PÁROS ÖSSZEHASONLÍTÁS MÁTRIXOKBÓL SZÁMOLT SÚLYVEKTOROK HATÉKONYSÁGA[1]

BOZÓKI SÁNDOR – FÜLÖP JÁNOS
MTA SZTAKI és BCE – MTA SZTAKI és Óbudai Egyetem

A többkritériumú döntéshozatal módszereiben gyakran alkalmaznak páros összehasonlítás mátrixokat, amelyekből megfelelő módszerekkel az összehasonlításokban részt vevő alternatívákra vonatkozóan egy fontossági súlyvektor nyerhető ki. A vektoroptimalizálás terminológiáját alkalmazva egy súlyvektor hatékony, ha nem létezik egy másik olyan súlyvektor, amely minden komponensben legalább olyan jól közelít, sőt legalább egy pozícióban szigorúan jobban. Egy súlyvektor gyengén hatékony, ha a páronkénti hányadosokkal való közelítés nem javítható meg egyszerre minden diagonálison kívüli pozícióban. Megmutatjuk, hogy a sajátvektor módszer során alkalmazott, a legnagyobb sajátértékhez tartozó sajátvektor mindig gyengén hatékony, viszont numerikus példákat mutatunk arra is, hogy lehet nem hatékony is. Lineáris programozási feladatokat vezetünk be annak ellenőrzésére, hogy egy adott súlyvektor (gyengén) hatékony-e, és ha nem az, akkor egy (erősen) domináló hatékony súlyvektort is kapunk. Kitérünk a `pcmc.online` helyen elérhető, böngészőben futtatható Pairwise Comparison Matrix Calculator alkalmazásra is, amelyben az itt bemutatott módszereket is implementáltuk.

Kulcsszavak: többszempontú döntési modellek, páros összehasonlítás mátrix, hatékonyság, Pareto-optimalitás, lineáris programozás

1 Bevezetés

1.1 Páros összehasonlítás mátrixok

A többszempontú döntési feladatok – ld. pl. Temesi József [19] – egyik kulcslépése az egyes szempontok fontossági súlyainak számszerűsítése. A gyakorlati feladatokban ugyanis ritka az olyan döntési alternatíva, amely minden szempontból jobb a többinél. A szempontok súlyozása nélkül legfeljebb szűkíteni lehet az alternatívák körét – például azon alternatívák kizárásával, amelyeknél van (minden szerint legalább olyan jó, és legalább egy szempont szerint szigorúan) jobb alternatíva. A hatékonyság (Pareto-optimalitás) így már a döntési folyamat első fázisában is megjelenik, de a dolgozatunk központi témája a döntési folyamat egy későbbi fázisában felmerülő hatékonyság, a súlyvektor hatékonysága lesz.

Ha a döntéshozó nem tudja közvetlenül megadni a szempontsúlyokat (pl. öt szempont esetén 35%, 15%, 20%, 5%, 25%), akkor jól alkalmazható

[1]Beérkezett: 2017. március 11. E-mail: `bozoki.sandor@sztaki.mta.hu`, `fulop.janos@sztaki.mta.hu`.

egyszerűbb kérdések sorozatán keresztül felmérni a preferenciákat. Ezt az alapgondolatot fejlesztette tovább Saaty 1977-ben [18]. Modelljében a páronkénti összehasonlítások több évszázados hagyományára és gyakorlatára építve a döntéshozót egyszerre egy kérdéssel szembesíti: a két adott szempont közül melyik a fontosabb és hányszor. Hasonlóan, a döntési alternatívák értékelése, pontozása során egy adott szempont szerint melyik alternatíva erősebb, és az hányszor annyi pontot érdemel, mint a gyengébb. Az $n \geq 3$ elem (szempont, alternatíva, vagy akár szavazóerő) összehasonlításából az $\mathbf{A}$ $n \times n$-es páros összehasonlítás mátrixot kapjuk, amelynek minden eleme pozitív, $a_{ij} = 1/a_{ji}$ minden $1 \leq i, j \leq n$ esetén, speciálisan a főátlóban 1-esek állnak. Abban a leginkább elméleti esetben, amikor fennáll a kardinális tranzitivitás, azaz $a_{ij}a_{jk} = a_{ik}$ minden i, j, k indexhármasra, a páros összehasonlítás mátrixot konzisztensnek, különben pedig inkonzisztensnek nevezzük.

Egy, a döntéshozó által kitöltött $A = [a_{ij}]$ páros összehasonlítás mátrix ismeretében megfogalmazható a súlyvektor számításának alapfeladata: keressük azt a

$$\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)^\top \in I\!R^n_+$$

súlyvektort, amelyre teljesül, hogy a w_i/w_j arányok jól közelítik a döntéshozó által megadott a_{ij} értékeket. Attól függően, hogy hogyan specifikáljuk a jól közelítést, számos súlyozási módszer adódik. Saaty [18] az $\mathbf{A}$ mátrix legnagyobb sajátértékéhez tartozó jobb oldali sajátvektort javasolta, de a $\min_{i,j}(\log a_{ij} - \log(w_i/w_j))^2$, azaz a logaritmikus legkisebb négyzetes célfüggvényt [9,10,13] minimalizáló súlyvektor is a legnépszerűbb és a legtöbbet kutatott módszerek közé sorolható. További súlyozási módszerek ismertetése található Rapcsák Tamás jegyzetének [17] I.2.2. alfejezetében, valamint Komáromi Éva cikkében [15]. A súlyozási módszereket számos alkalommal és több szempont szerint összehasonlították – mi csak Bajwa, Choo és Wedley [3] tanulmányát említjük –, de a szakmai vita arról, hogy melyik módszer tekinthető a legjobbnak, ma is tart.

A páros összehasonlítás mátrixok inkonzisztenciájának mérése szintén aktív kutatási téma, a hazai eredmények közül Kéri Gerzson gráfelméleti megközelítésére [14] és Poesz Attila doktori értekezésére [16] hívjuk fel az Olvasó figyelmét.

A páros összehasonlítás mátrixok hagyományos alkalmazási területe – a már említett többszempontú döntési modellezés – mellett megemlítjük Duleba Szabolcs [12] munkáját trendek előrejelzésére, és Csató László részletes áttekintését [11] a rangsorolási problémákra vonatkozóan.

Dolgozatunk 2. fejezetében a – páros összehasonlítás mátrixból számolt – súlyvektor hatékonyságának alapfogalmait ismertetjük. Mivel ebben a témában még nincs magyar nyelvű tanulmány, a szokásosnál hosszabb terjedelmet szemléltető számpéldákkal ellensúlyozzuk. Az ezt követő fejezetekben a saját eredményeinket foglaljuk össze, különös tekintettel a [6] publikációban szereplőkre. A hatékonyság és a gyenge hatékonyság három definíciójának ekvivalenciáját a 3. fejezetben mutatjuk meg.

