek attól, hogy a kointegráló vektor a konstans mellet tartalmazott-e trend változót, vagy sem. A tesztelés során a kointegráció elutasítása volt a legrobusztusabb eredmény.

Összegezve: a kointegráció tesztelése alapján a deficit és a kamatláb időbeli pályájának alakulása független volt egymástól.

c) A megtakarítások alakulása

Az elemzés további részében félretesszük a módszertani eljárásokat, pusztán a számadatokat vizsgáljuk: vajon volt-e az elmúlt években kiszorítási hatás Magyarországon?

A háztartások bruttó pénzügyi megtakarítása 1992-ben (a tőkésített kamatokkal együtt) 284.1 milliárd forinttal, hiteltartozása (az év végi kamatterheléssel együtt) 9.1 mrd forinttal, így nettó megtakarítása 275 mrd forinttal, 42.7%-kal nőtt. Ha ebből levonjuk a lakossági készpénzállomány és a kis jelentőségű biztosítási díjtartalék-állomány növekedését, akkor a lakosság takarékbetét és értékpapírállománya 206.5 mrd forinttal növekedett.

A (nettó) megtakarítási ráta a pénzforgalmi adatszolgáltatást teljesítő vállalatoktól és szervezetektől kapott 1745 mrd forintos bevétel alapján 15.76%-os. Ezeket a statisztikai értéket azonban több tényezővel is korrigálni kell. Egyrészt a jelentős statisztikai adatszolgálaton kívüli jövedelemmel (adatszolgáltatás alapján is áru- és szolgáltatásvásárlásra, valamint egyéb célokra 1771.6 mrd forintot költött a lakosság), melyet részben az adózás alóli illegális jövedelemkivonás, részben az egyre szaporodó egyéni és társas vállalkozások adatszolgáltatásának minősége okoz. A lakossági megtakarítások bizonyos hányada vállalkozói betét. A fogyasztási adatszolgáltatás területén pedig jelentős az adatszolgáltató kereskedelmi egységeken kívüli forgalom. Így a megtakarítási hajlandóság értékét 10%-ra becsüljük. Nemzetközi mértékkel mérve ez az arány magas, bár nem kiemelkedően: Nyugat-Európában 9-15%, Japánban 14%, az USA-ban 5%. Az állomány 42.7%-os nominális emelkedése az, ami kiemelkedően magas. Ugyanakkor a folyóáras növekedést a magas infláció torzítja, reálértékben számítva a növekedés 16%-os. Az azonban kétségtelen tény, hogy 1992-ben a lakossági megtakarítások nominális összege meghaladta az állami költségvetés hiányát, de a folyó fizetési mérleg többletet mutatott.[10] Ugyanakkor az üzleti szféra (reál) hitelállománya csökkent, ezzel a deficit finanszírozásához szintén hozzájárult, bár nem szándékosan; a pénzintézeti törvény előírásai, a megnövekedett kockázati viszonyok, a bankok óvatos hitelpolitikája és a magas hitelkamatlábak következtében. Az infláció másik torzító tényezője a költségvetés bevételi oldalánál jelentkezik: a forrásadóval sújtott nominális kamatnak csak egy része lenne jövedelemnek tekinthető, ahogyan erre Simon András [1993] felhívja a figyelmet. A nominális kamatláb reálkamatlábon felüli része nem jövedelem, hanem az infláció miatti tőkeveszteség pótlása. Az infláció csökkenésével mind a megtakarítások állományának növekedési üteme, mind az inflációs adó csökkenni fog.

Az infláció figyelembevétele mellett még mindig magas megtakarítási ráta oka a befektetési lehetőségek gyors bővülése, új költségelemek megjelenése (oktatás, egészségügyi ellátás), a létbizonytalanságtól való félelemből adódó

[10] A folyó fizetési mérleg egyenlegei 1989-92-ben: −1437, 127, 267, 324 M USD voltak. 1992-ben az egyenleg az első 9 hónapban pozitív, az utolsó negyedévben negatív volt. Egy szokásos piacgazdaságban az állam és a vállalati szféra nettó hitelfelvevő, melynek forrását a lakossági megtakarítások finanszírozzák. Ha hiány van a fizetési mérlegben, akkor ehhez kapcsolódik még valamennyi külföldi forrás és az eladósodottság nő. A fizetési mérleg többlete pedig azt jelenti, hogy a belföldi megtakarítások részben külföldön hasznosulnak, és csökken a nettó adósságállomány.

biztonsági tartalékolás (pl. munkanélküliség esetére és a későbbi nyugdíj kiegészítésére), céltartalékolás (pl. áruvásárlásra és a vállalkozóvá válás megalapozására), valamint a jövedelmi különbségek növekedése: gyorsan gazdagodó rétegeknél a jövedelemnövekedést általában nem követi arányosan a fogyasztás emelkedése. Hazai közgazdászok egy csoportja elfogadja ezeket az okokat, és a rendszerváltás következtében a fogyasztói magatartás megváltozása mellett érvel. Más szerzők éles kritikával illetik a megváltozott fogyasztói magatartás gondolatát, és más tényezőknek (pl. infláció) tulajdonítják a megtakarítások állományának növekedését, a jövedelemkülönbségek fokozódására pedig a reáleszközökbe történő befektetések nagyobb szerepét hangsúlyozzák. (Egy harmadik körben pedig gazdaságpolitikai sikerként könyvelik el a megtakarítások növekedését.) Véleményünk szerint a jövedelemkülönbségek fokozódása egy átmeneti időszakban indokolja a megtakarítások növekedését, mivel a vagyonosabb rétegekre nem a viszonylag likvid eszközök, hanem a magasabb hozamú kevésbé likvid aktívák (pl. részvények), illetve hazánkban az ingatlan nagyobb arányú tartása a jellemző. Ezt az átmeneti időszakot jelzi a pénzügyi megtakarítások összetétele is: a készpénz és a viszonylag rövid lekötésű betétek aránya közel 80%-os. (Természetesen a rövid lekötések magas arányának számos más, a bankrendszer, a pénz- és a tőkepiac jelenlegi állapotából származó oka is van.) A permanens jövedelem hipotézis és a megtakarítások életciklus hipotézise is alátámasztja az átmeneti időszak jövedelem-különbség növekedés miatti megtakarítás növekedést, ahogyan erre Erdős Tibor [1992] utal. Nézzük meg, Friedman [1957] és Modigliani [1985] ma már klasszikusnak számító tanulmányaikban hogyan érvelnek, és ez milyen módon érvényes hazánkra!

Az előbbi szerint a permanens fogyasztás a permanens jövedelemhez és nem a kimutatott (mért) jövedelemhez igazodik. Gyors gazdagodás esetén a jövedelemnövekmény nem biztos, hogy állandó lesz, ezért a megtakarítás emelkedik.[11] A kérdés ez esetben csupán az, hogy a ennek mekkora hányada válik pénzügyi megtakarítássá. Az elmélet jól magyarázza a munkanélkülivé válástól való félelem miatti megtakarítás emelkedést: a bizonytalanság csökkenti a jövőben várt jövedelmet, ezért már a jelenben sem a mért jövedelemhez igazodik a fogyasztás (feltéve, hogy a jövedelemcsökkenés a jövőben

[11] „...a háztartások jövedelmének időleges összetevői nincsenek hatással a fogyasztásra, hacsak át nem alakulnak a háztartások időhorizontján túlnyúló hatássá. A fogyasztást a jövedelemmel kapcsolatos hosszabb távú meggondolások, valamint a fogyasztást közvetlenül befolyásoló átmeneti tényezők határozzák meg. A jövedelem időleges összetevői elsődlegesen a háztartások tartozásainak és követeléseinek változásában nyilvánulnak meg, azaz a mért megtakarításokban." M. Friedman [1957]: *A fogyasztási függvény.* in: M. Friedman: *Infláció, munkanélküliség, monetarizmus.* KJK, 1986. 200. old. Friedman körülbelül három évre teszi azt az idősávot, amely időn keresztül áramló jövedelem már permanansnek tekinthető.

tartós lesz).[12]

Modigliani elmélete szerint egy adott pillanatban a fogyasztásra fordított összeg kizárólag a fogyasztó életvagyonától függ (*lifetime resources*, ami a munkajövedelem jelenértéke és az örökség összege), nem pedig az aktuális jövedelemtől. Ha a fogyasztó viszonylag stabil növekedési ütemű fogyasztási pályát választ, akkor a "...rövid idő alatt – például egy év – történő megtakarítás amiatt ingadozik, hogy a folyó jövedelem eltér az átlagos életvagyontól".[13] Így a hirtelen jövedelem-emelkedés növelni fogja a megtakarítási hányadot, mert az életvagyon még nem biztos, hogy növekszik a jövedelememelkedés következtében; később természetesen igazodik a fogyasztás. A munkanélküliségtől való félelem egy megváltozott gazdasági feltételrendszer keretei között csökkenti az életvagyont, s így a fogyasztást is. Mindkét csoportnál növekszik a megtakarítás; a gazdagok esetén itt is a kérdés csupán az, hogy ennek mekkora hányada válik pénzügyi megtakarítássá. Továbbá amennyiben figyelembe vesszük az állami nyugdíjak reálértékének erőteljes csökkenését, akkor még inkább növekedni kell a megtakarításoknak, amíg ki nem alakul egy olyan egyensúly, amelyben a most fokozottan megtakarítók nyugdíjasok lesznek, és elkezdik felélni korábbi megtakarításaikat.

Nem szabad megfeledkezni arról, hogy a megtakarítások továbbra is negatív reálhozamot biztosítanak. Az infláció és a kamatlábak csökkenésével, akár változatlan negatív reálhozamot, akár arányosan csökkenő negatív reálhozamot feltételezve, pusztán a nominál kamatok csökkenése a megtakarítási trend csökkenéséhez vezethet. Ezt a jelenséget nevezhetjük például a *kamatillúzió* megszűnésének.

d) Állampapírhozamok és vállalkozói hitelkamatlábak

A deficit és a kamatszint kapcsolatánál nézzük meg az államháztartási hiány, az állampapírok és a vállalkozói hitelkamatlábak alakulását 1989-92-ben!

1989-ben az államháztartás 32.6 mrd Ft-os hiánnyal, az állami költségvetés 54 mrd Ft-os hiánnyal zárt, amely összeg a GDP-re vetítve 3.2%-ot jelent. A vállalati hitelkamatok előbb kismértékben, majd erőteljesebben emelkedni kezdtek.

1990-ben az állami költségvetés egyensúlyban volt, hiánya csak 1.4 mrd forintot tett ki, amely összeg a GDP-re vetítve 0.0%, a konszolidált államház-

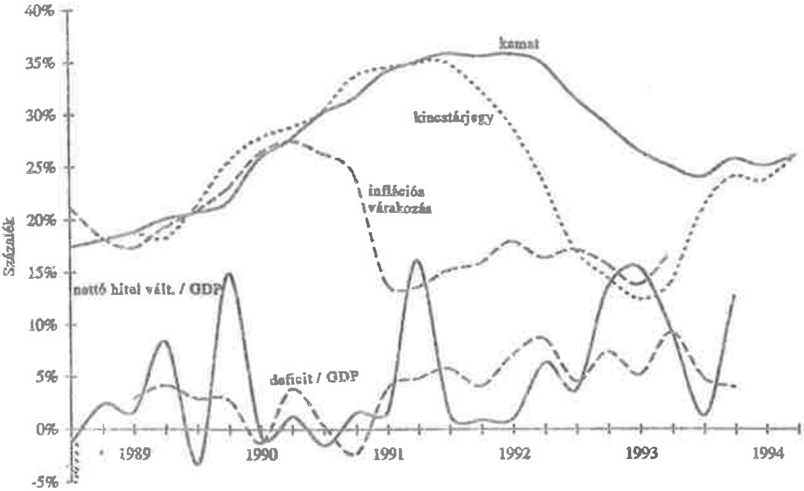
[12] Ugyanakkor Friedman határozottan kijelenti, hogy a permanens fogyasztás és a permanens jövedelem hányadosa független a permanens jövedelem nagyságától, és a kamatlábtól, a nem humán vagyon és a jövedelem arányától, továbbá azon változóktól függ, amelyek a háztartások folyó fogyasztási és tőkefelhalmozási hajlandóságát meghatározzák. M.F.: i.m. 200–201. old.

[13] Modigliani, F. [1985]: *Életciklus, takarékosság, nemzeti vagyon.* in: F. Modigliani [1988]: *Pénz, megtakarítás, stabilizáció.* Válogatott tanulmányok . KJK. 23–24. old.

tartás pedig 16.7 milliárdos többlettel zárt. Mint az *1. ábráról* jól kivehető, a kamatlábak 1989 közepén megindult erőteljes emelkedése folytatódott.

1991-ben az állami költségvetés hiánya 114.4 mrd forint volt, amely a GDP-re vetítve 5.0%, és az év közepétől elkezdődött az állampapírhozamok csökkenése a diszkont kincstárjegyek tekintetében, és egyre jobban alulmúlta a vállalati hitelkamatokat. A megkezdődött és 1992-ben folytatódott államkötvény-kibocsátás hozamai szintén jelentősen alacsonyabbak a vállalati hitelkamatoknál.

1992-ben az állami költségvetés hiánya 197.1 mrd forint volt, az eredeti előirányzat 2.8-szerese, a GDP 7%-a. Ennek ellenére az egyre kisebb hozamú és egyre nagyobb tömegű állampapírokat a piac felvette. Ebben az évben az igen magas vállalati hitelkamatlábak csökkeni kezdtek, bár csak mérsékelten, a betéti kamatlábak viszont igen erőteljesen. Mind a lakossági, mind a vállalati betétek továbbra is negatív reálhozamot biztosítanak. A vállalati hitelkamatlábak, lejárattól függetlenül magasan felülmúlják az állampapír hozamokat.



1. ábra

Az 1. ábra a 90 napos diszkont kincstárjegy, az éven belüli lejáratú vállalati hitelkamatláb, a költségvetési hiány és az állami nettó hitelállomány változásának GDP-re vetített értékeit mutatja.

A deficit eltűnésével párhozamosan emelkedett a kamatláb, míg a hiány megugrásakor a kamatláb stagnált, majd csökkent. Ez megmagyarázza a regressziós becslések negatív deficit paraméterét. Továbbá arra hívja fel a figyelmet, hogy más tényezők játszották a döntő szerepet a hitelkamatok alakulásában. Az viszont igaz lehet a magyar gazdaságra, hogy a deficit növekedése nem abszolút szintjében növelte a kamatlábat, hanem annak csökkenési gyorsaságát lassította. Ezt a hatást el lehet nevezni például *burkolt kiszorításnak*, amelyre a következő alpontban visszatérünk.

Következtetés: az államháztartási hiány kiszorító hatása a klasszikus értelemben, a kamatlábak emelésén keresztül nem valósult meg az 1989–92-es időszakban.

Paradox helyzet alakult ki. Miközben egyre növekedett a deficit, egyre lejjebb szálltak az állampapírhozamok, melyet magasan meghaladtnak a vállalati hitelkamatok, a vállalatoknak reálértékben kevesebb hitel nyújtottak 1992-ben, mint 1991-ben, továbbá a bankok által lejegyzett[14] értékpapírok hozama sokszor még a banki forrásköltséget sem érte el.

e) Kiszorítási hatás

A fentebb nevezett burkolt kiszorítást azért sem lehet kiszorítási hatásnak tartani, mert ez egy igen sajátos helyzetben következett be. Ugyanis nem csupán arról volt szó, hogy az állampapírok kisebb reálhozamot biztosítottak a bankoknak, hanem a kamatok csökkenésének időszakában már negatív reálhozamot volt csak elérhető a kincstárjegyeknél, továbbá az a forrásköltséget sem érte el. Ha a bankok találtak volna pozitív reálhozammal kecsegtető, fizetőképes beruházási hitelkeresletet, akkor nem a negatív hozamú állampapírokba fektették volna pénzüket. Így ez a negatív reálhozam a gazdasági rendszerváltás egyik eltorzulásának tekinthető.

Szűkebb értelemben vett kiszorítási hatás tehát nem volt Magyarországon. Amennyiben a fogalmat tágabb értelemben, a deficit következtében fellépő negatív gazdasági következményekként értelmezzük, akkor ennek számos elemét fellelhetjük gazdaságunkban. Két tényezőt már említettünk.

Az egyik a banki forrásköltség alatti értékpapírjegyzés. A banki brókercégek nem sok önálló funkcióval rendelkeznek, üzletpolitikájuk nagy részben alárendelődik az anyabank pillanatnyi helyzetének. Az egyre növekvő lakossági megtakarítás-állományból származó források kihelyezésére nagyszerűen alkalmas az állampapír: (i) egyrészt biztonságos, (ii) másodszor a vállalati szektor kockázatossága fokozódott, a hitelkérelmek alacsony színvonalúak, a hitelképesség kivételes jelenség. (iii) Harmadszor az állampapír azért is megfelelő, mert a Pénzintézeti törvény kockázattal súlyozott eszközérték 8%-os követelményének teljesítésére kiválóan alkalmas. (iv) A negyedik tényező a likviditási kincstárjegyek tartalékba való beszámíthatósága volt (likviditási

[14]Itt természetesen elsősorban a banki értékpapír-leányvállalatokra utalunk.

kincstárjegyek tanulmányunk írásakor már nincsenek). Az utóbb említett két tényező a magyarországi *crowding out* speciális elemei.

