A KÉSZLETGAZDÁLKODÁSI MODELLEK IRÁNYZATAINAK RENDSZEREZŐ ÁTTEKINTÉSE[1]

HAUCK ZSUZSANNA
PTE KTK

Jelen munka célja a készletgazdálkodás alapmodelljeinek, valamint kiterjesztési irányzatainak rendszerező bemutatása. Alapmodellnek tekintjük a kereskedőkre vonatkozó Economic Order Quantity (EOQ), valamint a termelőkre vonatkozó Economic Production Quantity (EPQ) modelleket. A kiterjesztési lehetőségeket tárgyaljuk tartalmuk szerint: nyolc irányzatot sorolunk a külső, további hatot pedig a belső korlátokból adódó kiterjesztésekhez. Külön szakaszban foglalkozunk emellett a különböző módszertani megközelítésekkel. Lehetőségeinkhez mérten összevetjük az elméletet a gyakorlat összefüggéseivel, köztük a Toyota Termelési Rendszerrel.

Kulcsszavak: gazdaságos sorozatnagyság, készletezési költség, sorozatkezdési költség, hátralék

1 Bevezetés

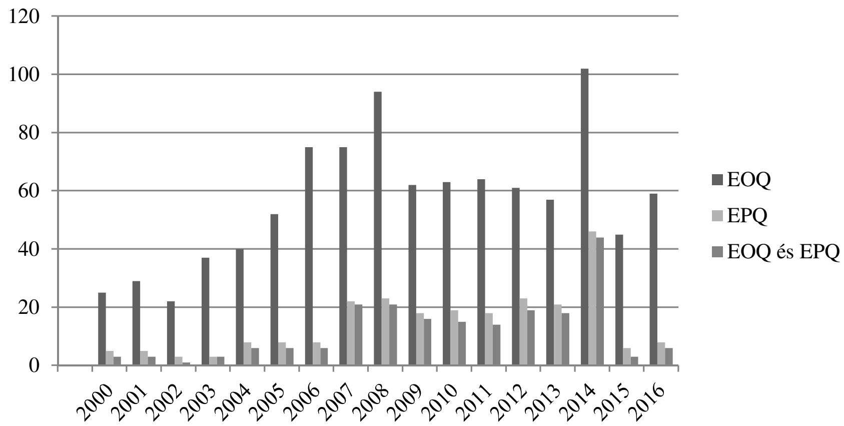
Jelen munkával Komlósi Sándort szeretném köszönteni 70. születésnapja alkalmából. Nagy örömömre szolgál, hogy nemcsak hallgatója, de kollégája is lehettem, lehetek Komlósi professzornak, akire mind szakmailag, mind emberileg maximálisan felnézek. A tanulmány doktori értekezésem (Hauck, 2015) szakirodalmi áttekintésének átdolgozott, továbbfejlesztett változata, melynek apropóját az adja, hogy az ünnepelt biztatására nyújtottam be disszertációmat egy nemzetközi megmérettetésre. Szeretném megmutatni, hogy a látott jó példa alapján nem állok meg a díj elnyerése után, hanem igyekszem ugyanolyan alázattal és elszántsággal folytatni a munkát, ahogy azt tőle is mindig láthatom.

A készletgazdálkodás modellezésének szükségességét mi sem bizonyítja jobban, hogy minden vállalat rendelkezik kisebb-nagyobb mennyiségű készlettel. A készletek képzésének, keletkezésének fő oka, hogy a kereslet és a kínálat időben sok esetben nem egyszerre merülnek fel. A készletek jellemző jelenlétét igazolja továbbá, hogy Heizer et al. (2010) szerint az anyagáramlási időnek csak mintegy öt százalékában történik tényleges megmunkálás, a fennmaradó időben a termékek, félkész termékek, alkatrészek, nyersanyagok készlet formájában várakoznak.

A készletgazdálkodási modellek közös célja, hogy megtalálják az optimumot a túl- és az alulkészletezés kockázatai mellett, azaz a lehető legmagasabb fogyasztó-kiszolgálási szintet érjék el a lehető legalacsonyabb költség mellett.

[1]Beérkezett: 2017. január 20. E-mail: hauckzs@ktk.pte.hu.

Ennek megfelelően léteznek a profit maximumát kereső modellek, de sokkal jellemzőbb a költségminimum céljának kitűzése. Készletgazdálkodási modelleket az *International Journal of Production Economics* (IJPE) és a *European Journal of Operational Research* (EJOR) című szakfolyóiratok publikálnak a leggyakrabban. Az IJPE több mint 600, az EJOR több mint 500 tanulmányt jegyez a készletgazdálkodásban alapmodellnek számító EOQ (*Economic Order Quantity*, ld. 2.1.) témakörében. Ezek közül 500, illetve 350 feletti számú cikket publikáltak az ezredforduló óta. Az *1. ábra* ezek éves szintű megoszlását mutatja, feltüntetve az EPQ (*Economic Production Quantity*, ld. 2.2.) modell előfordulását is. Mivel az EPQ modellből viszonylag könnyen származtatható az EOQ változat, ezért az EPQ-t tartalmazó tanulmányok gyakran hasonlítják össze a két modell eredményét egymással. Az ábrán is jól látszik, hogy kevés az olyan cikk, amely csak önmagában foglalkozik termelő vállalat modelljével, azaz EPQ-val.



1. ábra. EOQ és EPQ modellek előfordulása a 2000-2016 időszak IJPE és EJOR számaiban (2016. december 31-ig)

EOQ/EPQ témában a legtöbb tanulmány a két lapban 2014-ben született, melynek oka, hogy EOQ modell száz éves évfordulója alkalmából az IJPE különszámban való publikálási lehetőséget hirdetett, és ezen tanulmányok 2014-ben jelentek meg. A második legtöbb publikációt 2008-ban könyvelhette el a két folyóirat. Az összesen 96 cikkből 73 csak EOQ, 2 csak EPQ, további 21 pedig EOQ és EPQ modellekkel egyaránt foglalkozott. Ezt követően némi visszaesést mutat a grafikon, ami nagyrészt azzal magyarázható, hogy 2008-tól kezdve egyre több készletgazdálkodási témájú cikket közölnek olyan neves lapok (gyakorisági sorrendben), mint a *Computers & Industrial Engineering*, a *Computers & Operations Research*, az *Applied Mathematical Modelling* vagy az *Omega*.

A következő szakaszokban bemutatjuk a készletgazdálkodás két alapmodelljét, majd tizenhárom, tartalom szerinti kiterjesztési irányzatukat vesszük sorra. A negyedik részben módszertani megközelítésekkel foglalkozunk. Az ezt követő összegzésben röviden kitérünk a továbbfejlesztési lehetőségeire is.

Törekszünk a modellek gyakorlati relevanciájának hangsúlyozására, ennek érdekében az arra alkalmas eseteket összevetjük például a Toyota Termelési Rendszer (TTR) gyakorlatával.

2 A két alapmodell

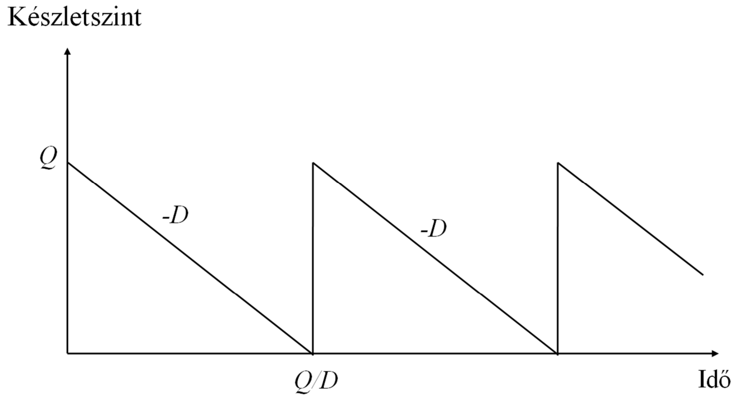
2.1 Az Economic Order Quantity (EOQ) modell

A készletgazdálkodás alapmodellje nemrég ünnepelte századik születésnapját. Harris (1913a és 1913b) alapgondolatának lényege, hogy a sorozatkezdési (rendelési vagy átállási) és készletezési költségek, valamint a kereslet ismeretében határozzuk meg a gazdaságos sorozatnagyságot. Annál több terméket érdemes egyszerre legyártani, illetve rendelni, minél drágább a rendelés, magasabb a kereslet és olcsóbb a készlettartás. A modell optimális készletezési politikát határoz meg, nem veszi figyelembe a gyártáshoz, elosztáshoz, szállításhoz kapcsolódó költségeket, ahogy az árbevételt sem.

Harris (1913a és 1913b) Economic Order Quantity (EOQ) modellje értelmezhető kereskedőkre és termelő cégekre egyaránt. Legegyszerűbb változata a *2. ábra* készletalakulási diagramjából indul ki. A gyakran fűrészfoghoz hasonlított modell készletezési ciklusokra osztja a tervezési időintervallumot. Minden ciklus elején egy Q mennyiségű termékből álló sorozat érkezik a raktárba. Ezek lehetnek késztermékek, félkész termékek, de akár nyersanyagok is. A beérkezett mennyiséget feltételezéseink szerint egyenletes kereslet emészti fel. A következő egy év keresletét D-vel jelölve (a jelölések jegyzékét ld. az *1. táblázatban*) egy sorozat Q/D idő alatt fogy el, ennyi tehát egy periódus hossza. A vizsgált időintervallumban (egy év) előforduló ciklusok száma ennek reciproka, vagyis D/Q. Minden készletezési periódus elején s sorozatkezdési költség merül fel, amely kereskedő esetén a rendelésfeladás, gyártó esetén az átállás költsége. Ez a költség fix, és független a sorozatnagyságtól. Az alapmodellben feltételezzük, hogy az átfutási idő nulla, tehát amikor elfogy a raktárkészlet, úgy azonnal be tud érkezni egy új sorozat. Erre azért is szükség van, mert hiány nem megengedett.

Jelölés	Jelentése
D	napi kereslet (db/nap)
m	termelési ráta (db/nap)
s	sorozatkezdési költség (ciklusonként merül fel)
h	egy termék készleten tartásának napi költsége
b	termékenkénti napi hátralékköltség
Q	sorozatnagyság (db), döntési változó

1. táblázat. A tanulmányban alkalmazott jelölések jegyzéke

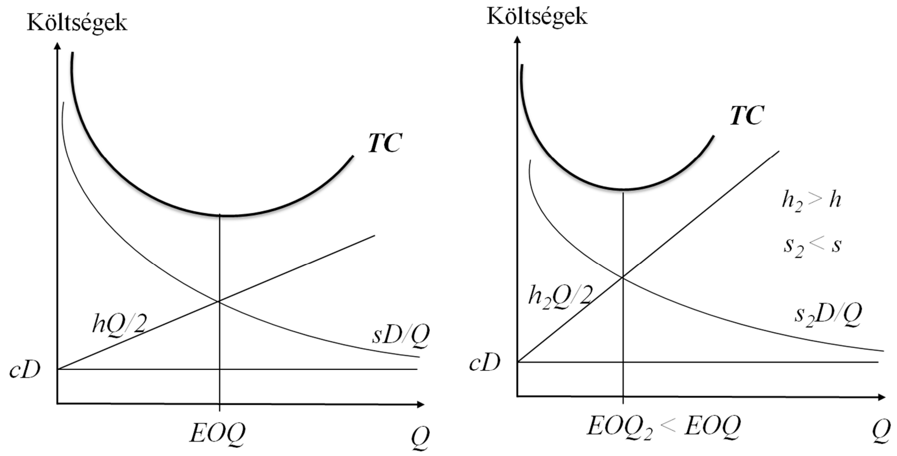


2. ábra. Az EOQ alapmodell készletalakulási diagramja
Forrás: Harris (1913a, 1913b) alapján saját szerkesztés

A fentiek alapján egy év alatt sD/Q sorozatkezdési költség merül fel, melyhez hozzáadódnak még a készlettartási és a termékkel kapcsolatos költségek. A fajlagos készlettartási költség (h) állandó, és mivel a kereslet is állandó, eloszlása pedig egyenletes, ezért $Q/2$ átlagos készletszint után merül fel. Gyártás esetén a c előállítási költség a keresletnek megfelelő mennyiségben merül fel, amely kereskedő esetén a beszerzési árat jelenti. Az összköltség függvény tehát:

$$TC^{EOQ}(Q) = sD/Q + hQ/2 + cD\,. \tag{1}$$

Mivel a döntéshozó számára adott a kereslet, valamint a sorozatkezdési, a fajlagos készlettartási és a termékkel kapcsolatos költségek, ezért a sorozatnagyság az egyetlen döntési változó. A cél az összköltség minimalizálása, melyhez a gazdaságos sorozatnagyságot a $Q = \sqrt{2sD/h}$ Wilson-formulával (Wilson, 1934) határozhatjuk meg. Erre a formulára lesz ugyanis nulla az első derivált, a második derivált pedig pozitív. Az összköltség függvény szerkezetét a *3. ábra* bal oldala mutatja be.



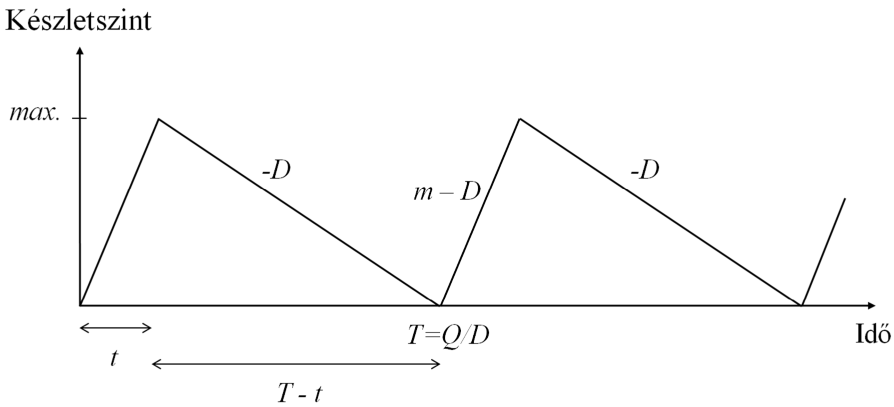
3. ábra. Az összköltség függvény szerkezetének szerepe a sorozatnagyság változtatásában

A 3. ábra jobb oldala azt mutatja meg, hogyan lehet alacsonyabb gazdaságos sorozatnagyságot elérni. Erre azért keressük a választ, mert a kiváló minőség előállításáról is híres Toyota Termelési Rendszerben (TTR) a kívánatos sorozatnagyság egységnyi. A Wilson-formula alapján egyik megoldás lehetne a kereslet csökkentése, ez azonban nyilván nem célja a vállalatnak. A heijunka elv alkalmazásának (a termelősor kiegyensúlyozása) köszönhetően JIT rendszerekben a keresletet konstansnak tekinthetjük, mivel a szerződéseket bizonyos időszakra előre kötik.

A sorozatkezdési költség csökkentése azonban célja a vállalatnak, és ebben a Toyota rendkívüli eredményeket ér el. A folyamatos fejlesztésnek köszönhetően ugyanis órákról másodpercekre tudja csökkenteni az átállási időket. Hasonlóan sikeres ebben szolgáltatások terén a Southwest Airlines, hiszen akár negyed óra elég a dolgozóinak arra, hogy fogadjanak egy gépet, és teljes mértékben felkészítsék azt a következő felszállásra (ld. Oliva és Gittel, 2007). Ezzel radikálisan csökkenthető s, aminek köszönhetően a sorozatkezdési költségeket mutató görbe az origóhoz közelebb tolódik (ld. 3. ábra), így korábban metszi a készletezési költség egyenesét, vagyis csökken a gazdaságos sorozatnagyság. A Wilson-formula nevezőjében álló h fajlagos készlettartási költséget emellett a Toyota magasabbnak tekinti, mint a vállalkozások általában. A TTR filozófia szerint ugyanis a készletek eltakarják a hibákat, problémákat. A készlettartási költségek lineáris egyenese ennek megfelelően sokkal meredekebb a 3. ábra jobb oldalán, tovább csökkentve ezzel a gazdaságos sorozatnagyságot. Amennyiben a fajlagos készlettartási költséget és a keresletet adottságnak tekintjük, úgy az egységnyi sorozatnagyságot úgy tudja elérni a vállalat, ha a sorozatkezdési költséget $s = h/2D$ mértékűre tudja leszorítani. Ennek a gyakorlati megvalósíthatósága meglehetősen korlátozott, mégis kevés olyan tanulmány született, amely kísérletet tett volna a TTR-ben alkalmazandó gazdaságos sorozatnagyság meghatározására. Vörös és Rappai (2016) publikációja új irányzatot indíthat el a témakörben. A szerzőpáros által felvetett probléma azért is érdekes, mert bár a kereslet konstans, az ellátás sztochasztikus természetű ebben a termelési rendszerben.

2.2 Az Economic Production Quantity (EPQ) modell

A fenti EOQ problémát gondolta tovább Taft (1918a és 1918b), feltételezve, hogy a termékek nem a készletezési periódus elején, egyszerre, hanem folyamatosan érkeznek a raktárba. Ezt értelmezhetjük úgy is, hogy a termelési ráta véges. A modell neve Economic Production Quantity-re változott, mivel leginkább termelő cégekre értelmezhető. A kereslet itt is állandó és egyenletes, hiány továbbra sem megengedett. A termelési rátát m-mel jelöljük, melynek meg kell haladnia a D keresletet, így időegységenként $(m - D)$ termék érkezik a raktárba. Amikor a termelés leáll, a készletszint eléri a maximumát. A termelés akkor indul be újra, amikor a kereslet teljesen felemészti ezt a készletszintet (*ld. 4. ábra*).



4. ábra. Az EPQ alapmodell készletalakulási diagramja. *Forrás:* Taft (1918a, 1918b) alapján saját szerkesztés

Az EOQ modellhez hasonlóan D/Q periódus van egy évben, így a termék előállításának költsége mellett a teljes sorozatkezdési költség is változatlan az EPQ modellben. A különbség a készleten tartott mennyiségben van, így a készletezés fajlagos költségét most nem a sorozatnagyság, hanem a maximális készletszint fele után számolják fel, ennyi ugyanis az átlagosan készletezett mennyiség. A maximális készletszint meghatározásához arányba kell állítanunk egymással a cikluson belül azt a szakaszt, amikor történik termelés, illetve amikor a termelés szünetel. A 4. ábra jelöléseit alkalmazva t ideig termel a vállalat. Mivel a készletalakulás pozitív meredekségének mértéke $(m-D)$, ezért t idő elteltével $t(m-D)$ lesz a készletszint, ami a maximum, hiszen ettől kezdve a ciklus végéig a készlet elfogyasztása történik. A következő $(T-t)$ ideig a készletszint D meredekséggel csökken nulláig, vagyis az így elfogyasztott mennyiség $(T-t)D$, melynek meg kell egyeznie a $t(m-D)$ maximális készletszinttel. Egyenlővé téve a két kifejezést, valamint felhasználva, hogy $T = Q/D$, azt kapjuk, hogy $t = Q/m$ idő alatt készül el egy sorozat, és mivel addig $(m-D)$ meredekséggel kerültek a termékek a raktárba, ezért a maximális készletszint $(m-D)Q/m$.

Az összköltség függvény tehát:

$$TC^{EPQ}(Q) = sD/Q + h(m-D)Q/2m + cD \,, \tag{2}$$

amely a $Q^{EPQ} = \sqrt{2sD/h}\sqrt{m/(m-D)}$ sorozatnagyság mellett veszi fel minimumát. A Wilson-formulát a $\sqrt{m/(m-D)}$ módosító faktor növeli, mivel az nagyobb egynél. A gazdaságos sorozatnagyság annál közelebb kerül az EOQ modell eredményéhez, minél magasabb a termelési ráta. A módosító faktor úgy tudja elérni az elméleti egyes szintet, ha a termelési ráta végtelen.

Az EPQ modellben már sokkal reálisabbak az esélyek a TTR által előirányzott egységnyi optimális sorozatnagyság elérésére, ugyanis a termelési ráta célszerű változtatása kézenfekvő döntési lehetőség a vállalat eszköztárában. A kereslet, a sorozatkezdési költség, valamint a fajlagos készlettartási költség ismeretében $m = Dh/(h-2sD)$ termelési ráta mellett lesz Q^{EPQ} egységnyi.

Megjegyezzük, hogy az EOQ és EPQ modellekben előforduló költségelemek mérése a gyakorlatban jelentős kihívás elé állítja a vállalatot. A fajlagos készlettartási költségek kiszámítására is léteznek különböző eredményt adó módszerek, de sokkal problémásabb a sorozatkezdési (rendelési) költségek kalkulálása.

3 Kiterjesztési irányzatok tartalom szerint

A két bemutatott készletgazdálkodási alapmodellnek számos kiterjesztési irányát jegyzi a szakirodalom. Az ezeket elindító alapgondolatok épülhetnek a korábbi modellekben konkrétan megfogalmazott vagy kimondatlan feltevésekre. Andriolo et al. (2014) a modellek fejlődésének tizenöt mérföldkövét definiálta, melyeket a *2. táblázat* időrendben listáz. A két alapmodell publikálását követően az első komolyabb áttörést Wagner és Whitin (1958) dinamikus készletgazdálkodási modellje hozta. Az optimalizálás célja itt is a sorozatkezdési és készlettartási költségek minimalizálása volt, de a termék *kereslete* nem konstans, hanem *időben változó*. A készletezési politika kialakítása tehát keresleti előrejelzésre alapszik.

A szakirodalmi újdonság tartalma	Első publikáció megjelenése	Általános érvényű, szemléletbeli jelentősége a készletgazdálkodásban
EOQ alapmodell	1913	A készletgazdálkodás egyszerű matematikai modellezése
EPQ modell	1918	
Időben változó kereslet	1958	Piaci változások és dinamika
Romlandó termékek	1963	
Mennyiségi kedvezmény	1963	
Infláció	1975	
Változó átfutási idő	1979	A termelésre vonatkozó korlátok, változók
Kereskedelmi hitel	1985	
Folyamatingadozás	1986	
Hiány és hátralék	1987*	
Javítás és újrahasznosítás	1996	
Korlátozott szállítói kapacitás	1999	A beszerzésre vonatkozó korlátok, változók
Hibás termékek	2000	
Környezeti fenntarthatóság	2011	Fenntarthatóság
Társadalmi fenntarthatóság	2012	

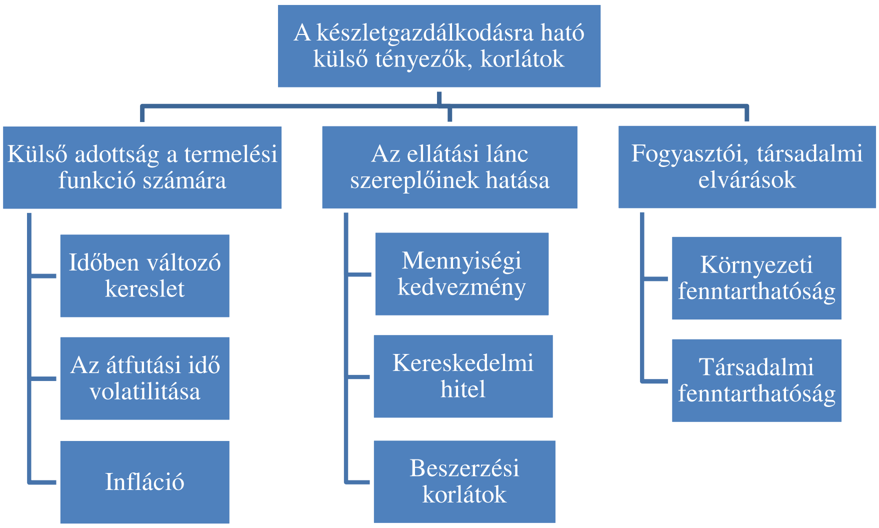
* Pentico és Drake (2011) alapján 1967

2. táblázat. A készletgazdálkodási modellek fejlődési íve. *Forrás:* Andriolo et al. (2014) alapján saját szerkesztés

Az eredeti EOQ modellhez képest az EPQ tulajdonképpen már utal rá, hogy a termékek nem a sorozatkezdés pillanatában készülnek el. Az *átfutási időt* az elsők között vette figyelembe Hadley és Whitin (1963), Gross és Soriano (1969), valamint Vinson (1972). Ezeknek és a hasonló modelleknek közös alapja, hogy az egyes sorozatok bizonyos leszállítási idő után, nem pedig az igény jelzésének pillanatában érkeznek meg a raktárba, legyen szó akár termelő, akár kereskedő vállalatról. A leszállítási idő mértékének ismeretében meghatározzák, mikor kell rendelést feladni ahhoz, hogy a sorozat akkor érkezzen be, amikor éppen lenullázódik a készletszint. A rendelési pont annál a készletszintnél van, amennyi éppen a leszállítási időre eső kereslet mértéke.

A modellek nagy része általában nem áll meg ennél az újításnál, hanem a magyar modellnek (Ziermann, 1964 és Prékopa, 1965) megfelelően számolnak mind az átfutási idő (elsőként Liberatore, 1979), mind a kereslet várható értékével és szórásával. A leszállítási időre eső kereslethez képest ezért biztonsági készletet adnak, és ezen összegnek megfelelő készletszinten állapítják meg a rendelési pontot. Biztonsági készlet képzésével a vállalat a fogyasztó-kiszolgálási szintet tudja növelni, csökkentve ezzel a készlethiány előfordulásának valószínűségét.

A kereslet, valamint az átfutási idő ingadozásaira a készletgazdálkodási politikát kialakító termelési funkciónak nincsen közvetlenül befolyása. A keresletre leginkább a marketing funkció tud hatással lenni. Az átfutási időt a vállalat alkuereje, saját előállítás esetén innovációs képessége csökkentheti, bizonyos mértékű volatilitás jelenléte azonban természetes. Ezek mellett egyértelműen adottság a vállalat számára az *infláció* mértéke (ld. *5. ábra*). Az árszínvonal általános növekedése, így a vásárlóerő csökkenése nem maradhat ki a vállalatok ár- és költségkalkulációiból, ennek megfelelően jelentős hatással van a készletgazdálkodásra is. Elsőként Buzacott (1975) vizsgálta meg, hogy különböző árazási módszerek mellett hogyan befolyásolja a pénz értékének időbeli romlása a készletezési politikát.



5. ábra. A készletgazdálkodásra ható külső tényezőkből, korlátokból kiinduló kiterjesztési irányzatok

Az 5. ábra a modellek kiterjesztési irányzatainak azon részét rendszerezi, melyek alapgondolata külső tényezők, korlátok megfigyeléséből ered. A kereslet és az átfutási idő volatilitása, valamint az infláció külső adottságnak tekinthető. Ugyancsak a vállalaton kívülről erednek az ellátási lánc szereplőinek hatásai, melyek előfordulását további három fő csoportba soroltuk, ezek a mennyiségi kedvezmény, a kereskedelmi hitel, valamint a korlátozott szállítói kapacitás jelenségét figyelembe vevő modellek.

Az alapmodellekben feltételeztük, hogy a vállalat rögzített beszerzési áron jut hozzá készleteihez. Eladásösztönzés céljából az ellátási lánc szereplői gyakran ajánlanak fel *mennyiségi kedvezményt*, ami azt jelenti, hogy a sorozatnagyság (Q) növelésével a termék ára, vagyis az (1), ill. (2) egyenletek c paramétere csökkenhet. Ez a kedvezmény különböző mennyiségi intervallumokra értendő. Mivel a fajlagos készletezési költségeket általában az áru önköltségének százalékában szokták meghatározni, ezért a c paraméter csökkenése h paraméter csökkenését is maga után vonja. Az EOQ alapmodell összköltség függvénye a következőképpen módosul tehát:

$$TC_d^{EOQ}(Q) = sD/Q + h_iQ/2 + c_iD\ . \tag{3}$$

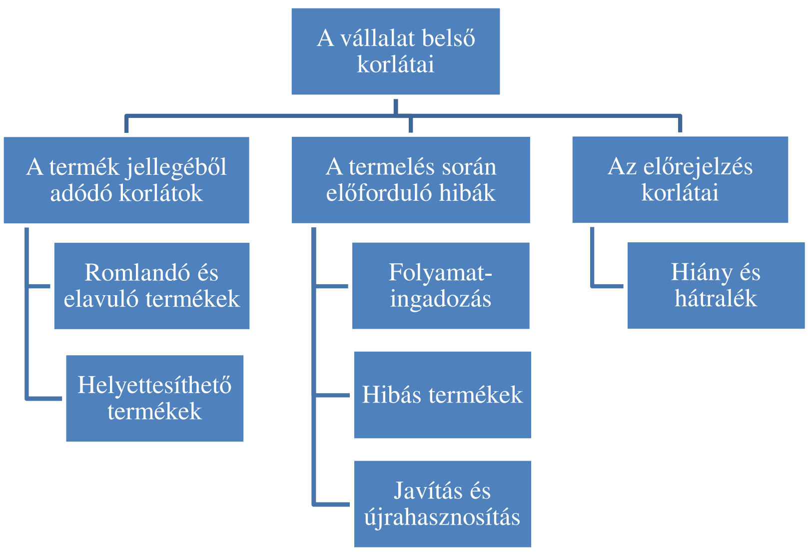
A minimális összköltség kiszámításának módját kutatva Hadley és Whitin (1963) arra a megállapításra jutottak, hogy a gazdaságos sorozatnagyság megszokott módon történő kiszámítását követően az annál magasabb mennyiségekre vonatkozó ártörési pontok összköltségét kell összevetni az addig kapott összköltségekkel. Ennek az az oka, hogy a magasabb mennyiségi intervallumba lépve Q növekedése miatt a sorozatkezdés, c_i csökkenése miatt pedig a termékhez jutás költségei csökkennek, melyhez a $h_iQ/2$ készletezési költséget hozzáadva nem egyértelmű az összköltség változásának iránya. A h_iQ szorzat tagjai ugyanis eltérő irányban mozognak.