2 A súlyvektor hatékonysága

Ahogyan a bevezetőben említettük, a páros összehasonlítás mátrixból számolt súlyvektorok számítási módjaira számos javaslat, elméleti és számítási eredmény született Saaty 1977-es cikkét követően. Tudománytörténeti szempontból is érdekesnek és meglepőnek tartjuk, hogy közel 30 évnek kellett eltelnie ahhoz, hogy a súlyvektor hatékonyságának kérdése felmerüljön. Jelenlegi ismereteink szerint Blanquero, Carrizosa és Conde [4] foglalkozott először e problémával. Adott $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{i,j=1,\dots,n}$ páros összehasonlítás mátrix esetén a súlyvektor számítása egy olyan többcélú optimalizálási feladat, amelynek célfüggvényei a minimalizálandó $|x_i/x_j - a_{ij}|$, $1 \leq i \neq j \leq n$ függvények, összesen $n^2 - n$ darab.

$$\min_{\mathbf{x} \in I\!R^n_{++}} \left| \frac{x_i}{x_j} - a_{ij} \right|_{1 \leq i \neq j \leq n} . \tag{1}$$

Legyen $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)^\top$ egy pozitív súlyvektor.

Definíció. *A* $\mathbf{w}$ *súlyvektor hatékony, ha nem létezik olyan* $\mathbf{w}' = (w'_1, w'_2, \dots, w'_n)^\top$ *súlyvektor, hogy*

$$\left| a_{ij} - \frac{w'_i}{w'_j} \right| \leq \left| a_{ij} - \frac{w_i}{w_j} \right| \qquad \text{minden } 1 \leq i,j \leq n \text{ esetén, és} \tag{2}$$

$$\left| a_{k\ell} - \frac{w'_k}{w'_\ell} \right| < \left| a_{k\ell} - \frac{w_k}{w_\ell} \right| \qquad \text{valamely } 1 \leq k,\ell \leq n \text{ esetén.} \tag{3}$$

Ha a $\mathbf{w}$ súlyvektor nem hatékony, azaz létezik egy $\mathbf{w}'$ súlyvektor a (2)–(3) tulajdonságokkal, akkor azt mondjuk, hogy $\mathbf{w}'$ dominálja $\mathbf{w}$-t. A dominancia tranzitív reláció.

Egy hatékony súlyvektort tehát nem lehet dominálni, azaz megjavítani úgy, hogy legalább egy pozícióban jobban közelítse a döntéshozó által megadott értéket, miközben egyetlen más pozícióban sem keletkezik rosszabb közelítés.

A definícióból következik, hogy egy súlyvektor hatékonysága nem függ a normalizálástól, azaz a $\mathbf{w}$ és a $c\mathbf{w}$ súlyvektorok egyszerre hatékonyak vagy nem hatékonyak bármely $c > 0$ esetén. Ennek az észrevételnek a későbbiekben szerepe lesz, mert egy nem hatékony súlyvektor és egy őt domináló súlyvektor összehasonlítását nem feltétlenül könnyíti meg, ha mindketten 1-re normalizáltak, azaz a komponensek összege 1.

Példa. Tekintsük az alábbi 4×4-es páros összehasonlítás mátrixot és annak $\mathbf{w}$ sajátvektorát:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 9 \\ 1/2 & 1 & 2 & 8 \\ 1/7 & 1/2 & 1 & 7 \\ 1/9 & 1/8 & 1/7 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0.562646 \\ 0.260697 \\ 0.141195 \\ 0.035463 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}' = \begin{pmatrix} 0.562646 \\ \mathbf{0.281323} \\ 0.141195 \\ 0.035463 \end{pmatrix}.$$

Ahhoz, hogy a $\mathbf{w}$ sajátvektor nem hatékonyságára rámutassunk, elegendő mutatni egy őt domináló $\mathbf{w}'$ súlyvektort. Esetünkben legyen $w'_2 := w_1/2 = 0.281323$, $w'_i := w_i, i = 1, 3, 4$. A $\mathbf{w}'$ súlyvektor ugyan nem 1-re normalizált, de a korábbiak szerint ennek nincs jelentősége.

A $\mathbf{w}$ sajátvektorból, valamint a $\mathbf{w}'$ súlyvektorból képzett

$$\left[\frac{w_i}{w_j}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 2.1582 & 3.9849 & 15.866 \\ 0.4633 & 1 & 1.8464 & 7.3513 \\ 0.2509 & 0.5416 & 1 & 3.9815 \\ 0.0630 & 0.1360 & 0.2512 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\left[\frac{w'_i}{w'_j}\right] = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{2} & 3.9849 & 15.866 \\ \mathbf{0.5} & 1 & \mathbf{1.9924} & \mathbf{7.9329} \\ 0.2509 & \mathbf{0.5019} & 1 & 3.9815 \\ 0.0630 & \mathbf{0.1261} & 0.2512 & 1 \end{pmatrix},$$

konzisztens páros összehasonlítás mátrixok mutatják, hogy a (2) egyenlőtlenség minden $1 \leq i, j \leq 4$ indexpárra teljesül, a (3) szigorú egyenlőtlenség pedig a $(k, \ell) \in \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (4, 2)\}$ indexpárokra. A $k = 1, \ell = 2$ indexpár esetén például $|\frac{w'_1}{w'_2} - a_{12}| = |2 - 2| = 0 < |\frac{w_1}{w_2} - a_{12}| = |2.1582 - 2| = 0.1582$.

Megjegyezzük, hogy elsőként Blanquero, Carrizosa és Conde [4, 3. fejezet] mutatott példát arra, hogy a sajátvektor nem hatékony. Szintén ők definiálták a súlyvektor lokális hatékonyságát az alábbiak szerint.

Definíció. *A* $\mathbf{w}$ *súlyvektor* lokálisan hatékony*, ha van olyan* $V(\mathbf{w})$ *környezet, amelyben egyetlen* $\mathbf{w}' = (w'_1, w'_2, \ldots, w'_n)^\top$ *súlyvektorra sem teljesül, hogy*

$$\begin{aligned} \left|a_{ij} - \frac{w'_i}{w'_j}\right| &\leq \left|a_{ij} - \frac{w_i}{w_j}\right| \qquad \text{minden } 1 \leq i, j \leq n \text{ esetén, és} \\ \left|a_{k\ell} - \frac{w'_k}{w'_\ell}\right| &< \left|a_{k\ell} - \frac{w_k}{w_\ell}\right| \qquad \text{valamely } 1 \leq k, \ell \leq n \text{ esetén.} \end{aligned}$$

A hatékonyság harmadik változatát Bozóki Sándor [5] definiálta.

Definíció. *A* $\mathbf{w}$ *súlyvektor* belülről hatékony*, ha nem létezik olyan* $\mathbf{w}' = (w'_1, w'_2, \ldots, w'_n)^\top$ *súlyvektor, hogy*

$$\left.\begin{aligned} a_{ij} \leq \frac{w_i}{w_j} &\implies a_{ij} \leq \frac{w'_i}{w'_j} \leq \frac{w_i}{w_j} \\ a_{ij} \geq \frac{w_i}{w_j} &\implies a_{ij} \geq \frac{w'_i}{w'_j} \geq \frac{w_i}{w_j} \end{aligned}\right\} \text{ minden } 1 \leq i, j \leq n \text{ esetén, és} \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned} a_{k\ell} \leq \frac{w_k}{w_\ell} &\implies \frac{w'_k}{w'_\ell} < \frac{w_k}{w_\ell} \\ a_{k\ell} \geq \frac{w_k}{w_\ell} &\implies \frac{w'_k}{w'_\ell} > \frac{w_k}{w_\ell} \end{aligned}\right\} \text{ valamely } 1 \leq k, \ell \leq n \text{ esetén.} \tag{5}$$

A belső hatékonyság mögötti intuíció az, hogy ha például a döntéshozó által adott mátrixelem 4, amit egy adott súlyvektor felülbecsül, mondjuk 6-tal, akkor minden 4 és 6 közötti értéket jobb közelítésnek tekintünk, mint a 6, ugyanakkor nem foglalkozunk a 4 alatti becslések minősítésével. Míg a hatékonyság definíciójában a 3 is jobban közelíti a 4-et, mint a 6, a belső hatékonyság definíciója kizárólag a 4 és 6 közötti közelítéseket engedi meg.