A másik, fentebb már említett tényező a negatív betéti reálkamat. Egyszerűen nem tudnak a bankok nagyobb betéti (reál) kamatot fizetni, részben a viszonylag alacsony hozamú állampapírok miatt. Azonban a betéti kamatokra (a bankok jövedelmezőségére) számos egyéb tényező is hat. A kötelező tartalékráta bár 1993. január 1-től 16%-ról 14%-ra csökkent, értéke nemzetközi összehasonlításban még mindig nagyon magas. Ez rontja a bankok jövedelmezőségét, így fokozza a kamatrést (2–3%-pont). Jelentősen növeli a kamatrést az MNB-nek, mint a bankrendszer klíringközpontjának átutalási jutaléka, továbbá a betétbiztosítási díj, a bankfelügyeleti díj és az iparűzési adó. 1992 második félévének átlagos kamatrése 12.58%-os volt az éven belüli vállalati hitelek tekintetében. A kamatrés magas szintjére a céltartalékképzési kötelezettség fokozódása is jelentős hatást gyakorolt. A tartalékráta csökkentés természetesen kedvező hatású, azonban egyidejűleg a kamata 3%-ról 2%-ra ereszkedett. 1991 elején a forintforrások utáni tartalék kamata még 15% volt. A kialakult magas hitelkamatok pedig visszahatnak a céltartalékképzés fokozódásán keresztül: ugyanis kevés vállalkozó tud akár nominál, akár reálértékben ekkora megtérülést megalapozottan tervezni, ami miatt a kétes kintlévőségek állománya növekedhet, amely viszont így céltartalékképzés következtében a banki kamatrés fennmaradásához vagy növekedéséhez vezet. Azt sem szabad figyelmen kívül hagyni, hogy kamatfizetésre vagy törlesztésre képtelen, de a jövőben esetleg fizetőképes vállalatoknak a bankok továbbra is folyósítanak hitelt.

A deficit finanszírozási módjának következő negatív hatása, hogy az államkötvény értékesítése a torz piaci szerkezet fennmaradásához vezet. Az állampapír-forgalmazás ugyanazon bankok kezében van, amelyek a hitelpiacok 70 – 80%-a felett is rendelkeznek. Ez monopolizálja a tőkepiacot a PM, mint legnagyobb kibocsátó és a bankok, mint (a megtakarításokat gyűjtő és) befektető intézmények egyezkedésével. Tovább rontja a helyzetet a bankok állami tulajdoni hányada – állami tulajdonban lévő bankok finanszírozzák az államháztartási hiányt. Ez a helyzet a várakozások nem piaci alakulását segíti.

A likviditás kérdésével kapcsolatban tény, hogy a pénzállomány növekedése másfélszerese volt a GDP folyóáras növekedésének. A jegybank monetáris politikáját azonban nehéz értékelni a restrikció szempontjából. A likviditásbővülés oka nagy részben a folyó fizetési mérleg aktívuma és a közvetlen külföldi tőkebefektetések, melyek kívül esnek a monetáris szabályozás kompetenciáján. A likviditásbőség ellensúlyozásának eszközei nagy mértékben nehezítenék a kamatszint mérséklődését, ami pedig 1993-ban a jegybank közbeeső célkitűzése. Tehát viszonylagos likviditásbőség alakult ki, amelyre a reálszféra nem tudott hitelképes keresletet támasztani. Ez a szűk értelemben vett kiszorítási hatás ellen szól. Ha figyelembe vesszük a jegybank kamatszintre vonatkozó közbeeső célkitűzését, mely alapján mennyiségi célokat nem követ a monetáris irányítás 1993-ban, akkor a jegybank alkalmazkodó monetáris politikát folytat.[15] Az alkalmazkodó monetáris politika viszont kiegyenlíti a deficit kamatszint emelő hatását, legalább is elméletileg. Tehát ebből a szempontból akkor képzelhető el kiszorítás, ha a deficit permanensen növekszik, vagy ha a várakozások módosításával a bankok és a vállalatok a jelenben megvalósítják a későbbiekben kialakulható hatást. A várakozások pedig, a sajtó és a népszerűségre törekedő politikusok hozzájárulásával a kiszorítás létét hangsúlyozva, feltehetően nehezítik a kamatlábak csökkenését.

Összegzés, következtetések

A kiszorítási hatás fogalma sokrétű, empirikus tesztelése ellentmondó. Az elemzési kísérletek és az elméleti lehetőségek összekapcsolása azt jelzi, hogy a konkrét gazdasági körülményektől függ, hogy az adósságfinanszírozás kiszorítja-e, és ha igen, milyen mértékben a magángazdasági tevékenységet. Ezért a sematikus leegyszerűsítéssel szemben a megfelelő kérdés nem a kiszorítási hatás létezése vagy nem léte, hanem a gazdasági feltételrendszer vizsgálata.

A magyarországi helyzet esetén a feltételrendszert alapvetően meghatározza a gazdasági rendszerváltás, a konszolidált piacgazdaságokban működő törvényszerűségek csak korlátozottan érvényesülnek. A konvencionális értelemben vett kiszorítási hatás nálunk nem volt eddig megfigyelhető, azonban az államháztartási hiány fokozódása számos negatív hatást gyakorolt a gazdaságra. A vállalati kamatszint emelkedéséhez és magas szinten maradásának magyarázatához a deficit csak kis mértékben járulhatott hozzá. Továbbá nem a kamatszint volt a döntő tényező a vállalati beruházások alakulásában, hanem a gazdaság visszaesése, a keleti piacok összeomlása, a gazdasági bizonytalanság fokozódása.

Utószó

Tanulmányunk elkészülésének időpontja 1993 április, elemzésünk az 1989–92-es időszakra vonatkozott. 1992 nyarától-őszétől azonban igen jelentős kül- és belgazdasági változásokat következtek be témánkkal összefüggésben, melyeket röviden áttekintünk.[16]

1992 nyarán megtört az export növekedése, a kereskedelmi mérleg és a folyó fizetési mérleg passzívumba váltott. A visszaesés fő oka az volt, hogy

[15] Alkalmazkodó monetáris politikán általában a reálpénzkínálat növelésén keresztül történő reálkamatszint stabilizálást értik.

[16] Az Utószó 1993. decemberében készült.

a dinamikus konvertibilis exportnövekedés nem szerves fejlődés eredménye, nem gazdaságossági megfontolások húzódtak meg mögötte. Alapvetően azért növekedett az export, mert a korábbi piacok leépültek, és ez kérlelhetetlen exportkényszert hozott létre. Egyrészt a keleti értékesítési lehetőségek drasztikusan estek, másrészt belföldi kereslet a GDP visszaesésénél (ami az időszak alatt 25%-os volt) nagyobb mértékben szűkült. Ehhez még hozzájárult az is, hogy az importliberalizáció révén a szűkülő belföldi piacon külföldről beáramló termékekkel kellett a hazai termelőknek osztoznia, tehát a belföldi kereslet csökkenésénél még jobban visszaesetek a belföldi értékesítési lehetőségek. Márpedig ha döntően ez volt az exportnövekedés oka, és számos esetben a vállalatok veszteségből, vagyonuk feléléséből exportáltak, akkor ez előbb-utóbb kifullad.

Az árfolyampolitika kifejezetten hátrányosan érintette az exportálókat és segítette az importot: Csehszlovákiával és Lengyelországgal ellentétben hazánkban nem történt nagymértékű leértékelés a rendszerváltáskor, hanem a forint évről-évre jelentős mértékben felértékelődött. Ezt jelzik a különböző reálárfolyamindexek, valamint a *tradable – non tradable* szektorok árindexeinek folyamatos eltérése a *non tradable* szektor javára (például tartós fogyasztási cikkek – szolgáltatások).

A hitelpolitika sem kedvezett a kivitelnek. A folyamatos export fennmaradásának egyik feltételévé az vált, hogy a vállalat külföldi finanszírozót találjon. Az igen szigorú csődtörvény, amely a piacgazdasági normák kiépítése szempontjából mindenképpen jelentős lépés volt, nagymértékben hozzájárult az export visszaeséséhez. A folyamatban lévő csődök és felszámolási eljárások egyes számítások szerint az ipari export negyedét, az élelmiszerexport felét érintik. Az említett eljárások pedig legtöbbször az export kiesését eredményezik. Az export visszaesés további oka a kedvezőtlen időjárás, az árualapok hiánya, a fontosabb külkereskedelmi partnerországoknál tapasztalható recesszió, a volt szocialista országok fizetési nehézségei.

1993-ban a folyó fizetési mérleg hiánya várhatóan 3 milliárd dollár körül fog alakulni, amely döntő mértékben az export visszaesésének köszönhető. Ez a kedvezőtlen körülmény rendkívüli mértékben korlátozza a gazdaságpolitika mozgásterét.

Ugyanis mint említettük, a monetáris politika fő céljává a kamatszint leszorítása lett a beruházások, a gazdasági növekedés elősegítése érdekében. Ugyanakkor a kamatszint csökkenése a megtakarítások mérséklődéséhez vezethet és vezetett is.[17] Azonban egy olyan külső helyzetben, amely 1993-

[17]Ezt neveztük a *kamatillúzió* megszűnésének. A TDK dolgozatunk egyik bírálója azt a kifogást hozta fel, hogy csak akkor lenne szabad erről a jelenségről beszélnünk, ha a hatást ki is tudjuk mutatni. Úgy gondoltuk, hogy a rendszerváltással bekövetkező magatartásbeli változások az idő múltával mérséklődnek (bár jó ideig teljesen nem tűnnek el), és egyre jobban előtérbe fog kerülni az elérhető hozam szempontja. Valószínűleg ez is következett

ban bekövetkezett, a belföldi megtakarításoknak mindenképpen növekedniük kell. A folyó fizetési mérleg tartós hiányát és a nettó eladósodás növekedését meg kell akadályozni, különösen ha ezt nem a gazdaság dinamikus bővülése kiséri, amely a későbbiekben a visszafizetés alapjait teremti meg. A belföldi hiteligényt minél nagyobb mértékben a belföldi megtakarításoknak kell fedezniük. (Ugyanakkor jelenleg még nem lehet cél a működő tőke beáramlással korrigált folyó mérleg többlet elérése, mivel ez azt jelentené, hogy a belföldi megtakarítások egy része külföldön hasznosul. Azonban a hiány mértékét mindenképpen korlátozni kell.)

Tehát egyfelől a megtakarítások a jelentősen mérséklődött betéti kamatlábak miatt mérséklődtek, a másik oldalról pedig a költségvetés hiteligénye változatlanul rendkívül magas, és a drasztikusan megváltozott külső helyzet a megtakarítások növekedését igényli. Továbbá az MNB szakértői szerint a fizetési mérleg rendkívül kamatérzékeny, ami szintén kamatemelés irányába hat. Mindezek következtében az 1992-es likviditás bőséggel szemben likviditás hiány alakult ki a belföldi pénz és tőkepiacon. Így ebben a helyzetben a költségvetés deficit magas szintje is a kamatszint emelkedéséhez fog vezetni. (Bár reálértékben vagy a GDP-hez viszonyított arányában az előző évhez képest nem növekszik a deficit.)

A kedvezőtlen folyamatok között található egy másik tényező is, amely kiszorításhoz vezethet. Az infláció csökkenésének folyamata 1992 nyarán megállt, azóta a fogyasztói árindex 22–23% körül ingadozik. Ennek oka részben az államháztartás magas hiánya, az emiatt szükségessé vált és váló lépések megtétele (természetesen nem ez az egyetlen ok, például a rossz termés miatt emelkedő élelmiszeráraknak is jelentős hatása volt). A fogyasztói árak több mint egy éve változatlan szinten állnak, amely nem teszi lehetővé a betéti kamatok csökkenését. Tehát a deficit miatt szinten maradó fogyasztói árindex a kedvezőtlen külső körülmények közepette szintén a klasszikus értelemben vett kiszorításhoz vezethet, ha a beruházások érzékennyé válnak a kamatszintre.

Függelék: Az adatbázis felépítése

Az adatok forrása a MNB havi kiadványai, az MNB statisztikai rendszere, a KSH havi kiadványai, az IFS havi kiadványok, valamint a deficit tekintetében a Heti Világgazdaság. A mintaperiódus 1987:1-1992:4-ig tartalmaz negyedéves értékeket, a vállalati piaci kamatlábak azonban 1988:3-tól, a 90 napos diszkont kincstárjegy hozamai 1988:4-től állnak rendelkezésre, ami 17-18 megfigyelésre rövidíti az idősorokat.

be, a betéti kamatok hirtelen és túlzott leesése után bizonyos késéssel jelentősen csökkent a megtakarítások növekedési üteme.

A HVG-ban 1991-től megtalálhatóak az állami költségvetés havi előzetes mérlegei az aktuális hónapra és a megelőző év azonos hónapjára vonatkozóan, így az 1990-92-es időszakra 12 negyedéves megfigyelés áll rendelkezésünkre. Tekintve, hogy 1990-ben minimális volt a deficit, s évközi eloszlása nagyon változékony volt, ezért az 1991–92-es szezonalitás átlaga alapján bontottuk fel 1989-re az éves értéket, így lett 16 elemű a hiány egyik idősora. A hiány másik mérőszáma, a költségvetés nettó hitelállományának változása, az IFS és MNB alapján pontos értéket tartalmaz. Az államháztartási hiány e két proxy változóját a fogyasztói árindex segítségével számítottuk át változatlan áras idősorokká.

Kamatláb változóként az éven belüli lejárató vállalati hitelek kamatát használtuk. Ennek negyedéves értékét az MNB által publikált havi súlyozott átlagok súlyozásával számítottuk, súlyként a havi forgalmakat használva. A vállalati reálkamatlábat a termelői árindex, illetve az inflációs várakozási idősor segítségével számítottuk az

$$(1 + rk) = (1 + k)/(1 + ta)$$

képlet alapján.

Az ultra-racionális termelői inflációs várakozások számításához először az ipari hozzáadott érték deflátor és a publikált termelői árindex éves eltéréseivel korrigáltuk a negyedéves ipari árnövekedéseket. Az így kapott korrigált ipari árnövekedést súlyoztuk össze az építőipar és a mezőgazdaság árindexeivel, súlyként minden egyes évben ezen ágak hozzáadott érték termelését használva. Ezen termelői árindex alapján képeztünk (előrenéző) inflációs várakozásokat.

Az adott negyedévre vonatkozó inflációs bizonytalanság változóját a megelőző négy negyedév éves szintre vetített inflációjának szórásaként definiáltuk.

A 90 napos diszkont kincstárjegy negyedéves hozamát a havi aukciók átlagainak az éves szintre vetített kötvény-egyenértékes hozamai számtani átlagaként számítottuk.

A GDP esetén három közelítést alkalmaztunk. Az első változatlan áras GDP közelítés az ipar változatlan áras ékeinek adott évi negyedéves szezonalítása alapján az adott évi változatlan áras GDP négy részre történő felosztása. Két éven belüli egyenletes változást feltételező közelítést is alkalmaztunk:

1. additív egyenletes felbontás:

$$\sum_{i=1}^{4} rGDP_{t,i} = rGDP_t \ ,$$

$$rGDP_{t,1} = \alpha_t + rGDP_{t-1,4} \qquad \text{és} \qquad rGDP_{t,i} = \alpha_t + rGDP_{t,i-1} \ \ (i = 2, 3, 4)$$

2. multiplikatív egyenletes felbontás:

$$\frac{rGDP_{t,1}}{rGDP_{t-1,4}} = \zeta_t \quad \text{és} \quad \frac{rGDP_{t,i}}{rGDP_{t,i-1}} = \zeta_t \quad (i = 2,3,4)\,,$$

ahol t az év, i a hónap indexe. 1985-ben a reál GDP lényegében változatlan maradt (99.74%), így a közelítésekhez ennek negyedrésze adta az $rGDP_{1985,4}$ kezdőértéket. A multiplikatív esetben minden évre megoldva egy negyedfokú egyenletet, annak nemnegatív valós gyöke adta ζ_t-t.

A beruházási adatszolgáltatók köre: a 20 főnél többet foglalkoztató jogi személyiségű gazdasági szervezetek; valamennyi költségvetési, társadalombiztosítási és egyéb szervezet és a kettős könyvvitelt vezető jogi személyiség nélküli gazdasági szervezetek. Negyedéves beruházási árindexeket az éves árindexek ,,kisimított felosztásával" számítottuk, s ezen árindex segítségével számítottuk a negyedéves beruházások változatlan áras idősorát. Az idősor szezonális kiigazítását a MicroTSP program segítségével végeztük el.