Benton és Park (1996) irodalomrendszerező tanulmányukban két fő csoportra osztják az árdiszkontálást megengedő modelleket attól függően, hogy a kereslet függ-e az időtől vagy sem. Mindkét csoporton belül két alcsoportot különböztetnek meg, mivel a mennyiségi kedvezmény vonatkozhat a teljes sorozatra (pl. San-José és Garcia-Laguna, 2009; Taleizadeh és Pentico, 2014) vagy csak az ártörési mennyiségen felüli készletre (pl. Rubin és Benton, 2003). Az így kapott négy alcsoportban újabb két-két kategóriát határoznak meg aszerint, hogy csak a beszerző vagy a beszerző és a beszállító szempontjait együtt veszi-e figyelembe a modell. Megjegyezzük, hogy léteznek a két lehetőséget összehasonlító modellek is (pl. Archetti et al., 2014); a kedvezmény pedig vonatkozhat a szállítási költségekre (Ertrogral et al., 2007), és előfordulhat időszakos formában is (pl. Sari et al., 2012).

A készletgazdálkodási modelleket rendszerező munkájában Glock et al. (2014) definiálja a modellek egy olyan csoportját, amelyek figyelembe vesznek vállalatok közötti ösztönzési módszereket. A mennyiségi kedvezmény mellett a *kereskedelmi hitel* nyújtását sorolják ebbe a kategóriába. A Goyaltól (1985) származó alapgondolat lényege, hogy a beszállító lehetővé teszi a vevő számára, hogy ne a teljesítés pillanatában, hanem bizonyos későbbi időpontban egyenlítse ki a számlát. A felajánlott kereskedelmi hitel kamatmentes vagy rendkívül kedvező kamatozású. A vevő egyrészt befektetheti a hitel mennyiségét a fizetési határidőig, másrészt alacsonyabb készletezési költségekkel számolhat, mivel a kereskedelmi hitel csökkenti a készletekbe fektetett tőke átlagos mennyiségét.

A *beszerzésre vonatkozó korlátok és bizonytalanság* Hariga és Haouari (1999) óta vannak jelen a készletgazdálkodás szakirodalmában. Ezek a modellek nem az ellátási lánc szereplőinek ösztönzési módszereiből indulnak ki, hiszen a beszállítóknak jellemzően érdeke a kereslet kielégítése. A beszállítók kapacitását azonban befolyásolhatják véletlen tényezők, melyek sztochasztikus modellek felírását követelik meg. A beszállítókkal kapcsolatos kockázatokkal foglalkozó modellekben jellemzően nagy szerepet kap az átfutási idő (pl. Louly és Dolgui, 2009; Noblesse et al., 2014).

A vállalati működést, azon belül a készletgazdálkodást is befolyásolják olyan aktuális fogyasztói és társadalmi elvárások, melyek figyelmen kívül hagyása a versenyben történő lemaradást eredményezik. A vállalatok társadalmi felelősségvállalása (corporate social responsibility, CSR) napjaink kiemelt jelentőségű kérdése, amely a marketing funkción keresztül a termelésre is hatással van. Ennek megfelelően a készletgazdálkodási modellekben egyre gyakrabban jelennek meg *környezeti és társadalmi fenntarthatósági* célok. A fenntarthatóság problémaköre Bonney és Jaber (2011) óta terjedt el a készletgazdálkodás irodalmában. Ők vettek először figyelembe olyan környezeti kérdéseket, mint a károsanyag-kibocsátás, a csomagolás, a létesítmények elhelyezkedése vagy a hulladék. Ez logisztikai szempontból újdonságnak számít, ugyanakkor ahogy Andriolo et al. (2014) utal rá, környezeti kérdések már jóval korábban megjelentek Richter (1997), valamint Richter és Dobos (1999) munkáiban, akik bevezették az újrahasznosítás, valamint a javítás lehetőségét a modellekbe. Utóbbi két lehetőséggel a vállalatok belső korlátaiból kiinduló csoportosításban foglalkozunk, mivel a hibás termékek javítását inkább költségcsökkentő, mint CSR célnak tekintjük.



6. ábra. A készletgazdálkodásra ható belső tényezőkből, korlátokból kiinduló kiterjesztési irányzatok

A legújabb modellekben megjelenő *társadalmi fenntarthatóság* azt jelenti, hogy a vállalat célja az emberek életminőségének emelése és fenntartása, minden érintett mentális és fizikai egészségének védelme, valamint a méltányosság. Ennek megfelelően Bouchery et al. (2012) modellje tartalmaz olyan paramétereket, mint a készletgazdálkodásból (sorozatkezdés és készlettartás) következő társadalmi terhek, illetve az ezen a területen dolgozók munkakörülményei.

A készletgazdálkodási modellek belső vállalati korlátokból kiinduló ágát foglalja rendszerbe a *6. ábra*. A kiterjesztési irányzatokat aszerint csoportosítottuk, hogy a termék, a termelés vagy a tervezés sajátosságai követelik-e meg az adott probléma speciális megközelítését. Mindhárom esetben cél a készletezéssel kapcsolatos költségek minimalizálása, de további versenyprioritási tényezők is jelentős szerepet kapnak a modellekben. A termék jellege leginkább az időzítés, a termelési hibák a minőség, míg az előrejelzési korlátok a megbízhatóság szempontjából fontosak.

A termékek jellegét tekintve a fentiekben tárgyalt készletgazdálkodási modellek feltételezik, hogy minden készlet végtelen időhorizonton tárolható. Felmerülhet azonban a készlet *elavulásának* kockázata (pl. Jaarsveld és Dekker, 2011), illetve lehetnek a termékek *romlandóak* is (pl. Thangam, 2012). Az irányzatot Ghare és Schrader (1963) indította el, akik megfigyelték, hogy bizonyos árucikkek romlása jól becsülhető az időnek egy negatív exponenciális függvényével. Ennek megfelelően konstans elavulási rátát alkalmaztak a jelenség vizsgálatára. Covert és Philip (1973) szerint azonban ez a ráta az időben változhat. Az irányzatról irodalmi áttekintést publikált Bakker et al. (2012), melyet Janssen et al. (2016) a legfrissebb tanulmányokkal aktualizált. Megjegyezzük, hogy problémás tárolhatósága miatt az energia mint termék is jelentősen csökkenti a vállalatok mozgásterét. A 2015-ben indult *Journal of Energy Storage* a közelmúltban közölt olyan tanulmányt (Schneider et al. (2016)), amely készletgazdálkodási modellt tartalmaz, s talán egy új interdiszciplináris irányzatot indít el.

A *termékek helyettesíthetősége* lehet korlát, de lehetőség is a vállalatok számára. Shin et al. (2015) rendszerezi a vonatkozó készletgazdálkodási és árazási modelleket, melyekben vagy a beszállító vagy a fogyasztó dönthet a helyettesítés mellett. Az is előfordulhat, hogy valamelyik termék helyettesítője a másiknak, viszont ez a másik irányban már nem igaz.

Eladhatatlanná nemcsak az előállítást követően válhatnak a termékek, hanem a termelési folyamat közben is előfordulhatnak hibák. A *termelési folyamat* bizonyos mértékű *ingadozása* természetes jelenség. A folyamat-ellenőrzés statisztikai módszereinek segítségével megállapíthatjuk, hogy a termelési rendszer kontroll alatt van-e vagy sem. Mivel a folyamat során felmerülő hibákat nem ismeri előre a vállalat, ezért a jelenséget modellező tanulmányok Porteus (1986) óta a hibák előfordulásának bizonyos valószínűségét feltételezik. Rosenblatt és Lee (1986) a probléma kapcsán arra a következtetésre jutott, hogy selejtes termékek előfordulása esetén kisebb sorozatokban célszerű gyártani. Lee és Rosenblatt (1987) vették figyelembe először, hogy a vállalatoknak lehetősége van a termelési folyamat ellenőrzésére a hibák mielőbbi kiszűrése érdekében. Vörös (1999) a Toyota Termelési Rendszerből kiindulva feltételezte, hogy a termelési rátát csökkenthetik a folyamat minőségi problémái. Ha ugyanis minőségi hibát találnak a dolgozók, akkor megállíthatják a termelőszalagot. Hiány keletkezését nem megengedő EPQ modelljében arra a következtetésre jutott, hogy a folyamat minőségének romlása növeli a gazdaságos sorozatnagyságot és csökkenti az átállás és készlettartás éves költségeit. Növeli ugyanakkor a javítás költségeit, így meghatározható az optimális folyamatminőség szintje.

Mivel selejt termékek az előállítási, a szállítási vagy a készletezési folyamat során keletkeznek, ezért ebből a folyamatingadozást figyelembe vevő irányzatból indult ki a késztermékek minőségét, illetve annak ellenőrzését figyelembe vevő irányzat, melynek elindítása Salameh és Jaber (2000) nevéhez fűződik. A *hibás termékek* kiszűrésére tett erőfeszítéseket feltételező modellek első példájában az átvizsgálási periódus végén a selejtes termékek egyszerre távoznak a raktárból, alacsonyabb áron értékesítik őket. A Salameh-Jaber modellben a kereslet kielégítése a minőség-ellenőrzési folyamattal párhuzamosan történik, minden időpillanatban rendelkezésre áll a kereslet kielégítését szolgáló mennyiségű, bevizsgált, jó minőségű termék. Nem keletkezik tehát hiány. Papachristos és Konstantaras (2006) azonban rámutatnak, hogy mivel a selejtarány véletlen változó, ezért ez a feltétel nem elégséges a nem tervezett hiány elkerüléséhez.

Salameh és Jaber (2000) az EOQ alapmodell logikájának megfelelően úgy határozta meg a sorozatnagyságot, hogy a készlettartási és sorozatkezdési költségek összegének minimumát kereste a tervezési időhorizonton. Mivel a selejtarány valószínűségi változó, és befolyásolja a költségeket, ezért a szélsőérték kiszámításához az összköltség várható értékét használja fel a szerzőpáros. Maddah és Jaber (2008) modelljében emellett a készletezési ciklusok hossza helyett is annak várható értéke szerepel. Ha alacsonyabb a jó minőségű termékek aránya egy sorozatban, akkor azt hamarabb emészti fel a kereslet, így a ciklus előbb ér véget, és fordítva. Megállapításaik szerint a gazdaságos sorozatnagyságot növeli a selejtarány ingadozása.

Salameh és Jaber (2000) megközelítése szerint a rendszer az első periódusban felveszi a selejtarány valószínűségi változó aktuális értékének megfelelő szintet, és ettől kezdve minden egyes ciklusban ugyanígy viselkedik. Maddah és Jaber (2008) azonban megengedi, hogy minden új ciklus elején új értéket vegyen fel a valószínűségi változó. Vörös (2013) ezt a két megközelítést összefüggő (connected), valamint egymástól független ciklusoknak (independent cycles) nevezi. Megállapításai szerint a két megközelítés meglehetősen különböző eredményekhez vezethet, egymásnak akár végtelenszeresei is lehetnek a gazdaságos sorozatnagyságok.

Hiány akkor keletkezik, ha adott időegység alatt magasabb a kereslet, mint a jó minőségű kínálat, és a vállalatnak nem állnak rendelkezésére biztonsági készletek. Vörös (2013) modelljében a hiány nem tervezett, hanem véletlenszerűen fordul elő. Mégpedig a keresletet konstansnak tekintve olyankor, amikor selejtarány a vártnál magasabb. Khan et al. (2010) tanulmányában nem a véletlen, hanem a lassú minőség-ellenőrzés miatt áll elő hasonló helyzet. Az átvizsgálás sebessége tanulási (felejtési) görbe szerint változhat. Empirikus adatokból kiindulva Jaber et al. (2008) szerint a beszállított termékek selejtaránya jellemzően egy bizonyos tanulási görbének megfelelően csökken. Ez a megállapítás alapfeltevéssé vált további modellekben. A tanulási görbe Khan et al. (2014) egy későbbi munkájában is megjelenik, mégpedig a termelési rátára vonatkozóan. A szerzők a teljes ellátási láncra értendő optimális sorozatnagyságot kívánják meghatározni, figyelembe véve, hogy hibák az átvizsgálás során is előfordulhatnak. A teljes ellátási láncra vonatkozó optimalizálás Khan et al. (2011) rendszerező munkája szerint a Salameh-Jaber modell kiterjesztéseinek egyik fő iránya. Külön fejezetet szentel a hibás termékeknek, a minőség kérdésének, a hiány előfordulásának, valamint a fuzzy logikát alkalmazó írásoknak.

Az EOQ/EPQ modellek általában a készletezéssel kapcsolatos összköltség vagy annak várható értékének minimumát keresik. Jaber et al. (2013) modellje azonban profitmaximumot keres, mivel a kereslet nem konstans, és két magyarázó változója a minőség és az ár. A minőség-ellenőrzési irányzatban is találunk példát mennyiségi kedvezményekre, ilyen Hsu és Yu (2009) munkája. A hiányt megengedő tanulmányok közül Wee et al. (2007) a hiány pótlását hibátlannak feltételezi, Eroglu és Ozdemir (2007) azonban azzal is számol, hogy a pótlás során is előfordulhatnak minőségi problémák. Az eddig említett tanulmányokban a megtermelt vagy megvásárolt kötegeket a vállalatok nem küldték vissza beszállítóiknak. Skouri et al. (2014) modelljében ez azonban lehetséges, ha a teljes sorozat hibás.

A szakirodalomban fellelhető modellek jellemzően a gazdaságos sorozatnagyság meghatározásával próbálják minimalizálni a készletezéssel kapcsolatos összköltséget. Hauck (2014a) azonban olyan modellt ír fel, melyben minderre a vállalatnak az átvizsgálási sebesség változtatásának eszköze is rendelkezésére áll. Hauck és Vörös (2015) tanulmányában ugyancsak döntési változó az átvizsgálási sebesség. A selejtarány valószínűségi változó, és Vörös (2013) alapján külön vizsgálják azt a két esetet, amikor a selejtarány ciklusról ciklusra változhat, illetve ugyanannyi marad, mint ahogy az az első periódusban kialakult. A modell EPQ változata a jelen folyóiratban publikált Hauck (2014).

A minőség-ellenőrzést is folyamatnak tekintve, hibák az átvizsgálás során is előfordulhatnak. Az első- és másodfajú hiba elsőként Yoo et al. (2009) modelljében jelenik meg. A másodfajú hibából következően a fogyasztók hozzájuthatnak hibás termékhez, melyet visszajuttatnak a vállalathoz.

Chan et al. (2003) a hibás termékek kezelésének három kategóriáját különbözteti meg. Ezek a leselejtezés, az alacsonyabb áron történő eladás, valamint a *javítás*. Utóbbi alatt érthetünk egyszerű javítást (repair) vagy újrafeldolgozást (remanufacturing), melynek során a termék minőségét olyan szintre javítják fel, mintha eredetileg is tökéletesen sikerült volna a gyártás. Külön irányzatként kezeljük, és ide soroljuk az *újrahasznosítás* lehetőségét figyelembe vevő modelleket is, melyekben a vállalat számít arra, hogy a fogyasztók által használatba vett termékek visszakerülnek a vállalathoz, majd transzformáció után ismét a fogyasztókhoz jutnak. A témában elsőként Richter (1996) foglalkozott azzal a kérdéssel, hogy konténerek mint termékek milyen arányát érdemes megjavítani, illetve hogy mekkora az előállítás és a javítás gazdaságos sorozatnagysága. Mivel egy idő után nem lehet újrahasznosítani a terméket, ezért a szerző az optimális hulladékkezelési rátát is meghatározta.

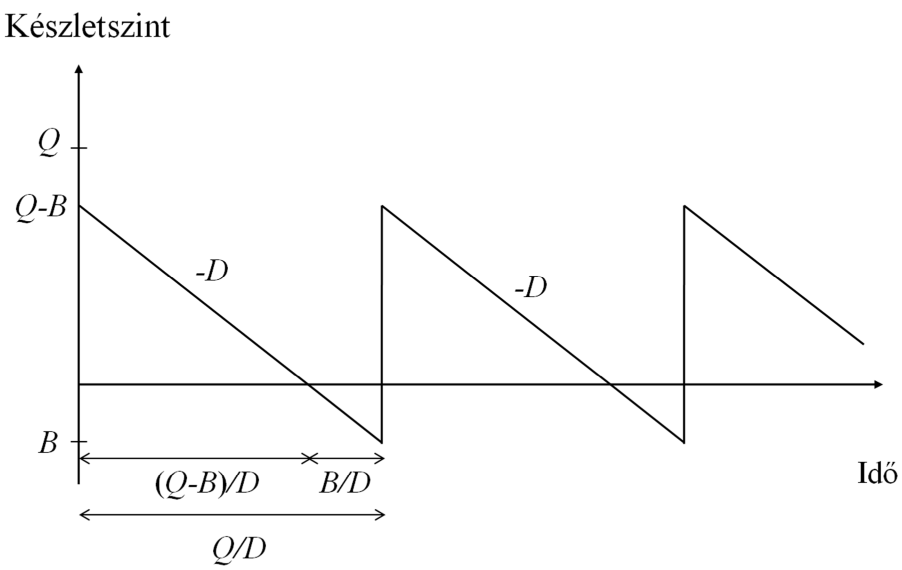
A modellt továbbfejlesztve Dobos és Richter (2003) arra a kérdésre keresték a választ, hogy miként célszerű a termelés és a javítás között elosztani az erőforrásokat. Megállapításaik szerint a tiszta stratégiák alkalmazása (az összes termék javítása vagy az összes termék javítás nélküli termelése) vezet a kapcsolódó költségek minimumához. Ugyanerre az eredményre jutottak abban az esetben is, amikor a hulladékkezelési ráta is döntési változó volt. Megjegyzik továbbá, hogy a tiszta stratégia alkalmazásának vannak technológiai korlátai, és arra sem lehet számítani, hogy minden egyes terméket visszahoznak újrahasznosításra a fogyasztók. A témában magyar nyelvű publikáció is született (Richter és Dobos, 2003). A szerzők szerint a tiszta stratégia domináns voltának a gyakorlatban az lehet a következménye, hogy a költségek megfelelő változtatása az egyébként gazdasági elven működő vállalatokat környezettudatosabb gazdálkodásra ösztönzi.

Az említett fordított logisztikai modellt általánosabb formában tárgyalja és oldja meg Dobos és Richter (2004). Megerősítik korábbi problémafelvetésüket, miszerint a tiszta stratégiák nem megvalósíthatóak, a termékek egy része nem kerül vissza a vállalathoz, némelyikük pedig nem használható fel újra. A probléma modellezéséhez a visszavásárlási ráta egynél kisebb felső korlátját javasolják bevezetni. Ennek következtében kevert stratégia lesz optimális, ahogy azt egy későbbi tanulmányukban (Dobos és Richter, 2006) be is mutatják a szerzők. Az új modell a minőséget is figyelembe veszi, és lényeges megállapítása, hogy a minőség-ellenőrzést érdemes kiszervezni. Az irányzat jelentőségét mutatja, hogy Bazan et al. (2016) több mint 250, listás nemzetközi folyóiratban megjelent cikk felhasználásával készített irodalmi áttekintést.

A vállalatoknak megfelelő időben kell a megfelelő minőségű és mennyiségű kínálatot biztosítani fogyasztóik számára. Hibák nemcsak a termelés során fordulhatnak elő, de nehéz jól előrejelezni a jövőbeni keresletet is. Ha nem áll elég késztermék rendelkezésre, úgy *hiány* keletkezhet, melynek előfordulását elsőként vette figyelembe Hadley és Whitin (1963). Ezen kiterjesztési irányzatról ad áttekintést Cárdenas-Barrón (2011), aki a szerzőpáros mellett Naddor (1966), valamint Johnson és Montgomery (1974) írását tekinti úttörőnek a témában. Amennyiben hiány (hátralék) keletkezik, azt a modellek többletköltséggel büntetik. Ennek oka lehet, hogy a fogyasztók a versenytársak kínálatával elégítik ki igényeiket, az így elvesztett kereslet visszaszerzéséért tett erőfeszítések pedig rendkívül költségesek lehetnek. Ha a vállalat nem veszíti el a keresletet, azaz hátralék keletkezik, úgy valamilyen formában növelnie kell kapacitásait. Ez lehet túlóra, harmadik műszak bevezetése, beruházás vagy más piaci szereplők segítségének igénybevétele. Mindegyik megoldás többletköltségekkel jár a vállalat számára. Vörös (2013) szerint a hiány lehet előre tervezett (pl. Konstantaras et al., 2012) és nem tervezett. Utóbbi azt jelenti, hogy véletlenszerűen, előre nem látható körülményekből következően (pl. a kereslet nem várt felfutásától vagy termelési, logisztikai problémák miatt) fordul elő, hogy az aktuális kereslet meghaladja a kínálatot. A tervezett hiány esetében ugyanakkor a vállalat tudatosan hagyja, hogy egy bizonyos ideig hiány forduljon elő. Ez leginkább akkor ésszerű magatartás, ha előre ismert tény, hogy a vállalat nem fog emiatt kereslettől elesni, így a hiány tulajdonképpen hátraléknak tekinthető. Előfordulhat az is, hogy az elvesző kereslet miatt kieső hozam jóval alacsonyabb, mint a készlettartás költsége, ezért gazdaságilag indokolt bizonyos mennyiségű hiány fenntartása. Hiány úgy is keletkezhet, hogy a vállalat kiszűri és nem kínálja eladásra a nem megfelelő minőségű termékeket. A keletkezett hiányt vagy teljes egészében pótolják (pl. Rezaei, 2005; Wee et al., 2007) vagy egy részét pótolják, másik részéből elveszett kereslet lesz (pl. Yu et al., 2005; Wee et al., 2006).

Természetszerűleg a hátralék keletkezése a gyakorlatban, így a készletgazdálkodási szakirodalomban is gyakran előfordul, ezért bemutatjuk az ezt megengedő alapmodellt. A 7. ábra hátralék előfordulása esetén mutatja a készletszint alakulását. A ciklus elején raktárba érkező mennyiség Q, melyből B darab terméket a hátralék pótlására fordít a vállalat. A raktárban tehát addig van készlet, ameddig a megmaradó $(Q-B)$ mennyiséget a D kereslet fel nem emészti, vagyis $(Q-B)/D$ ideig. Ezt követően hátralék halmozódik fel a hátralék nélküli esettel egyezően Q/D hosszúságú ciklus végéig, amikorra a pótolandó mennyiség eléri a B szintet.

Az ábra vízszintes tengelyét a B szint vonalába képzelve, a szituáció felfogható úgy is, mintha $(Q-B)/D$ idő után a raktárban levő termékek fajlagos készlettartási költsége a következő ciklus elejéig h-ról b-re nőne. A hiányból eredő fajlagos költségek (b) meghaladják a (túl)készletezés fajlagos költségét (h). Azt kell tehát kiszámolnunk, hogy ezek milyen arányban merülnek fel.



7. ábra. Az EOQ modell készletalakulási diagramja hátralék esetén. *Forrás:* Vörös (2010), 278. oldal alapján saját szerkesztés

Fajlagos készlettartási költség ciklusonként $(Q-B)/D$ egységnyi ideig, átlagosan $(Q-B)/2$ termék után merül fel. Ez ciklusonként $h(Q-B)^2/2D$ költséget jelent. Fajlagos hátralék költség $B/2$ mennyiség és B/D időegység után számítandó, ami összesen $bB^2/2D$ költséget tesz ki egy periódusban. Mivel a tervezési időhorizonton a ciklusok száma D/Q, ezért a készlettartás és a hátralék együtt $h(Q-B)^2/2Q+bB^2/2Q$ pénzegységébe kerül a vállalatnak. A hátralék nélküli esethez képest nem változott sem a sorozatkezdés, sem a termék előállításának költsége, így az összköltség:

$$TC_b^{EOQ}(Q,B) = sD/Q + h(Q-B)^2/2Q + bB^2/2Q + cD\,. \tag{4}$$

A gazdaságos sorozatnagyság a Wilson-formula módosított, azt meghaladó mértékű változata $Q_b^{EOQ} = \sqrt{2sD/h}\cdot\sqrt{(b+h)/b}$, ugyanis mivel h és b pozitívak, ezért a módosító faktor egynél nagyobb. A vállalat a hátralék mértékéről is dönthet, csökkentheti azt például a rendelések korábbi leadásával, a ciklusok rövidítésével. A hátralék optimális mértéke a modell szerint $Q_{opt}^{EOQ} = \sqrt{2sD/b}\cdot\sqrt{h/(b+h)}$. Mivel a hátralék fajlagos költsége a szorzat tagjainak nevezőiben található, ezért annak növelése csökkenti az optimális hátralékszintet. Ha a fajlagos hátralékköltség a végtelenbe tart, akkor az optimális hátralékszint zérus, a gazdaságos sorozatnagyság pedig az eredeti Wilson-formulát adja vissza.

Az EPQ modell hátralék esetén fennálló összköltség függvényének felírásához a (2) és (4) egyenletek megfontolásait kell alkalmaznunk, így a (5) formula ezekhez meglehetősen hasonló:

$$TC_b^{EPQ}(Q,B) = sD/Q + h(Q-B)^2(m-D)/2mQ + bB^2/2Q + cD\,. \tag{5}$$

Az összköltség függvény alapján származtatható gazdaságos sorozatnagyság képlete

$$Q_b^{EPQ} = \sqrt{2sD/h}\cdot\sqrt{m/(m-D}\cdot\sqrt{(b+h)/b}\,,$$

amely a fentiekben bemutatott Wilson-formula, valamint a véges termelési ráta és a hiány miatt fennálló módosító faktorok szorzata.

A fentiekben bemutatott kiterjesztési irányzatokat lehetőségeinkhez mérten külön tárgyaltuk, azonban megjegyezzük, hogy az egyes modellekben jellemzően keverednek ezek a modelljegyek. Természetesen nincs olyan tanulmány, amely mindegyik modellfeltevést figyelembe venné, az azonban általános, hogy egy új modell több irányzathoz is sorolható.

4 Módszertani megközelítések

Módszertani szempontból csoportosíthatjuk a modelleket azok input adatainak tulajdonsága szerint, így megkülönböztethetünk determinisztikus, sztochasztikus, valamint fuzzy modelleket. A készletgazdálkodási modellek nagy része *determinisztikus*, melynek oka az előre ismert input adatok jó kezelhetősége. Számosságukat érzékelteti, hogy Pentico és Drake (2011) a determinisztikus készletgazdálkodási modellek azon szűk ágáról készített irodalmi áttekintést, melyekben a hiány pótlása csak részben történik meg, s a szerzők így is több mint 150 tanulmányt jelöltek meg a hivatkozások között. Ezek a módszerek jellemzően egy optimalizálási feladatra adnak általános megoldást vagy megoldási algoritmust. A következtetések levonásakor ügyelni kell a determinisztikus jellegből adódó gyakorlati alkalmazhatósági korlátokra. Megjegyezzük azonban, hogy a Toyota Termelési Rendszerben a szerződéseket előre kötik (Mishina és Takeda, 1992), így a kereslet tulajdonképpen determinisztikusnak és konstansnak tekinthető.

Általában közelebb állnak a valósághoz a *sztochasztikus* modellek, mivel figyelembe veszik a véletlent, és az input adatoknak valamilyen eloszlásával számolnak. A probléma jellegétől és a modell viselkedésétől függően az egyenletes, illetve a normális eloszlás feltételezése a leggyakoribb. Egyes tanulmányok előre nem ismert eloszlást engednek meg, növelve ezzel az általános érvényű következtetések levonásának lehetőségét.

A fentiekben utaltunk Vörös (2013) módszertani újítására, melynek lényege, hogy a készletezési ciklusok lehetnek összefüggőek, azaz az első periódusban sztochasztikusan kialakuló helyzetet követően determinisztikusak vagy függetlenek, vagyis minden periódusban sztochasztikusak. A már szintén emlegetett tanulási görbe „szabályszerűsége" szintén lehet determinisztikus vagy sztochasztikus.

Készletgazdálkodás témakörben viszonylag kis arányban találhatunk a *fuzzy* logikát alkalmazó tanulmányokat. Ezek alapfeltevése, hogy bizonytalan információk állnak rendelkezésre az inputokról, igen és nem válaszok helyett a kettő közötti, nem egyértelmű adatokkal, véleményekkel kell számolni. A fuzzy módszer hátránya annak viszonylag bonyolult volta, ugyanis Andriolo et al. (2014) szerint a modellek sokszor feleslegesen komplexek, ami egyrészt csökkenti az eredmények hitelességét, másrészt nem igazán teszik lehetővé a gyakorlatban történő alkalmazást.

A modellek gyakorlati tesztelését nehezíti, hogy a szükséges adatok egy részét – nagyrészt annak nehézségei miatt – a vállalatok nem mérik. Hasonlóan gyakori probléma, hogy az üzleti titoktartás nem teszi lehetővé az adatokhoz való hozzáférést. Ezen nehézségek áthidalására jó megoldást adnak a *szimulációk*. Jó példa erre Vörös et al. (in press) modellje, melyben a TTR futószalagjának kibocsátása béta eloszlású valószínűségi változó, tovább növelve ezzel az általánosságot.

A harmadik szakaszban vázolt modellek célja jellemzően az összköltség minimalizálása. Az összköltség függvények a modell feltevéseitől függően különböző elemekből állhatnak össze, de közös bennük a sorozatkezdéssel és a készlettartással kapcsolatos költségek megjelenése. A sorozatnagyság döntési változó, és az optimumszámítás legfőbb eredménye ennek meghatározása. A modelltől függően további döntési változók mentén is történhet optimalizálás, de azok általában nem függetlenek a sorozatnagyságtól.

