

KÖSZÖNTŐ KOMLÓSI SÁNDOR 70 ÉVES

Komlói Sándor 1976 óta kollegánk a Pécsi Tudományegyetem Közgazdaságtudományi Karán, nagy örömünkre, intézményünkönél tölti be 70-ik életévét. Az itt eltöltött több mint 40 év nem csak időben hosszú, munkája sokoldalúan hozzájárult a kar hírnevének, teljesítményének növeléséhez. Előző munkahelyéről igényes munkakultúrát hozott, a Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézetében eltöltött négy év tapasztalataiból kollegái is hasznosíthattak, a funkcionálanalízis, a Neumann-algebra területén megírt doktori disszertációjának tartalma jól beilleszkedett az akkor még jóval matematizáltabb közgazdaságtudományi karok kutatási tevékenységébe. A közgazdaságtudományi karok akkori népszerű tudományos kutatási területei közé tartozott az operációkutatás, optimalizálás, matematikai programozás és a döntéstudományok, mely területek szinte mindegyikében figyelemre méltót alkotott. A pécsi évek eredményeihez tartozik már az 1983-as Mathematical Programming-ban megjelent cikke a nem differenciálható pszeudó-konvex függvényekről, és megtisztelő nemzetközi visszhangot váltott ki mind az 1993-ban a European Journal of Operational Research-ben a pszeudó-linearis függvények első- és másodrendű karakterizálásáról, mind az 1995-ben a Journal of Optimization Theory and Applications-ben az általánosított monotonitásról és konvexitásról megírt tanulmánya.

Tudományszervező munkája ugyanilyen sokoldalú. Ki ne emlékezne karunk első nemzetközi termelés menedzsment konferenciájára 1988-ban, amikor a résztvevőket oly sok szeretettel látta vendégül zengővárkonyi otthonában. Ugyanilyen segítőkész volt kutatótársaival szemben is, önzetlenül segítve mindenkit, aki tanácsot kért tőle. Két jelentős tudományos társaságnak is alapító tagja. A Magyar Operációkutatási Társaságnak később alelnöke, a Magyar Gazdaságmodellezési Társaságnak pedig segítőkész tagja, melyért Krekó Béla Díjat is kapott, a MOK pedig Egerváry Jenő Emlékdíjjal ismerte el a magyar operációkutatási eredményekhez való hozzájárulását. Viszont talán soha nem volt annyira látványos, de mégis nagyon jelentős az a munka, melyet a Sigma gazdaságmatematikai folyóirat szerkesztőbizottságában végzett. Szakmai ismeretei nélkülözhetetlenek voltak a szerkesztői munkában, és segítsége mindig hozzájárult a lap szentenderjeinek emeléséhez.

Mivel is köszönhetnénk meg Komlói Sándornak a tudomány teljesítményéhez való hozzájárulását, ha nem azzal, hogy kollegái, barátai összefogtak a Sigma kétkötetnyi különkiadásában, hogy tisztelegjenek teljesítménye előtt.

Vörös József, vendégszerkesztő

Pécs, 2017 ősz

PÁROS ÖSSZEHAISONLÍTÁS MÁTRIXOKBÓL SZÁMOLT SÚLYVEKTOROK HATÉKONYSÁGA¹

BOZÓKI SÁNDOR – FÜLÖP JÁNOS
MTA SZTAKI és BCE – MTA SZTAKI és Óbudai Egyetem

A többkritériumú döntéshozatal módszereiben gyakran alkalmaznak páros összehasonlítás mátrixokat, amelyekből megfelelő módszerekkel az összehasonlításokban részt vevő alternatívákra vonatkozóan egy fontossági súlyvektor nyerhető ki. A vektoroptimalizálás terminológiáját alkalmazva egy súlyvektor hatékony, ha nem létezik egy másik olyan súlyvektor, amely minden komponensben legalább olyan jól közelít, sőt legalább egy pozícióban szigorúan jobban. Egy súlyvektor gyengén hatékony, ha a páronkénti hányadosokkal való közelítés nem javítható meg egyszerre minden diagonálison kívüli pozícióban. Megmutatjuk, hogy a sajátvektor módszer során alkalmazott, a legnagyobb sajátértékhez tartozó sajátvektor mindig gyengén hatékony, viszont numerikus példákat mutatunk arra is, hogy lehet nem hatékony is. Lineáris programozási feladatokat vezetünk be annak ellenőrzésére, hogy egy adott súlyvektor (gyengén) hatékony-e, és ha nem az, akkor egy (erősen) domináló hatékony súlyvektort is kapunk. Kitérünk a `pcmc.online` helyen elérhető, böngészőben futtatható Pairwise Comparison Matrix Calculator alkalmazásra is, amelyben az itt bemutatott módszereket is implementáltuk.