Vegyük észre, hogy az előző példában szereplő $\mathbf{w}'$ súlyvektor nemcsak dominálja $\mathbf{w}$-t, hanem belülről dominálja: az (5) szigorú egyenlőtlenségek a 2. sor, ill. oszlop főátlón kívüli elemeire teljesülnek.

Példa. Az előző példa folytatásaként érdemes megvizsgálni a

$$\mathbf{w}'' = \begin{pmatrix} 0.562646 \\ \mathbf{0.283701} \\ 0.141195 \\ 0.035463 \end{pmatrix}$$

súlyvektort is. A

$$\left[\frac{w_i''}{w_j''}\right] = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{1.9832} & 3.9849 & 15.866 \\ \mathbf{0.5042} & 1 & \mathbf{2.0093} & \mathbf{8} \\ 0.2509 & \mathbf{0.4977} & 1 & 3.9815 \\ 0.0630 & \mathbf{0.125} & 0.2512 & 1 \end{pmatrix}$$

szemlélteti, hogy a $\mathbf{w}''$ súlyvektor is dominálja $\mathbf{w}$-t, de nem belülről.

A definíciókból következik, hogy egy hatékony súlyvektor egyúttal lokálisan és belülről is hatékony. Blanquero, Carrizosa és Conde [4] pedig megmutatta, hogy a hatékonyság és a lokális hatékonyság ekvivalensek. Az alábbi állítás alapján a belső hatékonyság is ekvivalens a hatékonysággal.

Állítás. *A* $\mathbf{w}$ *súlyvektor akkor és csak akkor hatékony, ha belülről hatékony.*

Bizonyítás. Amint azt tisztáztuk, elegendő azt belátni, hogy ha a $\mathbf{w}$ súlyvektor nem hatékony, akkor belülről sem hatékony. A hatékonyság és a lokális hatékonyság ekvivalenciája szerint ekkor $\mathbf{w}$ lokálisan sem hatékony, azaz $\mathbf{w}$ tetszőleges $U(\mathbf{w})$ környezetében létezik olyan $\mathbf{w}' \in U(\mathbf{w})$ súlyvektor, ami dominálja $\mathbf{w}$-t. Egy kellően szűk $U(\mathbf{w})$ környezetben azonban

$$\begin{aligned} a_{ij} < \frac{w_i}{w_j} \quad &\Longrightarrow \quad a_{ij} < \frac{w_i'}{w_j'} \leq \frac{w_i}{w_j}\,, \\ a_{ij} > \frac{w_i}{w_j} \quad &\Longrightarrow \quad a_{ij} > \frac{w_i'}{w_j'} \geq \frac{w_i}{w_j}\,, \\ a_{ij} = \frac{w_i}{w_j} \quad &\Longrightarrow \quad a_{ij} = \frac{w_i'}{w_j'} = \frac{w_i}{w_j}\,, \end{aligned} \tag{6}$$

amiből következik, hogy $\mathbf{w}$ belülről nem hatékony. □

Következmény. *A hatékonyság, a lokális hatékonyság és a belső hatékonyság ekvivalensek.*

Blanquero, Carrizosa és Conde [4, Remark 12], valamint Conde és Pérez [8, Theorem 2.2] a hatékonyság gyenge változatát is definiálta.

Definíció. *A* $\mathbf{w}$ *súlyvektor* gyengén hatékony*, ha nem létezik olyan* $\mathbf{w}' = (w'_1, w'_2, \ldots, w'_n)^\top$ *súlyvektor, hogy*

$$\left| a_{ij} - \frac{w'_i}{w'_j} \right| < \left| a_{ij} - \frac{w_i}{w_j} \right| \qquad \text{minden } 1 \le i \ne j \le n \text{ esetén.} \tag{7}$$

Ha a $\mathbf{w}$ és $\mathbf{w}'$ súlyvektorokra teljesülnek a (7) egyenlőtlenségek, akkor azt mondjuk, hogy $\mathbf{w}'$ szigorúan dominálja $\mathbf{w}$. A szigorú dominancia is tranzitív. A definíciókból következik, hogy minden hatékony súlyvektor egyúttal gyengén hatékony is, ugyanakkor nem minden gyengén hatékony súlyvektor hatékony.

Példa. Rögzítsük az

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1/2 & 1 & 2 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

páros összehasonlítás mátrixot. Ekkor a

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

súlyvektor nem gyengén hatékony, mert a

$$\mathbf{w}' = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

súlyvektorból képzett $\left[\frac{w'_i}{w'_j}\right]$ konzisztens páros összehasonlítás mátrix minden diagonálison kívüli pozícióban szigorúan jobban közelíti az $\mathbf{A}$ elemeit, mint a

$$\left[\frac{w_i}{w_j}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1/3 & 1 & 3 \\ 1/9 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrix. A példában ráadásul $\left[\frac{w'_i}{w'_j}\right] = \mathbf{A}$, tehát minden mátrixelem közelítése tökéletes, de ez általában nem szükségszerű.

Amint azt korábban láttuk, a sajátvektor nem mindig hatékony. Megmutatható azonban, hogy mindig gyengén hatékony.

Tétel ([6, 2. fejezet]). *A sajátvektor gyengén hatékony.*

3 A hatékonyság és a gyenge hatékonyság ekvivalens definíciói

A hatékony esethez hasonlóan a lokálian és a belülről gyengén hatékony pontokat is lehet explicit módon, feladatspecifikusan definiálni.

Jelölje E, E_L és E_I a hatékony, lokálisa hatékony és belülről hatékony megoldások halmazát. Hasonlóan, jelölje WE, WE_L és WE_I a gyengén hatékony, lokálisan gyengén hatékony és belülről gyengén hatékony megoldások halmazát.

A gyenge hatékonyság definíciója alapján

$$WE = \{\mathbf{w} > \mathbf{0} \mid \text{nincsen olyan } \mathbf{w}' > \mathbf{0}, \text{ amelyre (7) teljesülne}\} .$$

Hasonló módon

$$\begin{aligned} WE_L = \{\mathbf{w} > \mathbf{0} \mid & \text{ van olyan } U(\mathbf{w}) \text{ környezet, hogy} \\ & \qquad \text{nincsen } \mathbf{w}' \in U(\mathbf{w}), \text{ amelyre (7) teljesülne}\} \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} WE_I = \{\mathbf{w} > \mathbf{0} \mid & \text{ nincsen olyan } \mathbf{w}' > \mathbf{0}, \text{ amelyre az teljesülne, hogy} \\ & a_{ij} \le \frac{w_i}{w_j} \quad \Longrightarrow \quad a_{ij} \le \frac{w'_i}{w'_j} < \frac{w_i}{w_j} \quad \forall\, 1 \le i \ne j \le n, \\ & a_{ij} \ge \frac{w_i}{w_j} \quad \Longrightarrow \quad a_{ij} \ge \frac{w'_i}{w'_j} > \frac{w_i}{w_j} \quad \forall\, 1 \le i \ne j \le n\} . \end{aligned}$$

A fenti összefüggésekből azonnal következik, hogy ha egy adott $\mathbf{w} > \mathbf{0}$ esetén van olyan $(k, \ell), k \ne \ell$ indexpár, hogy $a_{k\ell} = \frac{w_k}{w_\ell}$, akkor $\mathbf{w} \in WE$, $\mathbf{w} \in WE_L$ és $\mathbf{w} \in WE_I$.