Az összköltség minimumának megtalálásához a leggyakrabban a *deriválás* módszerét alkalmazzák a szerzők. A stacionárius pont(ok) megtalálását követően ellenőrzik a második derivált viselkedését, melyből következtetnek az optimumra. Ugyanez a módszer alkalmazható profitmaximumot kereső szélsőérték-számítás esetén. Grubbström (1996) *deriválás nélkül* jutott a Wilson-formulához, majd Grubbström és Erdem (1999) a hátralékot figyelembe vevő eset algebrai megoldását is bemutatták. Cárdenas-Barrón (2007) módszerét a fentiekben felírt összköltség függvényekre alkalmazva, a (6) egyenletnek megfelelő általános alak a $Q = \sqrt{l/k}$ helyen veszi fel minimumát, így számítható ki tehát a gazdaságos sorozatnagyság.

$$TC(Q) = kQ + \frac{l}{Q} + cD\,. \tag{6}$$

A minimum értékét pedig megkaphatjuk a $TC_{\min} = 2\sqrt{kl} + cD$ képletbe való behelyettesítéssel, tehát a gazdaságos sorozatnagyság ismerete nélkül is kiszámíthatjuk. Az EOQ és EPQ modellekre történő alkalmazást mutatják be a *3. táblázat* hátralék nélküli oszlopai. Ez az összegzés is jól mutatja, hogy a két modell között az $(m-D)/m$ módosító faktor tesz különbséget. Ez a szorzó csökkenti a készletezendő mennyiséget, hiszen nem a ciklus elején, egyszerre, hanem folyamatosan érkeznek a raktárba a legyártott termékek. A sorozatkezdések száma és költsége megegyezik. Az előbbi módosító faktor négyzetgyöke jelenik meg a költségminimum, reciprokának négyzetgyöke pedig gazdaságos sorozatnagyság képletében. Az $(m-D)/m$ hányados értéke kisebb egynél, így ugyanazon feltételek mellett az EPQ modell összköltsége kisebb, gazdaságos sorozatnagysága pedig magasabb, mint az EOQ esetében. A két modell közötti összefüggést jól mutatja a szorzó, hiszen amennyiben minden határon túl növeljük a termelési rátát, azaz $m \to \infty$, akkor a hányados értéke egységnyi, vagyis az EOQ modellt kapjuk vissza.

	Nem keletkezhet hátralék		Hátralék lehetőségét figyelembe véve	
	EOQ	EPQ	EOQ_b	EPQ_b
k	$\frac{h}{2}$	$\frac{h}{2}\frac{m-D}{m}$	$\frac{h}{2}$	$\frac{h}{2}\frac{m-D}{m}$
l	sD	sD	$sD + \frac{h+b}{2}B^2$	$sD + \frac{b}{2}B^2 + \frac{h}{2}\frac{m-D}{m}B^2$
Q_{opt}	$\sqrt{\frac{2sD}{h}}$	$\sqrt{\frac{2sD}{h}}\sqrt{\frac{m}{m-D}}$	$\sqrt{\frac{2sD}{h}}\sqrt{\frac{b+h}{b}}$	$\sqrt{\frac{2sD}{h}}\sqrt{\frac{m}{m-D}}\sqrt{\frac{b+h}{b}}$
B_{opt}	$B=0$	$B=0$	$\sqrt{\frac{2sD}{b}}\sqrt{\frac{h}{b+h}}$	$\sqrt{\frac{2sD}{b}}\sqrt{\frac{m}{m-D}}\sqrt{\frac{h}{b+h}}$
$TC_{\min}$	$\sqrt{2hsD} + cD$	$\sqrt{2hsD\frac{m-D}{m}} + cD$	$\sqrt{\frac{2sDh(b+h)}{b}} + cD$	$\sqrt{\frac{2sDh(b+h)(m-D)}{bm}} + cD$
	Grubbström (1996)	Grubbström (1996)	Grubbström & Erdem (1999)	Cárdenas-Barrón (2001)

3. táblázat. Deriválás nélküli optimumszámítás EOQ és EPQ modellekben

A hátralék keletkezését megengedő modellek (ld. 3. táblázat) vizsgálata további tanulságokat rejt magában. Az $(m-D)/m$ módosító faktor, illetve reciprokának négyzetgyöke a hátralék nélküli esethez hasonlóan viselkedik, az új számításban azonban már a hátralékhoz is kapcsolódik. A gazdaságos sorozatnagyság képletét mindkét modelltípusban a $\sqrt{(b+h)/b}$ szorzó módosítja. Mivel b és h pozitívak, ezért a hányados és annak négyzetgyöke nagyobb egynél. Hátralékot feltételezve tehát nő a gazdaságos sorozatnagyság. Mivel ugyanez a faktor módosítja az összköltség minimumát, ezért azt is megállapíthatjuk, hogy nem meglepő módón a hátralékot megengedő esetben magasabb az összköltség minimuma, mint a hátralék nélküli esetben. Ezek a megállapítások pedig mind az EOQ, mind az EPQ modellekre igazak.

A hátralékot megengedő esetekben összevetve egymással az optimális sorozatnagyság és az optimális hátralékszint mértékét, azt kapjuk, hogy az arány $Q_{opt}/B_{opt} = (b+h)/h$. A szakirodalom alapján feltételezzük, hogy a hátralék fajlagos költsége magasabb a készletezés fajlagos költségénél, vagyis $b > h$, ezért $(b+h)/h > 2$. Ebből pedig arra következtethetünk, hogy az átlagos készletszintnek legalább kétszer akkorának kell lennie, mint az átlagos hátralékszintnek $Q_{opt}/2 > 2B_{opt}/2$, egyébként biztosan nem optimális a készletgazdálkodási politika.

5 Összegzés, továbbfejlesztési irányok

A tanulmányban az elmúlt több mint száz év készletgazdálkodási modelljeinek irodalmát igyekeztünk rendszerve áttekinteni. A két alapmodell (EOQ és EPQ) mellett a hátralék (hiány) előfordulását megengedő kiterjesztést mutattuk be részletesebben, mivel a készletgazdálkodásban a készlettöbblet mellett annak ellentéte a másik gyakori eset. Bizonyos mennyiségű készlet vagy hátralék ugyanis még a Just-In-Time rendszerben működő vállalatoknál is jelen van.

Tartalmilag két csoportra osztottuk a modelleket. Nyolc olyan irányzatot különböztettünk meg, melyek egy-egy olyan tényezőt vesznek figyelembe a modellfeltevésben, amely külső adottság a vállalat számára. További hat irányzat pedig a vállalat belső korlátaiból kiindulva gondolkodik. Utaltunk az egyes irányzatok elindítóira, valamint az ő alapvetéseikre. Megjegyeztük azonban, hogy az egyes tanulmányok jellemzően több feltevést is tartalmaznak, így egyszerre több irányzat irodalmát is gazdagítják. A módszertani megközelítések esetében is hasonló a helyzet, annál is inkább, mivel léteznek azonos problémákat különböző módszerekkel megoldó, majd azokat összehasonlító művek.

Az irodalmi irányzatok számossága is jelzi, mennyire kiterjedt a készletgazdálkodási modellek szakirodalma, nem lehetetlen azonban újat alkotni a témában. A legtöbb új modell a korábbiakat fejleszti tovább, kis módosítások (pl. másik eloszlás alkalmazása) segítségével, illetve a tartalmi és/vagy módszertani irányzatok kombinálásával. Új modellfeltevések leginkább a gyakorlat fejlődésével (pl. egy új termelési rendszer), egy-egy speciális termék (pl. energia) készletezésének igényével, új külső elvárásokkal (pl. társadalmi felelősségvállalás) merülnek fel. Születhetnek azonban új megközelítések új döntési változók (pl. minőség-ellenőrzési sebesség, ld. Hauck és Vörös, 2015) bevezetésével is.

Reméljük, hogy a készletgazdálkodási modellek fenti bemutatása gondolatébresztő lesz több magyar kutató számára, lehetőséget adva ezzel arra, hogy egy következő irodalmi összefoglaló még több magyar hivatkozást, akár új irányzato(ka)t is tartalmazzon.

6 Köszönetnyilvánítás

Az Emberi Erőforrások Minisztériuma ÚNKP-17-4-I. kódszámú Új Nemzeti Kiválóság Programjának támogatásával készült. A szerző köszöni a Pécsi Tudományegyetem Kiválósági Centrum támogatását.

A jelen tudományos közleményt a szerző a Pécsi Tudományegyetem alapításának 650. évfordulója emlékének szenteli.

Irodalom

1. Andriolo, A. – Battini, D. – Grubbström, R. W. – Persona, A. (2014): A century of evolution from Harris?s basic lot size model: Survey and research agenda, *International Journal of Production Economics*, 155(1-3), 16–38.
2. Archetti, C. – Bertazzi, L. – Speranza, M. G. (2014), Polynomial cases of the economic lot sizing problem with cost discounts, *European Journal of Operational Research*, 237(2), 519–527.
3. Bakker, M. – Roezebos, J. – Teunter, R. H. (2012) Review of inventory systems with deterioration since 2001, *European Journal of Operational Research*, 221(2), 275–284.
4. Bazan, E. – Jaber, M. Y. – Zanoni, S. (2016), A review of mathematical inventory models for reverse logistics and the future of its modeling: An environmental perspective, *Applied Mathematical Modelling*, 40, 4151–4178.
5. Benton, W. C. – Park, S. (1996), A classification of literature on determining the lot size under quantity discounts, *European Journal of Operational Research*, 92(2), 219–238.
6. Bonney, M. C. – Jaber, M. J. (2011), Environmentally responsible inventory models: Non-classical models for a non-classical era, *International Journal of Production Economics*, 133(1), 43–53.
7. Bouchery, Y. – Ghaffari, H. – Jemai, Z. – Dallery, Y. (2012), Including sustainability criteria into inventory models, *European Journal of Operational Research*, 222(2), 229–240.
8. Buzacott, J. A. (1975), Economic order quantities with inflation, *Operational Research Quarterly*, 26(3), 553–558.
9. Cárdenas-Barrón, L. E. (2001), The economic production quantity (EPQ) with shortage derived algebraically, *International Journal of Production Economics*, 70(3), 289–292.
10. Cárdenas-Barrón, L. E. (2007), Optimizing inventory decisions in a multistage multi-customer supply chain: A note, *Transportation Research Part E*, 43, 647–654.
11. Cárdenas-Barrón, L. E. (2011), The derivation of EOQ/EPQ inventory models with two backorders costs using analytic geometry and algebra, *Applied Mathematical Modelling*, 35(5), 2394–2407.

12. Chan, W. M. – Ibrahim, R. N. – Lochert, P. B. (2003), A new EPQ model: integrating lower pricing, rework and reject situations, *Production Planning and Control*, 14(7), 588–595.
13. Covert, R. B. – Philip, G. S. (1973), An EOQ model with Weibull distribution deterioration, *AIIE Transactions*, 5(4), 323–326.
14. Dobos, I. – Richter, K. (2003), A production/recycling model with stationary demand and return rates, *Central European Journal of Operations Research*, 11(1), 35–46.
15. Dobos, I. – Richter, K. (2004), An extended production/recycling model with stationary demand and return rates, *International Journal of Production Economics*, 90(3), 311–323.
16. Dobos I. – Richter, K. (2006), A production/recycling model with quality consideration, *International Journal of Production Economics*, 104(2), 571–579.
17. Eroglu, A. – Ozdemir, G. (2007), An economic order quantity model with defective items and shortages, *International Journal of Production Economics*, 106(2), 544–549.
18. Ertrogral, K. – Darwish, M. – Ben-Daya, M. (2007), Production and shipment lot sizing in a vendor-buyer supply chain with transportation cost, *European Journal of Operational Research*, 176(3), 1592–1606.
19. Glock, C. H. – Grosse, E. H. – Ries, J. M. (2014), The lot sizing problem: A tertiary study, *International Journal of Production Economics*, 155(1-3), 39–51.
20. Ghare, P. M. – Schrader, G. F. (1963), A model for an exponentially decaying inventory, *Journal of Industrial Engineering*, 14(5), 238–243.
21. Goyal, S. K. (1985), Economic order quantity under conditions of permissible delay in payments, *Journal of Operational Research Society*, 36(4), 335–338.
22. Gross, D. – Soriano, A. (1969), The Effect of Reducing Leadtime on Inventory Levels–Simulation Analysis, *Management Science*, 16(2), 61–72.
23. Grubbström, R. W. (1996), Material requirements planning and manufacturing resource planning, in: M. Warner (Ed.), *International Encyclopedia of Business Management*, Routledge, London.
24. Grubbström, R. W. – Erdem, A. (1999), The EOQ with backlogging derived without derivatives, *International Journal of Production Economics*, 59(1-3), 529–530.
25. Hadley, G. – Whitin, T. M. (1963), *Analysis of inventory systems*, Englewood Cliffs, N. J.: Prentice Hall, 62-68, 323–345.
26. Hariga, M. – Haouari, M. (1999), An EOQ lot sizing model with random supplier capacity, *International Journal of Production Economics*, 58(1), 39–47.
27. Harris, F. (1913a), How Many Parts to Make at Once, *Factory, The Magazine of Management*, 10(152), 135–136.
28. Harris, F. (1913b), How Much Stock to Keep on Hand, Once, *Factory, The Magazine of Management* 10, 240–241, 281–284.
29. Hauck, Zs. (2014a), Inventory management and competitiveness: a quality-based approach, In: Szabó István (szerk.): *2nd Interdisciplinary Doctoral Conference 2013 – Conference Book* (ISBN: 978-963-642-598-2), Pécsi Tudományegyetem Doktorandusz Önkormányzat, Pécs, 509–516.

30. Hauck, Zs. (2014b), EPQ modellek változtatható minőség-ellenőrzési sebesség esetén, *Szigma* 45(3-4), 151–176.

31. Hauck, Zs. – Vörös, J. (2015), Lot sizing in case of defective items to increase the speed of quality control, *Omega: International Journal of Management Science*, 52, 180–189, DOI: 10.1016/j.omega.2014.04.004.

32. Hauck, Zs. (2015), Minőség és minőség-ellenőrzés készletgazdálkodási modellekben, doktori értekezés, Pécsi Tudományegyetem Gazdálkodástani Doktori Iskola, 124 pp., http://ktk.pte.hu/sites/default/files/hir_mellekletek/2015/05/hauck_zsuzsanna-disszertacio.pdf.

33. Heizer, J. – Render, B. (2010), *Operations Management*, 10th edition, New Jersey: Prentice Hall.

34. Hsu, W. K. – Yu, H. F. (2009), EOQ model for imperfective items under a one-time-only discount, *Omega*, 37(5), 1018–1026.

35. Jaarsveld, W. – Dekker, R. (2011), Estimating obsolescence risk from demand data to enhance inventory control – A case study, *International Journal of Production Economics*, 133(1), 423–431.

36. Jaber, M. Y. – Goyal, S. K. – Imran, M. (2008), Economic production quantity model for items with imperfect quality subject to learning effects, *International Journal of Production Economics*, 115(1), 143–150.

37. Jaber, M. Y. – Zanoni, S. – Zavanella, L. E. (2013), An entropic economic order quantity (EnEOQ) for items with imperfect quality, *Applied Mathematical Modelling*, 37(6), 3982–3992.

38. Janssen, L. – Claus, T. – Sauer, J. (2016): Literature review of deteriorating inventory models by key topic from 2012 to 2015, *International Journal of Production Economics*, 182(1), 86–112.

39. Johnson, A. – Montgomery, D. C. (1974), *Operations Research in Production Planning, Scheduling and Inventory Model*, Wiley, New York, 525 p.

40. Khan, M. – Jaber, M. Y. – Wahab, M. I. M. (2010), Economic order quantity model for items with imperfect quality with learning in inspection, *International Journal of Production Economics*, 124(1), 87-96.

41. Khan, M. – Jaber, M. Y. – Guiffrida, A. L. – Zolfaghari, S. (2011), A review of the extensions of a modified EOQ model for imperfect quality items, *International Journal of Production Economics*, 132(1), 1–12.

42. Khan, M. – Jaber, M. Y. – Ahmad, A. R. (2014), An integrated supply chain model with errors in quality inspection and learning in production, *Omega*, 42(1), 16–24.

43. Konstantaras, I. – Skouri, K. – Jaber, M. Y. (2012), Inventory models for imperfect quality items with shortages and learning in inspection, *Applied Mathematical Modelling*, 36(11), 5334–5343.

44. Lee, H. L. – Rosenblatt, M. (1987), Simultaneous Determination of Production Cycle and Inspection Schedules in a Production System, *Management Science*, 33(9), 1125–1137.

45. Liberatore, M. J. (1979), The EOQ model under stochastic lead time, *Operations Research*, 27(2), 391–396.

46. Louly, M-A. O. – Dolgui, A. (2009), Calculating safety stocks for assembly systems with random procurement lead times, *European Journal of Operational Research*, 199(3), 723–731.

47. Maddah, B. – Jaber, M. Y. (2008), Economic order quantity for items with imperfect quality: Revisited, *International Journal of Production Economics*, 112(2), 808–815.
48. Mishina, K. – Takeda, K. (1992), Toyota Motor Manufacturing, U.S.A., Inc., case study, Harvard Business School, 1-693-019.
49. Naddor, E. (1966), *Inventory System*, Wiley, New York, 341 p.
50. Noblesse, A. M. – Boute, R. N. – Lambrecht, M. R. – Van Houdt, B. (2014), Lot sizing and lead time decisions in production/inventory systems, *International Journal of Production Economics*, 155, 351–360.
51. Oliva, R. – Gittel, J. H. (2007), Southwest Airlines in Baltimore, case study, Harvard Business School, 9-602-156.
52. Papachristos, S. – Konstantaras, I. (2006), Economic order quantity models for items with imperfect quality, *International Journal of Production Economics*, 100(1), 148–154.
53. Pentico, D. W. – Drake, M. J. (2011), A survey of deterministic models for the EOQ and EPQ with partial backordering, *European Journal of Operational Research*, 214, 179–198.
54. Porteus, E. L. (1986), Optimal lot sizing, process quality improvement and setup cost reduction, *Operations Research*, 34(1), 137–144.
55. Prékopa, A. (1965), Reliability equation for an inventory problem and its asymptotic solutions, In: Prékopa (szerk.): *Colloquium on Application of Mathematics to Economics*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 317–327.
56. Rezaei, J. (2005), Economic order quantity model with backorder for imperfect quality items, In: *Proceeding of IEEE International Engineering Management Conference, 11-13 th September 2005*, St. John?s Newfoundland, Canada, 466–470.
57. Richter, K. (1996), The extended EOQ repair and waste disposal model, *International Journal of Production Economics*, 45(1-3), 443-447.
58. Richter, K. (1997), Pure and mixed strategies for the EOQ repair and waste disposal problem, *OR Spectrum*, 19(2), 123–129.
59. Richter, K. – Dobos, I. (1999), Analysis of the EOQ repair and waste disposal problem with integer setup numbers, *International Journal of Production Economics*, 59(1), 463–467.
60. Richter, K. – Dobos I. (2003), Az újrahasznosítás hatása a gazdasági sorozatnagyságra, *Szigma*, 34(1-2), 45–63.
61. Rosenblatt, M. J. – Lee, H. L. (1986), Economic production cycles with imperfect production processes, *IIE Transactions*, 18(1), 48–55.
62. Rubin, P. A. – Benton, W. C. (2003). Evaluating jointly constrained order quantity complexities for incremental discounts, *European Journal of Operational Research*, 149(3), 557–570.
63. Salameh, M. K., Jaber, M. Y. (2000), Economic production quantity model for items with imperfect quality, *International Journal of Production Economics* 64(1), 59–64.
64. San-José, L. A. – Garcia-Laguna, J. (2009): Optimal policy for an inventory system with backlogging and all-units discounts: Application to the composite lot size model, *European Journal of Operational Research*, 192(3), 808–823.
65. Sari, D. P. – Rusdiansyah, A. – Huang, L. (2012): Models of Joint Economic Lot-sizing Problem with Time-based Temporary Price Discounts, *International Journal of Production Economics*, 139(1), 145–154.

66. Schneider, M. – Biel, K. – Pfaller, S. – Schaede, H. – Rinderknecht, S. – Glock, C. H. (2016): Using inventory models for sizing energy storage systems: An interdisciplinary approach, *Journal of Energy Storage* 3(8), 339–348.
67. Shin, H. – Park, S. – Lee, E. – Benton, W. C. (2015): A classification of the literature on the planning of substitutable products, *European Journal of Operational Research*, 246, 686–699.
68. Skouri, K. – Konstantaras, I. – Lagodimos, A. C. – Papachristos, S. (2014), An EOQ model with backorders and rejection of defective supply batches, *International Journal of Production Economics*, 155, 148–154.
69. Taft, E. W. (1918a), Fixing Quantities of Materials in Stock, *Iron Age* 101, 855–856.
70. Taft, E. W. (1918b), The Most Economical Production Lot, *Iron Age* 101, 1410–1412.
71. Taleizadeh, A. A. – Pentico, D. W. (2014), An Economic Order Quantity model with partial backordering and all-unit discount, *International Journal of Production Economics*, 155, 172–184.
72. Thangam, A. (2012), Optimal price discounting and lot-sizing policies for perishable items in a supply chain under advance payment scheme and two-echelon trade credits, *International Journal of Production Economics*, 139(2), 459–472.
73. Vinson, C. E. (1972): The cost of ignoring lead time unreliability in inventory theory, *Decision Sciences*, 3(2), 87–105.
74. Vörös, J. (1999), Lot sizing with quality improvement and setup time reduction, *European Journal of Operational Research*, 113(3), 568–574.
75. Vörös, J. (2010), *Termelés- és szolgáltatásmenedzsment*, Akadémiai Kiadó, Budapest.
76. Vörös, J. (2013), Economic order and production quantity models without constraint on the percentage of defective items, *Central European Journal of Operations Research*, 21(4), 867–885.
77. Vörös, J. – Rappai, G. (2016), Process quality adjusted lot sizing and marketing interface in JIT environment, *Applied Mathematical Modelling*, 40(13-14), 6708–6724.
78. Vörös, J. – Rappai, G. – Hauck, Zs. (in press), Analyzing the impact of process improvement on lot sizes in JIT environment when capacity utilization follows Beta distribution, *Optimization and Dynamics with Their Applications: Essays in Honor of Ferenc Szidarovszky*, Springer.
79. Wagner, H. M. – Whitin, T. M. (1958), Dynamic version of the economic lot size model, *Management Science*, 5(1), 89-96.
80. Wee, H. M. – Yu, J. – Chen, M. C. (2007), Optimal inventory model for items with imperfect quality and shortage backordering, *Omega*, 35(1), 7–11.
81. Wee, H. M. – Yu, J. C. P. – Wang, K. J. (2006), An integrated production-inventory model for deteriorating items with imperfect quality and shortage backordering considerations, *Lecture Notes in Computer Science*, 3982(LNCS), 885–897.
82. Wilson, R. H. (1934), A Scientific Routine for Stock Control, *Harvard Business Review*, 13, 116–128.
83. Yoo, S. H. – Kim, D. – Park, M. S. (2009), Economic production quantity model with imperfect-quality items, two-way imperfect inspection and sales return, *International Journal of Production Economics*, 121(1), 255–265.

84. Yu, J. C. P. – Wee, H. M. – Chen, J. M. (2005), Optimal ordering policy for a deteriorating item with imperfect quality and partial backordering, *Journal of the Chinese Institute of Industrial Engineers*, 22(6), 509–520.

85. Ziermann, M. (1964), Application of Smirnov's theorems for an inventory control problem, *Publications of the Mathematical Institution of the Hungarian Academy of Sciences*, Ser. B 8, 509-518.

SURVEY ON MODELS OF INVENTORY MANAGEMENT

This paper aims to provide a survey on the basic models and key topics of models of inventory management. Economic Order Quantity (EOQ) and Economic Production Quantity (EPQ) models are considered as the basic ones. Key topics include eight categories that are based on external barriers of the company, and six categories on internal ones. One chapter is summarizing different types of methods used in these fields. As far as possible, theory and practice meet in the context, amongst which the Toyota Production System is analyzed.

Keywords: lot size, holding cost, setup cost, backlog

NEMKONVEX IRÁNYÍTÁSI FELADATOK[1]

KÁNNAI ZOLTÁN – SZABÓ IMRE – TALLOS PÉTER
Budapesti Corvinus Egyetem

Komlósi Sándor 70. születésnapjára

Optimális irányítási feladatok egzisztencia kérdéseinél a szakirodalom túlnyomó részében a konvexitás fontos szerepet játszik. Az alábbiakban nemkonvex problémák egy érdekes osztályára igazoljuk az optimális irányítás létezését differenciáltartalmazások technikájának felhasználásával.

Mathematics Subject Classifications: 34A60, 49K15, 93D15

1 Bevezetés

Tekintsük a következő egyszerű alakú optimális irányítási feladatot:

$$\begin{aligned} H(x,u) &= \int_0^T h(x(t),u(t))\,dt \to \min \\ x'(t) &= u(t), \quad x(0)=x_0 \\ u(t) &\in K \quad \text{majdnem mindenütt.} \end{aligned} \tag{1}$$

A Pontrjagin-féle maximumelv (lásd [5]) szükséges feltételt fogalmaz meg az optimális u irányításra, de semmilyen támpontot nem ad arra, hogy valóban létezik-e optimális irányítás. Általában az egzisztencia kérdése csak igen mély, a halmazértékű analízisen alapuló technikával kezelhető, és a szakirodalom általában konvexitási feltételeket alkalmaz a feladatban szereplő függvényekre. Itt utalunk például Rockafellar [7] áttekintő munkájára, vagy Aubin és Frankowska [2] eredményeire.

Az alábbi dolgozatban megmutatjuk, hogy a differenciáltartalmazások technikájának alkalmazásával optimális irányítási feladatok egy érdekes osztályára igazolhatjuk a megoldás létezését differenciálhatósági és konvexitási feltételek felhasználása nélkül.

2 Konjugált függvények

Legyen a továbbiakban X egy valós Hilbert-tér, X^* a duális tér és $f : X \to I\!R$ adott függvény.

[1]Beérkezett: 2017. január 9. E-mail: `kannai@uni-corvinus.hu`.

1. Definíció. Az f függvény *konjugált függvényén* azt az $f^* : X^* \to I\!R$ függvényt értjük, amelyre

$$f^*(p) = \sup_{x \in X} \{\langle p, x\rangle - f(x)\}$$

minden $p \in X^*$ mellett.

2. Definíció. Az f függvény *szubdifferenciálja* az x pontban

$$\partial f(x) = \{p \in X^* : f(x) - f(y) \le \langle p, x - y\rangle \ \forall y \in X\} \ ,$$

amely az X^* konvex részhalmaza.

A konjugált függvények és a szubdifferenciál tulajdonságait illetően utalunk Aubin és Cellina [1] monográfiájára.

1. Állítás. *Bármely $f(x) \in I\!R$ és $p \in \partial f(x)$ esetén $x \in \partial f^*(p)$.*

Bizonyítás: A szubdifferenciál értelmezése alapján tetszőleges $y \in X$ mellett $\langle p, y - x\rangle \le f(y) - f(x)$, ezért $\langle p, y\rangle - f(y) \le \langle p, x\rangle - f(x)$. Innen adódik, hogy $f^*(p) = \langle p, x\rangle - f(x)$, tehát

$$f(x) = \langle p, x\rangle - f^*(p) \le f^{**}(x) \ .$$

Igy a Fenchel-egyenlőtlenség szerint $f^{**}(x) = f(x)$ és $f^{**}(x) = \langle p, x\rangle - f^*(p)$. Tehát bármely $y \in X$ esetén

$$\langle y, x\rangle - f^*(y) \le \langle p, x\rangle - f^*(p) \ ,$$

ami éppen azt jelenti, hogy $x \in \partial f^*(p)$. $\square$

3 Differenciáltartalmazások

Tekintsünk az X valós Hilbert-téren egy F halmazértékű leképezést, amelynek értékei az X nem üres, zárt részhalmazai. Tegyük fel, hogy F felülről félig folytonos, és keressünk olyan x abszolút folytonos függvényt,amelyre

$$x'(t) \in F(x(t)) \tag{2}$$

majdnem mindenütt a $[0, T]$ időintervallumon.

Jól ismert, hogy a fenti autonóm differenciáltartalmazás megoldható, ha F értékei konvex halmazok, és egyszerű ellenpélda mutatja, hogy a konvexitási feltétel általában nem hagyható el (lásd például Aubin és Cellina [1]). A konvexitás azonban gyengíthető alkalmas potenciálfüggvény létezésének feltételezésével (lásd Bressan, Cellina és Colombo [3]).

1. Tétel. *Tekintsük a fenti nemkonvex értékű F halmazértékű leképezést. Tegyük fel, hogy létezik olyan $V : X \to I\!R$ alulról félig folytonos, konvex potenciálfüggvény, amelyre*

$$F(x) \subset \partial V(x) \tag{3}$$

minden $x \in X$ esetén. Akkor a (2) differenciáltartalmazásnak létezik megoldása a $[0,T]$ intervallumon.

A fenti tétel kiterjeszthető fáziskorlátozásos feladatokra is, lásd Kánnai és Tallos [6], ráadásul a V potenciálfüggvény konvexitása helyett elegendő az alulról regularitás feltételezése. Ez utóbbi eredmény a halmazértékű leképezés regularizálásával átvihető a nem-autonóm feladat megoldására, itt utalunk a Tallos és Kánnai [8] dolgozatra.

4 Egy optimális irányítási feladat

Legyen K az X valós Hilbert-tér valamely nem üres, kompakt részhalmaza, és $c > 0$ adott konstans. Tekintsük az X téren az f és g valós értékű függvényeket, és tegyük fel, hogy f folytonos és konvex, továbbá g tetszőleges folytonos függvény.

Vezessük be az alábbi halmazértékű leképezést az X téren:

$$F(x) = \{u \in K : f(u) - c\langle x, u\rangle + g(x) \text{ minimális } \} . \tag{4}$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy F értékei nem üres, kompakt halmazok X-ben, továbbá a Berge-tételből (lásd Aubin és Cellina [1]) adódik, hogy F felülről félig folytonos leképezés.