Irodalom

1. BODA György - ZENTAI Kornélia [1991]: Az infláció számszerűsíthető összefüggéseiről. Közgazdasági Szemle, 1991. április, 383–405.old.
2. ERDŐS Tibor [1992]: Ki lehet-e jutni a válságból? Külgazdaság 7. sz.
3. IMF: International Financial Statistics. Havi kiadványok.
4. JAKSITY György [1992]: Kiszorítási hatás. Bankszemle, 1992. március, 22–34. old.
5. JAKSITY György [1993]: Egy nem hatékony piac alkímiája. Lupis Brókerház, 1993. január.
6. KOVÁCS Erzsébet [1988]: Idősorok kointegrációja. MKKE, NTI, műhelytanulmányok, 1988/4.
7. Központi Statisztikai Hivatal: Statisztikai havi jelentések, különböző számok.
8. Magyar Nemzeti Bank Éves jelentés 1991, 1990.
9. Magyar Nemzeti Bank [1992]: Havi jelentés, különböző számok.
10. Magyar Nemzeti Bank [1993]: Forgalomban lévő állampapírok. 1993. február.
11. MODIGLIANI, Franco [1989]: Pénz, megtakarítás, stabilizáció. Válogatott tanulmányok. KJK
12. PETSCHNIG Mária Zita [1990]: Forintgalopp. A kétszámjegyű infláció okai. Közgazdasági Szemle, 1990. július, 834–847. old.
13. SIMON András [1993]: A megtakarítási csoda. Figyelő, 1993/25. sz. 16–17. old.
14. SZALKAI István [1990]: A monetáris irányítás. KJK.

15. SZEPESI György [1992]: A kereskedelmi bankok helyzete az átalakuló gazdaságban. Bankvilág, 1992/5. sz. 9–13. old.

16. VIGVÁRI András [1992]: Állami költségvetés és a kereskedelmi bankok. Bankvilág, 1992/5. sz. 5–8. old.

ECONOMETRIC METHODS FOR MODELLING CROWDING OUT EFFECT II. HUNGARY 1989-92

The second part of this study applies some methods surveyed in the first part to the case of Hungary from the third quarter of 1988 to the end of 1992. The discussion is divided into two main parts: the relationship between interest rates and investment, and the relationship between state budget deficits and (real and nominal) interest rates. The first issue, which is tested with regression analysis and Granger causality tests, concludes that 1) interest rates played a little and insignificant role in the explanation of investment, 2) the decline of the Hungarian economy was the most important factor of the decline of investment with an elasticity more than one, and 3) uncertainty also played a significant role in the explanation of investment (uncertainty is defined for the econometric tests as the standard deviation of the past four quarters' inflation rates). The second issue – relationship between state budget deficits (measured as the central government deficit and the net increase of state debt) and interest rates –, which is tested with regression analysis, Granger causality tests and cointegration analysis, concludes that neither the deficit nor the deficit relative to GDP played a role in the determination of corporate interest rates. We have laid special emphasis on the problem that the usual Hungarian method to measure real interest rates is highly inqorrect. There are three main reasons: they are calculated on the basis of the industrial price index, which is 1) backward looking (not an expectation), 2) a grossly weighted average of price indices of different vertical levels, and 3) represents less than one third of GDP. We used the framework of ultra-rational expectation to eliminate the first problem, so we create a forward looking expectational producer price index (weighted average of the price indices of construction and argiculture and the value added deflator of industry) to illustrate the approximate movement of corporate real interest rates. An epilogue was added to the study to give an overview of 1993.

EGYSÉGGYÖKÖK ÉS TESZTJEIK[1]

HUNYADI LÁSZLÓ
Budapesti Közgazdaságtudományi Egyetem

A cikkben áttekintjük azokat az alapfogalmakat, amelyek a sztochasztikus idősorelemzéshez, és az azt felhasználó ökonometriai vizsgálatokhoz szükségesek, majd pontosan megfogalmazzuk az egységgyök problémát, annak szerepét a modellépítésben. Ezt követően a legegyszerűbb esetre viszonylag részletesen bemutatjuk a tesztelés fontosabb irányait, míg a többi, fokozatosan bonyolultabb modellek esetére már csak az eredményeket adjuk közre, azokat is vázlatosan. A cikket a nyitva maradó problémák összegzése és a felhasznált irodalomjegyzék zárja.

Bevezetés

Az egységgyökök problémája az ökonometria egyik divatos témája, amely a 80-as évek második felében az ökonometriai kutatások homlokterében állt. Mostanra kissé leapadt a hullám, de olyan mennyiségű kutatási eredmény született és tisztult le, hogy érdemes és célszerű azokat áttekinteni, rendszerezni. Ez a fő célja ennek a cikknek.[2]

Az egységyök (unit root) elnevezés legegyszerűbb esetben azt jelenti, hogy egy *elsőrendű autoregresszív folyamatban* (amely a sztochasztikus idősorelemzés és egyben a korszerű ökonometria egyik kitüntetett fontosságú építőköve), a késleltetett változó együtthatója abszolút értékben 1. Magasabb rendű autoregresszív folyamatok esetén az ezzel analóg fogalom azt jelenti, hogy a karakterisztikus polinom gyökei egységnyiek – innen az elnevezés. Mint azt a továbbiakban részletesen is kimutatjuk, az egységgyök(ök) milyensége döntő módon befolyásolja az idősor tulajdonságait. Ugyanakkor, mivel a megfelelő idősormodell paramétereit csak minta alapján, becsléssel tudjuk meghatározni, a megfelelő együtthatók, illetve gyökök is tartalmaznak mintavételi, illetve véletlen hibát. Ezért teszteket kell alkalmaznunk annak megállapítására, hogy a kérdéses együttható (gyök) valóban tekinthető-e egységnyinek,

[1] A cikk a *Gazdasági folyamatok előrejelzésének elméleti kérdései* c. 293. sz. OTKA kutatás keretében 1992-ben elkészült *Idősorok feltáró elemzése* c. tanulmány átdolgozott, rövidített, illetve néhány újabb eredménnyel kibővített változata.

[2] A szerző ezúton mond köszönetet Mátyás Lászlónak, aki az első változat átolvasása után igen hasznos tanácsokat és szempontokat adott a cikk átdolgozásához.

avagy attól szignifikáns mértékben különbözik-e. Az egységgyökök és tesztjeik áttekintésével a nemzetközi szakirodalomban több cikk és tanulmány (pl. [1,4]) is foglalkozik, amelyeket e cikkben forrásmunkaként használtunk fel.

1. Alapfogalmak

A bevezetőben már említettük, hogy a jelenlegi cikk a gazdasági idősorok egy speciális problémájának vizsgálatával foglalkozik. Már itt le kell szögeznünk, hogy csak egydimenziós idősorok elemzését tűztük ki célul. A többdimenziós idősorok (idősorrendszerek) ilyen szemléletű elemzése nem kevésbbé érdekes és fontos feladat, de meghaladja e cikk kereteit.

A további tárgyalás előkészítéseként tisztáznunk kell néhány fogalmat, amelyeknek a későbbiekben nagy szerepük lesz. Az elemzések egyik központi fogalma az *adatgeneráló folyamat* (Data Generating Process=DGP), amin azt az ismeretlen, de feltételezésünk szerint *létező és időben stabil törvényszerűséget* értjük, ami a vizsgált (megfigyelt) idősort létrehozza, ennélfogva az egész folyamatra jellemző. A DGP változóját a továbbiakban Y_t-vel, paramétereit általában görög betűkkel jelöljük. A DGP generálja a *megfigyeléseket*, amelyek a kutató rendelkezésére állnak, és amelyek alapján megkísérli azonosítani a DGP-t. Ennek az azonosításnak az eszköze a *modell*, azaz a kutató által feltételezett DGP, amelynek változóját y_t-vel, paramétereit pedig szintén görög betűkkel jelöljük. A feladat tehát az, hogy olyan modellt találjunk, amely – mint feltételezett DGP – összhangban áll a megfigyelésekkel. Ha ilyent találunk, akkor feltételezhetjük, hogy ez *lehet* az igazi DGP.

Már ez a bevezetés is sejtteti a vizsgálat nehézségeit, amelyek közül most csupán hármat emelünk ki. Egyrészt igen erős feltételezés az időben stabil DGP létének feltételezése, hiszen elegendő bármely makromutatóra gondolnunk ahhoz, hogy (főként átalakuló gazdaság esetén) ez a feltétel megkérdőjelezhető legyen. Másrészt a gazdasági jelenségek egymással szorosan összefüggő halmaza eleve kérdésessé teszi az egyváltozós elemzések létjogosultságát. Végül, és talán döntő módon nehézséget okoz az, hogy a közgazdaságtudomány (mint sok más társadalomtudomány, de esetenként egyes természettudományok is) *nem kísérleti* jellegű tudomány, ennek folytán a jelenségek időbeli alakulásának törvényszerűségeit nem tudja kontrollált kísérletek segítségével felderíteni, hanem csak a jelenségek egyszeri lefutásából képes következtetéseket levonni. Másszóval az Y_t valószínűségi változók tulajdonságainak és kapcsolatainak feltárására minden t időszakban (időpontban) csak egyetlen y_t megfigyeléssel rendelkezünk. Ahhoz, hogy ezeket a megfigyeléseket statisztikai elemzési célra fel tudjuk használni, szükség van a *stacionaritás* fogalmának bevezetésére.[3] A stacionaritás a fő jellemzők időbeli stabilitását jelenti.

Nagyon fontos megkülönböztetni a DGP és a modell stacionaritását! A DGP szempontjából a stacionaritás a folyamat jellegét lényegesen befolyásoló tulajdonság ugyan, de nem döntő fontosságú abból a szempontból, hogy elemezhető-e a megfelelő DGP. Más a helyzet a modell esetében. Mivel a modell alapvető célja az, hogy azt becslési vagy hipotézisvizsgálati célra felhasználjuk, itt döntő mozzanat az, hogy a modell stacionárius legyen, hiszen csak ez esetben becsülhetők jellemzői az adott megfigyelésekből, csak ekkor tekinthető a megfigyeléssorozat statisztikai mintának. Az idősorelemzés talán legnagyobb problémája az, hogy a gazdasági változók DGP-je általában *nem stacionárius*, azok a módszerek viszont, amelyekkel ezeket modellezni, elemezni tudjuk, csak *stacionárius* sorok esetén alkalmazhatók.

Ennek az ellentmondásnak a feloldása alapvetően két módon történhet:

a) az elemzés során olyan változókat szerepeltetünk magyarázó pozicióban, amelyek megmagyarázzák az időbeli változásokat és így a stacionaritás kérdése már csak a maradékok esetében vethető fel. Ez a *szintekre* épített regressziós (ökonometriai) modell megközelítése;

b) az elemzés változóját – ha tudjuk, vagy gyanítjuk, hogy az nem stacionárius folyamatból származik – *előzetes transzformációk segítségével* stacionáriussá alakítjuk. Ekkor a transzformált DGP kedvező esetben már stacionárius lesz, és azonosítása már stacionárius modellek segítségével lehetséges. Ez a módszer a klasszikus idősorelemzés sajátja.

Az a)-ban említett megközelítés – bár vonzó, és a klasszikus ökonometriai modellépítés alapvető eszköze volt sokáig – manapság sok bírálat tárgya leginkább azért, mert az esetleg nem stacionárius idősorokra épített regresszió *hamis* hatásokat tükrözhet, félrevezető eredményeket adhat. Ezért egyre elterjedtebb az a felfogás, hogy a regressziós elemzés előtt a változók idősorait a stacionaritás szempontjából vizsgálni kell, és azokat szükség esetén alkalmas transzformációval stacionáriussá kell alakítani.

Az ilyen előzetes elemzések fő célja tehát az egyes idősorokról megállapítani azt, hogy az azok mögött rejlő *DGP stacionárius-e, és ha nem, akkor milyen módon tehető stacionáriussá* lehetőleg természetesen úgy, hogy az alkalmazott transzformáció ne változtassa meg az eredeti DGP (és idősor) egyéb tulajdonságait. A stacionaritás megállapítása egyszerűbb esetekben történhet a megfigyelések ábrájának tanulmányozásával, egyszerűbb mutatóinak

[3] Stacionaritáson a továbbiakban gyenge, avagy másodrendű (kovariancia)stacionaritást értünk. Stacionáriusnak tekintünk egy DGP-t, vagy modellt akkor, ha a megfelelő változó várható értéke független t-től, a k-ad rendű autokovariancia függvénye pedig csak k függvénye (azaz ez sem függ t-től).

közvetlen számítása és elemzése útján, de ezek valójában nem adnak megnyugtató megoldást. Ezért a stacionaritás megállapítása is már statisztikai próbák használatát igényli.

Szűkebb értelemben véve a stacionaritás valójában nem tesztelhető feltevés, hiszen a tesztek mindegyike abból indul ki, hogy rendelkezésre áll egy statisztikai minta, ami alapján a próbafüggvény megkonstruálható. Valójában azonban ahhoz, hogy az $y_1, y_2, \ldots y_n$ megfigyeléseket (homogén) mintának tekinthessük, szükség van a stacionaritásra. Ez a kör feloldhatatlannak látszik. Az ellentmondást a statisztikai gyakorlat szemérmesen úgy oldja fel, (vagy inkább úgy kerüli meg) hogy nem explicite a stacionaritás tesztelésével, hanem annak egyes speciális eseteivel, az egyes DGP-kben való megjelenésének vizsgálatával foglalkozik. A nevezett probléma persze ugyanúgy megmarad, de rejtve. Némiképp más a helyzet akkor, ha egy feltételezett DGP-ről elméletileg kimutatjuk, hogy paramétereinek bizonyos értékei esetén az stacionárius, más értékek esetén nem stacionárius folyamatot generál, és ekkor a becsült paraméterek értékére alkalmazunk tesztet. Rejtve bár, de itt megjelenik a stacionaritás (implicit) feltételezése.

Ez utóbbi eljárások ugyanakkor *konstruktívak* abban az értelemben, hogy általában arra is rámutatnak, hogy mi a nem-stacionaritás vélhető oka, így lehetőséget adnak annak kiküszöbölésére is. A nem-stacionaritás oka mindig valamiféle általános trendhatás[4], ami azonban többféle lehet. A *determinisztikus trend* egy olyan, létezőnek tekintett pályát jelent, ami körül a folyamat (szerencsés esetben stacionáriusan) ingadozik. Így ekkor a determinisztikus trend kiszűrése után a megmaradt folyamat a stacionárius idősorokra kidolgozott eszközökkel (pl. Box-Jenkins modellezés) már jól elemezhető. A *sztochasztikus trend* ezzel szemben nem fix, előre létezőnek feltételezett pályából indul ki, hanem – feltételezése szerint – maga az időbeli változás is véletlen ingadozásoknak van kitéve. Ez esetben a trendhatás kiszűrése más módon történik és mások lesznek a kapott, a trendtől megtisztított idősor tulajdonságai is. A most következő elemzés éppen arra vonatkozik, hogy elválassza egyrészt a stacionárius és a nem stacionárius eseteket, illetve nem stacionárius esetben rámutasson arra, hogy milyen a nem-stacionaritás természete. Ez egyben azt is meghatározza, hogy milyen modellezési eszközzel nyúljunk a problémához.

[4] Végső soron ilyen trendhatást fejeznek ki a különböző ARCH (AutoRegressive Conditional Heteroscedasticity) folyamatok is, amelyekkel itt részleteiben nem foglalkozunk. Ezek sajátos helyet foglalnak el a sztochasztikus folyamatokon belül, hiszen várható értékük és varianciájuk is időtől független, feltételes varianciájuk viszont időfüggő. Így, bár látszatra stacionáriusak, valójában a nemstacionárius folyamatok közé sorolhatók. Az ARCH modellek némiképp ellentmondásos megítélése a gyenge stacionaritás fogalmának ellentmondásosságára is rávilágít.

2. Az egységgyök probléma

Az egységgyök, mint azt korábban már említettük, az autoregresszív folyamatok jellemzője. Értelmezéséhez írjuk fel az általános (p-ed rendű) autoregresszív folyamatot:

$$Y_t = \rho_1 Y_{t-1} + \rho_2 Y_{t-2} + \ldots + \rho_p Y_{t-p} + \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \sim NID(0, \sigma^2) \qquad (1)$$

illetve átrendezve

$$Y_t - \rho_1 Y_{t-1} - \rho_2 Y_{t-2} - \ldots - \rho_p Y_{t-p} = (1 - \rho_1 L - \rho_2 L^2 - \ldots \rho_p L^p) Y_t = \varepsilon_t$$

alakban[5], és definiáljuk az ehhez tartozó karakterisztikus egyenletet az alábbi módon:

$$(1 - \rho_1 x - \rho_2 x^2 - \ldots \rho_p x^p) = 0.$$

A karakterisztikus egyenletnek p számú gyöke van (amelyek lehetnek valósak, vagy komplexek). Ha az i-edik gyök abszolút értéke 1, azaz $|x_i| = 1$, akkor azt mondjuk, hogy x_i egységgyöke a folyamatnak. A későbbiekben többször hivatkozunk majd a gyökök milyenségére. Erre vonatkozóan fontos tétel az, hogy ha a fenti karakterisztikus polinom minden gyöke az *egységkörön kívül* helyezkedik el, akkor a folyamat stacionárius, ha pedig van az egységkörön elhelyezkedő gyök (egységgyök), és/vagy az egységkörön belüli gyök, akkor a folyamat nem stacionárius.