Nyilvánvaló, hogy $E \subseteq WE$, $E_L \subseteq WE_L$ és $E_I \subseteq WE_I$. Megmutatjuk, hogy $E = E_L = E_I$ és $WE = WE_L = WE_I$ is teljesül. Ez azt jelenti, hogy a három definíció ekvivalens az erősebb és a gyengébb hatékonyság esetén egyaránt. A számpéldák viszont arról tanúskodnak, hogy $E \ne WE$.

Vezessük be az $f_{ij} : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R},\ i, j = 1, \dots, n$ függvényeket az alábbi módon:

$$f_{ij}(\mathbf{x}) = \left| \frac{x_i}{x_j} - a_{ij} \right|, \quad i, j = 1, \dots, n .$$

Adott $\mathbf{w} > \mathbf{0}$ esetén jelölje $D(\mathbf{w})$ a $\mathbf{w}$ pontot *domináló* pontok halmazát, azaz

$$\begin{aligned} D(\mathbf{w}) = \{\mathbf{x} > \mathbf{0} \mid & f_{ij}(\mathbf{x}) \le f_{ij}(\mathbf{w}) \text{ minden } i \ne j \text{ esetén, és} \\ & \qquad f_{k\ell}(\mathbf{x}) < f_{k\ell}(\mathbf{w}) \text{ valamely } k \ne \ell \text{ esetén}\} . \end{aligned}$$

Hasonlóképpen, jelölje $SD(\mathbf{w})$ a $\mathbf{w}$ pontot *erősen domináló* pontok halmazát, azaz

$$SD(\mathbf{w}) = \{\mathbf{x} > \mathbf{0} \mid f_{ij}(\mathbf{x}) < f_{ij}(\mathbf{w}) \text{ minden } i \ne j \text{ esetén}\} .$$

Könnyen látható, hogy ha $SD(\mathbf{w}) \neq \emptyset$, akkor $SD(\mathbf{w}) = \mathrm{int}(D(\mathbf{w}))$ és $\mathrm{cl}(SD(\mathbf{w})) = \mathrm{cl}(D(\mathbf{w}))$, ahol int és cl egy adott halmaz belső pontjait, illetve lezártját jelöli.

Állítás. *$D(\mathbf{w})$ és $SD(\mathbf{w})$ konvex halmazok, és ha valamelyikük nem üres, akkor $\mathbf{w}$ a halmaz határán fekszik.*

Bizonyítás. A bizonyítást az egyszerűbb $SD(\mathbf{w})$ esettel kezdjük. Könnyen látható, hogy

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} \in SD(\mathbf{w}) \quad &\iff \quad \left|\frac{x_i}{x_j} - a_{ij}\right| < f_{ij}(\mathbf{w}) \quad \forall\, i \neq j \\
&\iff \quad \frac{x_i}{x_j} - a_{ij} < f_{ij}(\mathbf{w}), \ \ -\frac{x_i}{x_j} + a_{ij} < f_{ij}(\mathbf{w}) \ \ \forall\, i \neq j \\
&\iff \quad x_i + (-a_{ij} - f_{ij}(\mathbf{w}))x_j < 0, \ -x_i + (a_{ij} - f_{ij}(\mathbf{w}))x_j < 0, \\
&\qquad\qquad \forall\, i \neq j
\end{aligned}$$

Azon pontok halmaza, amelyek eleget tesznek az utóbbi szigorú egyenlőtlenségek rendszerének véges számú nyílt féltér metszete, tehát egy nyílt konvex halmaz. Ugyanakkor $\mathbf{x} = \mathbf{w}$ esetén a fenti lineáris egyenlőtlenségek egyenlőségként teljesülnek, így $\mathbf{w}$ a $SD(\mathbf{w})$ halmaz határán fekszik, már amennyiben az nem üres.

Hasonló átrendezések után azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{x} \in D(\mathbf{w}) \iff x_i + (-a_{ij} - f_{ij}(\mathbf{w}))x_j \leq 0, \ -x_i + (a_{ij} - f_{ij}(\mathbf{w}))x_j \leq 0 \ \ \forall\, i \neq j, \text{ és} \tag{8}$$

$$x_k + (-a_{k\ell} - f_{k\ell}(\mathbf{w}))x_\ell < 0, \ -x_k + (a_{k\ell} - f_{k\ell}(\mathbf{w}))x_\ell < 0 \text{ valamely } k \neq \ell \text{ esetén.} \tag{9}$$

Megmutatjuk, hogy $D(\mathbf{w})$ konvex halmaz. Legyen $\mathbf{y} \neq \mathbf{z} \in D(\mathbf{w})$, $0 < \lambda < 1$ és $\hat{\mathbf{x}} = \lambda\mathbf{y} + (1-\lambda)\mathbf{z}$. A (8) lineáris egyenlőtlenségei teljesülnek az $\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{y}$ és $\mathbf{z}$ pontokban.

Jelöljön $(\hat{k}, \hat{\ell}), \hat{k} \neq \hat{\ell}$ egy olyan indexpárt, amelyre (9) is teljesül az $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ pontban. Ekkor $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}$ esetén (9) szintén teljesül a $(\hat{k}, \hat{\ell})$ indexpárra. Ebből azonnal következik $\hat{\mathbf{x}} \in D(\mathbf{w})$ és $D(\mathbf{w})$ konvexitása.

Az $\mathbf{x} = \mathbf{w}$ pontra (8) egyenlőségként teljesül. Így $\mathbf{w} \notin D(\mathbf{w})$, de $\mathbf{w}$ a $D(\mathbf{w})$ egy határpontja, ha a halmaz nem üres. □

Állítás. *$E = E_L = E_I$ és $WE = WE_L = WE_I$.*

Bizonyítás. Nyilván

$$E = \{\mathbf{w} > \mathbf{0} \mid D(\mathbf{w}) = \emptyset\},$$

$$E_L = \{\mathbf{w} > \mathbf{0} \mid D(\mathbf{w}) \cap U(\mathbf{w}) = \emptyset\},$$

ahol $U(\mathbf{w})$ egy megfelelően kis környezet $\mathbf{w}$ körül, és

$$E_I = \{\mathbf{w} > \mathbf{0} \mid D(\mathbf{w}) \cap V_I(\mathbf{w}) = \emptyset\},$$

ahol $V_I(\mathbf{w}) = \{\mathbf{x} > \mathbf{0} \mid a_{ij} \leq \frac{x_i}{x_j} \leq \frac{w_i}{w_j}$ ha $a_{ij} \leq \frac{w_i}{w_j}, \forall i \neq j$, illetve $a_{ij} \geq \frac{x_i}{x_j} \geq \frac{w_i}{w_j}$ ha $a_{ij} \geq \frac{w_i}{w_j}, \forall i \neq j\}$ egy a $\mathbf{w}$ pontot tartalmazó konvex halmaz.