2. Állítás. *Bármely $x \in X$ mellett*

$$F(x) \subset \partial\Big(\frac{1}{c}f + \delta_K\Big)^*(x)$$

ahol δ_K a K halmaz indikátorfüggvénye.

Bizonyítás. Legyen $u \in F(x)$ tetszőleges. Ekkor bármely $v \in K$ esetén

$$f(u) - c\langle x, u\rangle + g(x) \le f(v) - c\langle x, v\rangle + g(x)$$

azaz

$$\langle x, v - u\rangle \le \frac{1}{c}f(v) - \frac{1}{c}f(u) .$$

Tehát tetszőleges $v \in X$ mellett

$$\langle x, v - u\rangle \le \Big(\frac{1}{c}f + \delta_K\Big)(v) - \Big(\frac{1}{c}f + \delta_K\Big)(u) .$$

Innen a szubdifferenciál definíciója szerint

$$x \in \partial\Big(\frac{1}{c}f + \delta_K\Big)(u) ,$$

ahonnan az 1. Állítás alapján adódik, hogy

$$u \in \partial\Big(\frac{1}{c}f + \delta_K\Big)^*(x) . \qquad \square$$

A fenti feltételek mellett tekintsük ezután a következő irányítási feladatot:

$$\int_0^T (f(u(t)) - c\langle x(t), u(t)\rangle + g(x(t)))\, dt \to \min$$
$$x'(t) = u(t), \quad x(0) = x_0$$
$$u(t) \in K \quad \text{majdnem mindenütt},$$

amely az x állapotváltozóban nem feltétlenül konvex.

2. Tétel. *A fenti optimális irányítási feladatnak létezik megoldása.*

Bizonyítás. Készítsük el a (4) alatti F halmazértékű leképezést, és tekintsük az

$$\begin{aligned} x'(t) &\in F(x(t)) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}$$

differenciáltartalmazást. Világos, hogy e differenciáltartalmazás minden megoldása egyúttal a fenti optimális irányítási feladatnak is megoldása, hiszen a pontonkénti minimum egyben az integrál minimumát is szolgáltatja.

Másrészt a 2. Állítás értelmében az F leképezésre teljesül a (3) potenciálfeltétel, azaz a

$$V(x) = \left(\frac{1}{c} f + \delta_K\right)^*(x)$$

($x \in X$) választással F kielégíti az 1. Tétel feltételeit, ezért a differenciáltartalmazásnak létezik megoldása a $[0, T]$ intervallumon. □

Hasonló nemkonvex optimális irányítási feladatok megoldhatóságának vizsgálata szerepel Kánnai [4] dolgozatában.

Irodalom

1. J.-P. Aubin and A. Cellina, *Differential Inclusions*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1984.
2. J.-P. Aubin and H. Frankowska, *Set-Valued Analysis*, Birkhäuser Verlag, Boston, Basel, Berlin, 1990.
3. A. Bressan, A. Cellina and G. Colombo, Upper semicontinuous differential inclusions without convexity, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 106 (1989), pp. 771–775.
4. Kánnai Z., A monotonitás mint alapgondolat dinamikai rendszerek kvalitatív vizsgálatában, Habilitációs tézisek, ELTE TTK, Budapest, 2016. http://web.uni-corvinus.hu/kannai/elibd/Habil.pdf
5. Kánnai Z., Szabó I. és Tallos P., *Variációszámítás és optimális irányítás*, Typotex, Budapest, 2014. http://www.tankonyvtar.hu
6. Kánnai Z. és Tallos P., Potential type inclusions, *Lecture Notes in Nonlinear Analysis*, 2 (1998), pp. 215–222.

7. T. Rockafellar, Integral functionals, normal integrands and measurable selections, in *Nonlinear Operators and the Calculus of Variations*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 543, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1976.

8. Tallos P. és Kánnai Z., Viable solutions to nonautonomous inclusions without convexity, *Central European Journal of Operations Research*, (2003), pp. 47–55.

NONCONVEX OPTIMAL CONTROL PROBLEMS

Existence of optimal control in nonlinear control problems is mainly proved under certain convexity assumptions. In this paper we show the existence of optimal control in a nonconvex control problem by using the technique of differential inclusions.

ERŐS DUALITÁSTÉTEL VÉGTELEN LP-KRE[1]

PINTÉR MIKLÓS
PTE KTK

Ebben a cikkben a végtelen lineáris programokra vonatkozó erős dualitástételt vizsgáljuk meg. Kimondjuk és bizonyítjuk a Farkas-lemma végtelen dimenziós változatát, majd annak segítségével kimondjuk és bizonyítjuk a végtelen lineáris programokra vonatkozó erős dualitástételt (Anderson és Nash, 1987). Ismertetjük a terület alapvető fogalmait és példákkal megvilágítjuk a fogalmak és a tételek mögött megbúvó intuíciókat.

Kulcsszavak: végtelen LP, Farkas-lemma, erős dualitástétel

1 Bevezető

A véges lineáris programokra (LP-k) vonatkozó dualitástételek, úgy mint a gyenge dualitástétel és az erős dualitástétel, az egyetemi alapképzések bevett, kikerülhetetlen és fontos részei. A dualitás fogalma és a dualitástételek olyan nyilvánvalóan alapvetőek, mind az alkalmazások, mind koncepcionális szempontból, hogy fel sem merülhet kihagyásuk egy operációkutatás tárgy tematikájából.

A végtelen LP-k vizsgálata nem része a sztenderd operációkutatási kurzusoknak, pedig az mind az alkalmazások szempontjából (lsd. pl. Anderson és Nash (1987), Pintér (2011)), mind pusztán elméleti szempontból érdekes és fontos.

Ebben a cikkben a végtelen lineáris programokra vonatkozó erős dualitástételt vizsgáljuk meg. Kimondjuk és bizonyítjuk a Farkas-lemma végtelen dimenziós változatát, majd annak segítségével kimondjuk és bizonyítjuk a végtelen lineáris programokra vonatkozó erős dualitástételt (Anderson és Nash, 1987). Ismertetjük a terület alapvető fogalmait és példákkal megvilágítjuk a fogalmak és a tételek mögött megbúvó intuíciókat.

Az alternatíva tételek (ilyen a Farkas-lemma) és a dualitástételek irodalma széles, lsd. pl. Farkas (1894, 1902), Fan (1956), Tucker (1956), Good (1959), Gale (1960), Chernikov (1968), Anderson és Nash (1987), Dax (1993), Dax és Sreedharan (1997), Broyden (1998), Roos és Terlaky (1999), Bartl (2007), Kannai (2008), Bartl (2008). Ez a cikk reményeink szerint abban gazdagítja az alternatíva tételek és a dualitástételek irodalmát, hogy felhívja a figyelmet az analízis szempontú megközelítés erejére és eleganciájára.

[1]A szerző köszöni David Bartl-nak a közös gondolkodást. Ez a cikk Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Hivatal (NKFIH, K 101224, K 115538 és K 124631) és a Pécsi Tudományegyetem Kiválósági Centrum pályázatának anyagi támogatásával készült. Beérkezett: 2017. január 9. E-mail: `pinterm@ktk.pte.hu`.

A cikk felépítése a következő. A 2. fejezetben bevezetjük a cikkben használt alapfogalmakat, a 3. fejezetben kimondjuk a cikkben használt kulcstételt, egy szeparációs tételt, a 4. fejezetben a végtelen dimenziós Farkas-lemmát tárgyaljuk, majd az 5. fejezetben a végtelen LP-kre vonatkozó erős dualitástétel kerül górcső alá. Az utolsó fejezet egy rövid összefoglalása az ismertetett eredményeknek.

2 Alapfogalmak

Ebben a fejezetben áttekintjük és bevezetjük a végtelen LP-khez kapcsolódó alapvető fogalmakat.

Legyenek X és Y topologikus vektorterek a valós test felett, X' az X *algebrai duál*ja, azaz, az X-en értelmezett lineáris funkcionálok tere, Y^* az Y *topologikus duál*ja, azaz, az Y-on értelmezett folytonos lineáris funkcionálok tere. Az $(Y, \hat{Y})$ *duális pár*, ha $\hat{Y} \subseteq Y^*$-ra teljesül, hogy ha $f \in Y$ és $f \neq 0$, akkor létezik olyan $y \in \hat{Y}$, hogy $y(f) \neq 0$. Világos, hogy (Y, Y^*) egy duális pár.

Legyen $A : X \to Y$ egy lineáris leképezés, ekkor $A' : Y^* \to X'$ az A leképezés *adjungált*ja, azaz minden $x \in X$-re és $y \in Y^*$-ra $\big(A'(y)\big)(x) = y\big(A(x)\big)$.

A $P \subseteq X$ *konvex kúp*, ha tetszőleges $x, y \in P$ pontokra és nem negatív $\alpha, \beta \in I\!R_+$ skalárokra $\alpha x + \beta y \in P$. Tetszőleges $f, g : X \to I\!R$ funkcionálokra $f \geq_P g$, ha minden $x \in P$ pontra $f(x) \geq g(x)$.

Legyen adott $A : X \to Y$ lineáris funkcionál, $b \in Y$ pont, $P \subseteq X$ konvex kúp és $c : X \to I\!R$ lineáris funkcionál. Tekintsük a következő LP feladatpárt (ld. Anderson és Nash (1987), Section 3.3):

$$
\begin{array}{llcl}
(P): & c(x) & \to & \sup \\
f.h. & A(x) & = & b \\
 & x & \in & P
\end{array}
\qquad
\begin{array}{llcl}
(D): & y(b) & \to & \inf \\
f.h. & A'(y) & \geq_P & c \\
 & y & \in & Y^*
\end{array}
\tag{1}
$$

Az (1) LP feladatpárnak a véges LP feladatpárokkal való hasonlósága nyilvánvaló, ránézésre látható. A főbb különbségek okaira a következő példa segítségével mutatunk rá.

1. példa. Tekintsük a következő LP feladatpárt, ahol ℓ^1 az abszolút konvergens sorok tere, azaz, $\ell^1 = \{x \in I\!R^{I\!N} : \sum_n |x_n| < \infty\}$, értelmezzük ℓ^1-en a következő normát: $||x|| = \sum_n |x_n|$, $x \in \ell^1$:

$$
\begin{array}{llcl}
(P_p): & \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} x_n & \to & \sup \\
f.h. & \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x_n & = & 0 \\
 & \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n & = & 1 \\
 & x & \in & \ell^1_+
\end{array}
\quad
\begin{array}{llcl}
(D_p): & y_2 & \to & \inf \\
f.h. & y_1 \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x_n + y_2 \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n & \geq_{\ell^1_+} & \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} x_n \\
 & & & \\
 & y & \in & I\!R^2
\end{array}
\tag{2}
$$

Vegyük észre, hogy a (P_p) feladatnak nincs lehetséges megoldása, hiszen a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x_n = 0$ feltétel csak akkor teljesülhet, ha $x = 0$ ($x \in \ell^1_+$), de akkor $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = 0 \neq 1$.

Ugyanakkor a (D_p) feladatnak van lehetséges megoldása, pl. $(y_1, y_2) = (0,1)$ egy lehetséges megoldás. Vegyük észre továbbá, hogy az $y_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x_n + y_2 \sum_{n=1}^{\infty} x_n \geq_{\ell^1_+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} x_n$ feltételt fel lehet írni a következőképpen:

$$y_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x_n + y_2 \sum_{n=1}^{\infty} x_n \geq_{\ell^1_+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} x_n\,, \qquad x \in \{e_1, e_2, \dots\}$$

azaz

$$y_1 \frac{1}{n^2} + y_2 \geq \frac{2}{n}\,, \qquad n = 1, 2, \dots \tag{3}$$

Könnyen látható továbbá, hogy tetszőleges $y_1 \in I\!R$ számra $y_1 \frac{1}{n^2} < \frac{2}{n}$, $n = 1, 2, \dots$, tehát y_2 pozitív. Az is látható továbbá, hogy az $(m, 1/m)$, $m = 1, 2, \dots$ sorozat minden eleme kielégíti a (3) egyenlőtlenséget, tehát a (D_p) feladat megoldása 0, de nincs olyan megengedett megoldása (D_p)-nek, ahol a célfüggvényérték 0.

Az 1. példa több szempontból is tanulságos. Egyrészt mutatja, hogy a feladatok végtelen jellege miatt le kell mondanunk a max-ról és a min-ról, helyettük rendre sup-ot és inf-ot használhatunk. Ezek a módosítások nagyon kézenfekvőek, természetesek. Azt is láthatjuk azonban, hogy egy erős dualitástételhez ennél több kell.

Ahhoz, hogy lássuk, hogy mi az a több, ami kell egy erős dualitástételhez, bele kell néznünk az erős dualitástétel bizonyításába. A bizonyítás (véges esetben is) szeparációs tétellel megy a feladatpár (P_p) részében. A szeparációs tételben zárt konvex halmazt erősen szeparálunk egy külső ponttól, tehát hangsúlyosan zárt konvex halmazra van szükségünk és csak a feladatpár (P_p) részében.

Az is könnyen látható (ld. a 4. példát), hogy a lezárást alkalmazva van (P_p)-nek megoldása, és az optimális célfüggvényérték 0. Vegyük észre, hogy a (D_p) feladatnak is ez az optimális célfüggvényértéke, tehát úgy tűnik, hogy az erős dualitástétel a megfelelő módosításokkal kiterjeszthető végtelen LP-kre.

Lássuk a módosításokat:

2. definíció. *Tekintsük az (1) feladatpárt. Azt mondjuk, hogy a (D) feladat konzisztens, ha létezik olyan $y \in Y^*$ lineáris funkcionál, hogy $\big(A'(y)\big)(x) \geq c(x)$ minden $x \in P$-re. A (D) konzisztens program értéke* $\inf\big\{\, y(b) : A'(y) \geq_P c, y \in Y^* \,\big\}$.

A fent említett lezáráshoz definiálnunk kell a topológiát amiben a lezárást értjük. Vegyük az $(Y, \hat{Y})$ duális párt. Az $\hat{Y}$ által indukált *gyenge topológia* Y-on a következő: az $U \subseteq Y$ halmaz az $f_0 \in Y$ pont *gyenge környezete*, ha létezik olyan n természetes szám és olyan $y_1, \dots, y_n \in \hat{Y}$ lineáris funkcionálok, hogy $\bigcap_{j=1}^{n} \big\{\, f \in Y : \big|y_j(f) - y_j(f_0)\big| < 1 \,\big\} \subseteq U$. Magyarán szólva, az $\hat{Y}$ által

Y-on indukált gyenge topológia bázisa a következő:

$$\left\{ \bigcap_{j=1}^{n} \{ f \in Y : \left|y_j(f) - y_j(f_0)\right| < 1 \} : n \in \mathbb{N},\, y_1, \ldots, y_n \in \hat{Y},\, f_0 \in Y \right\}.$$

3. definíció. *Tekintsük az (1) feladatpárt. Legyen* $D = \{ \big(A(x), c(x)\big) : x \in P \}$*. Azt mondjuk, hogy a* (P) *program szuperkonzisztens, ha létezik olyan* $z \in \mathbb{R}$ *szám, hogy* $(b, z) \in \overline{D}$*, ahol* $\overline{D}$ *a* D *halmaz lezártja az* $Y \times \mathbb{R}$*-en értelmezett szorzattopológiában. A* (P) *szuperkonzisztens program szuperértéke* $\sup\{ z : (b, z) \in \overline{D} \}$*.*

Azt mondjuk, hogy $(I, \leq)$ *jobbra irányított* halmaz, ha $(I, \leq)$ egy olyan előrendezett halmaz, hogy tetszőleges $i, j \in I$ eleméhez létezik egy olyan $k \in I$ eleme, hogy $i \leq k$ és $j \leq k$. $(x_i)_{i\in I}$ egy általánosított sorozat az X halmazból, ha $(I, \leq)$ egy jobbra irányított halmaz és $x_i \in X$ minden $i \in I$-re.

Most már át tudjuk fogalmazni 3. definíciót. A (P) program pontosan akkor szuperkonzisztens, ha létezik egy olyan P-beli általánosított sorozat $(x_i)_{i\in I}$, hogy $A(x_i) \xrightarrow{w} b$, azaz, $A(x_i)$ konvergál b-hez a gyenge topológiában, és $c(x_i)$ korlátos. Továbbá, a z^* szám pontosan akkor a (P) szuperkonzisztens program szuperértéke, ha az a legkisebb felső korlátja azon z számok halmazának amikhez létezik olyan P-beli $(x_i)_{i\in I}$ általánosított sorozat, hogy $A(x_i) \xrightarrow{w} b$ és $c(x_i) \longrightarrow z$.

4. példa. Az 1. példában a (P_p) feladat nem konzisztens, de szuperkonzisztens, hiszen $(e_n) \subseteq \ell^1_+$ sorozatot tekintve azt láthatjuk, hogy egyrészt $\sum_{i=1}^{\infty} e_{ni} = 1$ minden n-re, másrészt $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} e_{ni} \to 0$, azaz az ℓ^1_+ halmaz a feltételek lineáris leképezéssel vett képének lezártjában benne van a $(0, 1)$ pont. Tehát a lezárást alkalmazva kapunk lehetséges megoldást, azaz a feladat szuperkonzisztens. Vegyük észre, hogy mivel $(\ell^1, ||\cdot||)$ metrikus tér, így elég hagyományos sorozatokat tekinteni.

Könnyen látható az is, hogy tetszőleges olyan $(x_n) \subseteq \ell^1$ sorozatra, amire $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} x_{nm} \to 0$ és $\sum_{m=1}^{\infty} x_{nm} \to 1$ azt kapjuk, hogy $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{m} x_{nm} \to 0$. Azaz a szuperkonzisztens (P_p) feladat szuperértéke 0.

3 Szeparáló hipersíkok

Azt mondjuk, hogy az f lineáris funkcionál erősen szeparálja az A és B halmazokat, ha létezik olyan $\alpha \in \mathbb{R}$ és $\varepsilon > 0$, hogy minden $x \in A$-ra $f(x) \geq \alpha$ és minden $x \in B$-re $f(x) \leq \alpha - \varepsilon$.

Egy (X, τ) topologikus vektortér lokálisan konvex, ha a 0 pontnak van konvex halmazokból álló környezetbázisa, azaz, ha tetszőleges U környezetére 0-nak van $K \subseteq U$ konvex környezete 0-nak. Vegyük észre, hogy ha $(Y, \hat{Y})$ egy duális pár, akkor az Y-on értelmezett gyenge topológia egy lokálisan konvex (Hausdorff-) topológia.

A következő tételt nem bizonyítjuk, a bizonyítása jól ismert, megtalálható pl. Aliprantis és Border (2006)-ban (Theorem 5.79, 207. old.).

5. tétel. *Legyen $A \subseteq X$ egy zárt konvex halmaz, és $B \subseteq X$ egy kompakt konvex halmaz az X lokálisan konvex topologikus vektortérben, hogy $A \cap B = \emptyset$. Ekkor létezik olyan folytonos lineáris funkcionál, ami erősen szeparálja A-t és B-t.*

Amint a későbbiekben látni fogjuk az 5. tétel bújik meg mind a Farkas-lemma, mind az erős dualitástétel mögött.

4 Farkas-lemma

Ebben a fejezetben a Farkas-lemma (Farkas, 1894, 1902) végtelen dimenziós változatát vizsgáljuk. A következő tétel egy végtelen dimenziós Farkas-lemma.

6. tétel (Farkas-lemma). *Legyen X egy vektortér, $P \subseteq X$ egy konvex kúp, Y egy lokálisan konvex valós vektortér, $b \in Y$, $A : X \to Y$ egy lineáris leképezés. Ekkor a következő állítások közül mindig pontosan egy igaz:*

1. $b \in \overline{A(P)}$,
2. *létezik olyan f folytonos, Y-on értelmezett lineáris funkcionál, hogy minden $x \in P$-re $A'(f)\,(x) \geq 0$ és $f(b) < 0$.*

Bizonyítás. $b \in \overline{A(P)}$: minden $x \in X$-re, $f \in Y^*$-ra $A'(f)\,(x) = f(A(x))$, és létezik $(x_i)_{i \in I} \subseteq P$ olyan általánosított sorozat, hogy $f(A(x_i)) \to f(b)$. Tehát, ha tetszőleges $x \in P$-re $A'(f)\,(x) \geq 0$, akkor $f(b) \geq 0$, ami ellentmond $f(b) < 0$-nak.

$b \notin \overline{A(P)}$: $\overline{A(P)}$ egy konvex zárt halmaz, tehát az 5. tételből következik, hogy létezik f folytonos lineáris funkcionál Y-on, és $\alpha \in \mathbb{R}$, hogy minden $y \in A(P)$-re $f(y) \geq \alpha$ és $f(b) < \alpha$.

Mivel P egy kúp, így $A(P)$ is egy kúp, és $0 \in A(P)$ ($f(0) = 0$), így minden $x \in P$-re, $\beta \in \mathbb{R}_+$-ra $\beta x \in P$, $\beta A(x) = A(\beta x)$, azaz minden $x \in P$-re $A'(f)\,(x) = f(A(x)) \geq \lim\limits_{\beta \to \infty} \frac{\alpha}{\beta} = 0$; tehát $\alpha = 0$. □

A Farkas-lemma a 6. tétel formában az 5. tétel közvetlen következménye, míg – könnyen láthatóan – az 5. tétel nem következik a 6. tételből. Magyarán szólva a Farkas-lemma (6. tétel) a szeparációs tétel (5. tétel) egy gyengített (konvex, zárt halmaz ponttól való erős szeparációja), speciális változataként (is) értelmezhető.

5 Az erős dualitástétel

Ebben a fejezetben kimondjuk és bizonyítjuk a végtelen LP-kre vonatkozó erős dualitástételt. Mielőtt kimondanánk az erős dualitástételt, kimondunk és bizonyítunk egy másik, dualitáshoz köthető állítást, az ún. gyenge dualitástételt.

7. tétel (Gyenge dualitástétel). *Tekintsük a következő LP párt:*

$$\begin{array}{llcl} P: & c(x) & \to & \sup \\ f.h. & A(x) & = & b \\ & x & \in & P \end{array} \qquad \begin{array}{llcl} D: & y(b) & \to & \inf \\ f.h. & A'(y) & \geq_P & c \\ & y & \in & Y^* \end{array}$$

Ekkor

$$\sup_{(b,z)\in\overline{(A,c)\,(P)}} z \leq \inf_{y\in Y^*, A'(y)\geq_P c} y(b)\ .$$

Bizonyítás. Ha (P) nem szuperkonzisztens, akkor $\sup_{(b,z)\in\overline{(A,c)\,(P)}} z = -\infty$, ha (D) nem konzisztens, akkor $\inf_{y\in Y^*, A'(y)\geq_P c} y(b) = \infty$, tehát ezekben az esetekben áll a bizonyítandó egyenlőtlenség.

Legyen $y \in Y^*$ a D feladat egy megengedett megoldása. Ekkor

$$A'(y) \geq_P c\ ,$$

azaz minden $x \in P$-re $A'(y)\,(x) \geq_P c(x)$.

Legyen $(b,z) \in \overline{(A,c)\,(P)}$ tetszőlegesen választott. Ekkor létezik $(x_i)_{i\in I} \subseteq P$ általánosított sorozat, hogy $A(x_i) \xrightarrow{w} b$ és $c(x_i) \to z$. Mivel y folytonos, így $y(A(x_i)) \to y(b)$, és $(A'(y)\,(x) = y(A(x)))$

$$\lim c(x_i) \leq \lim y(A(x_i)) = y(b)\ .$$

Tehát

$$\sup_{(b,z)\in\overline{(A,c)\,(P)}} z \leq \inf_{y\in Y^*, A'(y)\geq_P c} y(b)\ .$$

□

A következő tétel a fejezet és a cikk fő eredménye, az ún. erős dualitástétel. Ez az eredmény Anderson és Nash (1987)-re (Theorem 3.3, p. 41) épül, gyakorlatilag Anderson és Nash eredményének újra- és átfogalmazása.

8. tétel (Erős dualitástétel). *Tekintsük a következő LP-párt:*

$$\begin{array}{llcl} (P): & c(x) & \to & \sup \\ f.h. & A(x) & = & b \\ & x & \in & P \end{array} \qquad \begin{array}{llcl} (D): & y(b) & \to & \inf \\ f.h. & A'(y) & \geq_P & c \\ & y & \in & Y^* \end{array}$$

Ekkor következő négy eset lehetséges:

1. *A (P) program szuperkonzisztens és z^* a véges szuperértéke, és a (D) program konzisztens és z^* a véges értéke.*
2. *A (P) program nem szuperkonzisztens, a (D) program konzisztens és nincs véges értéke.*
3. *A (P) program szuperkonzisztens és nincs véges szuperértéke, a (D) program nem konzisztens.*

4. A (P) program nem szuperkonzisztens, és a (D) program nem konzisztens.

Bizonyítás. *1. pont*: Tegyük fel, hogy a (P) program szuperkonzisztens és a véges szuperértéke z^*. Legyen $z' > z^*$, és legyen $d = (b, z')$, a $B : X \to Y \times I\!R$ lineáris leképezés pedig a következőképpen definiált: minden $x \in X$-re $B(x) = (A(x), c(x))$.

Ekkor $\overline{B(P)}$ egy zárt, konvex kúp a gyenge (Y-on) és az euklideszi ($I\!R$-en) topológiák szorzattopológiájában, és $d \notin \overline{B(P)}$. A Farkas-lemmából (6. tétel) következik, hogy létezik egy olyan f folytonos lineáris funkcionál, hogy minden $x \in \overline{B(P)}$ pontra $f(x) \geq 0$ és $f(d) < 0$.

Ekkor létezik olyan $\beta \in I\!R$, hogy minden $(y, z) \in \overline{B(P)}$-re

$$f((y, z)) = f((y, 0)) + f((0, z)) = f|_Y(y) + \beta z \geq 0 , \tag{4}$$

és

$$f(d) = f((b, z')) = f((b, 0)) + f((0, z')) = f|_Y(b) + \beta z' < 0 , \tag{5}$$

ahol $f|_Y$ az f lineáris funkcionál megszorítása $Y \times \{0\}$-ra, tehát (valójában) $f|_Y$ egy folytonos lineáris funkcionál Y-on.

Mivel a (P) feladat szuperkonzisztens és z^* a véges szuperértéke, így $(b, z^*) \in \overline{B(P)}$. Írjuk be (b, z^*)-t a (4) egyenlőtlenségbe

$$f((b, z^*)) = f((b, 0)) + f((0, z^*)) = f|_Y(b) + \beta z^* \geq 0 . \tag{6}$$

Az (5) és (6) különbségét véve

$$\beta(z' - z^*) < 0 ,$$

azaz $\beta < 0$.

Legyen $y_0 = -\frac{f|_Y}{\beta}$. Ekkor y_0 folytonos lineáris funkcionál Y-on, és minden $x \in P$-re a (4) egyenlőtlenséget alkalmazva kapjuk, hogy

$$f|_Y(A(x)) + \beta c(x) \geq 0 ,$$

azaz

$$y_0(A(x)) = -\frac{f|_Y(A(x))}{\beta} \geq c(x) .$$

Az $y_0(A(x)) = A'(y_0)(x)$ összefüggésből következik tehát, hogy $A'(y_0) \geq_P c$, azaz, y_0 megengedett megoldása (D)-nek, így a (D) feladat konzisztens. Az (5) egyenlőtlenségből következik továbbá, hogy $y_0(b) < z'$.

Összefoglalva a fentieket, és alkalmazva a gyenge dualitástételt (7. tétel, ahol $(A, c) = B$) azt kapjuk, hogy

$$\sup_{(b,z) \in \overline{B(P)}} z \leq \inf_{y \in Y^*, A'(y) \geq_P c} y(b) \leq y_0(b) \leq z' . \tag{7}$$

Mivel $z' > z^*$ tetszőlegesen választott volt, így

$$\sup_{(b,z) \in \overline{B(P)}} z = \inf_{y \in Y^*, A'(y) \geq_P c} y(b) .$$

Tegyük fel, hogy a (D) program konzisztens és van véges értéke. Ekkor a gyenge dualitástételből (7. tétel) következik, hogy a (P) feladat nem lehet szuperkonzisztens véges szuperérték nélkül (különben a (D) programnak nem lenne megengedett megoldása). Továbbá, ha (P) nem lenne szuperkonzisztens, akkor a fenti bizonyításban z'-t tetszőlegesen kis értéknek lehetne választani, tehát a (7) egyenlőtlenség miatt a (D) feladatnak nem lenne értéke, ami ellentmondás. Tehát a (P) program szuperkonzisztens és van véges szuperértéke.

A *2. pont*: A gyenge dualitástétel (7. tétel) miatt, ha a (D) feladat konzisztens és nincs értéke, akkor a (P) feladat nem lehet szuperkonzisztens.

A *3. pont*: A gyenge dualitástétel (7. tétel) miatt, ha a (P) feladat szuperkonzisztens és nincs vége szuperértéke, akkor a (D) feladat nem lehet konzisztens.

A *4. pont*: Tekintsük a következő feladatpárt:

$$\begin{array}{llcl} (P_{pl}): & (1,x) & \to & \max \\ f.h. & 0(x) & = & -1 \\ & x & \in & \mathbb{R}^d_+ \end{array} \qquad \begin{array}{llcl} (D_{pl}): & (-1,y) & \to & \min \\ f.h. & 0(y) & \geq & 1 \\ & y & \in & \mathbb{R}^d \end{array}$$

ahol 0 egy d-ed rendű csupa nullákból álló kvadratikus mátrix. Ekkor sem (P_{pl}) nem (szuper)konzisztens (véges esetben a konzisztencia és a szuperkonzisztencia ekvivalensek) sem (D_{pl}) nem konzisztens. □

Érdemes összevetni az erős dualitástételt a Karush-Kuhn-Tucker–tétellel (Karush, 1939; Kuhn és Tucker, 1951). Mindkét tétel az operációkutatás fő tételei közé tartozik, és mindkét tétel bizonyításában kulcsszerepe van a Farkas-lemmának. Azt mondhatjuk tehát, hogy mindkét tétel mögött egy konvex, zárt halmaz ponttól való erős szeparálására vonatkozó tétel, a Farkas-lemma bújik meg.