Legegyszerűbb esetben, az elsőrendű autoregresszív folyamat (AR1) esetén $Y_t = \rho Y_{t-1} + \varepsilon_t$ vagy más felírásban $Y_t - \rho Y_{t-1} = \varepsilon_t$, avagy $(1 - \rho L) Y_t = \varepsilon_t$. A megfelelő karakterisztikus egyenlet ekkor $1 - \rho x = 0$, ennek egyetlen gyöke pedig $x = \frac{1}{\rho}$. Ha $\rho = 1$, akkor $x = 1$ *egységgyök*, azaz a gyök az egységkörön helyezkedik el. Ha $|\rho| > 1$, akkor $x < 1$, tehát a gyök az egységkörön belül van. Azonnal látható, hogy ez esetben a folyamat nem stacionárius. Ezzel szemben, ha $|\rho| < 1$, akkor $x > 1$, tehát (aszimptotikusan) stacionárius folyamat gyöke egységkörön kívül helyezkedik el.

A legegyszerűbb AR1 folyamat esetén az egységgyök a stacionárius ($|\rho| < 1$) és az explozív ($|\rho| > 1$) eset határán van. A $|\rho| > 1$ explozív esetre könnyű kimutatni az alábbi tulajdonságokat:

- a folyamat t időpontbeli várható értéke a kiinduló Y_0 függvénye, azaz az induló érték szerepe nem tűnik el az idő múlásával;
- varianciája és k-adrendű autokovarianciája t függvénye, így a folyamat nem stacionárius;

[5] A fenti formulákban NID független, normális eloszlású változókat jelent, L pedig a késleltetés (lag) operátor.

– varianciája t növekedésével végtelenbe tart.

Ez utóbbi tulajdonság az, amiért az explozív elnevezést kapta, hiszen elég nagy t esetén a végtelenbe tartó variancia kezelhetetlenné, ellenőrizhetetlenné teszi a folyamatot. Ezért ezt a nemstacionárius alternatívát viszonylag ritkán használjuk, és figyelmünket a további vizsgálatok során inkább a $|\rho| < 1$ illetve a $|\rho| = 1$ esetek közti választásra irányítjuk.

$|\rho| < 1$ esetén a folyamat stacionárius, egyre csökkenő szórással lecseng a kiinduló pontból és egy fehér zaj folyamathoz tart. Lényeges tulajdonsága ennek az esetnek az, hogy a modell idővel "felejt", azaz a véletlen hatásokban megjelenő ugrás, sokk továbbél ugyan, beépül a folyamatba, de hatása idővel elenyészik, elfelejtődik. Ugyancsak fontos tulajdonsága ennek a folyamatnak, hogy hosszú (kisfrekvenciás) hullámokat nem, de rövidtávú ingadozásokat annál inkább tartalmaz. A gazdasági változók alakulásának leírásakor gyakran alkalmazható ez a folyamat akár önmagában, akár – még inkább – a trendtől, vagy valamiféle regressziótól való eltérések magyarázataként.

Ezzel szemben a $|\rho| = 1$ eset (véletlen bolyongás, Random Walk=RW)[6] nemstacionárius folyamatot ír le, melynek várható értéke ugyancsak 0, de varianciája időben növekvő. Ellentétben az előző felejtő modellel, ez emlékezik; a véletlenszerűen belépő sokkok hatása tovább él. A véletlen bolyongási folyamatra a hosszú hullámú (kisfrekvenciás) ingadozás a jellemző.

Talán még pregnánsabban megmutatkozik az eltérés a két eset közt, ha a folyamatok várható értékét nem kötjük meg 0-ra, hanem valami $\alpha \neq 0$ várható értéket feltételezünk. Ekkor alapfolyamatunk az alábbi lesz:

$$Y_t = \alpha + \rho Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Ez $|\rho| < 1$ esetén az előzőekkel teljesen analóg módon viselkedik, mindössze azzal a különbséggel, hogy nem 0-hoz, hanem $\frac{\alpha}{1-\rho}$-hoz konvergál a folyamat. Egészen más lesz azonban a $|\rho| = 1$ eset (véletlen bolyongás eltolással) tartalma. Ekkor ugyanis egyszerű átalakítások után (és $Y_0 = c$ kezdőértéket feltételezve) adódik az, hogy

$$Y_t = c + \alpha t + \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i,$$

ami nem más, mint a már említett *sztochasztikus (lineáris) trend.*

[6] A sztochasztikus folyamatok elméletében (lásd pl. [14]) (véletlen) bolyongási folyamatnak a diszkrét állapotterű és diszkrét időparamétert feltételező folyamatokat nevezik. Ennek általánosítása folytonos állapotterű és folytonos időt feltételező esetekre a Brown mozgás, vagy másnéven a Wiener folyamat, amely fontos szerepet játszik egyebek közt az itt bemutatandó tesztek elméletében.

Az elnevezést az indokolja, hogy determinisztikus trend esetén a meredekségi paraméter konstans, így az egész folyamat előre determinált, a véletlen maradékváltozó csak a hosszútávú trendre rakódik rá, míg a fenti esetben $\alpha + \varepsilon$, azaz a meredekség valószínűségi változó. Az Y_t-re felírt (redukált) formában a determinisztikus és a sztochasztikus trend között a különbség csak a sztochasztikus változóban (maradéktag) van meg, hiszen egyik esetben ez ε_t, míg a másik esetben $\sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i$ annak minden következményével egyetemben.

Ha tehát az AR1 folyamat várható értéke nem 0, akkor még markánsabb különbség van a gyök minősége szerint, hiszen ekkor egy konstanshoz igazodó stacionárius folyamat áll szemben egy trendfolyamattal. Emellett ebben az esetben lehetségessé válik a sztochasztikus és determinisztikus trend közti választás, illetve felmerül a választás problémája.

Az egységgyök probléma szorosan kapcsolódik a *kointegráció* fogalmához. A kointegráció a korszerű idősoros modellépítés egyik fontos fogalma, lényege a következő.

Egy Y_t folyamatot d-ed rendben integráltnak nevezünk akkor, ha d-edik differenciái már stacionárius folyamatot eredményeznek, de $d-1$-edik differenciái még nem. Ha mind Y_t, mind X_t d-ed rendben integráltak, és létezik olyan $\alpha \neq 0$ konstans, hogy az $Y_t - \alpha X_t$ folyamat már csak $d-b$-ed rendben integrált ($b > 0$), akkor azt mondjuk, hogy Y_t és X_t b-ed rendben ***kointegráltak***. Gyakorlati feladatok esetén a $d = 1, b = 1$ eset a legegyszerűbb és leggyakoribb. Ez azt jelenti, hogy két elsőrendűen integrált folyamatból – ha azok kointegráltak – "kikeverhető" stacionárius folyamat.

A kointegráció szerepe és jelentősége a modellépítésben igen nagy: elegendő itt utalnunk arra, hogy kointegrált esetben a rövid- és hosszútávú hatások úgy választhatók szét, hogy szerves kapcsolatuk megmarad. A kointegrált változókra épített modell felírható hibakorrekciós formában, ami a jelenségekben meglévő negatív visszacsatolásokra mutat(hat) rá numerikusan elemezhető módon. Belátható továbbá, hogy a kointegráció felfogható a dinamikus egyensúly (hosszú távú együttmozgás) jellemzőjeként, és az is könnyen belátható, hogy értelmes modellfelírás csak kointegrált változók között képzelhető el. Végül megemlítjük, hogy kointegrált idősorokra épített regressziós modell legkisebb négyzetekkel történő becslése esetén a paraméterek a szokásosnál gyorsabban konvergálnak elméleti értékükhöz, sőt aszimptotikusan mentesek lesznek a szimultaneitásból adódó esetleges torzításoktól is. Ez utóbbi tulajdonságokat szokták Stock tanulmánya [30] nyomán ***szuperkonzisztenciának*** nevezni. Mivel e cikkben feladatunk nem a kointegráció szerepének bemutatása[7], csupán arra utalunk, hogy a kointegráció megfo-

[7] Erre lásd pl. Engle és Granger úttörő cikkét [6], valamint Neményi J. legfrissebb munkáját [19]

galmazható az egységgyökök segítségével is, hiszen a fentiekben Y_t és X_t d számú, $Y_t - \alpha X_t$ pedig $d-b$ számú egységgyököt tartalmaz. Ez azért lényeges, mivel a kointegráltság megállapítása éppen erre az értelmezésre épül: az teszteljük, hogy valóban az egyes folyamatokban van-e egységgyök, illetve hány egységgyök van.

A fentiekben nagyon röviden bemutattuk azt, hogy mi az egységgyökök jelentősége az egyes modellek kiválasztásában, illetve az egységgyökök léte, vagy hiánya menynyiben jelent más tulajdonságú folyamatokat. Szólni kell emellett arról, hogy milyen *elemzési eszközöket* implikál egyik, vagy másik eset. Mivel azt láttuk, hogy a sztochasztikus idősormodellezés csak stacionárius eseteket tud kezelni, a modellépítés másként jelentkezik egységgyök léte, illetve hiánya esetén. Ha a vizsgált folyamatban *nincs* egységgyök, akkor az a stacionárius ARMA modellekre kidolgozott eszközökkel (becslés, teszt, előrejelzés) gond nélkül kezelhető. Ha azonban van egységgyök, akkor először olyan átalakítást kell végezni, amely biztosítja a maradékok stacionaritását. Ilyen a differenciák képzése (differenciázás).

A gyakorlati feladatok esetén, ha a vizsgálandó idősorban látható trendhatás van, akkor lényeges az a kérdés, hogy ez determinisztikus, vagy sztochasztikus trend-e, azaz a további elemzéshez szükséges stacionaritást *differenciázással*, vagy *determinisztikus trend meghatározásával és kiszűrésével* érjük el. Ez esetben is az egységgyökök megléte vagy hiánya adhat útmutatást.

3. Az AR1 folyamat elemzése

Miután áttekintettük az egységgyök problémát, annak fontosságát, modellezésben betöltött szerepét, következményeit, a továbbiakban megvizsgáljuk azt a kérdést, hogy milyen módon lehet megfigyelt idősor alapján tesztelni az egységgyökök létét. Ennek módszere az lesz, hogy a legegyszerűbb (AR1) modellen viszonylag részletesen vesszük sorra a fontosabb teszteket, képzésük elveit, használatuk módját, a velük kapcsolatos esetleges gyakorlati instrukciókat, sőt bemutatunk egy egyszerű gyakorlati alkalmazást is, míg később, az összetettebb modellek esetén már csak röviden adjuk meg a megfelelő teszteket.

3.1 Az AR1 folyamat tesztjei

Az AR1 az egyik legegyszerűbb sztochasztikus folyamat. Szerepe nem is csak az, hogy konkrét feladatokban számoljunk vele, hanem az is, hogy bevezetőül, mintaként és építőelemként szolgáljon a bonyolultabb folyamatokhoz. Maga a folyamat

$$Y_t = \rho Y_{t-1} + \varepsilon_t \tag{2}$$

alakú, ahol Y_0 kezdőértékre és ε_t maradéktagra különböző feltevések lehetnek. Mi a továbbiakban alapesetként az $Y_0 = 0$ és az $\varepsilon_t \sim NID(0, \sigma^2)$ specifikációból indulunk ki, ugyanakkor megjegyezzük, hogy a kezdeti érték és a maradéktag tulajdonságai szempontjából a későbbi, bonyolultabb folyamatok különböznek egymástól.

Az AR1 folyamat tesztelésének kiindulópontja most a (2) DGP, az ε_t-kre és az Y_0-ra vonatkozó alapfeltételezésekkel. Nullhipotézisünk $H_0 : |\rho| = 1$, alternatív hipotézis pedig kettő is lehet, nevezetesen $H_1 : |\rho| \neq 1$ kétoldali alternatív hipotézis, avagy $H_2 : |\rho| < 1$ egyoldali (stacionárius) alternatíva. Ezekkel kapcsolatban megjegyezzük, hogy H_0 (egységgyök-hipotézis) fennállása esetén a nem-stacionaritás differenciázással azonnal kiküszöbölhető. Más megfogalmazással: ha H_0 igaz, akkor Y_t elsőrendűen integrált ($I(1)$) folyamat. Az alternatív hipotézisek közül inkább a H_1-t, az általánosabb kétoldali alternatívát használjuk.

Az egységgyök tesztek kiindulópontja az, hogy a (2) DGP-nek megfelelő modellt felírva

$$y_t = \rho y_{t-1} + \varepsilon_t \tag{3}$$

majd ρ-t a megfigyelési adatokból becsülve, a becsült együttható eloszlása meghatározható. Ha ε_t-re feltételezzük a normális eloszlást, akkor ρ maximum likelihood becslése:

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}_{ML} = \frac{\sum_{t=2}^{n} y_t y_{t-1}}{\sum_{t=2}^{n} y_t^2}$$

lesz. Nagy minták esetén $\hat{\rho}$ eloszlása viszonylag egyszerűen megkapható. A likelihood elméletre támaszkodva belátható ugyanis, hogy $|\rho| < 1$ esetén

$$\hat{\rho} \sim N(\rho, \frac{1-\rho^2}{n})$$

aszimptotikusan érvényes.[8] Az is látszik azonban a formulából, hogy $\rho = 1$ esetén $\hat{\rho}$ eloszlása egy pontba zsugorodik össze; a $\rho = 1$ egységgyök szinguláris pont.

[8] Bár nem tartozik szorosan a tárgyhoz, érdemes megemlíteni, hogy a $H_0 : \rho = 0$ nullhipotézisre épülő szokásos autokorrelációs tesztek részben erre a nagymintás eredményre építenek, hiszen azonnal adódik ebből, hogy $\rho = 0$ esetén

$$\hat{\rho}\sqrt{n} \sim N(0, 1),$$

ami egyebek közt a Durbin-féle h teszt, valamint a portmanteau tesztek kiindulópontja.

Még nehezebb a helyzet kis minták esetén, ahol a fenti aszimptotika még $|\rho| < 1$ esetén sem érvényesül. (Ezeket a nehézségeket mutatja az egyszerűbb, $\rho < 1$ esetre a Durbin-Watson teszt nem standard eloszlása.) Az igazi problámát a kis minták esetére a $H_0 : \rho = 1$ egységgyök hipotézis okozza. Ezt az esetet szisztematikusan először Fuller [10], valamint Dickey és Fuller [2] vizsgálták. Megállapításaik szerint ez esetben $\hat{\rho}$ eloszlásáról az alábbiak állíthatók:

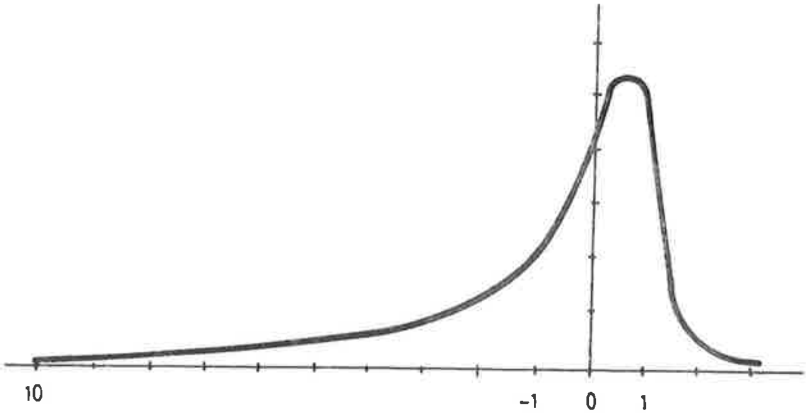
- nem normális, vagy t eloszlást követ, mint ahogy az a regressziós együtthatók esetében általában megszokott;
- $O_p(n^{-1})$ nagyságrendben konvergál, szemben a regressziós együtthatók esetén megszokott $O_p(n^{-1/2})$ nagyságrenddel;
- explicite nehezen kezelhető, de jól szimulálható formára hozható, ami lehetőséget ad az eloszlás kiterjedt táblázására.

A fent említettek miatt célszerű a $\hat{\rho}$ helyett az $n(\hat{\rho} - 1)$-et kitáblázni; ez a Dickey-Fuller féle ρ teszt próbafüggvénye. A megfelelő eloszlás értékeket Dickey és Fuller táblázatai ([2]) mutatják.

A teszt végrehajtása igen egyszerű, hiszen bármely standard regressziós programcsomaggal becsülni lehet $\hat{\rho} = \hat{\rho}_{ML}$-t (ami egyben OLS becslés is), ebből pedig azonnal számítható az $n(\hat{\rho} - 1)$ mennyiség. Ha ez a megfelelő táblázat kritikus értékei közé esik, akkor H_0 elfogadható (azaz van egységgyök), ha nem, akkor H_0 elutasitandó a *kétoldali* alternatíva javára.

A fentiek kiegészítéseként néhány megjegyzést kell még tennünk. Ezek szerint

- a próba nyilvánvalóan kétoldali, tehát a stacionárius és a nem-stacionárius alternatíva ellen is alkalmazható.
- A táblázat kumulált (eloszlásfüggvény) értékeket ad meg; ezt a használatnál figyelembe kell venni.
- A $\hat{\rho}$ és az $n(\hat{\rho} - 1)$ is aszimmetrikus, a sűrűségfüggvényük jobbra ferde (balra elnyúló). Ezt mutatja az 1. ábra. Ennek megfelelően a próba erősebb, jobban szelektál a jobboldalon, azaz a nem stacionárius alternatívákkal szemben, míg a stacionárius alternatívákkal szemben viszonylag gyenge.
- Ez a próba azon kevesek közé tartozik, amelyek a gyakorlatban is előforduló kis minták esetére is alkalmazható.