Ha $\mathbf{w} \in E$, akkor $D(\mathbf{w}) = \emptyset$, így $\mathbf{w} \in E_L$ és $\mathbf{w} \in E_I$, következésképpen $E \subseteq E_L$ és $E \subseteq E_I$.

Megmutatjuk, hogy $E_L \subseteq E$ is teljesül. Legyen $\mathbf{w} \in E_L$, és tegyük fel, hogy $\mathbf{w} \notin E$, azaz $D(\mathbf{w}) \neq \emptyset$. Legyen $\hat{\mathbf{x}} \in D(\mathbf{w})$. Mivel $\mathbf{w}$ a $D(\mathbf{w})$ konvex halmaz egy határpontja, ezért az $[\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{w})$ félig nyílt szakasz minden pontja a $D(\mathbf{w})$ halmazban fekszik. Azonban $[\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{w})$ azon pontjai, amelyek elég közel vannak a $\mathbf{w}$-hez, benne vannak $U(\mathbf{w})$-ben is. Ez ellentmond a $\mathbf{w} \in E_L$ feltevésnek. mivel $D(\mathbf{w}) \cap U(\mathbf{w}) \neq \emptyset$. Tehát $\mathbf{w} \in E$, így $E_L \subseteq E$, ebből pedig $E_L = E$ következik.

Az $E_I \subseteq E$ bizonyítása hasonló. Legyen $\mathbf{w} \in E_I$, és tegyük fel, hogy $\mathbf{w} \notin E$. Legyen $\hat{\mathbf{x}} \in D(\mathbf{w})$. Ha $a_{ij} = \frac{w_i}{w_j}$, akkor $a_{ij} = \frac{x_i}{x_j}$ minden $\mathbf{x} \in [\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{w}]$ esetén. Ha $a_{ij} < \frac{w_i}{w_j}$, akkor $a_{ij} < \frac{x_i}{x_j} < \frac{w_i}{w_j}$ a $\mathbf{w}$-hez elég közel fekvő $\mathbf{x} \in [\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{w}]$ pontok esetén. Hasonló teljesül $a_{ij} > \frac{w_i}{w_j}$ esetén, csak ellenkező előjellel. Ebből $[\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{w}) \cap D(\mathbf{w}) \cap V_I(\mathbf{w}) \neq \emptyset$ adódik, ez pedig újra ellentmondás. Következésképpen $E_I \subseteq E$, így $E_I = E$.

A $WE = WE_L = WE_I$ bizonyítása teljesen hasonló, egyszerűen az $SD(\mathbf{w})$ halmazt kell használni a $D(\mathbf{w})$ helyett. A bizonyítás hátralevő részét így az Olvasóra bízzuk. □

4 Hatékonysági teszt és hatékony domináló súlyvektor keresése lineáris programozás segítségével

Mint korábban is, legyen adott egy $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{i,j=1,\dots,n}$ páros összehasonlítás mátrix és egy $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)^\top$ pozitív súlyvektor. Először egy lineáris programozás feladatot állítunk fel annak ellenőrzésére, hogy vajon $\mathbf{w}$ hatékony megoldása-e az (1) feladatnak. Ezután, ha az derül ki, hogy $\mathbf{w}$ nem hatékony, megmutatjuk, hogy a lineáris programozási feladat optimális megoldása olyan hatékony vektor, amely belülről dominálja a $\mathbf{w}$ vektort.

Tekintsük a belső hatékonyság definíciójában szereplő (4) kettős egyenlőtlenségeket. Minden pozitív $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top$ súlyvektor esetén

$$a_{ij} \leq \frac{x_i}{x_j} \underset{(<)}{\leq} \frac{w_i}{w_j} \iff \left(\frac{a_{ij}x_j}{x_i} \leq 1, \ \frac{x_i}{x_j}\frac{w_j}{w_i} \underset{(<)}{\leq} 1 \right)$$
$$\iff \left(\frac{a_{ij}x_j}{x_i} \leq 1, \ \frac{x_i}{x_j}\frac{w_j}{w_i}\frac{1}{t_{ij}} \leq 1 \text{ valamely } \ 0 < t_{ij} \underset{(<)}{\leq} 1 \ \text{ esetén} \right), \tag{10}$$

és

$$a_{ij} \geq \frac{x_i}{x_j} \underset{(>)}{\geq} \frac{w_i}{w_j} \iff \left(\frac{x_i}{a_{ij}x_j} \leq 1, \ \frac{x_j}{x_i}\frac{w_i}{w_j} \underset{(>)}{\geq} 1 \right)$$
$$\iff \left(\frac{x_i}{a_{ij}x_j} \leq 1, \ \frac{x_j}{x_i}\frac{w_i}{w_j}\frac{1}{t_{ij}} \leq 1 \text{ valamely } \ 0 < t_{ij} \underset{(>)}{\geq} 1 \ \text{ esetén} \right), \tag{11}$$

és

$$a_{ij} = \frac{x_i}{x_j} \iff \frac{x_i}{a_{ij}x_j} = 1\,. \tag{12}$$

A fenti összefüggések alapján állítjuk össze a következő optimalizálási feladatot. Legyen

$$I = \left\{(i,j) \mid a_{ij} < \frac{w_i}{w_j}\right\},$$
$$J = \left\{(i,j) \mid a_{ij} = \frac{w_i}{w_j},\ i<j\right\}.$$

Ha az I indexhalmaz üres, akkor az $\mathbf{A}$ mátrix konzisztens. Ebben az esetben a $\mathbf{w}$ súlyvektor hatékony és $|J| = n(n-1)/2$. A továbbiakban feltesszük, hogy I nem üres. A J indexhalmazra vonatkozóan nem élünk hasonló feltevéssel.

$$\begin{aligned}
&\min \prod_{(i,j)\in I} t_{ij} \\
&\frac{x_j}{x_i}a_{ij} \le 1 \qquad \forall\,(i,j)\in I,\\
&\frac{x_i}{x_j}\frac{w_j}{w_i}\frac{1}{t_{ij}} \le 1 \qquad \forall\,(i,j)\in I,\\
&0 < t_{ij} \le 1 \qquad \forall\,(i,j)\in I,\\
&a_{ji}\frac{x_i}{x_j} = 1 \qquad \forall\,(i,j)\in J,\\
&x_1 = 1\,.
\end{aligned} \tag{13}$$

A feladat változói $x_i > 0$, $1 \le i \le n$ és t_{ij}, $(i,j) \in I$.