6 Összefoglalás

A cikkben ismertettük a végtelen LP-kre felírható primál-duál–párokat, kimondtuk és bizonyítottuk a végtelen LP-kre vonatkozó erős dualitástételt. A tárgyalás során igyekeztünk példák segítségével megmutatni, hogy mik az okai a végtelen eset a véges esethez képesti eltérésének, illetve a cikk felépítése segítségével a Farkas-lemma, mint speciális szeparációs tétel szerepét is hangsúlyoztuk. A hangsúlyozás meglátásunk szerint nem öncélú, mert a Karush-Kuhn-Tucker–tétel szintén „a Farkas-lemmában gyökerezik”, a „közös gyökerek” pedig a két tétel közötti hasonlóságra mutatnak.

Irodalom

1. Aliprantis C. D., Border K. C. (2006) *Infinite Dimensional Analysis*, Third Edition. Springer-Verlag.

2. Anderson E. J., Nash P. (1987) *Linear Programming in Infinite-Dimensional Spaces, Theory and Applications.* John Wiley & Sons, Inc.
3. Bartl D. (2007) Farkas' Lemma, other theorems of the alternative, and linear programming in infinite-dimensional spaces: a purely linear-algebraic approach. *Linear and Multilinear Algebra* 55(4):327–353.
4. Bartl D. (2008) A Short algebraic proof of the Farkas lemma. *SIAM Journal on Optimization* 19(1):234–239.
5. Broyden C. (1998) A simple algebraic proof of Farkas's lemma and related theorems. *Optimization Methods and Software* 8:185–199.
6. Chernikov S. (1968) *Linear Inequalities* (in Russian). Nauka.
7. Dax A. (1993) The relationship between theorems of the alternative, least norm problems, steepest descent directions, and degeneracy: A review. *Annals of Operations Research* 46:11–60.
8. Dax A., Sreedharan V. (1997) Theorems of the alternative and duality. *Journal of Optimization Theory and Applications* 94:561–590.
9. Fan K. (1956) On systems of linear inequalities. In: Kuhn H. W., Tucker A. W. (eds) *Linear inequalities and related systems*, Annals of Mathematics Studies, vol 38. Princeton University Press.
10. Farkas G. (1894) A Fourier-féle mechanikai elv alkamazásai. *Mathematikai és Természettudományi Értesítő* 12:457–472.
11. Farkas G. (1902) Über die Theorie der Einfachen Ungleichungen. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* 124:1–27.
12. Gale D. (1960) *The Theory of Linear Economic Models.* McGraw-Hill.
13. Good A. (1959) Systems of linear relations. *SIAM Review* 1:1–31.
14. Kánnai Z. (2008) The sectoroid version of the Farkas Lemma. *Mathematica Pannonica* 19(1):117–124.
15. Karush W. (1939) Minima of Functions of Several Variables with Inequalities as Side Constraints. Master's thesis, Department of Mathematics, Univ. of Chicago, Chicago, Illinois.
16. Kuhn H. W., Tucker A. W. (1951) Nonlinear programming. In: *Proceedings of 2nd Berkeley Symposium*, Berkeley: University of California Press, pp. 481–492.
17. Pintér M. (2011) Algebraic duality theorems for infinite LP problems. *Linear Algebra and its Applications* 434(3):688–693, doi 10.1016/j.laa.2010.09.007, http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S00243795 10004702.
18. Roos C., Terlaky T. (1999) Note on a paper of Broyden. *Operations Research Letters* 25:183–186.
19. Tucker A. W. (1956) Dual systems of homogeneous linear relations. In: Kuhn H. W., Tucker A. W. (eds) *Linear Inequalities and Related Systems*, Annals of Mathematics Studies, vol 38, Princeton University Press, pp. 3–18.

STRONG DUALITY THEOREM FOR INFINITE LPS

This paper considers a strong duality theorem for inifinite linear programs. We state and prove the infinite dimensional version of the Farkas lemma, and by this result we prove a strong duality theorem for inifinite linear programs (Anderson and Nash, 1987). We discuss the main notions of the field and by the means of examples we shed light on the intuitions lying behind the results.

PÁROS ÖSSZEHASONLÍTÁSI MÁTRIXOK ELEMEINEK INTERAKTÍV MEGHATÁROZÁSA VERBÁLIS SKÁLA ESETÉN[1]

TEMESI JÓZSEF
Budapesti Corvinus Egyetem

Több kutatási eredmény alátámasztja azt, hogy a többtényezős döntési problémák páros összehasonlítási mátrixokat alkalmazó módszereinél a mátrix elemeinek megadására szolgáló eljárás módja kihat a végeredményre, a preferenciák, súlyok, rangsorok meghatározására. Az eljárások lényeges tulajdonsága, hogy konzisztens, közel-konzisztens vagy inkonzisztens mátrixot adnak-e végeredményül. A kutatók és a gyakorlati szakemberek által használt döntéstámogató módszerek többféle megközelítést alkalmaznak. Két fontos kérdést vizsgálok meg. Egyrészt elemzem és értelmezem a szakirodalomban található korrekciós módszereket abból a szempontból, hogy azok milyen elvekre épülnek, és milyen technikákat alkalmaznak a mátrixok inkonzisztenciájának csökkentésére. Másrészt azt állítom, hogy a döntési problémák jelentős részénél az inkonzisztencia csökkentése nem történhet a döntéshozó pótlólagos információi nélkül. A javasolt interaktív módszer az egyéni (szubjektív jellegű) döntési problémák páros összehasonlítási mátrixelemeinek verbális skálán történő megadását támogatja. A döntéshozó bevonása a folyamatba és néhány speciális kiegészítő szabály alkalmazása biztosítja, hogy a folyamat végén közel-konzisztens vagy hibamentes mátrixot kapjunk, vagy kiderüljön, hogy a döntéshozó az adott probléma esetében nem tudja elérni ezt a célt.

Kulcsszavak: döntéstámogatás, többtényezős döntési módszerek, páros összehasonlítási mátrixok, mátrix kitöltési eljárások, inkonzisztencia

1 Páros összehasonlítási mátrixok

A páros összehasonlítási mátrixok felhasználása különböző modellkeretek között történik. E mátrixok egy közismert alkalmazása a *szavazás-elméletben* a Condorcet-paradoxon feloldására vonatkozik (Condorcet, 1785; Gehrlein, 2006). Legyen $K = 60$ szavazónk, akik a, b, és c jelöltek közül választanak. Mindegyik szavazó preferencia-profilja ismert. Összesen hatféle profil létezik, ebből a példabeli szavazók az alábbi eloszlásban részesednek (P a preferencia relációt jelöli, a két hiányzó profil részesedése 0):

$aPcPb$: 23 szavazó	$bPcPa$: 19 szavazó
$cPbPa$: 16 szavazó	$cPaPb$: 2 szavazó

A győztes meghatározása különféle egyszerű döntési szabályok segítségével történhet, az eltérő szabályok azonban eltérő eredményekre vezethetnek. Ha

[1]Beérkezett: 2017. január 20. E-mail: `jozsef.temesi@uni-corvinus.hu`.

például az egyszerű többségi elvet használjuk (mindenkinek egyetlen szavazata van), akkor a győztes az a jelölt, ha viszont többfordulós eljárásban az abszolút többséget kapott jelöltet választjuk ki, a győztes a b jelölt lesz. Condorcet azt javasolta, hogy a teljes preferencia-sorrendek ismeretében páronként versenyeztessük a jelölteket és az így kialakuló sorrend legyen a végleges. (Előre összegyűjtött profilok esetében a szavazások fizikai lebonyolítása sem szükséges.) Példánkban b legyőzi a-t, c is legyőzi a-t és végül b legyőzi c-t, vagyis a végső sorrend $c\,b\,a$, tehát c a nyertes. Ez a teljes információn alapuló módszer szimpatikusnak tetszhet, azonban nem minden esetben alkalmazható a győztes meghatározására. Ha a profilok az alábbiak:

$aPbPc$: 23 szavazó $bPcPa$: 17 szavazó $bPaPc$: 2 szavazó
$cPaPb$: 10 szavazó $cPbPa$: 2 szavazó

akkor azt látjuk, hogy a páros szavazásokban a legyőzi b-t, b legyőzi c-t, ám c legyőzi a-t. Mivel a jelöltek körbeverték egymást, ezért nem tudunk közöttük sorrendet megállapítani. A helyzet megoldásául Condorcet egy olyan páros összehasonlítási mátrixot javasol, ahol a mátrix a_{ij} eleme azt jelenti, hogy az i és j közötti szavazásban az i-edik jelöltre hányan adtak le szavazatot. Az így kialakított mátrix a_{ii} eleme az 1. táblázatban nem definiált, és $a_{ij} + a_{ji} = K$ (a szavazók száma).

	a	b	c	min
a	–	33	25	25
b	27	–	42	27
c	35	18	–	18

1. táblázat

A mátrixot felhasználva Condorcet a maximin elv alkalmazását javasolta: így a győztes a b jelölt lesz, mivel ő az, akinél a nyertes szavazatok minimuma (lásd az utolsó oszlopot) a legnagyobb.

Tegyük fel, hogy n játékos (csapat) egy *bajnokságban* vesz részt. Mindenki mérkőzik mindenkivel. A sportág lehet egyéni (pl. sakk), csapatsport (pl. labdarúgás vagy röplabda), ahol a döntetlen is lehetséges, illetve olyan sportág is, ahol döntetlen nem születhet (pl. tenisz). Az egymás elleni eredmények alapján megszerkeszthető egy páros összehasonlítási mátrix – ez azonban többféle módon is történhet. Ha döntetlen nem lehetséges, akkor a mátrix a_{ij} eleme lehet 1 (győzelem) és 0 (vereség). Az is lehetséges, hogy a mérkőzések eredményeiből generáljuk a mátrix elemeit: ha például a P_i és P_j közötti eredmény 4:2, akkor $a_{ij} = 4$ és $a_{ji} = 2$. De pontszámok is adhatók a győzelemért, döntetlenért, vereségért, ez pl. lehet rendre 3, 1 és 0. A páros összehasonlítás mátrixot ezután különböző elméleti megközelítések alapján kialakított modellekben használhatjuk fel a versenyzők közötti sorrend meghatározására. (Jegyezzük meg, hogy ezek a modellek nem feltétlenül követik egy adott sportág hagyományos számítási módszereit.)

A *többtényezős döntéshozatal* esetében n alternatívát k kritérium szerint vizsgálunk. Az egyik lehetőség az, hogy minden alternatívhoz preferencia értéket akarunk rendelni az egyes kritériumok szerint, majd ezek megfelelő aggregálásával kívánjuk az alternatívák rangsorát meghatározni. Az is lehetséges, hogy rendelkezésünkre áll egy adatmátrix, amelynek elemei már tartalmaznak összehasonlítható értékeket valamely kvantitatív vagy kvalitatív skálán, ám a döntés során a kritériumokat csoportokra bontjuk, s ezeken a csoportokon belül a kritériumok súlyára vagyunk kíváncsiak.

Különböző többtényezős döntési modellek léteznek az alternatívák végső sorrendjének meghatározására, s ezek eltérő szemléletet képviselnek. Többségük páros összehasonlítási mátrixokat használ, azonban a mátrix előállítása és a modellek filozófiája eltérő. Az a_{ij} elem például lehet 1 (P_i preferált P_j ellenében) vagy 0 (P_j preferált P_i ellenében). A mátrix elemeit generálhatjuk az összehasonlítás értékeinek különbségeiből is, de a hányadosok is lehetnek ezek az értékek. Amennyiben verbális skálát használunk, felmerül annak terjedelme, illetve a kvantitatív skálára transzformálásának problémája.

A fenti modellek arra mutatnak rá, hogy a páros összehasonlítási mátrixok alkalmazásakor pontosan definiálni kell a mátrix tulajdonságait, s hogy azok az eltérő modellkeretekben különbözhetnek egymástól. Természetesen előfordul, hogy egyes modellek ekvivalens formára hozhatók, például bizonyos bajnokságok többtényezős döntési modellként vizsgálhatók, vagy egyes többtényezős döntési modellek szavazási modellekké transzformálhatók. Általánosságban azonban nem ez a helyzet.

2 Páros összehasonlítási mátrixok az AHP modellben

A Saaty által kifejlesztett Analytic Hierarchy Process (AHP) (Saaty, 1980) rendkívül sikeresnek bizonyult az alkalmazásokban. A módszertan három egymásra épülő, egymást feltételező eleme (Brunelli, 2015): a kritériumok csoportokra bontása és hierarchiába foglalása; páros összehasonlítási mátrixok alkalmazása; a sajátvektor módszer használata a súlyok, preferenciák meghatározására.

Legyenek a többtényezős döntési probléma kritériumai $C_1, C_2, \ldots, C_k$, az alternatívák pedig $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Az alternatívákat minden kritérium szerint páronként összehasonlítjuk egymással. Az A_m páros összehasonlítási mátrix a_{ij} eleme ($i, j = 1, \ldots, n$) jelentse az i-edik és a j-edik alternatíva összehasonlításának eredményét az m-edik kritérium szerint ($m = 1, \ldots, k$). Amennyiben vizsgálataink céljára egyet kiemelünk ezen mátrixok közül, akkor az m index használatától eltekintünk.

Az A páros összehasonlítási mátrix tulajdonságai:

i. $a_{ii} = 1$, (homogenitás),

ii. $a_{ij} > 0, \quad i, j = 1, \ldots, n$ (pozitivitás).

Esetünkben az A mátrix elemei a döntéshozó ítéleteit jelenítik meg arra a kérdésre, hogy *„Hányszor jobb (kedvezőbb, preferált) a P_i alternatíva a P_j alternatívához képest (egy adott kritérium szerint)?"* Egy fontos újabb tulajdonság tehát a döntéshozó véleményének bekérésekor, illetve egy adott adatmátrix elemeinek transzformálásakor, hogy az a_{ij} elemeket *hányados skálán* kell megadni. A hányados skála alkalmazása az A mátrix újabb tulajdonságaihoz vezet:

iii. $a_{ji} = 1/a_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, n$ (reciprocitás) – a párok közül csak egyet hasonlítunk össze,

iv. $a_{ik} = a_{ij} \cdot a_{jk}, \quad i, j, k = 1, \ldots, n$ (szupertranzitivitás vagy kardinális tranzitivitás).

A mátrix alternatíva-hármasait (a továbbiakban *triádok*) külön is vizsgálhatjuk. Ha minden triád eleget tesz a iv) tulajdonságnak, akkor *A konzisztens*. Ha legalább egy triádnál létezik olyan eset, amikor $a_{ik} \neq a_{ij} \cdot a_{jk}$, akkor az A mátrix *inkonzisztens*.

Ha a triád elemeire teljesül az, hogy $a_{ij} > 1$, $a_{ik} < 1$ és $a_{jk} > 1$, vagy $a_{ij} < 1$, $a_{ik} > 1$ és $a_{jk} < 1$, akkor az adott triád *ellentmondásos* (Kwiesielewicz, van Uden, 2004), amennyiben a „jobb” kifejezést használtuk a mátrix elemeinek előállítása során. A kérdést preferencia-reláció megadásaként értelmezve a triád *nem (ordinálisan) tranzitív* vagy *intranzitív*. Kwiesielewicz és van Uden (2004) felsorolja az intranzitivitás mind a 6 esetét (a bemutatott kettő mellett mindazok, ahol egyenlőség van egy vagy két relációban).

Mostantól tárgyalásunkban a „páros összehasonlítási mátrix” kifejezést leszűkítjük arra az esetre, amikor az i)-iii) tulajdonság teljesül. Ez az értelmezés szorosan kötődik a többtényezős döntéshozatali modellhez, és a legtöbb, az előző fejezetben tárgyalt modellnél (bajnokságok, szavazások) nem biztosítható akkor sem, ha egyébként páros összehasonlítások történtek.

3 Konzisztencia

A konzisztencia vizsgálata központi jelentőségű a páros összehasonlítási mátrixok alkalmazása során. Ha az A mátrix konzisztens, akkor az alternatívák rangsora többféle módszerrel könnyen és egyértelműen megadható. Itt most ezekkel a módszerekkel és tulajdonságaikkal nem foglalkozunk, Choo és Wedley (2004) kitűnő áttekintést ad erről.

Valós döntési problémák megoldásakor a *döntéshozó* részt vesz az A mátrix elemeinek megadásában. A döntéshozó preferenciáinak kinyilvánítása a páros összehasonlítási kérdések megválaszolásával történik. Bár az is lehetséges, hogy az a_{ij} értéket egy adatmátrixból generáljuk, ám ekkor is szükség van arra, hogy az arányskálára konvertálásnál figyelembe vegyük a döntéshozótól származó információkat. A döntéshozó részvételének mikéntje és az általa megadott információk függnek attól, hogy a *döntési probléma* milyen típusú (Temesi, 2011).

Képes-e a döntéshozó konzisztens mátrixot megadni? A döntéselméleti szakemberek többsége egyetért abban, hogy a döntéshozó csak korlátozott és az összehasonlítandó párok számának növekedésével egyre csökkenő megbízhatóságú információt képes megadni: ha már hét vagy annál több alternatíva páronkénti összehasonlításáról van szó, a döntéshozó elbizonytalanodik a válaszaiban (Miller, 1956). Ennek a bizonytalanságnak a legbiztosabb jele az A mátrix inkonzisztenciája, vagyis az ordinális vagy kardinális tranzitivitás megsértése. Saaty és követőinek érvelése szerint az inkonzisztencia természetes jelenség, s ha a kikérdezés folyamatában valamilyen formában erőltetjük a teljes konzisztenciát, akkor ezzel eltéríthetjük a döntéshozót a valódi preferenciáitól, eltorzíthatjuk az alternatívák értékelését, sorrendjét.

Mivel azonban az A mátrix alapján történő becslések a tökéletes konzisztencia esetében adnak megfelelő megoldást, magától értetődőnek látszik, hogy minél közelebb van a döntéshozó a konzisztens esethez, annál jobb a végeredmény. Hogyan definiálható ez a *„közel-konzisztencia”*? Saaty válasza az, hogy a páros összehasonlítások során a válaszok kismértékű véletlen hibákat tartalmazhatnak, s az így kapott közel-konzisztens mátrix a valódi mátrix perturbált változata (Saaty, 2001). Igaz viszont az is, mondja Saaty, hogy egyéb problémák is akadhatnak a páros összehasonlítások megadása vagy rögzítése során, így például előfordulhat, hogy $1/a_{ij}$ kerül az a_{ij} elem helyére.

Az inkonzisztencia probléma kényelmes megoldása az lenne, ha mérni tudnánk az inkonzisztenciát és meg tudnánk adni egy *„elfogadhatósági küszöböt”*. Sajnos olyan mértéket és mérőszámot, amely a szokásos matematikai tulajdonságoknak megfelel és egyben jól értelmezhető is, egyelőre nem sikerült találni. A kutatók sokféle inkonzisztencia indexet javasolnak. Ezek egy része meghatározott becslési módszerekhez kötődik. Az indexek összefoglaló és értékelő áttekintésére többen vállalkoztak (Brunelli, Fedrizzi, 2015; Bozóki, Fülöp, Poesz, 2015). A küszöbértékek azonban – ha egyáltalán adnak meg ilyet a szerzők –, heurisztikus gondolatmeneteken és empirikus tapasztalatokon alapulnak. A leginkább elfogadott index Saaty nevéhez fűződik, az általa megadott 10%-os empirikus szabállyal.

Egy páros összehasonlítási mátrix akkor és csak akkor konzisztens, ha legnagyobb sajátértéke n. Az AHP ezt a tulajdonságot használja fel: $CR(n)$ a $(\lambda_{\max}-n)/(n-1)$ konzisztenciaindex és az $RI(n)$ tényezők hányadosa, ahol az utóbbi nagyszámú véletlen páros összehasonlítási mátrix konzisztenciaindexeinek átlaga. A lassan már 40 éves gyakorlat során az AHP-felhasználók azt az empirikus szabályt követik, miszerint az elfogadható inkonzisztenciájú A mátrixnál $CR(n) < 0{,}1$.

Miközben az AHP alkalmazások száma hatalmas és egyre nő, a gyakorlati eseteknél a szerzők igyekeznek igazolni azt, hogy a szabály alkalmazása nem okoz problémát a preferenciák vagy a rangsor meghatározásánál. Ugyanakkor viszont egyes elméleti eredmények és példák azt sugallják (Murphy, 1993; Karapetrovic, Rosenbloom, 1999; Kwiesielewicz, van Uden, 2004; Gaul, Gastes, 2012) hogy az index felhasználását érdemes fenntartásokkal kezelni.

Döntéselméleti szempontból az egyik legfontosabb kérdés az ordinális és kardinális intranzitivitás kezelése. A legtöbb index – $CR(n)$ is idetartozik – nem vizsgálja az ordinális tranzitivitás megsértését. Ez azt jelenti, hogy ellentmondásos triádok maradhatnak a végeredményben még akkor is, ha a konzisztenciateszt zöld utat adott a mátrix további felhasználásának. A döntési problémák zöme az alternatívák teljes vagy részleges rangsorolását kívánja meg. A rendezésnek azonban feltétele a tranzitivitás. Ezért mondhatja Kwiesielewicz és van Uden (2004), hogy „... ha a páros összehasonlítási mátrix ellentmondásos, akkor nem lehetséges olyan sorrendet találni, amely kielégítené a döntéshozó által megadott értékeléseket". Ha az A mátrix gráf reprezentációját használjuk, akkor az ellentmondásos triádok köröket alkotnak, s ezeken belül nem tudunk rendezést megadni.

Míg az idézett vélemény teljes tagadást tartalmaz, a másik véglet az lenne, ha például a Saaty-index tesztjét minden további vizsgálat nélkül elfogadnánk. Az ebben a cikkben javasolt módszer nem használ inkonzisztencia indexet, folyamatos tranzitivitás vizsgálatot tartalmaz, és ha csak lehetséges, elkerüli az ordinálisan intranzitív mátrixok elfogadását.

4 Az inkonzisztencia kezelése: korrekciós módszerek

Induljunk ki abból a feltételezésből, hogy az induló mátrix meghatározása során nem ragaszkodunk a teljes konzisztenciához. Az inkonzisztens páros összehasonlítási mátrixok esetére a kutatók többféle stratégiát javasolnak egy megfelelő mátrix elérésére.

1. stratégia

a) A páros összehasonlítási mátrix elemeinek kinyilvánítása döntéstámogatás nélkül (az eljáráson belüli megkötések nélkül) történik.

b) Inkonzisztencia index alkalmazása.

c) Ha az inkonzisztencia értéke (az adott inkonzisztencia index szerint) magas, akkor a mátrixot elvetjük, egyébként elfogadjuk.

Az első lépésben tehát az adott keretek között (pl. adott skálán) változtatási javaslatok nélkül elfogadjuk a döntéshozó ítéleteit. A második lépés szolgál a nem megfelelő mátrixok kiküszöbölésére, s mint látjuk, amennyiben a harmadik lépés szigorú, akkor a mátrixot vagy a döntéshozót (pl. csoportos döntéseknél) kizárhatjuk a további folyamatból.

Gyakoribb ennél a szigorú szemléletnél az, hogy egy kevésbé inkonzisztens mátrix elérése céljából bizonyos elemek megváltoztatását javasoljuk a döntéshozónak. A továbbiakban a *korrigált mátrixot* A^* jelöli, ha legalább egy elem megváltozott az eredeti A mátrixhoz képest.

2. stratégia

a) és b): Ugyanaz, mint az 1. stratégiánál.

c) Korrigáljuk a mátrixot, míg elfogadható mértékű inkonzisztenciát kapunk (a toleranciaszint lehet akár 0 is).

A gyakorlati döntéshozatalban a korrekciós módszerek ismerete és megfelelő alkalmazása kulcsfontosságú. A legjobb korrekciós metódus kiválasztásához megfelelő hipotézissel kell rendelkeznünk az inkonzisztencia forrását illetően. Néhány lehetőség a következő:

– az A mátrix inkonzisztenciájának oka az, hogy a döntéshozó apró hibákat vétett a páros összehasonlítások során: ez a perturbációs típusú hiba a közel-konzisztens mátrixokra jellemző,
– az A mátrix inkonzisztenciájának oka az, hogy a döntéshozóval történt kommunikációban vagy az adatok rögzítése során egyetlen nagyobb hiba keletkezett: ilyen lehet például az, amikor egy elem helyett véletlenül a reciproka kerül rögzítésre,
– az A mátrix inkonzisztenciájának oka az, hogy a döntéshozó szisztematikusan alulbecsli a páros összehasonlítási értékeket: például egy verbális skálán kerüli és kisebb értékekkel helyettesíti a szélső értékeket.

Xu and Wei (1999) egy auto-adaptív módszert javasoltak, amelynek révén a korrigált mátrix $CR(n)$ értéke kisebb lesz, mint az eredeti mátrixé. Cao, Leung és Law (2008) az általuk lefektetett alapokon egy heurisztikus eljárást alakítottak ki, amelyik az eredeti inkonzisztens mátrixból automatikusan egy konzisztens mátrixot generál. A perturbációs módszerek mellett Saaty (1980, 2003) és Koczkodaj (1993) a páros összehasonlítás mátrix legkevésbé konzisztens elemének meghatározására dolgozott ki egymástól független inkonzisztencia definíción alapuló technikákat. Ezek tulajdonságait Bozóki és Rapcsák (2008) elemezte részletesen.

A korrekciós módszerekben a konzisztens mátrixhoz való közelség meghatározásának elvi hátterét leginkább a becslési technikák szolgáltatják (sajátérték módszer, legkisebb négyzetes technikák, geometriai átlag, stb.). Choo és Wedley (2004), majd Lin (2007) szimulációs kísérletekkel megvizsgálta a becslési módszereket abból a szempontból, hogy mi a hatása, ha sok kismértékű hiba és néhány nagyobb hiba fordul elő a páros összehasonlítási mátrixban. Ha egy adott módszer fokozottan érzékeny valamely típusú hibára, akkor ez fogódzót adhat a megfelelő korrekciós módszer meghatározásához.

Egyes korrekciós módszerek optimalizációs technikákat használnak a páros összehasonlítás mátrix elemeinek módosításához: Gonzalez-Pachón és Romero (2004) célprogramozást, Bozóki, Fülöp és Poesz (2011) nem-lineáris vegyes egészértékű módszert alkalmaz.

A 2. stratégia többnyire egy elfogadható, nem-zéró CR-típusú inkonzisztenciával rendelkező korrigált mátrixot eredményez. Ezeknek a megközelítéseknek két megkérdőjelezhető vonása is van. Az egyik probléma az intranzitív triádok jelenlétének lehetősége a végső A^* mátrixban. Egy másik hátránya a módszereknek, hogy egy olyan elfogadható mértékben inkonzisztens mátrixhoz vezethetnek, amelyiknek az elemei messze vannak a döntéshozó valódi preferenciáitól.

Érdemes megjegyezni, hogy az AHP alkalmazók eleve igyekeznek elkerülni ezeket a problémákat. Ehhez hatékony segítséget nyújt maga a hierarchia:

ha a tényezőket jól értelmezhető csoportokba soroljuk, elérhető, hogy egy-egy csoportba kevés számú összehasonlítandó elem tartozzon, s ekkor a döntéshozó könnyebben el tudja kerülni az ordinális intranzitivitást.

Kou, Ergu és Shang (2014) szerint a jelenleg alkalmazott korrekciós módszerek közül nagyon kevés képes arra, hogy egy modellen belül szimultán módon kezelje az ordinális és a kardinális tranzitivitást. Ha optimalizálási módszert alkalmazunk, akkor viszont elkerülhetetlen, hogy az eredeti értékek akár nagyobb mértékben is megváltozzanak. Ezért ők egy olyan modellt fejlesztettek ki, amelyik csak az eredeti A mátrix elemeit használja fel és független a prioritás vektort előállító módszertől, miközben a lehető legtöbb információt megőrzi az eredeti mátrixból.

Ishizaka és Lustin (2004) egy konzisztens mátrixot vagy egy ellenőrzött hibájú inkonzisztens mátrixot segít a döntéshozónak felépíteni a tranzitivitási és reciprocitási szabályok betartása mellett. Siraj, Mikhailov és Keane (2012, 2015) egy kétfázisú modellt fejlesztett ki. Az első fázisban kimutatják és kiküszöbölik az ordinális intranzitivitást. A második fázis a kardinális inkonzisztencia korrekciójára szolgál.

Mint látható, néhány korrekciós módszer képes arra – vagy legalábbis törekszik rá –, hogy konzisztens mátrixot adjon végeredményül. Az így kapott A^* mátrix azonban csak egy a ,,közeli" lehetséges konzisztens mátrixok közül, s a ,,közelség" maga nem egy döntéselméleti konszenzus által jóváhagyott vagy axiomatikus alapokon meghatározott mértékből származik. Különböző távolságfogalmak különböző eredményekre vezethetnek.

Egy másik problémája a korrekciós módszereknek, hogy bár állításuk szerint a lehető legtöbb információt őrzik meg az eredeti mátrixból, ezt nem tudják bizonyítani, mivel ez az állítás puhán definiált. Egyes esetekben úgy kell értenünk ezt a kijelentést, hogy minimális számú elemet kell megváltoztatni ahhoz, hogy konzisztens vagy elfogadható inkonzisztenciájú mátrixot kapjunk, más esetekben a változtatások nagyságrendje kontrollált.