1. ábra: Az $n(\hat{\rho}-1)$ sűrűségfüggvénye

A regressziós modellből kiindulva a megfelelő regressziós együttható helyett a Student t próba analógiájára is készíthető próba a (2) modellre. Ekkor újból a $\hat{\rho} = \hat{\rho}_{ML}$ becslésből indulunk ki, de ezúttal az $n(\hat{\rho}-1)$ helyett a

$$\hat{\tau} = \frac{(\hat{\rho}-1)}{\sqrt{var(\hat{\rho})}}$$

statisztikát határozzuk meg a mintából. Ez a Dickey-Fuller féle τ teszt próbafüggvénye. A $var(\hat{\rho})$ a $\hat{\rho}$ becslésének szokásos, becsült varianciája:

$$var(\hat{\rho}) = \frac{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}{n-2} \qquad \text{és} \qquad e_t = y_t - \hat{\rho} y_{t-1}.$$

Az így számított $\hat{\tau}$ statisztika sem standard eloszlású (ellentétben a regressziós t-vel), de eloszlása szimulációs úton kitáblázható (lásd [2,13]). Ez a próba is kétoldali alternatív hipotézisek ellen használható; a tapasztalatok szerint ez *erősebb a stacionárius alternatívákkal szemben* mint az előbb tárgyalt Dickey-Fuller féle ρ teszt, ezért alkalmazását azzal szemben preferálják. Gyakorlati végrehajtása semmiféle különös problémát nem jelent, hiszen a standard regressziós programok által a (3) egyenlet becslésekor kapott (becsült) paraméterek és standard hibák segítségével a próbafüggvény értéke azonnal kiszámítható. Az egyetlen gondot az okozza, hogy a rendelkezésre álló táblázatok nem elég részletesek, ami esetenként interpolációt tehet szükségessé.

Összehasonlítva a $\hat{\tau}$ eloszlását a megfelelő szabadságfokú t eloszlással azt tapasztaljuk, hogy az előbbi (szemben a szimmetrikus t-vel) jobbra ferde (balra elnyúló), akárcsak a korábban említett ρ teszt eloszlása, bár annál kevésbbé ferde. Az is tapasztalható, hogy ez az eloszlás elég közel áll a t eloszláshoz, ugyanakkor aszimmetriája folytán a jobboldalon szelektívebb, erősebb, míg a baloldalon, ahol a stacionárius alternatívák találhatók, megengedőbb, gyengébb.

Mint láttuk, a Dickey-Fuller alaptesztek, amelyek végső soron az egész témakört uralják, az $Y_0 = 0$ és az $\varepsilon_t \sim NID(0, \sigma^2)$ feltételezésekből indulnak ki. *Evans és Savin* [7] e két feltétel feloldását kísérelték meg úgy, hogy ezeket rendre az $Y_0 = c$ illetve az $\varepsilon_t \sim IID(0, \sigma^2)$ feltételekkel pótolták. Kimutatták, hogy $\hat{\rho}$ eloszlása főként kis minták esetében függ a c/σ^2 aránytól. Ennek megfelelően táblázatokat is készítettek $\hat{\rho}$ feltételes eloszlására a c és a σ^2 függvényében, amelyek gyakorlati értékét eléggé rontja az, hogy sem c sem σ^2 nem megfigyelhető mennyiségek, sőt c-nek még a becslése is gondot okoz. Mivel ezek az eloszlások – főként nagyobb minták esetén – közel állnak a $c = 0$ esethez, a gyakorlati modellezés oldaláról nem kérdőjelezik meg az említett Dickey-Fuller tesztek létjogosultságát. Hasonlóképpen kevéssé érzékenynek bizonyult vizsgálataik szerint $\hat{\rho}$ eloszlása az ε_t-re tett eloszlásbeli megkötések feloldására. (Felhívjuk viszont a figyelmet arra, hogy egyéb exogén változók (akár egy konstans tag is) lényegesen befolyásolják $\hat{\rho}$ eloszlását. Ezzel a kérdéssel a következő, bonyolultabb DGP-k elemzésénél még sokat foglalkozunk.) Evans és Savin elemzéseiből az is kitűnik, hogy nagyobb c és kisebb σ^2 növeli a τ próba erejét. Tapasztalataik szerint az erőfüggvény aszimmetriája jellemző a τ próbára is.

A Sargan és Bhargava féle R tesztek a regressziós reziduumokra épülnek. Az itt tárgyalandó próba valójában az R tesztek legegyszerűbb változata, amennyiben *nem igényel paraméterbecslést.* A próba nullhipotézise az, hogy a (2) DGP-ben $\rho = 1$, az alternatív hipotézis pedig $0 \leq \rho < 1$, azaz a stacionárius alternatívák. Az alkalmazott próbafüggvény a megfigyelt idősorból számított von Neumann hányados $\rho = 1$ mellett:

$$R = \frac{\sum_{t=2}^{n}(y_t - y_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n}(y_t - \overline{y})^2} \qquad \text{ahol} \qquad \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} y_t \tag{4}$$

Ennek (exakt) eloszlását explicite eddig nem sikerült megadni, de közelítő értékeit táblázatok [13,27] mutatják. A teszt e táblázatok segítségével hajtható végre. Maguk a táblázatok nagyon hasonlítanak a közismert Durbin-Watson táblázatokhoz, már ami az alsó és a felső határokat, és a semleges sávot (zónát) illeti. Mivel esetünkben a becsülni kívánt paraméterek száma 0, így egyelőre csak a táblázatok első sorát használjuk, ahol $R_L = R_U$, azaz a semleges zóna eltűnik. (A táblázatok többi sorát a később ismertetendő, bonyolultabb tesztekhez fogjuk használni.) A próba végrehajtása roppant egyszerű, hiszen a megfigyelt idősorból ki kell számítanunk a (4) próbafüggvény empirikus értékét, és ha ez kisebb, mint a táblázatban található megfelelő érték, akkor a H_0 elfogadható (létezik egységgyök), ellenkező esetben H_2 (a stacionárius alternatíva) fogadható el.

A (2) alapmodellre bemutatott próbák összehasonlítása – mint azt korábban már említettük – csak korlátozott érvényességű szimulációs vizsgálatokon alapul. Ezek néhány fontos megállapítása az alábbi:

- a $\rho < 1$ alternatívára általában a ρ teszt, míg a $\rho > 1$ alternatívára a τ teszt erősebb (lásd *Dickey-Fuller* [2]);
- a $\rho = 1$ környezetében az R teszt erősebb a stacionárius alternatívával szemben, mint a Dickey-Fuller tesztek (v.ö. *Dickey-Fuller* [3]), ugyanakkor
- a Dickey-Fuller tesztek robusztusabbak mind a maradéktagra, mind a kiinduló értékre tett feltételezésekre, így alkalmazásuk az R teszttel szemben preferált (lásd *Diebold-Nerlove* [4]). Előnye még a Dickey-Fuller teszteknek az is, hogy – mint látni fogjuk – kiterjesztésük bonyolultabb DGP-k és modellek esetére viszonylag egyszerűen megy;
- ezzel szemben az R tesztek jól beépíthetők regressziós modellekbe, kiterjesztésük ebbe az irányba viszonylag egyszerű.

3.2 Egy gyakorlati alkalmazás

A következőkben az eddig tárgyalt alaptesztek egy alkalmazását mutatjuk be. Az egységgyök tesztek, mint általában az ökonometriai elemzések, jobbára makroadatokat feltételeznek, az alkalmazások is jórészt makro jellegűek. A gyakorlati feladatok esetében azonban bizonyos kétségek merültek fel a vizsgált modellek és tesztek makromodellekben történő alkalmazásaival kapcsolatban.

A gyakorlati számítások ugyanis azt mutatták (pl. [18]), hogy a makrogazdasági sorok a várakozásokhoz képest túl gyakran mutatnak egységgyököt. Ennek egyik okát az alkalmazott tesztek jellegében kell keresni (vö 4.5), másrészt azonban adódhatnak az aggregáció hatásaiból is. Az elmúlt években sokat igérő kutatások indultak be abban az irányban, hogy az aggregáció hatását vizsgálják meg az egyes idősorok integráltsága, illetve kointegráltsága szempontjából (pl. [15]). Mivel ezek a kutatások még csak részben tisztázták a mikro és makro sorok integráltságának viszonyát, ezért szerencsésebbnek, és főleg problémamentesebbnek tűnik a korábban tárgyalt teszteket mikroadatokon bemutatni.

Az alábbi példa *Rappai G.* egy előkészületben lévő tanulmányából [26] származik, amely a hatékony tőkepiac hipotézisét vizsgálja racionális várakozási modellek segítségével. E vizsgálat egyik eleme a Budapesi Értéktőzsdén bevezetett néhány részvény árfolyamának idősoros elemzése. A hatékony tőkepiac hipotézise – mint az kimutatható – bizonyos feltételek között ekvivalens azzal az állítással, hogy az árfolyamok idősora AR1 formában egységgyököt tartalmaz. A hatékony tőkepiac hipotézis ellenőrzése ekkor tehát egyenértékű azzal, hogy megvizsgáljuk ezeket az árfolyam idősorokat a megismert egységgyök tesztekkel.

A számítások céljaira 5 részvényt választottunk ki; ezek a FOTEX, az IBUSZ, a KONZUM, a MARTFŰ és a PICK. Azért éppen erre az ötre esett a választás, mert ezek egyrészt jellemzők, meghatározók voltak a tőzsdei forgalomban, másrészt pedig ezek esetében viszonylag sok volt a mozgás, ami legalábbis demonstratív célokra kedvező tulajdonság. A modell, amit alkalmaztunk, természetesen az

$$y_t = \rho y_{t-1} + \varepsilon_t$$

volt, a tesztelendő nullhipotézis $H_0 : \rho = 1$, ellenhipotézis pedig $H_1 : \rho \neq 1$. Az adatok forrása az idézett tanulmány [26], a becslések OLS módszerrel készültek. A számítások fontosabb eredményeit az *1. táblázat* mutatja.[9]

1. táblázat: 5 részvény árfolyamának idősorából becsült, illetve számított statisztikák

Részvény	n	$\hat{\rho}$	$n(\hat{\rho}-1)$	$\hat{\tau}$	R
FOTEX	180	1.0002	+0.0360	+0.1120	0.0257
IBUSZ	143	0.9827	-2.4739	-3.2917	0.0587
KONZUM	248	0.9993	-0.1736	-0.2617	0.0665
MARTFŰ	330	1.0041	+1.3530	+1.8666	0.0110
PICK	168	1.0036	+0.6048	+1.6320	0.0108

A próbafüggvények értékeléséhez természetesen szükség van a megfelelő mutatók táblázataira is. A Dickey-Fuller féle ρ teszt eloszlásának megfelelő értékeit a *2. táblázat* mutatja (Fuller [10]).

2. táblázat: Az $n(\hat{\rho}-1)$ statisztika eloszlásfüggvényének p-ed rendű kvantilis értékei $\rho = 1$ esetén

n	0.01	0.1	0.9	0.99
100	-13.3	-5.6	0.95	2.09
250	-13.6	-5.7	1.28	2.04
500	-13.7	-5.7	1.28	2.04
∞	-13.8	-5.7	1.28	2.03

[9]A szerző ezúton mond köszönetet Rappai Gábornak azért, hogy adatait és félkész tanulmányát rendelkezésre bocsátotta, s emellett segítséget nyújtott a számítások elvégzésében is.

Ebből azonnal látható, hogy a próbafüggvény számított értékei minden, itt feltüntetett szignifikancia szinten a megfelelő határok közé esnek, azaz megfigyeléseink egyik esetben sem mondanak ellent a nullhipotézisnek, azaz valamennyi vizsgált sor tartalmaz egységgyököt.

A Dickey-Fuller féle τ teszt végrehajtásához szükséges eloszlásértékek a *3. táblázatban* találhatók meg (Fuller [10]).

3. táblázat: A $\hat{\tau}$ statisztika eloszlásfüggvényének p-ed rendű kvantilis értékei $\rho = 1$ *esetén*

n	0.01	0.1	0.9	0.99
100	-2.60	-1.61	+0.90	2.03
250	-2.58	-1.62	+0.89	2.01
500	-2.58	-1.62	+0.89	2.00
∞	-2.58	-1.62	+0.89	2.00

A próbafüggvény értékei ezúttal lényegesen jobban szóródnak: az IBUSZ esetében H_0-t alacsony (1%-os) szignifikancia szinten elvetjük a stacionárius alternatíva javára, míg a MARTFŰ és a PICK esetében 10%-os szignifikancia szinten vethető el a nullhipotézis, ezúttal a nemstacionárius (explozív) alternatíva javára. Alacsonyabb szignifikancia szinten ez a próba ezeknél a változóknál is az egységgyök jelenlétére utal.

Végül a Sargan-Bhargava próba eloszlásának kritikus értékei $n = 100$ esetére $p = 0.95$-nél 0.259, $p = 0,99$-nél 0,376. Mivel az 1. táblázatban szereplő R értékek ezeknél jóval kisebbek, ezért ez a próba egyik vizsgált esetben sem mond ellent a nullhipotézisnek.

Próbáink eredményeit összefoglalva, a vizsgált 3 teszt egyetlen eset kivételével egybehangzóan az egységgyök létét valószínűsíti, egyedül az IBUSZ idősora igényel további, alaposabb vizsgálatokat.

4. Összetettebb folyamatok egységgyök tesztjei

Az eddigiekben csak a legegyszerűbb, elsőrendű autoregresszív folyamat egységgyök tesztjeiről szóltunk. A továbbiakban – igaz csak nagyon vázlatosan, de – kiterjesztjük az elemzést a bonyolultabb folyamatokra is.

4.1 A nem 0 várható értékű elsőrendű autoregresszív folyamatok

A nem 0 várható értékű elsőrendű autoregresszív folyamatról korábban már szóltunk. Arra is rámutattunk, hogy ez a $H_0 : \rho = 1$ esetén az eltolásos véletlen bolyongási folyamatot (random walk with drift) írja le, ami azért fontos számunkra, mivel ez a sztochasztikus trendek legegyszerűbbike.

Ennek a folyamatnak az egységgyök tesztjei a korábban bemutatott elvekre épülnek: *Dickey és Fuller* eredményeiket többé-kevésbbé mechanikusan általánosították erre az esetre. Kiindultak abból, hogy H_0 alatt (amely esetre a $\hat{\rho}$ illetve a $\hat{\tau}$ eloszlását vizsgálták) az eltolást jellemző α paraméter 0, s így jutottak el a korábbiakkal analóg módon elvégezhető Dickey-Fuller féle ρ_μ és τ_μ tesztekhez.

Ezt az eljárást *Schmidt* [28] bírálta abból az alapállásból, hogy a H_0-ban nem helyes az $\alpha = 0$ feltételt is figyelembe venni. Kimutatta, hogy ha a DGP-ben lévő eltolás nagy ($\alpha \to \infty$), akkor nagy minták esetén a Dickey-Fuller féle $\hat{\tau}$ $n-2$ szabadságfokú student eloszláshoz konvergál, ha pedig α kicsi (de nem 0), akkor $\hat{\tau}$ eloszlása se nem student, de nem is egyezik meg az eredeti Dickey-Fuller eloszlással. (Az $\alpha = 0$ eset természetesen megfelel Dickey és Fuller feltételeinek, így eloszlási eredményeik ekkor érvényesek maradnak.) Ezért Schmidt az eredeti Dickey-Fuller féle ρ és τ tesztek táblázatain vezette át ezt a korrekciót [28]. E táblázatok használatának nehézsége abban áll, hogy bennük paraméterként megjelenik α értéke is, ami általában ismeretlen. Gyakorlatilag ez azért nem okoz gondot, mivel α helyettesíthető becsült értékével, ami a regresszióból azonnal adódik.

Evans és Savin [8] az eltolásból adódó problémát úgy oldották meg, hogy Y_0-t nem 0-nak, hanem 0-tól különböző konstansnak tekintették és az eredeti DGP-t transzformálták kezelhető formára.

Kiindulva az $Y_t = \alpha + \rho Y_{t-1} + \varepsilon_t$ folyamatból (ahol $\varepsilon_t \sim NID(0, \sigma^2)$) bevezetik a $Z_t = \frac{Y_t - Y_0}{\sigma}$ transzformációt, valamint definiálják a $\gamma = \frac{\alpha + (\rho-1)Y_0}{\sigma}$ együtthátót és a $w_t = \frac{\varepsilon_t}{\sigma} \sim NID(0,1)$ valószínűségi változót. Könnyen belátható, hogy ekkor az eredeti DGP

$$Z_t = \gamma + \beta Z_{t-1} + w_t$$

alakba írható át. Erre a transzformált modellre keresik a $\hat{\beta}_{OLS} = \hat{\beta}_{ML}$ becslőfüggvény eloszlását H_0 alatt, γ különféle értékei mellett. A kapott eloszlások nem követnek valamiféle ismert eloszlást; táblázataik megtalálhatók [13]-ban.

A transzformációból látható, hogy H_0 alatt a γ paraméter α/σ-vá egyszerűsödik, ezt nevezik ***standardizált eltolásnak.*** A táblázat tanulsága szerint, ha γ kicsi (0 körüli érték), akkor $\hat{\rho}$ eloszlás közel áll a megfelelő Dickey-Fuller eloszláshoz, míg nagy eltolás esetén $\hat{\rho}$ eloszlása közelít a $N(0,1)$ eloszláshoz, még akkor is, ha a minta viszonylag kicsi.