Kulcsszavak: többszemponútú döntési modellek, páros összehasonlítás mátrix, hatékonyság, Pareto-optimalitás, lineáris programozás

1 Bevezetés

1.1 Páros összehasonlítás mátrixok

A többszemponútú döntési feladatok – ld. pl. Temesi József [19] – egyik kulcs lépése az egyes szempontok fontossági súlyainak számszerűsítése. A gyakorlati feladatokban ugyanis ritka az olyan döntési alternatíva, amely minden szempontból jobb a többinél. A szempontok súlyozása nélkül legfeljebb szűkíteni lehet az alternatívák körét – például azon alternatívák kizárásával, amelyeknél van (minden szerint legalább olyan jó, és legalább egy szempont szerint szigorúan) jobb alternatíva. A hatékonyság (Pareto-optimalitás) így már a döntési folyamat első fázisában is megjelenik, de a dolgozatunk központi témája a döntési folyamat egy későbbi fázisában felmerülő hatékonyság, a súlyvektor hatékonysága lesz.

Ha a döntéshozó nem tudja közvetlenül megadni a szempontsúlyokat (pl. öt szempont esetén 35%, 15%, 20%, 5%, 25%), akkor jól alkalmazható

¹Beérkezett: 2017. március 11. E-mail: bozoki.sandor@sztaki.mta.hu, fulop.janos@sztaki.mta.hu.

egyszerűbb kérdések sorozatán keresztül felmérni a preferenciákat. Ezt az alap gondolatot fejlesztette tovább Saaty 1977-ben [18]. Modelljében a páronkénti összehasonlítások több évszázados hagyományára és gyakorlatára építve a döntéshozót egyszerre egy kérdéssel szembesíti: a két adott szempont közül melyik a fontosabb és hányszor. Hasonlóan, a döntési alternatívák értékelése, pontozása során egy adott szempont szerint melyik alternatíva erősebb, és az hányszor annyi pontot érdemel, mint a gyengébb. Az $n \geq 3$ elem (szempont, alternatíva, vagy akár szavazóerő) összehasonlításából az \mathbf{A} $n \times n$ -es páros összehasonlítás mátrixot kapjuk, amelynek minden eleme pozitív, $a_{ij} = 1/a_{ji}$ minden $1 \leq i, j \leq n$ esetén, speciálisan a főátlóban 1-esek állnak. Abban a leginkább elméleti esetben, amikor fennáll a kardinális tranzitivitás, azaz $a_{ij}a_{jk} = a_{ik}$ minden i, j, k indexhármásra, a páros összehasonlítás mátrixot konzisztensnek, különben pedig inkonzisztensnek nevezzük.

Egy, a döntéshozó által kitöltött $A = [a_{ij}]$ páros összehasonlítás mátrix ismeretében megfogalmazható a súlyvektor számításának alapfeladata: keressük azt a

$$\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)^\top \in \mathbb{R}_+^n$$

súlyvektort, amelyre teljesül, hogy a w_i/w_j arányok jól közelítik a döntéshozó által megadott a_{ij} értékeket. Attól függően, hogy hogyan specifikáljuk a jól közelítést, számos súlyozási módszer adódik. Saaty [18] az \mathbf{A} mátrix legnagyobb sajátértékéhez tartozó jobb oldali sajátvektort javasolta, de a $\min_{i,j} (\log a_{ij} - \log(w_i/w_j))^2$, azaz a logaritmikus legkisebb négyzetes cél-függvényt [9,10,13] minimalizáló súlyvektor is a legnépszerűbb és a legtöbbet kutató módszerek közé sorolható. További súlyozási módszerek ismertetése található Rapcsák Tamás jegyzetének [17] I.2.2. alfejezetében, valamint Komáromi Éva cikkében [15]. A súlyozási módszereket számos alkalommal és több szempont szerint összehasonlították – mi csak Bajwa, Choo és Wedley [3] tanulmányát említjük –, de a szakmai vita arról, hogy melyik módszer tekinthető a legjobbnak, ma is tart.

A páros összehasonlítás mátrixok inkonzisztenciájának mérése szintén aktív kutatási téma, a hazai eredmények közül Kéri Gerzson gráfelméleti megközelítésére [14] és Poesz Attila doktori értekezésére [16] hívjuk fel az Olvasó figyelmét.