S végül igaz-e, hogy a korrigált mátrix jobban kifejezi a döntéshozó valódi preferenciáit, mint az induló mátrix? Siraj, Mikhailov és Keane (2012) szimulációs kísérletei ezt az állítást nem támasztják alá. Más szerzők is kétségeiknek adnak hangot, figyelmeztetnek módszereik korlátaira. Kou és szerzőtársai, valamint Saaty javításait megnézve (a mátrixokat lásd más összefüggések vizsgálata kapcsán a *11. és 9. táblázatban)* azt láthatjuk majd, hogy Kou és szerzőtársai csak egyetlen elemet változtatnak meg 3-ról 1/2-re, ezáltal nagyon jó CR-indexet elérve. Realisztikus-e azonban az a változtatás, ahol a két elem preferencia-sorrendje is megfordul? Erre a kérdésre csak a döntéshozó tudhatja a választ. Gaul és Gastes (2012) meggyőző módon tárgyalja annak nehézségét, hogy a módosított mátrix elemeit a döntéshozó ,,valódi" mátrixának ismerete nélkül elfogadhassuk.

Bozóki , Fülöp és Poesz (2015) úgy fogalmaznak, hogy az általuk kifejlesztett nem-lineáris optimalizálási feladat megoldása ugyan azonosítja a módosítandó elemeket, ám a következtetések között azt írják, hogy ,,gyakorlati szempontból az elemek meghatározása nagyon hasznos lehet azokban a szituációkban, amikor tudjuk, hogy egy többé-kevésbé konzisztens döntéshozó figyelme ellankadt néhány elem megadásakor, vagy adatrögzítési hibát gyanítunk. Az általunk kidolgozott technika arra mutat rá, hogy ez a helyzet fordulhatott elő, ám az már a döntéshozó feladata, hogy ezt a módszertant felhasználva valóban módosítja-e a detektált elemeket?"

5 A páros összehasonlítási mátrix verifikálása: a döntéshozó szerepe

A fenti megjegyzések elvezetnek bennünket cikkünk alapvető kérdéséhez. A 2. stratégia a korrekció kezelését ex post módon oldja meg a döntéshozó bevonása nélkül, feltételezve, hogy a döntéshozó valamilyen okból nem elérhető. Létezhetnek ugyan olyan döntési feladatok, ahol ez a feltevés reális, azonban ennek a megközelítésnek minden esetben az a következménye, hogy a korrekció ,,automatikusan", a döntéshozó pótlólagos információi nélkül történik. Nem tudható, hogy a döntéshozó a végeredményt el tudja fogadni vagy sem. (Természetesen létezhetnek szélsőséges helyzetek, amikor a dolog egyértelmű, pl. ha triviális, hogy elírás történt, ám általánosságban többféle módosítás is érvényesíthető.)

Eljuthatunk addig a következtetésig (Temesi, 2007, 2011), miszerint az egyik lehetséges megoldás a verifikációs problémára az, ha *a kikérdezés teljes folyamatában* segítjük a döntéshozót abban, hogy a számára megfelelő mátrixot állítsa elő – anélkül azonban, hogy egy általa nem kívánt (ám konzisztens, vagy közel-konzisztens) mátrix felé terelnénk őt. Ez a ,,semleges" döntéstámogatás megvalósítható például úgy, hogy az eljárás során kimutatjuk az ordinális és/vagy kardinális inkonzisztencia megtörténtét, ám kerüljük a konkrét javaslatokat. Inkonzisztencia indexek használatára nincs szükség. Ez lesz a 3.1. stratégia.

3.1. Stratégia

A páros összehasonlítás mátrix elemeinek megadását *döntéstámogatás mellett* (döntéshozó szakember vagy számítógépes döntéstámogató modul segítségével) végzi a döntéshozó.

A másik lehetőség az, hogy a döntéshozó véleményét csak *az eljárás végén* kérjük ki. Amennyiben a döntéshozó egyetért a végeredménnyel, akkor az eljárás véget ért, ha nem, akkor többfelé elágazhat az eljárás. Módot adhatunk arra, hogy konzisztens mátrixot készítsen a döntéshozó valamelyik ismert korrekciós módszer javaslatait felhasználva, vagy egy számára megfelelő inkonzisztens mátrixhoz jusson el a 3.2. stratégia során.

3.2. Stratégia

a) A páros összehasonlítási mátrix elemeinek meghatározása döntéstámogatás nélkül.

b) A mátrix verifikálása.

6 A mátrix elemeinek előállítása verbális skálán

A korrekciós módszerek verifikációjának példájaként a továbbiakban tárgyalásunkat leszűkítjük azokra a döntési problémákra, amelyek szubjektív megítélésűek és nem kézzelfogható elemeket (intangible) is tartalmaznak. Tipikusan idetartoznak az egyéni fogyasztói döntések, ahol az alternatívák bármely preferencia sorrendje azonos valószínűséggel fordulhat elő, vagy másképpen fogalmazva senki nem tudja megmondani, hogy egy adott döntéshozó esetében valamelyik sorrend a többinél jobb/ésszerűbb/kedvezőbb lenne. Magától értetődő, hogy az ilyen típusú döntési problémák megoldásakor a döntéshozó jelenléte nem nélkülözhető, hiszen ő az egyetlen, aki ki tudja nyilvánítani valós preferenciáit, illetve módosítani tud értékítéletein. Ugyanakkor elfogadjuk azt, hogy a döntéshozó az egyes páros összehasonlítások során bizonytalan lehet a konkrét értékek megadásakor és véthet az ordinális vagy kardinális tranzitivitás ellen.

Hasonló feladatok megoldásakor Saaty verbális skálájának használata a legelfogadottabb. Ez a skála szóban megfogalmazott ítéletek kvantifikálására az 1-től 9-ig terjedő pozitív értékeket és azok reciprokait használja a következőképpen: ha az összehasonlító kérdésre adott válasz ,,egyenlő", akkor az arány 1:1, ha az egyik alternatíva ,,csekély mértékben jobb a másiknál", akkor 3:1, ha ,,jobb", akkor 5:1, ha ,,sokkal jobb", akkor 7:1 és ha ,,abszolút jobb", akkor 9:1. Ha a páros számokat is használjuk, azok jelentése például ,,kissé jobb" (2:1), …, ,,erősen jobb" (8:1).

A skálaértékek igazolását Saaty (1980) írja le. Itt most nem foglalkozunk azokkal a kritikákkal, amelyek az AHP alkalmazását különböző nézőpontokból elvileg kifogásolják (lásd pl. Belton és Gear (1983), Murphy (1993), Bana e Costa és Vansnick (2008)). A kritikai megjegyzések közül egyetlen egyszerű tényre hívjuk fel a figyelmet, ami témánk szempontjából érdekes: ez a skála beépített inkonzisztenciája, amely minden végponttal rendelkező skálára igaz. Ha például $a_{12} = 3$ és $a_{23} = 5$, akkor $a_{13} = 9$ és nem 15, ahogyan ezt a teljes konzisztencia megkövetelné. Ez a tény a konzisztencia elemzést a verbális skálákon némileg bonyolultabbá teszi.

3.1. stratégia: az eljárás

A mátrix elemeinek megadása interaktív módon történik: döntéstámogató szakember van jelen vagy a döntéstámogató számítógépes rendszer generál párbeszédet. A lépések:

a) Az ordinális és kardinális konzisztencia folyamatos tesztelése.

b) Korrekciós javaslatok a döntéshozó számára.

c) A döntéshozó korrigál, amennyiben az szükséges.

d) Az eljárás befejeződik, ha minden elem előállt vagy a folytatás nem lehetséges.

Az első lépésben előszámoljuk a korrekcióban potenciálisan résztvevő triádokat. A döntéshozó megkapja az ordinális és kardinális tranzitivitási hibák listáját a korrekciós lehetőségekkel. A harmadik lépésben kötelezően korrigál, ha az ordinális tranzitivitás sérült. A kardinális tranzitivitás megsértésekor a javítási javaslat a verbális skálán a ,,legközelebbi szomszédok" tartományából történik (a részleteket a példában mutatjuk meg). A döntéshozó továbbmehet a folyamatban akkor is, ha kardinális intranzitivitás maradt a mátrixban.

1. példa

Négy alternatívánk van: a, b, c és d. Hat páros összehasonlítás szükséges. Az eljárásban négy triádot kell konzisztencia szempontjából tesztelni.

Az eljárás véletlen módon kiválasztott páros összehasonlításokkal kezdődik. Jelölje (a, b) az a és b közötti összehasonlítást. Ez az összehasonlítás két kérdésből áll: az első kérdés arra vonatkozik, hogy a két alternatíva közül melyiket találja a döntéshozó jobbnak (preferáltnak). Ha a válasz az, hogy egyformák, akkor az összehasonlítás eredménye 1 és nincs szükség a második kérdésre. Másodjára azt kérdezzük, hogy a jobbnak talált alternatíva a verbális skálán elhelyezve hányszor jobb a másiknál. Konzisztencia tesztet akkor végzünk, amikor először kapunk tesztelhető triádot.

Legyenek az első összehasonlítások a következők:

- b abszolút jobb, mint a: $(a, b) = 1/9$
- c csekély mértékben jobb, mint a: $(a, c) = 1/3$
- c kissé jobb, mint d: $(c, d) = 2$

Az eddigi mátrix elemek (a hiányzó elemeket x jelöli a *2. táblázatban*):

	a	b	c	d
a	1	1/9	1/3	x
b	9	1	x	x
c	3	x	1	2
d	x	x	1/2	1

2. táblázat

Nincs tesztelhető triád. A következő összehasonlítás:

- b sokkal jobb, mint c: $(b, c) = 5$

	a	b	c	d
a	1	1/9	1/3	x
b	9	1	5	x
c	3	1/5	1	2
d	x	x	1/2	1

3. táblázat

Az $[a, b, c]$ triádot tudjuk tesztelni a *3. táblázat* mátrixából. Azt látjuk, hogy a triád ordinálisan tranzitív: $b \to c \to a$. Ellenőrizzük a kardinális konzisztenciát: $1/9 \cdot 5 = 5/9 \neq 1/3$.

A javításhoz használt „*legközelebbi szomszéd*" *elv* (heurisztika) azt jelenti, hogy az adott értékkel szomszédos két-két skálaérték valamelyikét ajánljuk. Ezek esetünkben a legutoljára megadott $(b, c) = 5$ elemnél 3, 4, 6 és 7. Érdemes megjegyezni, hogy ha például a döntéshozó a $(b, c) = 3$ értéket választaná, akkor ezzel a triádot konzisztenssé tenné. A döntéshozó azonban úgy gondolja, hogy nem változtat eddigi ítéletein. A következő összehasonlítás:

- d kissé jobb, mint b: $(b, d) = 1/2$

	a	b	c	d
a	1	1/9	1/3	x
b	9	1	5	1/2
c	3	1/5	1	2
d	x	2	1/2	1

4. táblázat

A 4. táblázat $[b, c, d]$ triádja ordinálisan intranzitív, mert $b \to c$, $c \to d$ és $d \to b$. A döntéshozónak korrigálnia kell. Eddigi összehasonlításait áttekintve azt érzékeli, hogy (b, d) és (c, d) esetében a „kissé jobb" értékelések a bizonytalanságát tükrözték, ezért hajlandó arra, hogy ezeket az ítéleteit újragondolja. A b és d közül így most kissé a b alternatívát tartja jobbnak, míg a c és d közül a d alternatívát. Az új összehasonlítások az *5. táblázatból* láthatóan:

- b kissé jobb, mint d: $(b, d) = 2$
- d kissé jobb, mint c: $(c, d) = 1/2$

	a	b	c	d
a	1	1/9	1/3	x
b	9	1	5	2
c	3	1/5	1	1/2
d	x	1/2	2	1

5. táblázat

Ezzel a $[b, c, d]$ triád ordinális tranzitivitása megfelelővé vált. Jegyezzük meg, hogy abban az esetben, ha a döntéshozó nem lett volna hajlandó a javításokra, akkor a szigorú tranzitivitási szabály miatt az eljárás véget ért volna. A kardinális tranzitivitás ellenőrzése: $5 \cdot 1/2 = 5/2 \neq 2$. A döntéshozó nem lát okot a változtatásra. Az utolsó összehasonlítás:

- d sokkal jobb, mint a: $(a, d) = 1/7$

	a	b	c	d
a	1	1/9	1/3	1/7
b	9	1	5	2
c	3	1/5	1	1/2
d	7	1/2	2	1

6. táblázat

Ellenőrizzük az $[a, c, d]$ triádot a *6. táblázatban*: $d \rightarrow c \rightarrow a$. Ellenőriznünk kell az $[a, b, d]$ triádot is: $b \rightarrow d \rightarrow a$. Mindkét triád ordinálisan tranzitív. A kardinális tranzitivitás ellenőrzése az $1/2 \cdot 1/3 = 1/6 \neq 1/7$ és $2 \cdot 1/9 = 2/9 \neq 1/7$ eredményekre vezet. A döntéshozó úgy dönt, hogy az $(a, d) = 1/5$ értékre cseréli az előző $1/7$ értéket (ez egy legközelebbi szomszéd). A *7. táblázatban* látható a végső mátrix:

	a	b	c	d
a	1	1/9	1/3	1/5
b	9	1	5	2
c	3	1/5	1	1/2
d	5	1/2	2	1

7. táblázat

Az alternatívák rangsora $b \rightarrow d \rightarrow c \rightarrow a$. (Megjegyzés: $CR = 0{,}8\%$, messze van a 10%-os küszöbtől.)

3.2. stratégia: az eljárás

A mátrix elemeinek meghatározása döntéstámogatás nélkül történik, de az eljárás végén a döntéshozó készen áll arra, hogy korrekciós döntéseket hozzon, amelyeket vagy egy döntéstámogató szakember, vagy egy döntéstámogató számítógépes rendszer generál.

a) Az ordinális intranzitivitás feltárása (bármely létező módszer alkalmazható).

b) A döntéshozó áttekinti az intranzitív triádokat és korrigál. A korrekció kötelező, ellenkező esetben az eljárás véget ér.

c) A kardinális inkonzisztenciák bemutatása és opcionális korrigálása a legközelebbi szomszéd elv alkalmazásával.

2. példa

Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a döntéstámogatás nélkül kialakított mátrix egyetlen elem kivételével megegyezik az előző példa végeredményével. A különbség annyi, hogy egy adatbeviteli hiba miatt az (a, c) elem értéke nem $1/3$, hanem 3. Tegyük fel, hogy sem a döntéshozó, sem a döntéstámogató szakember nem tud a hibáról. Ekkor a *8. táblázatban* lévő mátrixot elemzik – ez lesz tehát a 3.2. stratégia mintapéldája.

	a	b	c	d
a	1	1/9	3	1/5
b	9	1	5	2
c	1/3	1/5	1	1/2
d	5	1/2	2	1

8. táblázat

Mind a négy triádot megvizsgálva azt találjuk, hogy az ordinális tranzitivitás rendben van, az alternatívák sorrendje $b \to d \to a \to c$. (Vegyük észre, hogy az adatbeviteli hiba miatt az a és c sorrendje az utolsó két pozícióban megfordult az előző példához képest.) Kardinális konzisztencia problémák azonban mind a négy triádnál vannak:

$$[a,b,c] : 1/9 \cdot 5 = 5/9 \neq 3 \qquad [a,b,d] : 1/9 \cdot 2 = 2/9 \neq 1/5$$
$$[a,c,d] : 3 \cdot 1/2 = 3/2 \neq 1/5 \qquad [b,c,d] : 5 \cdot 1/2 = 5/2 \neq 2$$

A legellentmondásosabb két triád az $[a,b,c]$ és az $[a,c,d]$. Mutassuk meg ezeket a döntéshozónak! A döntéshozó rájön, hogy valamiféle hiba történhetett, azonban a 8. táblázatban szereplő értékekre ránézve bizonytalan abban, hogy mit csináljon és *alkalmazza a javasolt heurisztikát.* A legközelebbi szomszéd elv alapján először az $(a,c) = 1$ majd az $(a,d) = 1/3$ javítást végzi (mivel az első javítás után, ami az $[a,b,c]$ triádot érinti, az $[a,c,d]$ triádot is újra ellenőrizni kell: $1 \cdot 1/2 = 1/2 \neq 1/5$ és az $1/5$ legközelebbi szomszédja $1/3$).

(a,d) része az $[a,b,d]$ triádnak. Itt is újra tesztelnünk kell, és azt találjuk, hogy $1/9 \cdot 2 = 2/9 \neq 1/3$. A döntéshozó úgy gondolja, hogy nincs ok a változtatásra. Az új értékekkel a korrigált mátrix a *9. táblázatban* látható:

	a	b	c	d
a	1	1/9	1	1/3
b	9	1	5	2
c	1	1/5	1	1/2
d	3	1/2	2	1

9. táblázat

Az ordinális tranzitivitást ellenőrizve $b \to d \to c \approx a$. Az új rangsor döntetlent mutat az utolsó két helyen – ami reális. (Jegyezzük meg, hogy az induló mátrix $CR = 17\%$ értéke $CR = 1{,}7\%$-ra változott a korrekció után). Ha az eljárásban az $[a,c,d]$ triáddal kezdünk, akkor először ugyan itt is az $(a,c) = 1$ az első korrekció, ám a másik triád ellenőrzésekor a $(b,c) = 5$ érték $(b,c) = 7$-re változhat (mert $1/9 \cdot 5 = 5/9 \neq 1$ és az 5 egyik legközelebbi szomszédja 7. Az érintett $[b,c,d]$ triád ellenőrzésekor $7 \cdot 1/2 = 7/2 \neq 2$, ezt a döntéshozó elfogadja. Ebben az alesetben a 10. táblázat korrigált mátrixa:

	a	b	c	d
a	1	1/9	1	1/5
b	9	1	7	2
c	1	1/7	1	1/2
d	5	1/2	2	1

10. táblázat

Az alternatívák rangsora most is $b \to d \to c \approx a$ ($CR = 2{,}8\%$). (Ebben az elírásos esetben az is lehetséges, hogy a döntéshozó az algoritmus alkalmazása nélkül rájön arra, hogy az $(a,c) = 1/3$ cserét csinálja meg, s ezáltal a 7. táblázat és az ahhoz tartozó sorrend lesz a végeredmény).

Összehasonlításul két, az eddigiekben már hivatkozott korrekciós eljárás eredményét adjuk meg ugyanerre a feladatra. Kou és szerzőtársai a 8. táblázat mátrixából kiindulva a *11. táblázat* mátrixát kapta, amely nagyon közel van (az (a, c) elem különbözik kissé) a 7. táblázat végeredményéhez:

	a	b	c	d
a	1	1/9	1/2	1/5
b	9	1	5	2
c	2	1/5	1	1/2
d	5	1/2	2	1

11. táblázat

Ha a Saaty javasolta módszerrel számolunk, akkor a korrigált mátrix megegyezik az eljárásunk szerint kapott 9. táblázattal.

3. példa

Siraj és szerzőtársai (2015) két irányból, új elnevezésekkel vizsgálja a tranzitivitás hiányát. Kongruencia mátrixa a kardinális tranzitivitás megsértésének detektálására alkalmas, disszonancia mátrixa pedig az ordinális tranzitivitás mérésére szolgál. Mindkét mátrix elemeit az indirekt összehasonlításokból számolja, a iv) összefüggés felhasználásával. Az idézett cikk példái a mátrixok használatát illusztrálják. Mondanivalónk szempontjából két példájukat emeljük ki, más-más tanulságokkal.

A 12. táblázatban látható mátrix Siraj és szerzőtársai (2015) cikkében ,,a konzisztencia holtpontjának” (consistency deadlock) bemutatásául szolgál, azaz mint írják ,,nem lehet egyértelmű javaslatot tenni a javításra, az bárhol lehetséges”.

	a	b	c	d	e
a	1	2	2	2	2
b	1/2	1	2	2	2
c	1/2	1/2	1	2	2
d	1/2	1/2	1/2	1	2
e	1/2	1/2	1/2	1/2	1

12. táblázat

Érdemes azonban elgondolkodni ezen a példán a döntéshozó nézőpontjából. Tegyük fel, hogy a Saaty-féle skálát alkalmaztuk. Ha a döntéshozó először az (a, b), majd a (b, c), (c, d) és végül a (d, e) összehasonlításokat adta meg, akkor – az egymástól függetlennek tekintett páros összehasonlítások természete és a skálaértékek jelentése okán – ez azt mutatja, hogy az adott párok esetében ,,enyhén preferált” válaszok születtek. A további kérdések, pl. az (a, c) összehasonlítás 2 értéke arra utal, hogy eredetileg mindegyik alternatíva esetében az 1 és 2 érték között tétovázhatott a DH, azaz nagyon közel vannak egymáshoz az alternatívák. Így nem feltétlenül problematikus, hogy a döntéshozónál az 1-től történő kicsiny, de érzékelhető eltérések szorzata nem a 4-hez, hanem a 2-höz van nagyon közel. Itt tehát a skála okoz gondot, nem a döntéshozó gondolkozik rosszul. Ne feledjük, a döntéshozó kizárólag az $1, \ldots, 9$ számok verbálisra fordított nyelvét beszéli!

Igaz tehát, hogy a döntéshozónak nem tudunk tanácsot adni valamely elem(ek) megváltoztatására, ám lehet, hogy erre nincs is szükség. Az ordinális tranzitivitással nincs baj: a triádok vizsgálata szerint az $a \to b \to c \to d \to e$ sorrend és a (32, 24, 19, 14, 11) súlyok megfelelőek lehetnek. Tájékoztatásul: $CR = 4{,}3\%$.

A valós helyzetet azonban csak a döntéshozóval történő konzultáció tárhatja fel. Mivel algoritmusunk szerint a triádok nem adnak okot javításra, a kardinális inkonzisztencia tudomásul vétele mellett a DH dönthetett úgy, hogy a fenti értékek az ő szándékait tükrözik. De akár a 13. vagy a 14. táblázat értékeihez is eljuthat:

	a	b	c	d	e
a	1	2	4	8	9
b	1/2	1	2	4	8
c	1/4	1/2	1	2	4
d	1/8	1/4	1/2	1	2
e	1/9	1/8	1/4	1/2	1

13. táblázat

	a	b	c	d	e
a	1	2	2	2	2
b	1/2	1	1	1	1
c	1/2	1	1	1	1
d	1/2	1	1	1	1
e	1/2	1	1	1	1

14. táblázat

Vagyis az előző sorrend mellett a (49, 27, 13, 7, 4) súlyokig, illetve a (33, 17, 17, 17, 17) súlyok mellett a $b = c = d = e$ azonosan preferált és a enyhén jobb, mint b értékekhez. (A CR értékek rendre: 0,9% és 0%.) Hogyan kaphatjuk meg a 13. vagy a 14. táblázat elemeit? A 13. táblázatnál a DH úgy látta, hogy az első négy összehasonlításnál mégsem annyira közeliek az alternatívák, ezért a verbális skálát „tágabbra nyitva” adta meg az A^* mátrix elemeit, egyben összhangba is hozva azt a kardinális tranzitivitás pontos értékeivel. A 14. táblázatnál ellenkezőleg: az a és b alternatívákat kivéve, a többieket egymással azonosnak ítélte meg. Mindkét esetben javítások sorozatát végezte el, míg eljutott az általa valósnak vélt végeredményhez.

4. példa

Siraj és szerzőtársai egy másik jellemző példájában a *15. táblázat* mátrix elemei szerepelnek:

	a	b	c	d
a	1	3	2	6
b	1/3	1	6/5	2
c	1/2	5/6	1	3
d	1/6	1/2	1/3	1

15. táblázat

Minden más összehasonlítást ellenőrizve és a DH által elfogadva (ez annál is inkább egyszerű, mert az $[a, b, d]$ és $[a, c, d]$ triádok tökéletesen konzisztensek), figyelmünket fordítsuk a $(b, c) = 6/5$ értékre. A megfelelő triádból látható, hogy a $3 \cdot 6/5$ szorzat akkor lenne pontosan 2, ha $(b, c) = 2/3$. E példa trükkös része azonban az, hogy míg minden egyéb összehasonlítás a Saaty-skálán adott, ez az összehasonlítás viszont nem!

Ha a döntéshozatalnál a skálát rögzítjük, és az nem más, mint az $1, \ldots, 9$ és reciprokainak sorozata, akkor sem a 6/5, sem a 2/3 fel sem merülhet, csak az egész értékek. Feladatunkban a (b, c) értékeként az 1/2, 1 és 2 jöhet szóba. Ha $(b, c) = 1/2$, akkor az $a \to b \to c \to d$ sorrend mellett az (50, 15, 27, 8) súlyokat kapjuk ($CR = 0{,}4\%$). Ha $(b, c) = 1$, akkor ugyanezen sorrend mellett az (50, 19, 23, 8) súlyvektorunk van ($CR = 0{,}8\%$). Végül a $(b, c) = 2$ értéke mellett a sorrend megváltozik: $a \to c \to b \to d$ és a súlyok rendre (50, 23, 19 és 8) ($CR = 5{,}7\%$). Melyik a „helyes” sorrend és súlyrendszer? Erre csak a DH tud válaszolni, ám algoritmusunk segít neki.

Ha ugyanis a (b, c) értéke 1 vagy 1/2, akkor a $3 \cdot 1$, illetve a $3 \cdot 1/2$ szorzatok eredménye a kardinális tranzitivitás vizsgálatban a legközelebbi szomszédja a 2 értéknek. A $(b, c) = 2$ nem javasolt, mert $3 \cdot 2 = 6$ nem a legközelebbi szomszédja a 2-nek. Így tehát algoritmusunk alkalmazásával a DH az $a \to b \to c \to d$ sorrendek egyik változatához jut. (Megjegyzés: Siraj és szerzőtársai cikkében a példa azt illusztrálja, hogy az általuk javasolt eljárással automatikusan detektálható a $(b, c) = 6/5$ elem problematikus volta.)

7 A döntéshozó nem elérhető a mátrix elemeinek meghatározása után

Ha ez olyankor fordul elő, amikor a mátrix elemeit döntéstámogatás nélkül adta meg a döntéshozó, akkor a következő állításokat fogalmazhatjuk meg.

1. Állítás. *Ha az A mátrix konzisztens, akkor elfogadható.*

Megjegyzés. Elvileg előfordulhat, hogy a döntéshozó valós preferenciáit egy másik konzisztens mátrix írja le.

2. Állítás. *Ha a mátrix inkonzisztens, akkor speciális esetekben korrigálható:*

- *ha a mátrix egyetlen elem (és reciproka) megváltoztatásával konzisztenssé tehető,*
- *ha megmutatható, hogy a mátrix statisztikai hibát tartalmaz.*

Megjegyzés. A szakirodalomban kidolgozott, a 4. fejezetben hivatkozott korrekciós módszerek alkalmazhatók, az adott probléma jellegének és a korrekciós módszer feltételeinek függvényében.

3. Állítás. *Az egyéb esetekben a döntéshozótól kapható pótlólagos információk hiányában a korrekció nem igazolható.*

Megjegyzés. A szakirodalomban kidolgozott inkonzisztencia indexek szükség esetén felhasználhatóak arra, hogy segítségükkel a nem-korrigált mátrixokat elfogadjuk vagy elvessük.

Konklúziók

A páros összehasonlítási mátrixok fontos alkalmazása a többtényezős döntési problémák rangsorolási vagy súlyozási kérdéseinek megválaszolása. Az ehhez felhasznált becslési módszerek a döntéshozó által megadott mátrixból indulnak ki. Lényeges tehát, hogy ez a mátrix milyen tulajdonságokkal rendelkezik. A gyakorlati alkalmazásokban kiemelt szerepet kapott az arányskálán megadott összehasonlításokra épülő mátrix, ahol a konzisztens esettől való eltérés megbízhatósági kérdéseket vet fel.

A megoldás egyik iránya inkonzisztencia indexek kidolgozása és olyan korrekciós módszerek alkalmazása, amelyek ezen indexekkel mérve csökkentik az inkonzisztenciát. Elterjedtté váltak az automatikus korrekciós módszerek, amelyek bizonyos feltevések mentén a döntéshozó bevonása nélkül állítanak elő az eredetinél kisebb inkonzisztenciájú mátrixokat. Ezen cikk egyik fő mondanivalója az, hogy ezeknek a módszereknek az eredményei – hacsak nem sikerül axiomatikus alapokra helyezni a módszert – nem igazolhatók a döntéshozó nélkül. Bármilyen korrekciót hajtunk végre (akár a mátrix elemeinek meghatározása közben, akár az eljárás végeztével) az nem nélkülözheti a döntéshozó által adott pótlólagos információk figyelembe vételét.

Mivel általános esetben a verifikációs probléma nehezen kezelhető, ezért a tárgyalást leszűkítettük egy speciális esetre, a verbális skála alkalmazására. Itt jól bemutatható az ordinális és kardinális tranzitivitás kettősségéből adódó megközelítésbeli különbség és annak a döntéshozó általi feloldása. Lényeges, hogy egyes szakirodalmi módszerektől eltérően, ahol szintén kétfázisú korrekciós eljárások vannak, itt nem automatikus inkonzisztencia-csökkentő szabályok visznek a végső megoldás felé, hanem a döntéshozó mérlegelésén alapul a végeredmény – így biztosítva a validációt.

Továbbra is nyitott kérdés a verifikáció általános elmélete és módszertana. Úgy véljük, hasznos lenne, ha az alkalmazásokban igény lenne legalább a konkrét eset eredményeinek verifikálására. Az itt bemutatott eljárás illusztrációként szolgál. További munkánk során az alkalmazott heurisztika finomítható. Fontos lépés a számítógépes döntéstámogató módszerekbe történő moduláris beépítés, az interaktivitás növelése. Ebben az irányban sok lehetőséget látunk.

Köszönetnyilvánítás

A kutatást az OTKA K 111797 pályázat támogatta.