Állítás. *A (13) optimalizálási feladat optimumértéke legfeljebb 1, és pontosan akkor 1, ha a $\mathbf{w}$ súlyvektor az (1) többcélú optimalizálási feladat hatékony megoldása. Jelölje $(\mathbf{x}^*, \mathbf{t}^*) \in I\!R_+^{n+|I|}$ a (13) feladat optimális megoldását. Ha $\mathbf{w}$ nem hatékony, akkor az $\mathbf{x}^*$ súlyvektor hatékony és belülről dominálja a $\mathbf{w}$ vektort.*

Bizonyítás. A (10)–(12) feltételeket egyszerű átrendezéssel kaphatjuk meg. Nyilvánvaló, hogy (10) $\frac{x_i}{x_j}\frac{w_j}{w_i} \le 1$ akkor és csak akkor teljesül, ha létezik olyan $0 < t_{ij} \le 1$ skalár, hogy $\frac{x_i}{x_j}\frac{w_j}{w_i}\frac{1}{t_{ij}} \le 1$. Ráadásul a szigorú egyenlőtlenségek egyszerre teljesülnek a két oldalon. A (11) indoklása hasonló, a (12) pedig evidens.

A (13) feladatban csak az I és J halmazok indexpárjaihoz tartozó feltételek jelennek meg. A reciprocitási tulajdonság miatt a többi hasonló feltétel redundáns. Először azt mutatjuk meg, hogy a (13) feladat megengedett halmaza nem üres és kompakt. Mivel a célfüggvény folytonos, azt kapjuk, hogy a (13) feladatnak van véges optimumértéke és optimális megoldása.

A (13) feladatnak van megengedett megoldása, például $\mathbf{x} = \frac{1}{w_1}\mathbf{w}$ és $t_{ij} = 1$, $\forall\,(i,j) \in I$ teljesíti a feltételeket. Az $x_1 = 1$ normalizálási feltétel miatt a többi x_i, $i \ne 1$ változónak pozitív alsó és felső korlátja van a megengedett tartományon. Ezt úgy kapjuk, hogy minden $i \neq 1$ esetén $(i,1)$ és $(1,i)$ közül egy mindenképpen az $I \cup J$ indexhalmaz eleme. A negyedik feltétel rögzíti x_i értékét, az első és második feltételből pedig pozitív alsó és felső korlát számolható ki rá vonatkozóan. Mivel az $\mathbf{x}$ komponensei pozitív alsó és felső korláttal rendelkeznek, a második feltételből pozitív alsó korlátok határozhatók meg a $t_{ij}, (i,j) \in I$ változókra is.

A célfüggvény $\mathbf{w}$ belső hatékonysága tesztelésére szolgál. Értéke nem lehet nagyobb, mint 1. Ha értéke kisebb, mint 1, akkor létezik olyan (i_0, j_0) indexpár, amelyre $\frac{x_{i_0}}{x_{j_0}} \frac{w_{j_0}}{w_{i_0}} \leq t_{i_0 j_0} < 1$, így $\frac{x_{i_0}}{x_{j_0}} < \frac{w_{i_0}}{w_{j_0}}$ teljesül. Ebből, valamint a (10) és (13) ekvivalens alakjaiból kapjuk, hogy $\mathbf{x}$ belülről dominálja a $\mathbf{w}$ vektort. Fordítva, tegyük fel, hogy $\mathbf{x}$ belülről dominálja a $\mathbf{w}$ vektort. Könnyen látható, hogy az $\mathbf{x}$ normalizált vektor és a $t_{ij} = \frac{x_i}{x_j} \frac{w_j}{w_i}$, $(i,j) \in I$ komponensek (13) megengedett megoldását alkotják. Ráadásul, minden olyan (i_0, j_0) indexpárra, amelyre a belső dominancia miatt $\frac{x_{i_0}}{x_{j_0}} < \frac{w_{i_0}}{w_{j_0}}$ teljesül, fennáll $t_{i_0 j_0} < 1$ is. Ezért a tekintett megengedett megoldás célfüggvényértéke kisebb, mint 1, tehát az optimumérték szintén kisebb, mint 1.

Azzal az esettel kell még foglalkoznunk, amikor a $\mathbf{w}$ vektorról az derül ki, hogy nem hatékony. Nyilvánvaló, hogy a (13) feladat $(\mathbf{x}^*, \mathbf{t}^*)$ optimális megoldásának $\mathbf{x}$-része belülről dominálja a $\mathbf{w}$ vektort, és $t^*_{ij} = \frac{x^*_i}{x^*_j} \frac{w_j}{w_i}$ minden $(i,j) \in I$ esetén. Tegyük fel, hogy $\mathbf{x}^*$ nem hatékony. Ekkor van olyan $\bar{\mathbf{x}}$ vektor, amely belülről dominálja őt. Ekkor $a_{ij} = \frac{\bar{x}_i}{\bar{x}_j}$, $\forall (i,j) \in J$, továbbá $a_{ij} \leq \frac{\bar{x}_i}{\bar{x}_j} \leq \frac{x^*_i}{x_j{}^*} \leq \frac{w_i}{w_j}$, $\forall (i,j) \in I$ és létezik legalább egy olyan $(i_0, j_0) \in I$ indexpár, amelynél a második egyenlőtlenség szigorú egyenlőtlenségként teljesül. Legyen $\bar{t}_{ij} = \frac{\bar{x}_i}{\bar{x}_j} \frac{w_j}{w_i}$, $\forall (i,j) \in I$. Könnyen látható, hogy a normalizálás után $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{t}})$ a (13) megengedett megoldása. Azonban most $\bar{t}_{ij} \leq t^*_{ij}$, $\forall (i,j) \in I$ és $\bar{t}_{i_0 j_0} < t^*_{i_0 j_0}$. Ebből azt kapjuk, hogy a célfüggvény értéke az $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{t}})$ pontban kisebb, mint az $(\mathbf{x}^*, \mathbf{t}^*)$ pontban. Ez ellentmond annak, hogy $(\mathbf{x}^*, \mathbf{t}^*)$ a (13) feladat optimális megoldása. Következőleg, $\mathbf{x}^*$ hatékony megoldás. $\square$

Bár (13) egy nemlineáris optimalizálási feladat, egy ekvivalens lineáris optimalizálási feladattá alakítható át. Legyen $y_i = \log x_i$, $v_i = \log w_i$, $1 \leq i \leq n$; $s_{ij} = -\log t_{ij}$, $(i,j) \in I$; és $b_{ij} = \log a_{ij}$, $1 \leq i,j \leq n$. A szigorúan monoton növekvő logaritmus függvényt alkalmazva a célfüggvényre és a feltételek két oldalára, a következő ekvivalens lineáris optimalizálási feladatot kapjuk:

$$
\begin{aligned}
\min \sum_{(i,j)\in I} -s_{ij} & & \\
y_j - y_i &\leq -b_{ij} & \forall\, (i,j) \in I, \\
y_i - y_j + s_{ij} &\leq v_i - v_j & \forall\, (i,j) \in I, \\
y_i - y_j &= b_{ij} & \forall\, (i,j) \in J, \\
s_{ij} &\geq 0 & \forall\, (i,j) \in I, \\
y_1 &= 0\,. &
\end{aligned}
\tag{14}
$$

A feladat változói y_i, $1 \leq i \leq n$ és $s_{ij} \geq 0$, $(i,j) \in I$.