Az Evans-Savin teszt gyakorlati alkalmazásának is az a fő nehézsége, hogy mind α, mind pedig σ ismeretlen, ezekre becslést kell készíteni, ami rontja a próba erejét. Ezért ezt a próbát a gyakorlatban ritkán alkalmazzák.

A probléma megoldására sajátos utat választott *Nankervis* és *Savin* [17], akik azzal kísérleteztek, hogy a Dickey - Fuller féle $\hat{\tau}_\mu$ statisztikát (közelítőleg) ismert standard eloszlású változóvá alakítsák. Ezt empirikus elemzésekre épített spline interpolációkon alapuló közelítésekkel próbálták megtenni, de csak $\rho < 1$ stacionárius esetekre kaptak elfogadható közelítést. Jóllehet állításuk szerint eredményeik $\rho = 1$ tetszőleges kis környezetében érvényesek maradnak, az elemzések kimutatták, hogy ekkor a próba ereje drasztikusan csökken, így ennek az eljárásnak a gyakorlati jelentősége az egységgyök teszteknél sajnos elhanyagolható.

Végül érdemes néhány *összehasonlító* megállapítást tenni az itt tárgyalt tesztek kapcsán:

- a ρ_μ teszt az esetek nagyobb részében erősebb, mint a τ_μ teszt, ugyanakkor ez utóbbi robusztusabb, ezért „bizonytalan környezetben" (és a gyakorlati alkalmazások jó része ilyennek tekinthető) ez utóbbi preferált;
- mind a ρ, mind pedig a τ tesztek esetén célszerű a Schmidt-féle táblázatokkal számolni, hiszen azok a határok elvben korrektek. Kiváltképp igaz ez arra az esetre, amikor az eltolás (drift) nagyságára nézve elképzeléseink (pl. külső információink) vannak;
- Az Evans-Savin és a Schmidt féle tesztek gyakorlatilag megegyeznek (Schmidt is az Evans-Savin által megkezdett utat járja). Ezért – pusztán technikai meggondolásokból – (részletesebb táblák) célszerűbb a Schmidt féle teszt használata;
- a Nankervis-Savin teszt a $\rho = 1$ környezetében gyenge, így gyakorlati alkalmazása az egységgyök esetére nem ajánlható. Ez a teszt ugyanakkor más H_0 esetén (pl. az autokorreláció meglétének tesztelése) hasznos lehet.

4.2 A determinisztikus trend körüli AR1 folyamat

A folyamat tesztelése ismét Dickey és Fuller eredményeire épül, melyek részben közvetlen következményei a korábban bemutatott teszteknek. A Dickey-Fuller féle ρ_τ és τ_τ tesztek ezúttal is csak a főparaméterek vizsgálatára szorítkoznak. Konstrukciójukat tekintve analógak a korábban bemutatotttakkal, még ha a regresszió némiképp bonyolultabb is azoknál. A becsült főparaméterek eloszlását táblázatokba foglalták [2], és kiegészítésképp legfeljebb csak annyit lehet mondani, hogy az elemzés szempontjából másodlagos (nuisance) paraméterek eloszlása nem különbözik a regressziós elméletben megszokottól: Student, illetőleg nagy minták esetén normális eloszlást követnek.

Tekintve azonban a folyamat összetett jellegét (sztochasztikus és determinisztikus trend, 3 paraméter), célszerű az egyszerű (egy paraméterre vonatkozó) nullhipotézis mellett összetett (több paraméterre vonatkozó) feltevések helyességét is vizsgálni. Ekkor ugyanis egyszerre vizsgálva a különféle nullhipotéziseket nemcsak arra a kérdésre kaphatunk választ, hogy van-e (lehet-e) sztochasztikus lineáris trend a DGP-ben, hanem arra is, hogy igaz-e a determinisztikus trend feltételezése, avagy éppen feltehetjük azt a kérdést is, hogy a trend determinisztikus, vagy sztochasztikus.

Az (α, β, ρ) paramétervektort q-val jelölve, a RW folyamatot a $q = (0, 0, 1)$ nullhipotézis, a *csak* determinisztikus trend esetét a $q = (\alpha_0, \beta_0, 0)$, míg mindkét trend relevanciáját a $q = (\alpha_0, \beta_0, 1)$ nullhipotézis fejezi ki. A feladat persze szűkíthető is, hiszen pl. a $q^* = (0, 1)$ hipotézis eleve kizárja a determinisztikus trendet és így a korábban tárgyalt esetnek egy alternatív tesztje.

Az ilyen, több paraméterre vonatkozó hipotézisek a regressziós elemzésekben parciális, vagy globális F próbával vizsgálhatók. A regressziós F próbák analógiájára készítette el Dickey és Fuller az ilyen nullhipotézisek tesztelésére alkalmas Φ próbákat, hiszen az nyilvánvaló, hogy ezeknél a modelleknél a hagyományos F próbák érvényüket vesztik.

Dickey és Fuller [3] likelihood arány teszteket készítettek el a megfelelő H_0-ra és ezek eredményeként azt kapták, hogy a likelihood hányadosok a szokásos regressziós F próbák monoton függvényei. Az így kapott likelihood hányadosok eloszlását szimulálva jutottak el táblázataikhoz ([3],[13]). Ezek – mint a likelihood hányadosok általában – akkor utasítják el a H_0-t, ha a számított empírikus tesztfüggvény érték *nagyobb*, mint a táblázat megfelelő értéke.

A likelihood elmélet alapján viszonylag könnyen belátható, hogy ennél a folyamatnál is a regressziós F analógjának tekinthető Φ mutató monoton függvénye lesz a likelihood arány próbafüggvénye, azaz a próbafüggvény mintabeli értéke standard regressziós csomagok segítségével meglehetősen egyszerűen előállítható.

Az összehasonlítás a 4.1-ben és a 4.2-ben említett tesztek között természetesen nem igazán jogos, hiszen más a vizsgált nullhipotézis, és mások az ellenhipotézisek is. Mivel a ρ és a τ tipusú tesztek csak egy-egy paraméterre koncentrálnak, így azok általában erősebbek, mint a Φ tesztek, még akkor is, ha ez utóbbi csak a megfelelő főparaméterekre van felírva. Valójában a két eset más és más feladatot jelöl ki, így igazából ezek nem jelentenek egymás számára reális alternatívát.

4.3 A magasabb rendű autoregresszív folyamatok

A p-ed rendű autoregresszív folyamatok tesztelése is alapvetően a Dickey-

Fuller hagyományokon alapul. Kiindulópontunk most is az (1) egyenlet, és feladatunk a $\hat{\rho}_1$ főparaméter tesztelése a $H_0 : |\rho_1| = 1$ és $H_1 : |\rho_1| \neq 1$ hipotézisekkel.

Belátható, hogy a Dickey-Fuller tesztek eredményei kiterjeszthetők erre az esetre is az alábbiak szerint: kimutatható, hogy létezik olyan c skalár, amely mellett a $cn(\hat{\rho}_1 - 1)$ statisztika eloszlása megegyezik a Dickey-Fuller féle ρ statisztika eloszlásával. Továbbá, a korábbiaknak megfelelően $(\hat{\rho}_1 - 1) = O_p(n^{-1})$, a $(\hat{\rho}_j - \rho_j) = O_p(n^{-1/2})$ $j = 2, 3, \ldots, p$ konvergencia sebességű változók, és ez utóbbi különbség aszimptotikusan normális eloszlású változót ad. Sajnos a gyakorlati hipotézisvizsgálat esetén c paraméter meghatározása nehézségeket okoz, ezért nem a Dickey-Fuller féle ρ, hanem a Dickey-Fuller féle τ próba alkalmazása a célravezető, ahol ilyen probléma nem merül fel. Ennek alkalmazása ugyanúgy történik, mint ahogy azt korábban leírtuk.

Ha a folyamat bonyolultabb, eltolást és/vagy determinisztikus trendet tartalmaz, akkor is érvényesek maradnak Dickey és Fuller eredményei; ez esetekben a τ_μ, vagy a τ_τ próbák alkalmazása ajánlható. Hasonlóképpen alkalmazhatók esetenként a Dickey-Fuller féle Φ tesztek is.

Ha azonban feladatunk az, hogy ne csak egy (az első) egységgyök létezését ellenőrizzük, hanem azt, hogy lehet-e *több* egységgyök (a folyamat maximum p számú egységgyök létezését engedi meg), akkor együtt kell tesztelni a több egységgyököt F tipusú próbával. Az (1) DGP-nek megfelelő regresszió becsült paramétereihez tartozó *szokásos* regressziós együtthatók parciális F próbáját kell elvégezni. A különbség a regressziós eljárásokhoz képest mindössze annyi, hogy a kapott F statisztikák nem standard F, hanem speciális eloszlásúak. Aszimptotikus eloszlásukat H_0 alatt (több egységgyök létezése) *Hasza és Fuller* [12] készítette el és táblázta ki.

Ennek az eljárásnak a gyakorlati problémája abban áll, hogy általában nem tudjuk előre az egységgyökök számát (legfeljebb arra gyanakodhatunk, hogy egynél több van). Kimutatható, hogy ha a DGP *több* egységgyököt tartalmaz, mint amennyit a fenti F próba nullhipotézisekor feltételeztünk, akkor a próba empirikus mérete (szignifikancia szintje) nagyobb lesz a nominális szintnél, azaz a próba félrevezető eredményt adhat. Ha pl. két gyököt feltételezünk (és ezt teszteljük), holott valójában 3 van, akkor a táblából választott szintnél (pl. 5%-nál) *nagyobb* lesz a döntés elsőfajú hibája. Ezért Dickey és Pantula (idézi Diebold és Nerlove [4]) a következő szekvenciális stratégiát javasolják: induljunk ki fordított sorrendben és határozzuk meg azt az m számot, amelynél több egységgyök *biztos* nem fordul elő. A H_0-ban ezt adjuk meg, és ezt teszteljük a $H_1 : m - 1$ számú egységgyök ellen. Az eljárást így folytatva eljuthatunk a szignifikáns egységgyökök számához. Az is kimutatható, hogy ilyen stratégia mellett a teszt fent említett torzítása nem jelentkezik.

4.4 Autoregresszív, mozgó átlagolású folyamatok

Az autoregresszív, mozgó átlagolású folyamatok (ARMA) egységgyök tesztjeinél az

$$Y_t = \rho Y_{t-1} + \varepsilon_t + \beta\varepsilon_{t-1} \qquad |\beta| < 1 \tag{5}$$

formából indulunk ki, amely egyszerű átalakítások után H_0 alatt

$$\Delta Y_t = \beta[-\Delta Y_{t-1} - \beta\Delta Y_{t-2} - \beta^2\Delta Y_{t-3} - \ldots] + \varepsilon_t$$

alakra hozható. Ebben a formában a tesztelendő ρ paraméter már meg sem jelenik, ezért ahhoz, hogy a $\rho = 1$ feltevést tesztelni tudjuk, ezt be kell építeni, természetesen úgy, hogy H_0 alatt a (5)-öt kapjuk vissza. Ennek természetes módja az, hogy a $(\rho - 1)Y_{t-1}$ tagot, ami éppen a H_0 miatt tűnt el az egyenletből, visszaírjuk. Ekkor az a regressziós modell, amely a tesztelés alapjául szolgál, az alábbi lesz:

$$\Delta y_t = (\rho - 1)y_{t-1} + \gamma_1\Delta y_{t-1} + \gamma_2\Delta y_{t-2} + \ldots + \varepsilon_t.$$

Ezt az egyenletet *bővítet Dickey-Fuller regressziónak* (Augmented Dickey-Fuller regression=ADF) nevezünk; ez a hasonló nevet viselő teszt alapja. A tesztelés célja ezúttal a $H_0 : \rho - 1 = 0$ nullhipotézis vizsgálata a stacionárius alternatíva ellen. A probléma látszólag egyszerű, az ADF regresszióval kapcsolatban azonban sok probléma merül fel. Ezek – melyek részben hasonlatosak az osztott késleltetésű regressziós modellben felmerülő becslési problémákhoz – nevezetesen az alábbiak:

a) A regresszió végtelen sok magyarázó változót tartalmaz, ugyanakkor a becslés gyakorlati végrehajtásához ezek számát végesre kell "vágni". Ez a csonkítás torzítja a becslést.

b) A magyarázó változók között multikollinearitás van, ami kis β értékek esetén elenyészik ugyan, de nagyobb β-k esetén már zavaró lehet (vö. [13]).

c) A regresszió együtthatói nem függetlenek, hiszen $\gamma_1 = -\beta$, $\gamma_2 = -\beta^2$ stb, ami annyit jelent, hogy nemlineáris paraméterkorlátozások (lennének) szükségesek a torzítatlan és hatásos OLS becsléshez.

Mindezen problémák ellenére szimulációs vizsgálatok azt mutatták, hogy ezek viszonylag kevéssé érintik a $\rho - 1$ főparaméter becslését, így az, de még inkább annak studentizált statisztikája viszonylag kis β-k esetén alkalmas a H_0 tesztelésére.

Ennek gyakorlati végrehajtásához a regresszió első k tagját szokták használni, ahol általában a $k \approx n^{1/4}$ csonkítás ajánlott. A paraméterek becslését *korlátozások nélkül* végezzük el, kiszámítjuk a $\hat{\rho} - 1$-hez tartozó regressziós t értéket, és ezt a Dickey-Fuller féle τ táblázat kritikus értékeivel összehasonlítva juthatunk döntéshez. Nagy minták esetén az így számított statisztika valóban a Dickey-Fuller féle τ eloszlásához közelít, de a konvergencia meglehetősen lassú, így kis minták (és nagy β) esetén az eljárás értéke kétséges. Ha az induló folyamatban Y_t várható értéke nem 0, akkor a τ_μ-t illetően célszerűbb a Schmidt-féle táblázatokkal dolgozni.

A fenti problémák – elsősorban a végtelen dimenziós nuisance paraméterek, illetve azok végessé való csonkítása hatásának – kiküszöbölésére *Phillips* és *Perron* [22,23,24] olyan teszteket készítettek (PP1 és PP2 tesztek), amelyek az eredeti AR1 modell DF eloszlásából indulnak ki és ezt korrigálják a különböző modellfeltételezéseknek megfelelően. Összehasonlító elemzésekkel vizsgálták, hogy a probléma megoldására ajánlott három teszt (ADF, PP1, PP2) milyen tulajdonságú. Mindkét PP teszt konvergenciája lassúnak bizonyult, és mindkettő esetén a nagy abszolút értékű MA paraméter (β) esetén a tesztek nominális és empirikus mérete eltérőnek bizonyult, azaz a tesztek a vártnál és a látszólagosnál nagyobb elsőfajú hibát eredményeztek. E szempontból ugyan a PP1 látszott a legjobbnak és a PP2 a legrosszabbnak, de a PP1 inkonzisztenciája miatt – minden hibája ellenére – az elemzők (pl. *Diebold-Nerlove* [4]) a bővített Dickey-Fuller teszt (ADF) használatát ajánlják.

Az ADF hiányosságai miatt további alternatív eljárások készültek a MA hibatagok kezelésére. Ezek közül *Solo* Lagrange multiplikátor tesztje aszimptotikusan ekvivalens az ADF-fel, kis minta tulajdonságai pedig nem ismertek, így az eddigiekhez képest nem ad többletet. Érdekes lehet viszont a Hall, illetve a Hall és Pantula által kifejlesztett eljárás (idézi *Diebold és Nerlove* [4]), amely az ADF regressziót, pontosabban annak becslését kívánja javítani *instrumentális változók* bevezetésével, és ezáltal kis minták esetére is erősebb tesztek kifejlesztésével.

4.5 A parciális trend folyamat

A parciális trend folyamat (PT) vizsgálata valójában a töréssel, vagy ugrással jellemezhető folyamatokat jelenti. A PT folyamatot először *Perron* [22] vizsgálta az egységgyökök oldaláról, és a feladat, amit meg akart oldani vele, az volt, hogy „ugrásos", illetve „töréses" trendmodellben szétválassza a determinisztikus, illetőleg a sztochasztikus trendet. Ő is a Dickey-Fuller hagyományokra épít, de felismeri, hogy az ugrás, vagy a törés *hamis* egységgyököt vihet a rendszerbe, ugyanakkor a minta szétválasztása (két vagy több részmintára) túlságosan rövid megfigyelési sorokat eredményezne, ami rontaná a Dickey-Fuller tesztek egyébként sem nagy erejét. Megállapítása tehát az, hogy akkor, ha ugrás, vagy törés van a trendben, az eddig tárgyalt egységgyök tesztek nem konzisztensek a trendstacionárius alternatívával szemben. Ezért ezekre az esetekre Dickey-Fuller elveken alapuló új teszteket javasol.

Az eljárás gyenge pontja az, hogy az ugrás, vagy a törés helyét a priori adottnak feltételezi, arra becslést nem készít. Az ugrás, vagy törés helyét az elemző előre – ismét csak az ábra, illetve a megfigyelésekből származtatható empírikus tulajdonságok vizsgálata alapján – dönti el. Ez a töréspont, vagy ugráspont tehát a teszt számára – és természetesen a teszt táblázataiban is – kivülről adott paraméter. Végül utalnunk kell arra, hogy bár a teszt alapváltozatát Perron $IID(0, \sigma^2)$ eloszlású hibatagokra dolgozta ki, később kimutatta, hogy a származtatott eloszlások (és táblázatok) érvényesek maradnak a maradékváltozók általános ARMA specifikációja esetén is.