Irodalom

1. Bana e Costa, C. A., Vansnick, J-C. (2008): A critical analysis of the eigenvalue method used to derive priorities in AHP, *European Journal of Operational Research*, 187, 1422–1428.
2. Belton, V., Gear, T. (1983): On a short-coming of Saaty's method of analytic hierarchies, *Omega*, 11(3), 228–230.
3. Bozóki S., Rapcsák T. (2008): On Saaty's and Koczkodaj's inconsistencies of pairwise comparison matrices, *Journal of global optimization*, 42(2), 157–175.
4. Bozóki, S., Fülöp, J. and Poesz, A. (2011): On pairwise comparison matrices that can be made consistent by the modification of a few elements, *Central European Journal of Operations Research*, 19(2), 157–175.
5. Bozóki, S., Fülöp, J. and Poesz, A. (2015): On reducing inconsistency of pairwise comparison matrices below an acceptance threshold, *Central European Journal of Operations Research*, (23)4, 849–866.
6. Brunelli M., Fedrizzi M. (2015): Axiomatic properties of inconsistency indices for pairwise comparisons, *Journal of the Operational Research Society*, 66(1), 1–15.
7. Brunelli, M. (2015): *Introduction to Analytic Hierarchy Process*, Springer
8. Cao D., Leung L. C. and Law, J. S. (2008): Modifying inconsistent comparison matrix in analytic hierarchy process: A heuristic approach, *Decision Support Systems*, 44(4), 944–953.
9. Choo, E. U., Wedley, W. C. (2004): A common framework for deriving preference values from pairwise comparison matrices, *Computers and Operations Research*, 31, 893–908.
10. Condorcet, M. (1785): *Essai sur l'Application de l'Analyse à la Probabilité des Dé-cisions Rendues á la Pluralité des Voix*, Paris
11. Ergu, D., Kou, G., Peng, Y. and Shi, Y. (2011): A Simple Method to Improve the Consistency Ratio of the Pairwise Comparison Matrix in ANP, *European Journal of Operational Research*, 213(1), 246–259.
12. Gaul, W., Gastes, D. (2012): A note on consistency improvements of AHP paired comparison data, *Advances in Data Analysis and Classification*, 6, 289–302
13. Gehrlein, W. V. (2006): *Condorcet's Paradox*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg
14. González-Pachón, J., Romero, C. (2004): A method for dealing with inconsistencies in pairwise comparisons. *European Journal of Operational Research*, 158, 351–361.
15. Ishizaka, A., Lustin, M. (2004): An expert module to improve the consistency of AHP matrices, *Intl. Trans. in Op. Res.*, 11, 97–105.
16. Karapetrovic, S., Rosenbloom, E. S. (1999): A quality control approach to consistency paradoxes in AHP, *European Journal of Operational Research*, 119(3), 704–718.
17. Kéri, G. (2011): On qualitatively consistent, transitive and contradictory judgment matrices emerging from multiattribute decision procedures, *Central European Journal of Operations Research*, 19, 215–224.
18. Koczkodaj W. W. (1993): A new definition of consistency of pairwise comparisons, *Math. Comput. Modelling*, 8, 79–84.

19. Kou, G., Ergu, D. and Shang, J. (2014): Enhancing Data Consistency in Decision Matrix: Adapting Hadamard Model to Mitigate Judgment Contradiction, *European Journal of Operational Research*, 236(1), 261–271.
20. Kwiesielewicz, M, van Uden, E. (2004): Inconsistent judgments in pairwise comparison method in the AHP, *Computers and Operations Research*, 31, 713–719.
21. Lin, C. (2007): A revised framework for deriving preference values from pairwise comparison matrices, *European Journal of Operational Research*, 176(2), 1145–1150.
22. Miller, G. A. (1956): The Magical Number Seven, Plus or Minus Two: Some Limits on Our Capacity for Processing Information, *The Psychological Review*, 63, 81–97.
23. Murphy, C. K. (1993): Limits on the Analytic Hierarchy Process from its inconsistency index, *European Journal of Operational Research*, 65, 138–139.
24. Saaty, T. (1977): A scaling method for priorities in hierarchical structures, *Journal of Mathematical Psychology*, 15, 234–281.
25. Saaty, T. L. (1980): *The Analytic Hierarchy Process*, New York, McGraw-Hill
26. Saaty, T. L. (2003): Decision-making with the AHP: Why is the principal eigenvector necessary. *European Journal of Operational Research*, 145(1), 85–91.
27. Siraj, S., Mikhailov, L. and Keane, J. (2012): A heuristic method to rectify intransitive judgments in pairwise comparison matrices, *European Journal of Operational Research*, 216, 420–428.
28. Siraj, S., Mikhailov, L. and Keane, J. (2015): Contribution of individual judgments toward inconsistency in pairwise comparisons, *European Journal of Operational Research*, 242 (2015), 557–567.
29. Temesi, J. (2006): Consistency of the decision-maker in pairwise comparisons, *International Journal of Management and Decision Making*, 7(2/3), 267–274.
30. Temesi, J. (2011): Pairwise comparison matrices and the error-free property of the decision-maker, *Central European Journal of Operations Research*, 19(2), 239–249.
31. Xu Z. S., Wei C. P. (1999): A consistency improving method in the analytic hierarchy process, *European Journal of Operational Research*, 116(2), 443–449.

INTERACTIVE PROCEDURE TO DETERMINE THE ELEMENTS OF A PAIRWISE-COMPARISON MATRIX

Pairwise comparison matrices are frequently used in the methodology of multi-attribute decision making. Elicitation of the elements of the matrix can be done in several ways, and the elicitation method has an impact on the final result (determination of preferences, weights, rankings). The applied decision methods work with consistent or near-consistent matrices. This paper aims at investigating two questions. In the first part of the paper correction methods are interpreted and analysed from the viewpoints of their philosophy and techniques to decrease the degree of inconsistency. The second part proposes an interactive method for individual decision-making problems with verbal scale to illustrate that improving

consistency is not possible without additional information from the decision maker. The involvement of the decision maker and some special rules can ensure that the process either provides a near-consistent and error-free pairwise comparison matrix or demonstrates the inability of the decision maker to reach that goal.

A MINŐSÉG ÉS AZ ÁR KAPCSOLATÁRÓL[1]

VÖRÖS JÓZSEF
PTE KTK

A tanulmány egy dinamikus modellt formáz meg, hogy elősegítse a helyes beruházási, ár és termékminőség politika kialakítását. A stratégiai minőségelemek (melyeket a versenytársak eddig nem voltak képesek elsajátítani) szintje tanulás, beruházás révén növelhető, de a minőség növelhető úgynevezett nem stratégiai elemek felhasználásával is (pl. igényesebb anyagok beépítése). A tanulmány megfogalmaz és elemez olyan körülményeket, amikor a termékminőség folyamatosan növekszik, ennek dinamikája viszont nem egyenletes, néha növekszik, néha csökken. Az ár és minőség kapcsolatával kapcsolatban azt állapítja meg, hogy az esetek többségében a magasabb minőség magasabb árat jelent, azonban ez alól lesznek kivételek. A kivétel létezésének szükséges feltétele, hogy a keresleti függvény ár-minőség keresztderiváltja negatív legyen. Az autonóm tanulás hatásának elemzése azt mutatja, hogy az autonóm tanulásból eredő költségcsökkenés hasznát meg kell osztani a fogyasztókkal az ár csökkentését felhasználva.

Kulcsszavak: költség, minőség, ár, kereslet, irányításelmélet

1 Bevezetés

A minőség fogalma is abba a kategóriába tartozik, melyet a legtöbbször komolyabb megfontolások nélkül használunk, de amikor pontosan meg kellene határozni a koncepció tartalmát, hamarosan rajövünk, az nem is olyan egyszerű. Egy terméknek/szolgáltatásnak sok jellemzője lehet, melyek közül bizonyosak fontosak, vagy kevésbé fontosak egy fogyasztó számára. Egy termék egyes termékjellemzőiben nyújtott teljesítményének a vevő által képzett aggregátumát nevezzük minőségnek e tanulmányban. A vevőről feltételezzük, hogy a termék minőségét képes beazonosítani, és ehhez az u számot rendeli. Gyakran feltételezik, hogy ez az érték 0 és 1 között mozog, amikor is 1 a tökéletes minőséget jelenti, 0 pedig a teljes elutasítást. Írhatjuk tehát, hogy $u \in [0, 1]$, de mi nem normáljuk e tanulmányban a minőség mérőszámát, mintegy azt sugallva, hogy a minőség fejlődésének nincs korlátja (a fejlődés nem véges). (Megjegyezzük, hogy a definiált intervallumra való szűkítés nem jelent semmiféle korlátozást, tetszőleges, véges intervallum megadható. Fogyasztói magazinok gyakran használnak tízes skálát.)

A minőségre adott fenti definícióm mellett ismeretesek más megközelítések is, néhány ezek közül sok hasonlóságot mutat. Az egyik legsikeresebb alapkönyvben azt olvashatjuk, hogy a minőség a termék azon képessége, amennyire az kielégíti a fogyasztó szükségleteit (Heizer és Render, 2014). Egy másik

[1]Beérkezett: 2017. március 2. E-mail: voros@ktk.pte.hu.

megközelítésben, a minőség a fogyasztó által használt terminus, mely kifejezi általános megelégedettségét a termékkel/szolgáltatással kapcsolatban (Krajewski et al., 2015). Egy nagyon tiszta forráshoz jutunk vissza, amikor felidézzük a legelsőnek tekinthető irodalmi forrásokat. Ezek közül kétségtelenül Garvin (1988) munkái gyakorolták a legnagyobb befolyást, aki a minőség fogalmának öt lehetséges megközelítési módját vázolta fel. Garvin szerint a transzcendens felfogás lényege, hogy a minőséget nem kell definiálni, a fogyasztó tudja mi az, amikor a terméket látja (a Porsche jobb, mint a Trabant). A termék központú felfogás szerint a termék paraméterei pontosan mérhetők, és e paraméterértékek kifejezik a termékminőséget. A felhasználó központú felfogás szerint azon termékek minőségiek, melyek a legjobban kielégítik a fogyasztó preferenciáit, a termelő központú felfogás szerint pedig az a jó termék, melynek paraméterei megfelelnek az előírtaknak. Végül az ötödik megközelítés szerint a fogyasztói megelégedettség fontos, melynek generátora az érték.

Első rátekintésre úgy tűnik, mintha a felsorolt elképzelések túl távol lennének egymástól, de a transzcendens, a felhasználó központú, az érték alapú megközelítések mindenképpen azt fejezik ki, hogy a fogyasztó értékítélete a legfontosabb: az a jobb minőségű termék, melyet a fogyasztó annak ítél, továbbá hajlandó is érte fizetni. Az értéket szokták úgy is definiálni, hogy az érték az a legmagasabb ár, melyet a fogyasztó hajlandó a termékért fizetni (Dolan és Simon, 1996). Ezek a fogalmak viszont jó alapot jelentenek a számszerűsítéshez, hiszen ekkor definiálható egy keresleti függvény, melyben a minőség és az ár független változók: mérje $D(p, u)$ egy termék keresleti volumenét (az idődimenziót később definiáljuk), mely akkor jelentkezik a piacon, amikor az ár p, a termék minősége pedig u.

A fogyasztó központú minőség megjelenése a keresleti függvényben viszonylag új keletű, abban a vonatkozásban mindenképpen, hogy a modellezők érdeklődését elsőként a minőség fogalmának másik megközelítése keltette fel. Azaz amikor a minőséget objektív paraméterekkel mérjük (termék, illetve termelő centrikus felfogás). E megközelítésnek van két nagyon fontos pillére. Az egyik, hogy ha akármilyen termékjellemzőt is tekintünk, mely a fogyasztónak fontos, azt mindig valamilyen folyamat állítja elő, a kiváló minőséget a kiváló folyamat adja. Továbbá, gyakori esetben, ha a termelési folyamat nem minőségi, akkor már a termék sem lehet az. Ez az összefüggés teljesen nyilvánvaló, amikor szolgáltatási folyamatról van szó, hiszen a fogyasztó részese a termelési folyamatnak, és minden hibát lát és észlel.

Az első szerzők közé Fine (1986, 1988) tartozik, aki azt modellezte, hogy a tanulás miként hat a folyamat minőségére, de egyértelműen megkülönbözteti a design (külső megjelenés, termékfunkciók funkciók gazdagsága) minőséget és a konform minőséget (az előírt paramétereknek történő megfelelést). Modellanalízisének fontos következtetése volt, hogy a tanulás és a termelési folyamat fejlesztés eredménye csökkenti a konformitással kapcsolatos költségeket, melynek következménye a folyamatminőség növekedése. Fine és Porteus (1989) később egy dinamikus modellt épít, melyben a termelési sorozatnagyság csökkenésének hatását vizsgálja a folyamat minőségére. Lényeges megállapításuk, hogy az optimális termelési sorozatnagyság csökkenése a termelési folyamat minőségének (melyet a selejtaránnyal mérnek) növekedését eredményezi. Chand és társainak (1996) tanulmányában szintén a konformációs/folyamat minőség áll fókuszban, és irányításelméleti modelljük az optimális tőkeallokáció dinamikáját vizsgálja, mely a termelési folyamat minőségét eredményezi. A Chand et al. (1996) tanulmány mellett a másik alapvető tanulmány e korból a Li–Rajagopalan (1998) tanulmány, mely a folyamatfejlesztésre fordított erőfeszítések dinamikáját vizsgálja. Fontos megállapításuk, hogy ugyan a folyamat minősége növekszik, de ennek dinamikája csökkenő tendenciát mutat. Vörös (2006) ugyanezen problémát vizsgálja, viszont modelljében a folyamatminőség mellett megjelenik a termék teljesítményének minősége is. Ugyan a probléma forrása nem a fogyasztó hangjának megjelenése a modellben, de megállapítja, hogy nem törvényszerű a minőségfejlesztési dinamika ütemének csökkenése. Vörös (2013) egy több periódusos dinamikus modellt építve számos esetre explicit megoldását adja a problémának, és e megoldások jól reprezentálják a minőség fejlesztésének dinamikáját.

A témához kapcsolódó legutóbbi hozzájárulások közül Chenevaz (2012), (2016) munkáit említjük, melyekben egyértelmű dominanciát kap a termék minőség. A következő fejezetben felépítendő modellünk nagy hasonlóságot mutat Chenevaz (2016) modelljével, azonban lényeges eltéréseket is lehet említeni. Chenevaz (2016) modelljében a minőség fejlődésének dinamikáját a $du/dt = K(x(t), u(t))$ differenciálegyenlet irányítja, ahol $u(t)$ a termékminőség, $x(t)$ pedig az innovációs költség a t időpontban. Eredményei elérésében fontos kitétel, hogy K_u konstans időben. Beazonosítja az eseteket, amikor a minőség növekedése árnövekedést, változatlanságot, illetve árcsökkenést von maga után.

A tanulmány következő fejezete felépíti a modellt, amely környezetben a minőség és ár kapcsolatával foglalkozunk, továbbá kimutatjuk a modell néhány alaptulajdonságát. A tanulmány harmadik fejezete a minőség és ár kapcsolatára fókuszál, a negyedik fejezet pedig az autonóm tanulás árakra történő hatását vizsgálja. Az utolsó, ötödik fejezet a következtetéseket foglalja össze.

2 A modell

Azt tételezzük fel, hogy vállalatunk egyetlen termékét helyezzük fókusz alá, mely termék monopolisztikus tulajdonsággal bír, azaz nincs olyan másik termelő rivális vállalat, mely ugyanazon termékkarakterisztikákat tudná a vevők számára biztosítani. Ilyen esetben következmény, hogy a kereslet az ártól is függ, és így a kereslet meghatározható egy $D(p(t), u(t))$ keresleti függvénnyel a t időpontban, ahol $p(t)$ a termék ára, $u(t)$ pedig a termék minősége a t időpontban. Hivatkozások nélkül is elfogadható, hogy adott minőség mellett egy időpontban a kereslet csökken, ha az ár növekszik, és növekszik, ha a minőség nő. A parciális deriváltakra nézve feltehetjük tehát, hogy $D_p < 0$, illetve $D_u > 0$. Általánosan elfogadott az is, hogy $D_{pp} > 0$, illetve $D_{uu} < 0$.

A minőségre adott definíciónkban azt mondtuk, hogy az a különböző termékkarakterisztikák vevő által megállapított aggregátuma, vagyis a minőség összetevőinek több dimenziója van. Garvin (1987) szerint nyolc ilyen van (elsődleges funkciók, megbízhatóság, konformitás, tartósság, szervizelhetőség, esztétikum, és a reputáció), melyeket mi két nagy csoportba sorolunk. Az egyikbe azon termékkarakterisztikák (minőségdimenziók) tartoznak, melyek stratégiai jelentőségűek, azaz a piacon nem beszerezhető tudás eredményei, és a termék monopolisztikus jellegét adják. A másikba azon jellemzők tartoznak, melyek előállítása egyszerű, fejlesztést, különösebb képességeket nem igényelnek. A stratégiai jelentőségű minőségszintek összességét jelöljük $z(t)$-vel a t időpontban, míg a nem stratégiai jellegűek együttesét $w(t)$-vel. Ily módon azt tehetjük fel, hogy a minőség a vevő fejében a stratégiai és nem stratégiai jellemzők keveréke, azt írhatjuk tehát, hogy $u = \lambda_1 z + \lambda_2 w$. A Toyota eddig közel 10 millió hibrid meghajtású autót épített, ezért olyan minőség tapasztalattal bír, mellyel senki más nem rendelkezik az autóiparban. E képességét folyamatosan fejleszti, a munkaidő letelte után mindenki még a gyárban marad, hogy a még jobb autó előállítása érdekében fejlesztéseket végezzenek. E minőségi tudás egy hosszú távú fejlesztés eredménye, az ebben megtestesülő minőség tudás szintet jelöli a z állapotváltozó. Hogy a Toyota Prius hibrid autóba kér-e valaki bőrülést, vagy sem, szinte másodlagos kérdés, mert azt az autóiparban mindenki produkálni tudja. Ugyanakkor a bőrülés mégis magasabb minőségszintet képvisel, mint a kárpitülés. E minőségszintet jelöli a w döntési változó (milyen szintű ülést építünk, milyen minőségű gumit teszünk az autóra, stb.). Annak céljából, hogy a paramétertobzódást elkerüljük, feltesszük, hogy $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, tehát az általánosságból nem sokat veszítve, $u = z + w$.

Ugyanakkor a stratégiai minőség tudási szint, a z, folyamatosan fejleszthető. Jelölje $x(t)$ a t időpontban a minőség fejlesztésére tett erőfeszítések intenzitását, például munkaidőben kifejezve, hogy egy vállalkozás mennyi időt szán minőségfejlesztésre. Jegyezzük meg, hogy ez a Chand et al. (1996) tanulmányban a teljes munkaidőnek a fejlesztésre szánt hányada, míg a Chenavaz (2016) tanulmányban a fejlesztésre szánt pénzösszeg. Mérje a fejlesztésre szánt aktivitás költségét az $f(x)$ költségfüggvény, melyről feltételezzük, hogy növekvő és konvex, azaz $f_x > 0$ pozitív x-ekre, $f_{xx} > 0$, továbbá azt tételezzük fel, hogy az f költségfüggvény az $x = 0$ pontban lokális minimumponttal rendelkezik, azaz szükséges, hogy $f_x(0) = 0$ legyen. Az utóbbi feltételre érdemes felfigyelni, ugyanis az irodalomban e feltétel használatának nem találtam nyomát.

A stratégiai minőség dinamikáját a $\dot{z} = dz/dt = ax$ differenciálegyenlet kormányozza, ahol a egy pozitív paraméter. Az irodalomban erre több megközelítés is ismert. A Chand et al. (1996) tanulmányban a $\dot{z} = ax(1-z)$ összefüggést használják annak kifejezésére, hogy a minőségfejlesztési erőfeszítések hatékonysága a minőség fejlődésével egyre csökken (itt a maximális minőségszint 1). A Chenavaz (2016) tanulmány a $\dot{z} = K(x(t), u(t))$ összefüggést használja, feltételezve, hogy K_u konstans időben. Vörös (2006) tanulmányában a stratégiai minőségszint alakulását a folyamatfejlesztés intenzitása és az automatikus tanulás is befolyásolja. Mivel e tanulmányban az ár és minőség összefüggésére koncentrálunk, maradunk a $\dot{z} = ax$ elképzelés mellett, mely nem fogja csökkenteni megállapításaink általánosíthatóságát, viszont világossá teszi a probléma megoldhatóságának határait.

Amennyire szerteágazó minőségdefiníciókat és minőségfejlesztési koncepciókat gyűjthetünk össze, a minőség termelési költségekre gyakorolt hatásáról is legalább annyira tarka vélemények hangzanak el. A tudománynak elég nehéz volt mit kezdeni az egyik minőség guru, Crosby (1979) korai kijelentésével, miszerint a minőség ingyen van, ugyanis ez azt jelenti, hogy a termelési költségek nem nőnek a minőség növekedésével. Jelöljük $c(z, w)$-vel a fajlagos termelési változó költségeket. Azt tételezzük fel, hogy mind $c_z > 0$, és $c_w > 0$, vagyis a mellett tesszük le voksunkat, hogy egy adott időpontban a magasabb minőség előállítása többe kerül a termelőnek. Viszont ezzel a feltevéssel úgy gondoljuk, nem mondunk ellent Crosby-nak, ugyanis valószínűleg Crosby kijelentése egy időhorizontra vonatkozik, és nem egy időpontra. Vizsgálatunkat kiterjesztjük majd egy $e^{-kt}c(z(t), w(t))$ függvényre is, ahol k egy adott pozitív konstans. E költségfüggvény típus azt sugallja, hogy egy bizonyos minőségszint előállítása később kevesebbe kerülhet, és ennek megvannak a gazdaságtani alapjai. Ennek forrása lehet például az automatikus tanulás, a folyamatos tökéletesítés elvének maradéktalan alkalmazása, mely valóban azt eredményezheti, hogy egy bizonyos minőségszint előállítása kevesebbe kerülhet később, mint ma. Feltehetjük továbbá, hogy $c_{zz} > 0$, és $c_{ww} > 0$, mely kitételek nem jelentenek különösebb megszorításokat gazdaságtani szempontból.

Ugyanakkor fel kell tegyük, hogy $c_w > c_z$, ugyanis másként semmi értelme nem lenne a stratégiai minőségtudás fejlesztésének. Mivel a minőség több terméktulajdonság aggregátuma, ezen összegzésben az egyes termékkarakterisztikák helyettesíteni tudják egymást, és mivel $\lambda_1 = \lambda_2$, a stratégiai és nem stratégiai elemek egyformán helyettesítik egymást (jegyezzük meg, ha a két súly nem lenne azonos, akkor a c_w értéket a λ_1/λ_2 súly szorozná, és az egyenlőtlenség iránya marad). A stratégiai minőség tudás viszont fejlesztés eredménye, mely további beruházást igényel, melyet az $f(x)$ költségfüggvény számol el. Ha a marginális fejlesztési költségek között a reláció fordított lenne ($c_w < c_z$), a stratégiai elemek fejlesztésének intenzitása, vagyis az $x(t)$ változó értéke mindig zérus lenne, hiszen a minőség szintjének emelése a stratégiai elemek által eleve többe kerülne, ráadásul ehhez még fejlesztési (beruházási) költség is járulna.

Az *1. Tábla* az alkalmazott jelöléseket foglalja össze.

A fajlagos változó költségek és a kereslet viszonyáról is élünk feltételezéssel. Azt tételezzük fel, hogy a z_0 minőségű termékért van fizetőképes kereslet, amikor azért $c(z_0, 0)$ pénzt kérnek darabonként. Tehát azt tételezzük fel, hogy $D(c(z_0, 0), z_0) > 0$. Ugyanakkor a vevők nem hajlandók bármilyen árat fizetni, még ha a minőség akár a legkiválóbb is. Így feltesszük egyúttal tehát, hogy minden minőségszinthez létezik olyan kellően magas $K(u)$ ár, melyre egyrészt $K(z_0) > c(z_0, 0)$, másrészt a kereslet zérus, tehát $D(K(u), u) = 0$.

$p(t)$	A termék eladási ára a t időpontban, döntési változó
$x(t)$	A stratégiai minőségdimenziók fejlesztésének intenzitása a t időpontban, döntési változó
$w(t)$	A nem stratégiai minőségdimenziók aggregált szintje a t időpontban, döntési változó
$z(t)$	A stratégiai minőségdimenziók aggregált szintje a t időpontban, állapotváltozó, z_0 kezdő értékkel
$u(t)$	$u = z + w$
$D(p, u)$	A fizetőképes kereslet volumene a t időpontban, amikor az ár p, a minőség szintje u
$c(z, w)$	A fajlagos termelési változó költség a t időpontban, amikor a minőségszintek z, illetve w állapotúak
$f(x)$	A stratégiai minőségelemek fejlesztésének költsége a t időpontban
r	Diszkontráta, input paraméter
T	A tervezési időszak hossza, input paraméter
P	A felhalmozódott stratégiai minőségtudás egységnyi értéke a tervezési időhorizont végén, pozitív input paraméter
a	Pozitív konstans, input paraméter
K	Kellően magas ár, melyre a kereslet zérus

1. táblázat. Az alkalmazott jelölések

Az elmondottak alapján az alábbi feladatot lehet megfogalmazni:

$$\max_{p,x,w} \int_0^T e^{-rt}\Big((p - c(z,w))D(p,u) - f(x)\Big)\, dt + e^{-rT} P z(T) \tag{1a}$$

feltéve, hogy:

$$\dot{z} = ax \tag{1b}$$

$$u = z + w \tag{1c}$$

$$p(t) \geq 0, \quad x(t) \geq 0, \quad w(t) \geq 0, \quad z(0) = z_0\,. \tag{1d}$$

Jegyezzük meg, hogy a célfüggvény utolsó terminusát nem minden modellkonstrukció tartalmazza. A felhalmozódott minőségtudás időhorizont végi értéke meggyőződésünk szerint közgazdaságilag helyénvaló, továbbá a modell általánosságát növeli, hiszen ha $P = 0$ lenne, azaz a felhalmozódott tudásnak nem lenne piaci értéke, a kapott eredményekbe a paraméter értéke behelyettesíthető. Ugyanakkor, miként az analízis során az látható lesz, a felhalmozódott tudás piaci értéke érdekesen befolyásolja a kapott eredményeket.

A célfüggvényben a $(p-c)$ kifejezés a fajlagos bruttó nyereség, ezt szorozza a p egységáron eladható termékmennyiség, a D, amikor a termék minősége u. A megtermelt bruttó profitból vonódik ki a fejlesztés költsége, amit az f függvény mér. A t időpontban nyert profittömeget diszkontáljuk jelenértékre az e^{-rt} szorzó segítségével, majd az időpontokban kitermelt profitot „összegezzük”, és megkapjuk a tervidőszak alatt nyereség nettó jelenértékét. Ehhez adódik hozzá még a jelenértékre diszkontált felhalmozott minőségtudás (az üzem) eladási értéke.

3 A modell analízise

Az (1) feladathoz tartozó Hamilton (H) függvény formája ekkor az alábbi:

$$H(p,x,w) = (p - c(z,w))D(p,u) - f(x) + \lambda a x \ , \tag{2}$$

ahol $\lambda(t)$ a dinamikus Lagrange-szorzó. Az optimális megoldás szükséges feltételeit Kamien és Schwartz (1991), valamint Kánnai Z., Szabó I. és Tallos P. (2014) alapján ekkor a következőképpen lehet felírni:

$$\frac{\partial H}{\partial z} = -c_z D(p,u) + (p - c(z,w))D_u = -\dot{\lambda} + r\lambda \tag{3a}$$

$$\frac{\partial H}{\partial p} = D(p,u) + (p - c(z,w))D_p \leq 0 \tag{3b}$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -f_x + \lambda a \leq 0 \tag{3c}$$

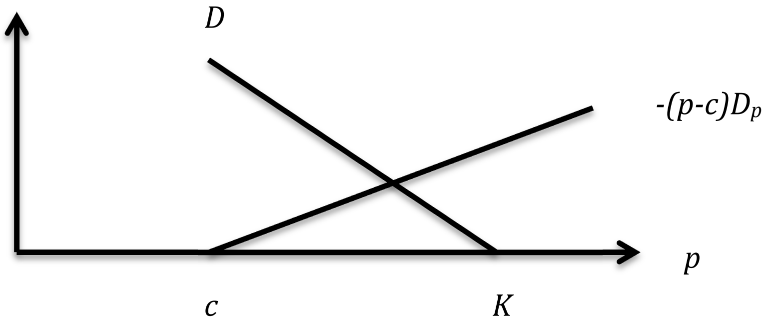
$$\frac{\partial H}{\partial w} = -c_w D(p,u) + (p - c(z,w))D_u \leq 0 \tag{3d}$$

$$\frac{\partial H}{\partial p} p = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial x} x = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial w} w = 0, \quad z(0) = z_0, \quad \lambda(T) = P \ . \tag{3e}$$

A (3e) feltétel utolsó tagja az úgynevezett transzverzalitási feltétel, melyet összekötő feltételként lehetne magyarítani. Ennek alapja a Lagrange-szorzó tartalmában rejlik, melyet ha a jelen esetre alkalmaznánk, megközelítőleg azt jelentené a $\lambda(T)$, hogy ha a T időpontban egy egységgel növelnénk a minőségtudást, akkor hasznunk P-vel nőne ezen időpontban. Azért P-vel, mert a tervidőszaknak vége van, ha ekkor növeljük a tudásszintünket, akkor az már csak úgy hasznosul, hogy a tervidőszak végén eladjuk, egységét P áron. A $\lambda(T)$ tehát összeköti a véges (a tervezési időszakot) a végtelennel.

1. Tulajdonság. *Ha adott z_0-ra létezik olyan $p = c(z_0, 0)$ eladási ár, melyre $D(p, z_0)$ pozitív, akkor a dinamikus Lagrange-szorzó, a $\lambda(t)$ értéke pozitív, továbbá ezen értékek időben csökkenőek, amikor a diszkont ráta zérus. Amenynyiben pozitív, akkor a szorzó dinamikája lehet mind növekvő, mind csökkenő, azaz idő szerinti deriváltjuk bármilyen előjelű.*

Elsőként azt látjuk be, hogy (3b)-ből a $\frac{\partial H}{\partial p} = 0$ egyenletnek mindig van megoldása p-re, ugyanis feltevéseink szerint $p = c(z_0, 0)$-re létezik pozitív D, továbbá p-ben a D csökkenő úgy, hogy D-nek lesz zérus értéke, a $-(p-c)D_p$ pedig pozitív. Az *1. ábra* mutatja a (3b) feltételben szereplő kifejezések viselkedését.