Tétel. *A (14) lineáris programozási feladat optimumértéke legfeljebb 0, és pontosan akkor 0, ha a* $\mathbf{w}$ *súlyvektor az (1) többcélú optimalizálási feladat hatékony megoldása. Jelölje* $(\mathbf{y}^*, \mathbf{s}^*) \in \mathbb{R}^{n+|I|}$ *a (14) feladat optimális megoldását. Ha* $\mathbf{w}$ *nem hatékony, akkor az* $\exp(\mathbf{y}^*)$ *súlyvektor hatékony és belülről dominálja a* $\mathbf{w}$ *vektort.*

A (14) lineáris programozási feladatot a Pairwise Comparison Matrix Calculator programunkban implementáltuk. A `pcmc.online` címen elérhető, böngészőből közvetlenül futtatható környezetben szabadon tesztelhető a súlyvektorok hatékonysága, és ha az adott súlyvektor nem hatékony, akkor egy őt belülről domináló hatékony súlyvektor is találtatik.

5 Gyenge hatékonysági teszt és gyengén hatékony domináló súlyvektor keresése lineáris programozás segítségével

A gyenge hatékonyság ellenőrzése és egy domináló gyengén hatékony domináló vektor keresése a hatékony esethez hasonlóan történik. Tekintsünk egy $\mathbf{w} > \mathbf{0}$ vektort. Nyilván ha $J \neq \emptyset$, azaz ha $f_{ij}(\mathbf{w}) = 0$ valamely $i \neq j$ indexpár esetén, akkor $\mathbf{w} \in WE$, így máris készen vagyunk a gyenge hatékonyság ellenőrzésével.

Most a $J = \emptyset$ esetet vizsgáljuk meg. Ekkor $|I| = n(n-1)/2$. Íme néhány ekvivalens alak az erős nem-hatékonyságra vonatkozóan. Minden $(i,j) \in I$ esetén

$$\begin{aligned} a_{ij} \leq \frac{x_i}{x_j} < \frac{w_i}{w_j} \quad &\Longleftrightarrow \quad \left(\frac{a_{ij}x_j}{x_i} \leq 1, \ \frac{x_i}{x_j}\frac{w_j}{w_i} < 1\right) \\ &\Longleftrightarrow \quad \left(\frac{a_{ij}x_j}{x_i} \leq 1, \ \frac{x_i}{x_j}\frac{w_j}{w_i}\frac{1}{t} \leq 1, \ 0 < t < 1\right). \end{aligned} \tag{15}$$

A (15) utolsó alakja alapján felállíthatjuk a (13) feladat egy módosítását is, megfelelően adaptálva azt a gyenge hatékonyság esetére.

$$\begin{aligned} &\min t \\ &\frac{x_j}{x_i} a_{ij} \leq 1 \qquad \forall\, (i,j) \in I, \\ &\frac{x_i}{x_j}\frac{w_j}{w_i}\frac{1}{t} \leq 1 \qquad \forall\, (i,j) \in I, \\ &0 < t \leq 1 \\ &x_1 = 1\,. \end{aligned} \tag{16}$$

A feladat változói $x_i > 0$, $1 \leq i \leq n$ és t.

Állítás. *A (16) optimalizálási feladat optimumértéke legfeljebb 1, és pontosan akkor 1, ha a* $\mathbf{w}$ *súlyvektor az (1) többcélú optimalizálási feladat gyengén hatékony megoldása. Jelölje* $(\mathbf{x}^*, t^*) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$ *a (16) optimális megoldását.*

Ha a $\mathbf{w}$ *erősen nem-hatékony, akkor az* $\mathbf{x}^*$ *súlyvektor gyengén hatékony és szigorúan belülről dominálja a* $\mathbf{w}$ *vektort.*

Bizonyítás. Az állítások az előző fejezet állításának bizonyításához hasonlóan igazolhatók. Az ottani indoklást használva itt is, könnyen megmutatható, hogy (16) megengedett halmaza nem üres, valamint pozitív alsó és felső korlát határozható meg minden változóra. Tehát a (16) feladatnak szintén van optimális megoldása és egy véges $t^* \leq 1$ optimumértéke.

Ha $t^* < 1$, akkor $\frac{x_i}{x_j}\frac{w_j}{w_i} \leq t^* < 1$ minden $i \neq j$ esetén, következésképpen $\mathbf{x}$ belülről erősen dominálja a $\mathbf{w}$ vektort. Fordítva, tegyük fel, hogy $\mathbf{x}$ belülről erősen dominálja a $\mathbf{w}$ vektort. Könnyen látható, hogy a normalizált $\mathbf{x}$ vektor a $t = \max_{i \neq j} \frac{x_i}{x_j}\frac{w_j}{w_i}$ skalárral kiegészítve a (16) egy megengedett megoldását alkotja. Nyilván ennél a megengedett megoldásnál $0 < t < 1$, ezért az optimumértékre is $t^* < 1$ teljesül.

Tekintsük végül azt az esetet, amikor a $\mathbf{w}$ vektorról az derül ki hogy erősen nem-hatékony, azaz erősen dominált. A (16) feladat $(\mathbf{x}^*, \mathbf{t}^*)$ optimális megoldásának $\mathbf{x}$-része belülről erősen dominálja a $\mathbf{w}$ vektort és $t^* = \max_{i \neq j} \frac{x_i^*}{x_j^*}\frac{w_j}{w_i}$. Tegyük fel, hogy $\mathbf{x}^*$ erősen nem-hatékony. Ekkor őt belülről erősen dominálja egy $\bar{\mathbf{x}}$ vektor. Nyilván $a_{ij} \leq \frac{\bar{x}_i}{\bar{x}_j} < \frac{x_i^*}{x_j{}^*} \leq \frac{w_i}{w_j}$ minden $i \neq j$ esetén. Legyen $\bar{t} = \max_{i \neq j} \frac{\bar{x}_i}{\bar{x}_j}\frac{w_j}{w_i}$. Könnyen látható, hogy a megfelelő normalizálás után kapott $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{t}})$ vektor a (16) feladat megengedett megoldása. Nyilván $\bar{t} < t^*$, ez pedig ellentmond $(\mathbf{x}^*, t^*)$ optimalitásának. Következésképpen $\mathbf{x}^*$ gyengén hatékony megoldás. □

Ugyanazt a logaritmizálási ötletet alkalmazva, amellyel a (14) feladatot kaptuk a nemlineáris (13) feladatból, (16) is lineáris alakra transzformálható. A korábbi jelöléseket használva és bevezetve az $s = -\log t$ változót, kapjuk a következő ekvivalens lineáris programozási feladatot:

$$\begin{aligned} \min\, & -s \\ y_j - y_i &\leq -b_{ij} & \forall (i,j) \in I, \\ y_i - y_j + s &\leq v_i - v_j & \forall (i,j) \in I, \\ s &\geq 0\,, \\ y_1 &= 0\,. \end{aligned} \tag{17}$$

A változók y_i, $1 \leq i \leq n$ és s.