* * *

A fentiekben áttekintettük a fontosabb folyamatokat és egységgyök tesztjeiket, amelyek mind a hagyományos tesztelveken nyugszanak. Ezek jellemzője az, hogy kiemelten kezelik a nullhipotézist, és elvetését csak akkor javasolják, ha *erős ellenérvek* szólnak az ellenhipotézis mellett. Nagyon sok esetben, amikor mindkét alternatíva nagyjából azonos súlyúnak tűnik, a klasszikus tesztelvekből adódóan a nullhipotézist fogadjuk el. Ez az általános megállapítás igaz az egységgyök tesztekre is.

A már-már legendássá váló Nelson-Plosser vizsgálat [18] gyakorlati makroadatokon szinte minden esetben egységgyök jelenlétét mutatta ki Dickey-Fuller tesztekkel. Hasonló eredményekre jutottak más kutatók is, amit csak részben magyaráz az aggregált idősorok integrációjára vonatkozó néhány, egyébként fontos megállapítás [15], és az a tény, hogy a Dickey-Fuller féle tesztek elég gyengék a stacionárius alternatívákkal szemben.

Ennek a problémának a megoldására született az az ötlet, hogy cseréljük fel a nullhipotézis és az ellenhipotézis szerepét, és csak akkor fogadjuk el egységgyök létét, vagy nemlétét, ha azt a két, egymáshoz képest fordított szereposztás egybehangzóan megerősíti. Ennek, a manapság egyre inkább elfogadott elvnek a részletes tárgyalása helyett csupán röviden szeretnénk utalni két olyan kísérletre, ahol ezt alkalmazták. DeJong et al. [5] Dickey-Fuller típusú tesztjeiknél a fordított szereposztást úgy próbálták megvalósítani, hogy a stacionárius alternatívát tekintették nullhipotézisnek. Azt a problémát, ami abból adódott, hogy ez a nullhipotézis összetett hipotézis, úgy oldották meg, hogy H_0-nak néhány jellemzőnek tekinthető értéket (pl. $\rho = 0.85$-öt) vettek, és így végezték el a próbákat. Kwiatkowski et al. [16] ezzel szemben némiképp átparametrizált modellből indultak ki. Modelljük:

$$Y_t = at + r_t + \varepsilon_t; \qquad r_t = r_{t-1} + u_t; \qquad u_t \sim IID(), \sigma_u^2); \qquad r_0 = 0.$$

Ilyen modellfelírás mellett a stacionaritás nullhipotézisét a $\sigma_u^2 = 0$ írja le, mégpedig $a = 0$ esetben r_0 körüli, $a \neq 0$ esetben pedig egy trend körüli stacionaritás formájában.

Még egyszer hangsúlyozzuk, hogy itt csak két példát mutattunk be, a lényeg maga a tesztelési elv, ami úgy tűnik, az egységgyök teszteken túlmenően is használható.

5. További folyamatok, általánosítások

Miután a fentiekben áttekintettük a fontosabb ARMA folyamatok egységgyök tesztjeit, szólnunk kell röviden az ezektől eltérő szemléletű, illetve általánosabb keretek közt megjelenő modellek problémáiról is. Ezen modellek közös jellemzője, hogy tartalmaznak autoregresszív tagot, de ugyanakkor olyan szerkezetűek, hogy a gyakorlatban felmerülő bonyolultabb DGP-k leírására is alkalmasak (lehetnek).

Ezek közül mindenek előtt az integráltság fogalmát időben kiterjesztő eseteket említjük meg. Alapesetben eddig (ha hallgatólagosan is) csak éves idősorokban gondolkodtunk. A gazdasági elemzések egy sor területén azonban évesnél gyakoribb megfigyelések is léteznek, és ezen jelenségek modellezésekor gyakran találkozunk szezonális hatással, amely átmeneti kiszűrése fontos eleme lehet a megfelelő idősor elemzésének és előrejelzésének. Ha az idősor d-edrendű szezonális differenciái stacionárius sort alkotnak, azaz az idősor szezonális differenciázással stacionáriussá alakítható, akkor az idősort *d-ed rendben szezonálisan integrált idősornak* nevezzük.

Gyakran adódik olyan eset, amikor egy idősor d-ed rendű differenciázása nem elég, a $d+1$-ed rendű differenciázás pedig már sok, azaz túldifferenciázáshoz vezet. Ilyen esetekben a differenciázás helyes – a stacionaritást biztosító – rendje d és $d+1$ közti *tört* szám. Ez azt jelenti, hogy ilyen esetekben célszerű bevezetni a nem egész rendű, ún. frakcionális (fractional) integráltság fogalmát. Egy Y_t idősort d-ed rendben frakcionáltan integráltnak nevezünk akkor, ha az ismert

$$(1-L)^d Y_t = \varepsilon_t \sim IID(0, \sigma^2)$$

összefüggés nem egész d értékekre is fenn áll. Ez esetben természetesen az $(1-L)^d$ értelmezése jelent problémát, amit általában egy McLaurin soron alapuló közelítés alapján az alábbi módon szoktak definiálni (lásd pl. Sowell [29] cikkét):

$$(1-L)^d = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(-d+j)}{\Gamma(-d)\Gamma(j+1)} L^j$$

és ahol Γ az ismert Gamma függvényt jelöli. A szezonálisan és frakcionálisan integrált idősorok vizsgálata jelenleg a kutatások egyik fontos területe.

A NILT (Near Integrated, Local Trend) modell az eddig tárgyalt AR folyamatok és a determinisztikus trend egy sajátos összekapcsolását jelenti. Konstrukciójának kiindulópontja az, hogy az AR modellek ρ paraméterének becslése a $\rho = 1$ pontban egészen másként viselkedik, mint a $\rho < 1$ esetekben. Ezért támadt az az ötlet (Phillips [25]), hogy olyan modellt írnak fel, amelyben folytonos átmenet teremthető a két eset közt. Erre szolgál a NI folyamatok koncepciója, amelynek lényege az, hogy fix ρ helyett azt egy ugyancsak fix c és egy változó T paraméter függvényében írjuk fel az alábbi módon:

$$\rho = 1 + \frac{c}{T}$$

Ekkor c előjelétől függően T növelésével ρ tetszés szerint közel kerül 1-hez és az átmenet folytonossá tehető.

Mivel az elemzések másik kritikus eleme a determinisztikus trend léte, hiszen ez is diszkrét módon, ugrásszerűen befolyásolja a modell, illetve a tesztek tulajdonságait, itt is hasonló folytonos átmenetet konstruáltak a trendet tartalmazó, és az azt nem tartalmazó modellek közt. Ezt a helyi trend (Local Trend = LT) koncepciójával úgy oldották meg, hogy β-t nem tekintették továbbá rögzítettnek, hanem ezt is egy konstans b és egy változó T segítségével írták fel pl. az alábbi módon:

$$\beta = \frac{b}{\sqrt{T}}$$

Ekkor T minden határon túli növelésével a determinisztikus trend eltűnik, véges T esetén viszont a trend megmarad. A két kritikus komponens felírására természetesen más lehetőség is adódik, de az így specifikált

$$Y_t = \alpha + \frac{b}{\sqrt{T}}t + (1 + \frac{c}{T}Y_{t-1}) + \varepsilon_t$$

alakú NILT folyamatban éppen a sztochasztikus illetve determinisztikus trend közti választás lehetősége van kiemelve, hiszen a $T \to \infty$ határátmenet, a véges, vagy végtelen T éppen ezt a két fontos esetet választja el egymástól[10]. Erre a folyamatra, amely tehát bizonyos értelemben általánosabban tartalmazza az eddig vizsgált problémákat *Haldrup* és *Hyllenberg* [11] építettek teszteket.

[10] A T-vel, illetőleg a $\sqrt{T}$-vel való (eltérő) normálást az indokolja, hogy a két paraméter (az AR1, illetve a trend együtthatója) H_0 alatt eltérő konvergencia sebességű. ($\frac{1}{T}$, illetve $\frac{1}{\sqrt{T}}$). Az itteni felírás már kiküszöböli az eltérő konvergencia sebességek okozta aránytalanságot.

A másik általánosítás az ún. meg nem figyelhető komponensű folyamatok (és modellek) felé mutat. Ezek lényege az, hogy két vagy több folyamat összegeként állnak elő, megfigyelési szinten viszont csak az összegre vonatkozó megfigyelések állnak rendelkezésre. Ezért adódnak becslési, pontosabban azonosítási (identifikációs) problémák az egyes folyamatok szétválaszthatósága kapcsán. (Ezért nevezik ezeket a folyamatokat általában meg nem figyelhető komponensű (UnObservable Component=UOC) modelleknek.) Esetünkben egy nagyon egyszerű UOC folyamat akkor adódik, ha a hagyományos additív specifikációjú idősormodellt leegyszerűsítve, a szezonális és a ciklikus hatásoktól megtisztítva az alábbi formában írjuk fel:

$$Y_t = T_t + \varepsilon_t \tag{6}$$

A *determinisztikus trend* ekkor

$$T_t = \alpha + \beta t$$

alakú lesz, és ekkor (6) -ból

$$E(Y_t) = \alpha + \beta t, \qquad \mathrm{Var}(Y_t) = \sigma^2, \qquad \mathrm{Cov}(Y_t Y_{t-k}) = 0$$

adódik. Ez nem más, mint a hagyományos determinisztikus trendmodell, ahol Y_t tehát trendstacionárius. A *sztochasztikus trend* ugyanebben a keretben

$$T_t = T_{t-1} + \beta + \eta_t \tag{7}$$

alakban írható fel, ahol β konstans, η_t pedig $\eta_t \sim IID(0, \sigma_\eta^2)$ eloszlású valószínűségi változó. Ha feltesszük, hogy (6)-ban $\varepsilon_t \sim IID(0, \sigma_\varepsilon^2)$, akkor a modell átalakított („redukált") formája:

$$Y_t = t\beta + \sum_{i=1}^{t} \eta_i + \varepsilon_t$$

továbbá

$$E(Y_t) = t\beta, \qquad \mathrm{Var}(Y_t) = t\sigma_\eta^2 + \sigma_\varepsilon^2, \qquad \mathrm{Cov}(Y_t Y_{t-1}) = (t-1)\sigma_\eta^2.$$

A (7) egyenlet specifikációjából látható az, hogy ha σ_η^2 kicsi, akkor ez szélső esetben magában foglalja a determinisztikus trendet, míg ha $\sigma_\varepsilon^2 \to 0$, akkor a másik szélső esetként a RW folyamat adódik. Így a σ_η^2 és σ_ε^2 viszonya mutatja meg azt, hogy determinisztikus vagy sztochasztikus trend feltételezése a helyes a (7) DGP esetén. Az UOC folyamat elemzése tehát (implicit módon, a determinisztikus és sztochasztikus trend közti választással) lehetőséget ad az egységgyök tesztelésére. Ezt az elvet használják fel az egységgyökök tesztelésére készített UOC alapú tesztek, így a *Nyblom* [20], a *Nyblom-Mäkeläinen* [21], valamint a *Franzini-Harvey* [9] tesztek.

Végül az általánosabb modellek közt kell szólni a regressziós keretek közt felmerülő egységgyök problémáról. Ez esetben a klasszikus regressziós hipotézisek helyett élünk azzal a feltételezéssel, hogy a maradékváltozó autokorrelált, és esetenként ez az autokorreláció egységnyi is lehet. Ilyen esetekben a korábban, az AR1 tesztelésénél már említett *Sargan-Bhargava* tipusú (R) tesztek alkalmazása látszik célszerűnek.

Ezek kiindulópontja az

$$Y_t = \beta_0 + \sum_{i=1}^{k} \beta_i X_{it} + u_t$$

regressziós folyamat, ahol $u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$ és $H_0 : \rho = 1$, azaz nullhipotézisünk szerint a maradékváltozó véletlen bolyongási folyamatot követ. H_0 alatt $\Delta u_t = \varepsilon_t$, így a regressziót a differenciákra felírva

$$\Delta Y_t = \sum_{i=1}^{k} \beta_i \Delta X_{it} + \varepsilon_t$$

adódik. Az eredeti és a differenciázott egyenletek maradékváltozóinak, illetve reziduumainak összehasonlítására épülnek a Sargan-Bhargava típusú tesztek, melyek közül kiemelendőek *Sargan* és *Bhargava* von Neumann típusú, és Durbin-Watson típusú tesztjei, valamint a Berenblut-Webb teszt. Ezek a fenti közös elvre épülve más-más tesztfüggvényeket használnak. Közös jellemzőjük, hogy a tesztfüggvények eloszlása nem független az X változóktól, így általános (minden X esetére érvényes) eredmények nem léteznek. Hasonlóan a közismert Durbin-Watson teszthez, ez esetben is két út járható: vagy minden egyes konkrét X matrixhoz egyedileg előállítjuk a megfelelő eloszlást (és az ennek megfelelő kritikus értékeket), vagy – és ez a gyakoribb – közelítő érvényű eloszlásokat (és táblázatba foglalt kritikus értékeket) használunk. A próbák egyes részletei (próbafüggvények, táblázatok) a többször említett OTKA tanulmányban [13], az eloszlások indoklása Sargan és Bhargava cikkében [27] találhatók meg.

Ahogy az eddigiek során az egyre bonyolultabb esetek felé haladtunk, láthattuk, hogy a tesztelés során egyre több tényezőt kellett figyelembe vennünk, az eredmények ugyanakkor egyre bizonytalanabbá válnak. A gyakorlat azonban még inkább összetett: egyszerre jelentkeznek determinisztikus, sztochasztikus trendek, nem is mindig első fokon, megjelenhetnek strukturális törések és ugrások, ráadásul ezek azonosítását gyakran a makrostatisztikákra olyannyira jellemző bizonytalan, nem mindig összehasonlítható tartalmú, rövid idősorok alapján kell elvégezni. Mindezt jól példázza Neményi J. legfrissebb tanulmánya [19], amely a magyar gazdaság néhány makromutatójának alakulását elemzi jórészt az itt bemutatott eszközökkel, és gondos, alapos vizsgálatok után is inkább kérdések mintsem határozott állítások megfogalmazásáig jut el. Ez alapján úgy tűnik, hogy még sok munka van hátra ahhoz, hogy a gyakorlati esetekre is jól alkalmazható vizsgálati eszközök álljanak e téren a kutatók rendelkezésére.

6. Összefoglalás

a) A cikkben bemutattuk az egységgyök probléma lényegét, szerepét az elemzésekben, kapcsolatát a modellépítés egyes tartalmi és technikai kérdéseivel.

b) Rámutattunk arra, hogy mivel a megfigyeléseink mindig mintából származnak, az azokból számított statisztikákat mintavételi hiba terheli, ezért fontos az egységgyökök vizsgálatánál a minél alaposabb tesztelés.

c) A tesztelés – és általában az idősorok elemzésének – talán legnagyobb nehézsége abban áll, hogy a folyamatoknak csak egyetlen realizációját ismerjük, ismételt kísérletekre nincs módunk. Ez szigorúbban véve minden becslés és tesztelés alapját jelentő stacionaritási feltétel tesztelését lehetetlenné teszi. Gyakorlatban ezért megelégszünk a stacionaritás intuitív belátásával, illetőleg közvetett tesztekkel.

d) Az egységgyök teszteket a legegyszerűbb AR1 folyamaton mutattuk be részletesen. Rámutattunk, hogy ezek fő nehézsége a becsült autoregresszív paraméter nem-standard eloszlása. Ezt az eloszlást (illetve bonyolultabb alapmodellek esetén ezeket az eloszlásokat) elsősorban Dickey és Fuller ezirányú eredményei alapján, illetve azokból kiindulva foglalták táblázatokba. Az egész témakört domináló Dickey - Fuller tesztek nagy előnye más tesztekhez képest, hogy próbafüggvényeik értéke standard regressziós eredménytáblákból azonnal megkapható.

e) A bonyolultabb folyamatok egységgyök tesztjei részben az előzőekre épülnek, ezeket egészítik ki, ezeket ágyazzák be általánosabb folyamatokba, részben azonban más utakat és elveket követnek. Ezekre csak néhány jellegzetes példát említettünk.

f) A vizsgálat természetesen nem terjedhetett ki az összes felmerülő kérdésre. A fontos, de itt nem, vagy csak felszínesen érintett kérdések közül kiemelendő a regressziós elemzésekhez kapcsolódó részletesebb maradékelemzés, a több egységgyök és a kointegráció tesztelése, a többdimenziós idősorvektorok elemzése és a részleges (frakcionális) integráltság elemzése.

Ezek, és a témakörrel kapcsolatos egyéb kérdések elsősorban a J.A.S.A. és az Econometrica cikkei alapján tanulmányozhatók.