1. ábra. A (3b) feltételrendszer kifejezései

Ezek alapján (3b)-ből írhatjuk, hogy

$$(p - c(z, w)) = -D(p, u)/D_p \ , \tag{4a}$$

és helyettesítsük be az optimális fajlagos nyereségre kapott kifejezést (3a)-ba:

$$-c_z D(p, u) - D(p, u) D_u / D_p = -\dot{\lambda} + r\lambda \ ,$$

melyet átrendezve kapjuk, hogy

$$-\dot{\lambda} + r\lambda = -D(p, u)\Big(c_z + \frac{D_u}{D_p}\Big) \ . \tag{4b}$$

Szorozzuk meg e kifejezés mindkét oldalát e^{-rt}-vel:

$$-\dot{\lambda} e^{-rt} + r\lambda e^{-rt} = -e^{-rt} D(p, u)\Big(c_z + \frac{D_u}{D_p}\Big) \ ,$$

melyet úgy is írhatunk, hogy

$$d(\lambda e^{-rt} + A)/dt = e^{-rt} D(p, u)\Big(c_z + \frac{D_u}{D_p}\Big) \ , \tag{4c}$$

ahol A egy konstans. A (4c) jobb oldala viszont a

$$\int_0^t e^{-rv} D(p(v), u(v))\Big(c_{z(v)} + \frac{D_{u(v)}}{D_{p(v)}}\Big) \, dv$$

kifejezés idő (t) szerinti deriváltja, ezért (4c) helyett azt írhatjuk fel, hogy

$$\lambda e^{-rt} + A = \int_0^t e^{-rv} D(p(v), u(v))\Big(c_{z(v)} + \frac{D_{u(v)}}{D_{p(v)}}\Big) \, dv \ . \tag{5a}$$

Tudjuk ugyanakkor, hogy $\lambda(T) = P$, ezért (5a) kifejezést $t = T$-re alkalmazva,

$$P e^{-rT} + A = \int_0^T e^{-rv} D(p(v), u(v))\Big(c_{z(v)} + \frac{D_{u(v)}}{D_{p(v)}}\Big) \, dv \ , \tag{5b}$$

melyből A-t kifejezve, és visszahelyettesítve (5a)-ba, azt kapjuk, hogy

$$\lambda(t) = Pe^{-r(T-t)} - \int_t^T e^{-r(v-t)} D(p,u)\Big(c_z + \frac{D_u}{D_p}\Big)\, dv \; . \tag{6}$$

Most fordítsuk figyelmünket a (3d) feltételre, melyben a $\frac{\partial H}{\partial w}$ függvényt definiáljuk. E függvény w-ben, a nem stratégiai minőségdimenzió szintjében, nem futhat a pozitív végtelenbe, mert c konvexitása ezt kizárja. Ezért két eset lehet: a $\frac{\partial H}{\partial w}$ w-ben mindig negatív, vagy lesz zérus értéke. Az első esetet a *2a ábra* illusztrálja, a másodikat a *2b*. A 2a ábra adott p és z értékekre mutatja a (3d) feltételben szereplő függvények lehetséges alakulását, amikor a két függvény elkerüli egymást. Ekkor a w optimális értéke zérus lesz. E zérus értéket véve, az $u = z_0{+}0$ minőségre van fizetőképes kereslet $p > c(z_0, 0)$ áron minden t időpontban, tehát ekkor $D(p,u) > 0$ lesz az optimális megoldásban. Továbbá, mivel (3b) egyenlőség formájában teljesül, írhatjuk, hogy

$$-\frac{p - c(z,w)}{D(p,u)} = \frac{1}{D_p} \; .$$

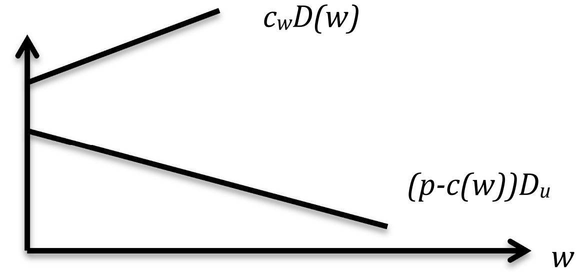
A (6)-ban látható $(c_z + \frac{D_u}{D_p})$ kifejezésről tételezzük fel, hogy negatív, azaz:

$$c_z + \frac{D_u}{D_p} < 0 \; . \tag{7a}$$

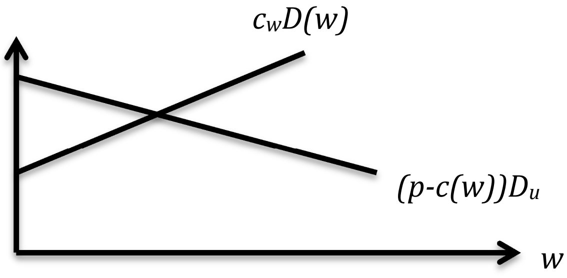
Helyettesítsük most az $\frac{1}{D_p}$ értéket (7a)-ban a (3b)-ből nyert értékkel. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$c_z D(p,u) < (p - c(z,w)) D_u \; . \tag{7b}$$

E kifejezés bal oldala azt a többlet termelési költséget fejezi ki, mely akkor keletkezik, amikor a minőséget növeljük, hiszen c_z-vel növekszik minden darab termelése, és $D(p,u)$ darabot termelünk. E költségnek kisebbnek kell lenni, mint a profitnövekmény, melyet a jobb oldal fejez ki. A jobb oldal a fajlagos profit és a minőség növekedése miatt bekövetkezett keresletnövekmény szorzata. Az egyenlőtlenségnek azért kell igaznak lennie, mert másként nincs értelme a minőség növelésének. A (7a) tehát igaz, ami azt jelenti, hogy a dinamikus Lagrange-szorzó pozitív, és a t időpontban értéke azt fejezi ki, hogy mennyi jövőbeni haszon származik jelen értéken abból, hogy a t időpontban a stratégiai minőségszintet növeljük.



2a. ábra. A (3d) feltétel függvényei adott p-re és z-re, amikor az optimális w zérus



2b. ábra. A (3d) feltétel függvényei adott p-re és z-re, amikor az optimális w pozitív

Most tételezzük fel, hogy a 2b ábra által mutatott helyzetben vagyunk, azaz a nem stratégiai minőségkomponens szintje pozitív. Ekkor (3d) egyenlőség formájában teljesül, azaz

$$(p - c(z, w)) = c_w D(p, u)/D_u \ ,$$

melyet a (7b)-be helyettesítve nyerjük, hogy

$$D(p, u) + c_w D(p, u) D_p/D_u = 0 \ ,$$

és tekintettel arra, hogy az optimális keresleti szint biztosan pozitív, azt írhatjuk, hogy

$$-c_w = D_p/D_u \ , \tag{7c}$$

melyet (6)-ban felhasználva kapjuk, hogy

$$\lambda(t) = Pe^{-r(T-t)} - \int_t^T e^{-r(v-t)} D(p, u)(c_z - c_w)\, dv \ . \tag{8}$$

Tekintettel arra, hogy $(c_z - c_w)$ negatív, a dinamikus Lagrange-szorzó pozitív. A $(c_z - c_w) < 0$ tulajdonság abból következik, hogy a stratégiai minőségdimenziók növeléséhez eleve beruházás szükséges, ezért ha ennek fajlagos változó költsége többe kerülne, mint a nem stratégiai jellemzőké ($c_w < c_z$), a stratégiai tényezők fejlesztésének nem lenne értelme.

Most tekintsük a dinamikus Lagrange-szorzó idő szerinti deriváltját. (8)-ból:

$$d\lambda/dt = rPe^{-r(T-t)} + D(p(t), u(t))(c_z - c_w) - r\int_t^T D(p, u)(c_z - c_w)\, dv \ . \tag{9}$$

A dinamikus Lagrange-szorzó deriváltja három tagból áll, az elsőt és utolsót az r (diszkont tényező) szorozza, következésképpen, ha r értéke zérus, akkor a $\frac{d\lambda}{dt} = \dot{\lambda}$ kifejezés értéke a középső tagtól függ, amely negatív. Ezért azt állíthatjuk, hogy amikor a diszkontráta zérus, akkor a dinamikus Lagrange-szorzó idő szerint csökkenő. Ennek egyik oka, hogy a zérus diszkontráta gyakorlatilag nem létező tőkeköltséget jelent, a tőkejavak olcsón elérhetők, ezért a beruházásokat célszerű a tervidőszak elején megtenni, és az ebből származó előny a teljes tervidőszakon keresztül hasznosítható.

Más a helyzet, amikor az r pozitív. Hogy a szerepekre jobban rávilágosítsunk, tételezzük fel, a diszkontráta (tőkeköltség) a minőségtudás horizont végi eladási árával, a P-vel egyetemben, igen magas szám, míg a kereslet nagyon alacsony, az egyszerűség kedvéért, zérus. A $\lambda(0)$, vagyis a dinamikus Lagrange-szorzó időhorizont eleji értéke ekkor P/e^{rT}, mely nyilvánvalóan kisebb érték, mint a periódus végi $\lambda(T)$ érték, ami P. A dinamikus Lagrange-szorzó értéke tehát idő szerint növekvő lesz. Ennek oka a magas tőkeköltség, a tervhorizont végén értékesülő minőségtudást nem a tervidőszak elején kell kifejleszteni, hanem a végén, mert időközben a tudás nem hasznosul eléggé a kereslet alacsony szintje miatt. Ekkor úgy tűnik, minőségtudásunkat nem értékeli a fogyasztó, a tervidőszak elején nem célszerű azt fejleszteni, viszont abban reménykedünk, hogy vállalatunkat jó pénzért el tudjuk adni, de az ezt megalapozó tudást közvetlen előtte kell kifejleszteni, és nem az időszak elején.

2. Tulajdonság. *A minőség folyamatosan nő, és a növekedés dinamikája megegyezik a dinamikus Lagrange-szorzó változásával.*

A (3c)-ben definiált $\frac{\partial H}{\partial x}$ függvény az $x = 0$ pontban biztosan növekszik, azaz $\frac{\partial H}{\partial x} > 0$, ugyanis azt tételeztük fel, hogy $f_x(0) = 0$, és tudjuk, hogy $\lambda a > 0$, hiszen a pozitív input paraméter, λ-ról pedig beláttuk, hogy pozitív. Ezért lesz olyan pozitív x, melyre a (3c) egyenlőség formájában teljesül, azaz a

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -f_x + \lambda a = 0 \tag{10}$$

egyenletnek pozitív x-re lesz megoldása, ami azt jelenti, hogy a stratégiai minőségelemeket folyamatosan fejleszteni kell. Az egyenlet további érdekességeket takar, ugyanis az

$$f_x = \lambda a$$

egyenlőségből az következik, hogy

$$f_{xx}\dot{x} = \dot{\lambda} a\ .$$

Mivel a és f_{xx}pozitív, az $\dot{x}$ előjele megegyezik $\dot{\lambda}$ előjelével, vagyis a minőség fejlesztésének iránya követi a dinamikus Lagrange-változó alakulását. Előző megállapításainkból következően, ezért a stratégiai minőségdimenziók szintje egyrészt folyamatosan növekszik, másrészt ez a növekedési ütem időben biztosan csökkenő intenzitású, amikor a diszkontráta zérus. Amikor a diszkontráta nem zérus, a fejlődés dinamikája lehet akár növekvő, akár csökkenő.

3. Tulajdonság. *Amikor $dD_p/dt = 0$, azaz amikor a kereslet árrugalmassága nem változik az idők során, akkor az ár növekedni fog, amikor a minőség nő.*

Feltételrendszerünkből következően a (3b) feltétel egyenlőség formájában teljesül, azaz

$$D(p, u) + (p - c(z, w))D_p = 0\ .$$

Mivel e feltétel minden időpontra igaz kell legyen, a bal oldal értéke idő szerint nem változhat, ezért ha vesszük a bal oldal idő szerinti deriváltját, annak is zérusnak kell lennie. Tehát írhatjuk, hogy

$$D_p\dot{p} + D_u\dot{u} + (\dot{p} - c_z\dot{z} - c_w\dot{w})D_p + (p - c(z,w))\dot{D}_p = 0 \,. \tag{11}$$

Ha most a kereslet árrugalmassága időben változatlan, azaz $\dot{D}_p = 0$, akkor a (11) feltétel az alábbira redukálódik:

$$\begin{aligned} 2D_p\dot{p} &= -D_u\dot{u} + (c_z\dot{z} + c_w\dot{w})D_p \\ 2\dot{p} &= -D_u\dot{u}/D_p + (c_z\dot{z} + c_w\dot{w}) \,. \end{aligned} \tag{12}$$

Tekintettel arra, hogy $D_p < 0$, a (12) egyenlet jobb oldalán levő változók idő szerinti deriváltjainak együtthatói pozitív kifejezések, a minőségszintek változásának iránya az árat ugyanolyan irányban mozgatja. Amikor akár z, illetve w növekszik, azaz $\dot{z}$, illetve $\dot{w}$ pozitív számok, akkor azok pozitív $\dot{p}$ értéket indukálnak, azaz növekvő árat.

4. Tulajdonság. *Amikor a Hamilton-függvény p és w szerinti kereszt-deriváltja, azaz a $\frac{\partial^2 H}{\partial w \partial p}$ negatív, a növekvő minőség alacsonyabb árral jár, viszont ha a keresleti függvény p és u szerinti keresztderiváltja, azaz a D_{pu} függvény pozitív, akkor a magasabb minőség magasabb árat jelent.*

Térjünk vissza a (11) összefüggéshez, de most azt tételezzük fel, hogy $\dot{D}_p \neq 0$. Azt tételezzük fel tehát, hogy a kereslet árrugalmassága időben változik. Azt írhatjuk, hogy

$$\dot{D}_p = D_{pp}\dot{p} + D_{pu}\dot{u} \,,$$

és ezt felhasználva (11)-ben, azt kapjuk, hogy

$$D_p\dot{p} + D_u\dot{u} + (\dot{p} - c_z\dot{z} - c_w\dot{w})D_p + (p - c(z,w))(D_{pp}\dot{p} + D_{pu}\dot{u}) = 0 \,. \tag{13}$$

Ebből átalakítással nyerjük:

$$2D_p\dot{p} = -D_u\dot{u} + (c_z\dot{z} + c_w\dot{w})D_p - (p - c(z,w))(D_{pp}\dot{p} + D_{pu}\dot{u}) \,,$$

melyből D_p-vel történő osztás és átalakítás után az alábbi összefüggésünk lesz:

$$\dot{p}(2 + D_{pp}(p - c(w,z))/D_p) = -\dot{u}(D_u + (p - c(z,w))D_{pu})/D_p + (c_z\dot{z} + c_w\dot{w}) \,.$$

E kifejezést másként rendezve:

$$\begin{aligned} \dot{p}(2 + D_{pp}(p - c(w,z))/D_p) = \dot{w}(c_w - D_u/D_p + (p - c(w,z))D_{pu}/D_p) + \\ + \dot{z}(c_z - D_u/D_p + (p - c(w,z))D_{pu}/D_p) \,. \end{aligned} \tag{14}$$

Most elsőként azt látjuk be, hogy ezen egyenlet bal oldalán, a zárójelben levő kifejezés pozitív, ugyanis (3b) felhasználásával

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p \partial p} = 2D_p + (p - c(w,z))D_{pp} \,, \tag{15}$$

és e kifejezésnek negatívnak kell lennie, hiszen maximumpont lévén, a $\frac{\partial H}{\partial p}$ kifejezés pozitívból vált negatívba, azaz csökkenőnek kell lennie p-ben. Mivel a keresleti függvény árban csökkenő, vagyis D_p negatív, (15) mindkét oldalát D_p-vel osztva, (14) bal oldali zárójeles része valóban pozitív.

Most tekintsük (3d)-t, és vegyük az ár szerinti deriváltját. Ekkor

$$\frac{\partial^2 H}{\partial w \partial p} = -c_w D_p + D_u + (p - c(z,w))D_{up} \,. \qquad (16)$$

A (16) kifejezés mindkét oldalát $-D_p$-vel osztva (mely egy pozitív kifejezés), a (14) kifejezés jobb oldalának első részét látjuk. Ezért, ha a (16) alatti keresztderivált negatív, a minőség növekedése ($\dot{w} > 0$, $\dot{z} > 0$) az ár csökkenését vonja maga után. Ennek oka, hogy

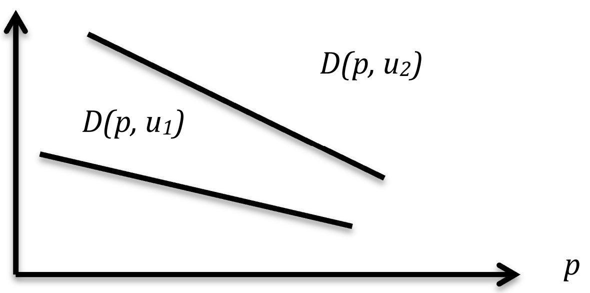
$$\frac{\partial^2 H}{\partial z \partial p} < \frac{\partial^2 H}{\partial w \partial p} \,,$$

ugyanis egyrészt

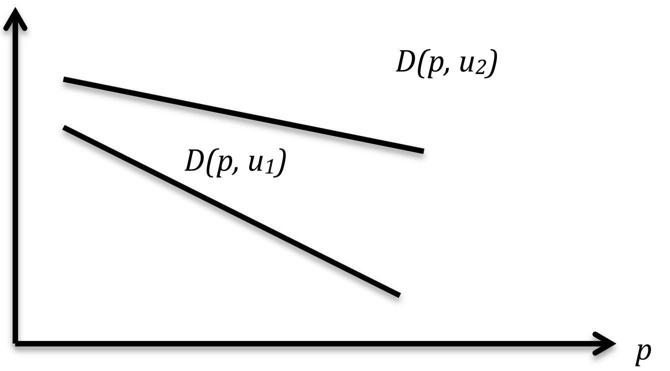
$$\frac{\partial^2 H}{\partial z \partial p} = -c_z D_p + D_u + (p - c(z,w))D_{up} \,,$$

másrészt $c_z < c_w$. Ezért ha $\frac{\partial^2 H}{\partial w \partial p}$ negatív, akkor $\frac{\partial^2 H}{\partial z \partial p}$ is negatív, így ha a minőség növekszik, az ár csökkenni fog.

Ha most megnézzük a (16) alatti keresztderivált szerkezetét, akkor azt látjuk, hogy a három tagból az első kettő biztosan pozitív, hiszen a költségfüggvény növekszik, amikor a minőség nő, a kereslet pedig csökken, amikor az ár nő. Az első tag tehát pozitív. A második tag is, hiszen a kereslet növekszik, amikor a minőség nő. A (16) alatti keresztderivált negativitásának szükséges feltétele tehát, hogy a keresleti függvény D_{up} keresztderiváltja negatív legyen. A *3a. ábra* mutat egy keresleti függvénytípust, mely rendelkezik e tulajdonsággal. A keresleti függvényt két minőségszintre rajzoltuk fel, amikor is $u_2 > u_1$, és mivel a keresleti függvény minőségben növekvő, valamennyi árra a magasabb minőséghez tartozó keresleti függvény az alacsonyabb minőséget jelző keresleti függvény felett fut.



3a. ábra. Két keresleti függvény különböző minőségszintre, amikor $D_{pu} < 0$



3b. ábra. Két keresleti függvény különböző minőségszintre, amikor $D_{pu} > 0$

Verbálisan megfogalmazva azt mondhatjuk, hogy a 3a. ábra olyan keresleti függvényt ábrázol, amikor a magasabb minőség kategóriában a vevők nagyobb mértékben árérzékenyek. Ilyen esetekben az ár csökkentése nagyobb mértékben növeli a keresletet magasabb minőség kategóriában, és így az alacsonyabb ár, magasabb minőség, nagyobb kereslet kombináció több profitot eredményez. Ne felejtsük azonban el, mindez csak szükséges feltétel, vagyis D_{pu} negativitása még nem biztos, hogy a magasabb minőség – alacsonyabb ár kombinációt vonzza maga után.

A másik esetben, amikor $D_{pu} > 0$, (14) jobb oldalán az idő szerinti deriváltakat szorzó kifejezések pozitívak, ezért amikor a minőség növekszik (esetleg $\dot{w} > 0$ és $\dot{z} > 0$), az árak növekedni fognak. A *3b. ábra* mutat ilyen típusú keresleti függvényt.

A 3b. ábra azt fejezi ki, hogy a magasabb minőségi kategóriához tartozó vásárlók árérzékenysége kisebb mértékű, ugyanis magasabb ár bevezetése esetén a kereslet csökkenése kisebb mértékű. Ilyen esetekben a magasabb minőség mindig magasabb árat fog jelenteni.

4 Az autonóm tanulás hatása az árakra

Autonóm tanulásról akkor beszélünk, amikor fejlesztési, beruházási költségek növelése nélkül is csökkennek a termelési költségek (Arrow, 1962). A termelés menedzsmentben e fogalom ismert kategória, melynek alapjai onnan erednek, hogy az idő során, mind a menedzsment, mind pedig a termelésben részt vevő munkás egyre több szervezési, vagy egyszerű termelési fogást ismer meg, melyek csökkentik a termelési költségeket. Mindezt úgy vesszük figyelembe modellünkben, hogy beépítünk egy faktort, mely az idő függvényében csökkenti a fajlagos termelési költségeket. Eredeti, (1a) alatti célfüggvényünk ekkor például az alábbi formát öltheti:

$$\max_{p,x,w} \int_0^T e^{-rt}\Big((p - e^{-kt}c(z,w))D(p,u) - f(x)\Big)\,dt + e^{-rT}Pz(T)\ , \qquad (17)$$

ahol k pozitív értékű diszkont faktor, és mint ez a függvényből látható, a fajlagos termelési költségek időről időre csökkenni fognak. Az optimum meghatározásában ezen új tényező bevezetése nem játszik különösebb szerepet, egyszerűen mindenhol az $e^{-kt}c$ kifejezést kell használni a c helyett. Az optimális megoldás analízise során, amikor a feltételek idő szerinti deriváltját tekintjük, ott viszont más a helyzet. A (3b) feltételnek megfelelő optimalitási feltétel (17) célfüggvény esetében akkor az alábbi formát ölti:

$$\frac{\partial H}{\partial p} = D(p,u) + (p - e^{-kt}c(z,w))D_p = 0 \ , \tag{18a}$$

mely az alábbi formában is felírható:

$$p - e^{-kt}c(z,w) = -\frac{D(p,u)}{D_p} \ . \tag{18b}$$

Tekintsük most (18a) idő szerinti deriváltját, mely (13) módosított formája lesz:

$$D_p\dot{p} + D_u\dot{u} + \big(\dot{p} + ke^{-kt}c(z,w) - e^{-kt}(c_z\dot{z} + c_w\dot{w})\big)D_p +$$
$$+ (p - e^{-kt}c(z,w))(D_{pp}\dot{p} + D_{pu}\dot{u}) = 0 \ ,$$

melyet ha átrendezünk az előzőek mintájára, a (14)-nek megfelelő forma, figyelembe véve a (18b) alatti helyettesíthetőséget is, az alábbira módosul:

$$\begin{aligned}\dot{p}(2 - DD_{pp}/D_p^2) = \dot{w}(e^{-kt}c_w - D_u/D_p + DD_{pu}/D_p^2) + \\ + \dot{z}(e^{-kt}c_z - D_u/D_p + DD_{pu}/D_p^2) - ke^{-kt}c(z,w) \ .\end{aligned} \tag{19}$$

(14) és (19) kifejezések közötti tartalmi különbséget a (19) utolsó tagja adja. E kifejezés minden t-re negatív, vagyis az árak, minden mást változatlannak feltételezve, csökkennek az idő előrehaladtával. Ennek oka az autonóm tanulás, melyből eredő hasznot ezek szerint meg kell osztani a fogyasztókkal.

5 Következtetések

E tanulmány egy olyan vállalkozást modellez, mely termékeinek minőségdimenzióit két halmazba sorolja. A stratégiai dimenziók mindig fejlesztésnek az eredményei, beruházások, tanulás révén növelhető e minőségtudás, míg a nem stratégiai minőségdimenziók egyszerű beszerzési költségeken keresztül. A fajlagos termelési költségek növekednek, amikor a minőség növekszik, viszont nem egyformán, a stratégiai elemek marginális költsége kisebb (másként nincs értelme a problémafelvetésnek). A keresletet két tényező határozza meg, a termék minősége, és ennek ára. A felhalmozott minőségtudás az időhorizont végén eladható egy adott fajlagos áron. E feltételek mellett arra kerestünk választ, hogy a minőség növekedése miként hat az árra.

Ha a feltett kérdésre tömören akarunk válaszolni, azt mondhatnánk, nagyon kevés az olyan esetek száma, amikor a minőség emelkedése nem vonja maga után az árak emelkedését. A közgazdaságtanban eléggé általánosan elfogadott állítás, hogy a magasabb minőséget megfizetni képes fogyasztók kevésbé érzik meg az áremelkedést, vagyis e kategóriában a keresleti függvény árrugalmassága alacsonyabb. Másként fogalmazva, magasabb minőségi kategóriában, ha egységnyi mennyiséggel növeljük az árat, a kereslet kevésbé csökken, mintha ugyanezt tennénk alacsonyabb minőségi kategóriában. Azt bizonyítottuk, hogy ekkor bizonyosan bekövetkezik a magasabb minőség, magasabb ár kombináció.

Mégis, mi az oka annak, hogy az idők folyamán a magasabb minőség egyre több ember számára elérhető? Ebben meghatározó szerepet játszik az autonóm tanulás hatása, melynek szerepéről azt láttuk, hogy az autonóm tanulás az árak csökkenésének irányába hat. Az árak csökkenésének irányába hat a verseny intenzitásának növekedése magas termékminőség kategóriákban is. Az éles verseny következménye, hogy magasabb és magasabb minőségű terméket egyre többen és többen képesek a piacra vinni, ezért a vevők árérzékenysége megváltozik, gyorsan csökken a kereslet az árak növekedésének hatására a szoros verseny miatt. Mindez még csak szükséges feltétel, a csökkenő árak még nem egyenes következményei a keresleti függvény viselkedésének.

A tanulmány fontos pontosításokat fogalmazott meg a dinamikus Lagrange-szorzókkal kapcsolatban is. Noha ezek dinamikájáról már cikkek jelentek meg korábban, az eredményeknél mindig fontos kiinduló pont volt, hogy a probléma megoldásának létezik úgynevezett belső pontja. Modellünkben olyan feltételeket fogalmaztunk meg, melyek mellett a minőség folytonosan nő. Ennek dinamikája viszont változó, néha növekvő, néha csökkenő.

Irodalom

1. Arrow, K. J., 1962, The economic implications of learning by doing, *The Review of Economic Studies*, 29(32), June, 155–173.
2. Chand, S., H. Moskowitz, A. Novak, I. Rekhi and G. Sorger, 1996, Capacity Allocation for Dynamic Process Improvement with Quality and Demand Considerations, *Operations Research*, 44(6), 964–975.
3. Chenavaz, R., 2012, Dynamic pricing, product and process innovation. *European Journal of Operational Research* 222, 553–557.
4. Chenavaz, R., 2016, Better product quality may lead to lower product price. B. E. *Journal of Theoretical Economics*, ISSN (Print) 2194-6124, DOI: 10.1515 /bejte-2015-0062.
5. Crosby, P. B., 1979, *Quality is Free*, McGraw-Hill, NY.
6. Dolan, R. J. and H. Simon, 1996, *Power Pricing*, Free Press, NY.
7. Fine, H. C., 1986, Quality Improvement and Learning in Productive Systems, *Management Science*, 32(10), 1301–1315.
8. Fine, H. C., 1988, A Quality Control Model with Learning Effects, *Operations Research*, 36(3), 437–444.
9. Fine, H. C. and E. L. Porteus, 1989, Dynamic Process Improvement, *Operations Research*, 37(4), 580–591.
10. Garvin, A. D., 1987, Competing on the Eight Dimensions of Quality, *Harvard Business Review*, Nov-Dec, 101–109.
11. Garvin, A. D., 1988, *Managing Quality*, Free Press, NY.

12. Heizer, J. and B. Render, 2014, *Operations Management*, 11th ed., Pearson.
13. Kamien, M. I. and N. L. Schwartz, 1991, *Dynamic Optimization: The Calculation of Variations and Optimal Control in Economics and Management*, North-Holland.
14. Kánnai Z., Szabó I. és Tallos P., 2014, *Variációszámítás és optimális irányítás*, Typotex, Budapest.
15. Krajewski, L. J., L. P. Ritzman and M. K. Malhotra, 2015, *Operations Management*, 11th ed., Pearson.
16. Li, G. and S. Rajagopalan, 1998, Process Improvement, Quality, and Learning Effects, *Management Science*, 44(11), 1517–1532.
17. Vörös, József, 2006, The Dynamics of Price, Quality, and Productivity Improvement Decisions, *European Journal of Operational Research*, 170, 809–823.
18. Vörös, József, 2013, Multi-period models for analyzing the dynamics of process improvement activities, *European Journal of Operational Research*, 230(3), 615–623.

ON THE RELATIONSHIP OF PRICE AND QUALITY

The paper develops a control theory model to help making simultaneous decision on price, quality and improvement effort levels. Quality is composed off strategic and non-strategic dimensions where the performance of the strategic quality components can be increased by investments into knowledge (such as developing capabilities that can not be copied), while non-strategic components can be acquired at the market place (such as using better materials, adding product features). The paper identifies situations where the performance quality of the product continuously increases, while its dynamics is either increasing or decreasing. Connected to this, in most cases when quality increases, so does price, but there are exemptions. A necessary condition for the occurrence of this case is that the cross derivative of the demand function with respect to price and quality must be negative.