Tétel. *A (17) lineáris programozási feladat optimumértéke legfeljebb 0, és pontosan akkor 0, ha a* $\mathbf{w}$ *súlyvektor az (1) többcélú optimalizálási feladat gyengén hatékony megoldása. Jelölje* $(\mathbf{y}^*, s) \in \mathbb{R}^{n+1}$ *a (17) optimális megoldását. Ha* $\mathbf{w}$ *erősen nem-hatékony, akkor az* $\exp(\mathbf{y}^*)$ *súlyvektor gyengén hatékony és belülről szigorúan dominálja a* $\mathbf{w}$ *vektort.*

Megjegyzés. Ha $\mathbf{w}$ az (1) többcélú optimalizálási feladat egy erősen nem-hatékony megoldása, akkor a fenti tétel alapján kapott $\exp(\mathbf{y}^*)$ súlyvektor gyengén hatékony, de nem feltétlenül hatékony. Az előző fejezet (14) feladata segítségével azonban tesztelhetjük, hogy a kapott vektor hatékony-e. Ha nem az, akkor a (14) feladat talál egy belülről domináló hatékony megoldást, amely egyúttal belülről és szigorúan dominálja a kiinduló, erősen nem-hatékony $\mathbf{w}$ súlyvektort is.

A Pairwise Comparison Matrix Calculator (`pcmc.online`) a gyenge hatékonyságot is vizsgálja. Ha a megadott súlyvektor nem gyengén hatékony, akkor a program keres egy őt belülről és erősen domináló hatékony súlyvektort.

6 Összefoglalás és nyitott kérdések

A páros összehasonlítás mátrixból számolt súlyvektorok hatékonyságának vizsgálatával Blanquero, Carrizosa és Conde [4] foglalkozott először. Az általuk a hatékonyság tesztelésére javasolt lineáris programozási feladatokból kiindulva olyan lineáris programozási feladatokat konstruáltunk, amely nemcsak tesztelésre alkalmas, hanem ha a súlyvektor nem (gyengén) hatékony, akkor egy őt (erősen) domináló hatékony súlyvektort is talál.

A hatékonyság gráfelméleti eszközökkel is jellemezhető, amelynek alapjait szintén Blanquero, Carrizosa és Conde [4] dolgozta ki. Mivel a cikkünkben kidolgozott lineáris programozási feladatokhoz nem volt szükség gráfelméleti megközelítésre, a részleteket sem közöltük. Kidolgozásra vár a lineáris programozási és a gráfelméleti módszerek ekvivalenciájának megértése, amelytől egyrészt a domináló hatékony súlyvektorok halmazának előállítása, másrészt a sajátvektor hatékonyságának jellemzése remélhető. Jelenleg csak néhány nagyon speciális esetben sikerült bizonyítani, hogy a sajátvektor hatékony: ha a páros összehasonlítás mátrix egy [1] vagy két [2] elemének megváltoztatásával konzisztenssé tehető. Szintén nagyon speciális az a mátrixosztály [5], amely sajátvektora sosem hatékony.

Folyamatban van a 4×4-es páros összehasonlítás mátrixok sajátvektorának hatékonyságának numerikus vizsgálata is, amelyből ötletet vagy sejtést meríthetünk. Jelenleg még az sem világos, hogy mennyire messze vagyunk az általános eset megértésétől.

Köszönetnyilvánítás

A kutatást az OTKA K 111797 támogatta. Bozóki Sándor köszöni az MTA Bolyai János Kutatási Ösztöndíj (BO/00154/16/3) támogatását.

Irodalom

1. Ábele-Nagy, K., Bozóki, S. (2016) Efficiency analysis of simple perturbed pairwise comparison matrices. *Fundamenta Informaticae*, 144(3-4):279–289.
2. Ábele-Nagy, K., Bozóki, S., Rebák, Ö. ($\geq$ 2017) Efficiency analysis of double perturbed pairwise comparison matrices. *Journal of the Operational Research Society* (elfogadva), http://arxiv.org/abs/1602.07137.
3. Bajwa, G., Choo, E. U., Wedley, W. C. (2008) Effectiveness analysis of deriving priority vectors from reciprocal pairwise comparison matrices. *Asia-Pacific Journal of Operational Research*, 25(3):279–299.
4. Blanquero, R., Carrizosa, E., Conde, E. (2006) Inferring efficient weights from pairwise comparison matrices. *Mathematical Methods of Operations Research*, 64(2):271–284.
5. Bozóki, S. (2014) Inefficient weights from pairwise comparison matrices with arbitrarily small inconsistency. *Optimization: A Journal of Mathematical Programming and Operations Research*, 63(12):1893–1901.
6. Bozóki, S., Fülöp, J. ($\geq$2017) Efficient weight vectors from pairwise comparison matrices. *European Journal of Operational Research* (elfogadva), https://arxiv.org/abs/1602.03311.
7. Chankong, V., Haimes, Y. Y. (1983) *Multiobjective Decision Making: Theory and Methodology.* Elsevier Science Publishing, New York.
8. Conde, E., Pérez, M. d. l. P. R. (2010) A linear optimization problem to derive relative weights using an interval judgement matrix. *European Journal of Operational Research*, 201(2):537–544.
9. Crawford, G., Williams, C. (1980) Analysis of subjective judgment matrices. The Rand Corporation, Office of the Secretary of Defense USA, R-2572-AF.
10. Crawford, G., Williams, C. (1985) A note on the analysis of subjective judgment matrices. *Journal of Mathematical Psychology*, 29(4):387–405.
11. Csató, L. (2013): Páros összehasonlításokon alapuló rangsorolási módszerek, *Szigma*, 44(3-4):155–198.
12. Duleba, Sz. (2009): Az AHP módszer egy lehetséges alkalmazása trendek előrejelzésére, *Szigma*, 40(3-4):157–170.
13. de Graan, J. G. (1980) Extensions of the multiple criteria analysis method of T.L. Saaty. Presented at EURO IV Conference, Cambridge, July 22-25, 1980
14. Kéri, G. (2005): Kritériumok páros összeasonlítás mátrixokra, *Szigma*, 36(3-4):139–148.
15. Komáromi, É. (2013): A Kullback-Leibler relatív entrópia függvény alkalmazása páros összehasonlítás mátrix egy prioritásvektora meghatározására, *Szigma*, 44(1-2):1–19.
16. Poesz, A. (2017) Inkonzisztencia a döntéshozatalban, PhD értekezés, Budapesti Corvinus Egyetem, Operációkutatás és Aktuáriustudományok Tanszék.
17. Rapcsák, T. (2007) Többszempontú döntési problémák, egyetemi jegyzet, Budapesti Corvinus Egyetem http://www.oplab.sztaki.hu/tanszek/download/I_Tobbsz_dont_modsz.pdf.
18. Saaty, T. L. (1977) A scaling method for priorities in hierarchical structures. *Journal of Mathematical Psychology* 15(3):234–281.
19. Temesi, J. (1991): Szubjektív információk kezelése a többtényezős problémák megoldásában, *Szigma*, 22:53–62.

EFFICIENCY OF WEIGHT VECTORS DERIVED FROM PAIRWISE COMPARISON MATRICES

Multi-criteria decision models and ranking methods often apply pairwise comparison matrices in order to determine a weight vector. A weight vector is called efficient if no other weight vector approximates the elements of the pairwise comparison matrix such without larger errors, but with strictly smaller error in at least one position. A weight vector is called weakly efficient if the errors cannot be improved in all non-diagonal positions. Some weight vectors, calculated by, e.g., the least squares or logarithmic least squares methods, are always efficient. However, the often applied eigenvector can be inefficient. We develop linear programs to test whether an arbitrary weight vector is (weakly) efficient, and, if it is not, a dominating efficient weight vector is found. A challenging open problem, on finding sufficient and necessary conditions for the efficiency of the eigenvector, is also proposed.