Irodalom

1. D. A. DICKEY – W. R. BELL – R. B. MILLER: Unit Roots in Time Series Models: Tests and Implications. The American Statistician, Vol. 40 (1986), No. 1, pp 12–26.
2. D. A. DICKEY – W. A. FULLER: Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root. Journal of the American Statistical Association (J.A.S.A.), Vol.74 (1979), No.366, pp 427–431.
3. D. A. DICKEY – W. A. FULLER: Likelihood Ratio Statistics for Autoregressive Time Series with a Unit Root. Econometrica, Vol.49 (1981), No.4, pp 1057–1072.
4. F. X. DIEBOLD – M. NERLOVE: Unit Roots in Economic Time Series. A Selective Survey. Advances in Econometrics, Vol.8 (1990), pp 3–69, JAI Press Inc.
5. D. N. DEJONG – J. C. NANKERVIS – N. E. SAVIN – C. H. WHITEMAN: Integration versus Trend Stationarity in Macroeconomic Time Series. Working Paper No. 89–99. Department of Economics, University of Iowa, Iowa City, 1989.
6. R. F. ENGLE – C. W. J. GRANGER: Co-integration and Error Correction: Representation, Estimation and Testing. Econometrica, Vol. 55 (1987), No 2, pp 251–276.
7. G. B. A. EVANS – N. E. SAVIN: Testing for Unit Roots 1. Econometrica, Vol. 49 (1981), No. 4, pp 753–779.
8. G. B. A. EVANS – N. E. SAVIN (1984): Testing for Unit Roots 2. Econometrica, Vol. 52 (1983), No. 5, pp 1241–1269.
9. L. FRANZINI – A. C. HARVEY: Testing for Deterministic Trends and Seasonal Components in Time Series Models. Biometrika, Vol. 70 (1983), pp 673–682.
10. W. A. FULLER: Introduction to Statistical Time Series. Wiley & Sons Inc, 1976, New York.
11. N. HALDRUP – S. HYLLEBERG: Integration, Near-Integration and Deterministic Trends. Institute of Economics, University of Aarhus, 1991. (Mimeo)
12. D. P. HASZA – W. A. FULLER: Estimation for Autoregressive Processes with Unit Roots. Annals of Statistics, Vol. 7 (1979), pp 1106–1120.
13. HUNYADI L.: Idősorok feltáró elemzése. OTKA Tanulmány, kézirat, Budapest, 1992.
14. S. KARIN – H. M. TAYLOR: Sztochasztikus folyamatok. Gondolat, Budapest, 1985.
15. KŐRÖSI G. – LOVRICS L. – MÁTYÁS L.: Aggregation and the Long Run Properties of Economic Time Series. International Congress on Modelling and Simulation, Perth, 1993.

16. D. KWIATKOWSKI – P. C. B. PHILLIPS – P. SCHMIDT – Y. SHIN: Testing the Null Hypothesis of Stationarity against the Alternative of a Unit Root: How Sure are we that Economic Time Series have a Unit Root? Journal of Econometrics, 1992. No. 1/3, pp 159–169.

17. J. C. NANKERVIS – N. E. SAVIN: The Student's t Approximation in a Stationary First Order Autoregressive Model. Econometrica, Vol.56 (1988), No. 1, pp 119–145.

18. C .R. NELSON – C. I. PLOSSER: Trends and Random Walks in Macroeconomic Time Series. Journal of Monetary Economics, Vol. 10 (1982), pp 139–152.

19. NEMÉNYI J.: A strukturális változások kezelése az átmenet gazdaságának ökonometriai modelljeiben. Közgazdasági Szemle, XLI(1994), 967–988 old.

20. J. NYBLOM: Testing for Deterministic Linear Trend in Time Series. J.A.S.A., Vol. 81 (1986), No. 394, pp 545–549.

21. J. NYBLOM – T. MÄKELÄINEN: Comparisons of Tests for the Presence of Random Walk Coefficients in a Simple Linear Model. J.A.S.A., Vol. 78 (1983), No. 384, pp 856–864.

22. P. PERRON: The Great Crash, the Oil Price Shock and the Unit Root Hypothesis. Econometrica, Vol. 57 (1989), No. 6, pp 1361–1401.

23. P. PERRON: Tests of Joint Hypotheses for Time Series Regression with a Unit Root. Advances in Econometrics, Vol. 8 (1990), pp 135–159, JAI Press Inc.

24. P. C. B. PHILLIPS: Time Series Regression with a Unit Root. Econometrica, Vol. 55 (1987), No. 2, pp 277–301.

25. P. C. B. PHILLIPS: Regression Theory for Near-Integrated Time Series. Econometrica, Vol. 56 (1988), No. 5, pp 1021-1043.

26. RAPPAI G.: Tőkepiaci elméletek. Kézirat, Pécs, 1994.

27. J. D. SARGAN – A. BHARGAVA: Testing Residuals from Least Squares Regression for Being Generated by Gaussian Random Walks. Econometrica, Vol. 51 (1983), No. 1, pp 153–174.

28. P. SCHMIDT: Dickey-Fuller Tests with Drift. Advances in Econometrics, Vol. 8 (1990), pp 161–200, JAI Press Inc.

29. F. SOWELL: The Fractional Unit Root Distribution. Econometrica, Vol. 58 (1990), No. 2, pp 495–505.

30. J. H. STOCK: Asymptotic Properties of Least Squares Estimators of Cointegrating Vectors. Econometrica, Vol. 55 (1987), No. 5, pp 1035–1056.

UNIT ROOTS AND THEIR TESTS

The article gives an up to date survey on the unit root problem. First it summarizes the basic concepts of stochastic time series analysis underlining the contradictions of the stationarity assumption and the tests of stationarity. Then it exposes the unit root problem in economic time series and its relation to the cointegration and econometric model building. For the simplest processes and models Dickey-Fuller tests are analyzed in details and their practical application is demonstrated by a simple example of the Budapest Exchange Stock. Unit root tests for more sophisticated processes are treated in a less detailed way. Among the further problems of the unit root literature seasonal and fractional integration, nearly integrated and local trend processes, the unobservable component models and the general regression models are briefly mentioned. As a conclusion, the study shows that even the most complex models seem to be too simple to describe the movement of the main macro indicators of the Hungarian economy in the period of transition. So further research in this field seems to be inevitable.

A Gazdaságmodellezési Társaság III. Szakértői Konferenciája

Dobogókő, 1994. október 4-6.

A GMT hamadik szakértői találkozójának ezúttal a volt BM Üdülő egyik, szállodává átalakított épülete adott otthont. Hasonlóan az első két találkozóhoz, ezúttal is a szakma leghűségesebb művelőiből álló, mintegy 40-50 résztvevő gyűlt össze, főleg Budapestről. (Sajnos a vidéki műhelyek alig voltak képviselve.) Tekintve a szakma beszűkülését, a szervezők még ajánlásként sem fogalmaztak meg témákat, vagy témaköröket, sőt törekedtek arra, hogy a közvetlen modellezésen némiképp túlmutató, annak hátterét, alapjait, feltételeit, alkalmazási lehetőségeit vázoló előadások is szerepeljenek a programban. A résztvevők viszonylag kis száma, valamint a szerteágazó témájú előadások indokolták, hogy a hagyományoknak megfelelően, ezúttal sem szerveztek párhuzamos szekciókat.

Az első szekció sajnálatos eseménye volt az, hogy *Bródy András* kisebb balesete miatt nem tudott eljönni, és így nagy érdeklődéssel várt előadása elmaradt. (Ugyanezt az előadást a GMT novemberi közgyűlésének szakmai programjaként, később Bródy András megtartotta.) Az első napi szekció *Meszéna György* és *Armai Zsolt* közös előadásával indult, mely előadás egy igen élő, gyakorlati feladat, a banki mérleg-management probléma operációkutatási eszközökkel történő megközelítéséről számolt be. Az előadás érdekessége és ereje abban állt, hogy egy elméleti és egy gyakorlati szakember külön-külön, mégis egymással harmonizálva vázolta fel a probléma két lehetséges vetületét és a megoldás útját. Ugyancsak érdekes volt az előadás után kialakult vita, amely a hierarchikus döntési struktúrák egyes ellentmondásaira világított rá.

A nyitó szekció másik előadását *Tarján Tamás* tartotta a Jánossy-féle trendvonalak elméletének egyes kérdéseiről. Az előadás aktualitását az adta meg, hogy Magyarország előkészületben lévő európai csatlakozása szükségessé teszi a rövid-, de méginkább a hosszútávú fejlődési tendenciák összehasonlító elmezését.

A második (szerda délelőtti) szekció *Kopányi Mihály* előadásával kezdődött. Az előadás jellegzetesen nem modellezési kérdésekkel foglalkozott, ugyanakkor színvonalasan és érdekesen bemutatott témája (a bank- és adóskonszolidáció) mindenki számára szükséges és hasznos alapismereteket, az esetleges e területet is érintő modellezés számára pedig nélkülözhetetlen háttérinformációt adott. *Horváth Gézáné* előadása az operációkutatás oktatásának egyes kérdéseivel foglalkozott, s ez azért váltott ki nagy visszhangot, mivel a résztvevők jó része szintén az oktatásban dolgozik, így a felvetett problémák ismerősek és közérdekűek voltak.

Pap Zoltán a távközlési piac feltárására irányuló kísérletekről számolt be. Ennek az előadásnak sajátossága az volt, hogy konkrét, mindenki által jól érthető mikrogazdasági alkalmazásokra irányuló modellkísérleteket, azok eredményeit és nehézségeit interpretálta. *Rappai Gábor* ezzel szemben a tőkepiaci árfolyamelméletek magyarázatára, indoklására készített klasszikus és modern szemléletű ökonometriai elemzéseit ismertette. Érdekes volt az elmélet számszerű interpretációja amerikai és magyar tőzsdeadatok összehasonlításában. A délelőtt utolsó előadása *Mihályffy László* nevéhez fűződik, aki egy statisztikai probléma (az adatfelvételeknél a nemválaszolások torzító hatása) kapcsán egy RAS-hoz hasonló algoritmust mutatott be, amely segítségével olyan súlyrendszert (kombinált kétdimenziós eloszlást) tud előállítani, ami kielégít előre megadott peremfeltételeket, ugyanakkor az ismert eljárásoknál egyszerűbb és gyorsabban konvergál. Az eredményként kapott eloszlás az utólagos rétegzés, illetve az abból történő torzítatlan becslés elvégzéséhez szükséges.

A délutáni szekcióban először *Kele Péter* a klasszikus készletmodellezés útját járva több sorozatnagyság- és készletnagyság modellt, illetve modellváltozatot fejlesztett ki. Ezt követte *Radnai Márton* előadása, aki a kárpótlási jegyek árfolyamának mozgását, a mozgás mechanizmusát, rugóit elemezte egyszerű modell segítségével. Meg kell említeni, hogy ő volt a konferencia legfiatalabb előadója (hiszen még a BKE hallgatója), ugyanakkor nagyon jó érzékkel választott aktuális, általános érdeklődésre számottartó és hálás témát. Valószínű, hogy kutatásait tovább folytatva még érdekesebb eredményeket ér el e téren.

A legfiatalabbat a szakma egyik „öreg rókája" *Simon András* követte, aki az MNB-nél készülő átfogó makromodell fő jellemzőit ismertette. Ez a modell – szemben a szerző korábbi ökonometriai modelljeivel – szakít a szigorú ökonometriai szemlélettel és rugalmasabb, ugyanakkor persze több vitára alapot adó ún. kalibrált modell, amely paramétereit nem becsléssel, hanem különféle szakmai megfontolások alapján határozzák meg. A modell által indukált viták nem is maradtak el, bár ezek az idő rövidsége miatt nem annyira plenáris, mint inkább kétoldalú keretekben zajlottak le. *Hajdu Ottó* egy saját készítésű szegénységi mutató egyes tulajdonságait boncolgatta tépelődő alapossággal. E sorok írója talán nem követ el indiszkréciót akkor, ha elmondja, hogy a szerző saját bevallása szerint előadása közben, illetve az azt követő kérdések és megjegyzések kapcsán jött rá a vizsgált probléma (a mutatószám eleget tesz-e, és ha igen, milyen mértékben tesz eleget a vele szemben támasztott követelményeknek) megoldásának egyik fontos lépésére, amelyet valamilyen formában (jövő évi konferencia, Szigma stb.) remélhetőleg megoszt a téma iránt érdeklődőkkel.

Halpern László hazánk és a közép-kelet európai országok külgazdasági együttműködésében megjelenő komparatív előnyökkel foglalkozott. Előadásának nagy értéke volt, hogy nehéz és bonyolult fogalmakat alkalmas táblák és ábrák segítségével mindenki számára szemléletessé és megfoghatóvá tudott tenni. *Neményi Judit* szintén igen izgalmas és aktuális témáról, az államadósság kérdéseiről beszélt. Előadásában ötvöződött a gyakorló gazdaságpolitikus, az elmélet iránt fogékony kutató és a modellezéstől megválni nem tudó ökonométer gondolkodása, szemlélete. Kár, hogy az idő rövidsége miatt a meglehetősen összetett problémákat csak érinteni tudta, de a hallgatóság így is megérezte a téma szépségeit, a kidolgozás nehézségeit, és megértett valamit abból a gazdaságpolitikai döntési helyzetből is, ami az adósság szorításából adódik.

A nap befejező előadását *Vértes András* tartotta, aki a rejtett gazdaságot vizsgáló kutatásokról tartott egy rövid beszámolót. Maga az előadás nem foglalkozott modellezéssel, mégis osztatlan sikert aratott a modellezők körében is, részben informatív volta, részben pedig az előadó publicisztikai stílusú közvetlensége miatt.

Az utolsó nap szekciója *Zalai Ernő* előadásával kezdődött. A szerző a műhelyében már mintegy 15 éve folyó általános egyensúlyelméleti modellezés tapasztalatairól, és újabb fejleményeiről számolt be. *Hunyadi László* statisztikai témájú előadása egy kétfázisú mintavételi tervet mutatott be, amely a részletek kidolgozása után alkalmasnak tűnik a gazdaságstatisztikai adatfelvételeknek a jelenleginél lényegesen hatásosabb megvalósítására. *Hamecz István* a MNB makromodell egy blokkját, a lakossági megtakarításokat elemezte racionális várakozásokon alapuló ökonometriai modellel. *Simonovics András* az utóbbi években híressé vált „Együttélő nemzedékek, illetőleg korosztályok" modellből kiindulva kereste a dinamika jellemzőit, a ciklusok létezésének, milyenségének, az esetleges ciklusok interpretációjának problémáját.

A konferencia záró előadását *Augusztinovics Mária* tartotta, aki nyugdíjfinanszírozási kérdésekből kiindulva tiszta demográfiai feladathoz, a népesség növekedésének leírásához és prognosztizáláshoz jutott el. Előadása, melyet a tőle megszokott lendülettel és közvetlenséggel tartott meg, sokunk számára azt bizonyította, hogy az absztrakt modellek által fegyelmezett gondolkodású kutató, még számára új tudományterületeken is komoly eredményeket képes elérni, s ez, úgy gondolom, a modellezés nagy eredménye és az egész konferencia talán legfőbb szimbolikus tanulsága is volt.

A konferencia programjának fenti, vázlatos bemutatása is bizonyítja azt a tényt, hogy a felmerülő témák választéka a lehető legszélesebb volt, igazán bő keresztmetszetet adott a modellezés gazdag területéről. Ha a hallgató nem is tudott elmélyülni az egyes előadások részleteiben, úgy vélem, nagyon hasznos és tanulságos volt látni ezt a valóban sokszínű tevékenységet. Persze mindez nem fedi el azt a tényt, hogy a szakma válságban van, amit talán a sokirányú útkeresés mellett az is jelez, hogy nem alakult ki sűrűsödési pont, az egyes előadások jószerivel egymástól függetlenül, izolált egyéni munkával készültek, az igazi előrehaladást mutató műhelymunkának csupán nyomait lehetett felfedezni.

És mégis mindannyiunkat bizakodással töltött el ez a néhány nap. Aki eljött, komolyan vette a konferenciát: leszámítva Bródy András említett sajnálatos balesetét, egyetlen bejelentett előadás sem maradt el, és még helycserére is csak egyszer került sor. Ez már önmagában is szokatlan egy ilyen konferencián, de az méginkább, hogy a zsúfolt program, a gyönyörű környezet és a jó idő ellenére szinte mindenki elejétől végéig szorgalmasan végighallgatta a szekciókat. Ami még jó érzéssel töltött el, az az volt, hogy az utolsó napi szekció sem ürült ki, a hallgatóság szinte végig meg nem fogyatkozó számban, türelmesen és figyelemmel várta végig az utolsó előadást is.

Mint arra már utaltam, a rendezvény ideális környezetben zajlott, értve ezen mind a szállást, mind az ellátást, mind pedig a pilisi táj szépségeit. Ha mindenáron valami kifogásolni valót keresnénk, talán csak azt lehetne említeni, hogy nem volt olyan helység, ahol este, fehér asztal mellett kötetlen szakmai-baráti beszélgetéseket lehetett volna tartani, hiszen a zenétől és flipperzajtól hangos piciny bár erre alkalmatlan volt.

Mindezeket egybevéve, és ez volt a résztvevők általános véleménye is, jó hangulatú, sikeres konferenciát tudhatunk magunk mögött, amiért köszönet jár mindenkinek, aki valamilyen formában, szervezőként, előadóként vagy egyszerűen csak résztvevőként, az esemény részese volt.

Hunyadi László