A páros összehasonlítás mátrixok hagyományos alkalmazási területe – a már említett többszempontú döntési modellezés – mellett megemlítjük Duleba Szabolcs [12] munkáját trendek előrejelzésére, és Csató László részletes áttekintését [11] a rangsorolási problémákra vonatkozóan.

Dolgozatunk 2. fejezetében a – páros összehasonlítás mátrixból számolt – súlyvektor hatékonyságának alapfogalmait ismertetjük. Mivel ebben a témában még nincs magyar nyelvű tanulmány, a szokásosnál hosszabb terjedelmet szemléltető számpéldákkal ellensúlyozzuk. Az ezt követő fejezetekben a saját eredményeinket foglaljuk össze, különös tekintettel a [6] publikációban szereplőkre. A hatékonyság és a gyenge hatékonyság három definíciójának ekvivalenciáját a 3. fejezetben mutatjuk meg.

2 A súlyvektor hatékonysága

Ahogy a bevezetőben említettük, a páros összehasonlítás mátrixból számolt súlyvektorok számítási módjaira számos javaslat, elméleti és számítási eredmény született Saaty 1977-es cikkét követően. Tudománytörténeti szempontból is érdekesnek és meglepőnek tartjuk, hogy közel 30 évnek kellett eltelnie ahhoz, hogy a súlyvektor hatékonyságának kérdése felmerüljön. Jelenlegi ismereteink szerint Blanquero, Carrizosa és Conde [4] foglalkozott először e problémával. Adott $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{i,j=1,\dots,n}$ páros összehasonlítás mátrix esetén a súlyvektor számítása egy olyan többcélú optimalizálási feladat, amelynek célfüggvényei a minimalizálandó $|x_i/x_j - a_{ij}|$, $1 \leq i \neq j \leq n$ függvények, összesen $n^2 - n$ darab.

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_{++}^n} \left| \frac{x_i}{x_j} - a_{ij} \right|_{1 \leq i \neq j \leq n}. \quad (1)$$

Legyen $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)^\top$ egy pozitív súlyvektor.

Definíció. A \mathbf{w} súlyvektor *hatékony*, ha nem létezik olyan $\mathbf{w}' = (w'_1, w'_2, \dots, w'_n)^\top$ súlyvektor, hogy

$$\left| a_{ij} - \frac{w'_i}{w'_j} \right| \leq \left| a_{ij} - \frac{w_i}{w_j} \right| \quad \text{minden } 1 \leq i, j \leq n \text{ esetén, és} \quad (2)$$

$$\left| a_{k\ell} - \frac{w'_k}{w'_\ell} \right| < \left| a_{k\ell} - \frac{w_k}{w_\ell} \right| \quad \text{valamely } 1 \leq k, \ell \leq n \text{ esetén.} \quad (3)$$

Ha a \mathbf{w} súlyvektor nem hatékony, azaz létezik egy \mathbf{w}' súlyvektor a (2)–(3) tulajdonságokkal, akkor azt mondjuk, hogy \mathbf{w}' dominálja \mathbf{w} -t. A dominancia tranzitív reláció.

Egy hatékony súlyvektort tehát nem lehet dominálni, azaz megjavítani úgy, hogy legalább egy pozícióban jobban közelítse a döntéshozó által megadott értéket, miközben egyetlen más pozícióban sem keletkezik rosszabb közelítés.

A definícióból következik, hogy egy súlyvektor hatékonysága nem függ a normalizálástól, azaz a \mathbf{w} és a $c\mathbf{w}$ súlyvektorok egyszerre hatékonyak vagy nem hatékonyak bármely $c > 0$ esetén. Ennek az észrevételnek a későbbiekben szerepe lesz, mert egy nem hatékony súlyvektor és egy őt domináló súlyvektor összehasonlítását nem feltétlenül könnyíti meg, ha mindketten 1-re normalizáltak, azaz a komponensek összege 1.

Példa. Tekintsük az alábbi 4×4 -es páros összehasonlítás mátrixot és annak \mathbf{w} sajátvektorát:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 9 \\ 1/2 & 1 & 2 & 8 \\ 1/7 & 1/2 & 1 & 7 \\ 1/9 & 1/8 & 1/7 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0.562646 \\ 0.260697 \\ 0.141195 \\ 0.035463 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}' = \begin{pmatrix} 0.562646 \\ \mathbf{0.281323} \\ 0.141195 \\ 0.035463 \end{pmatrix}.$$

Ahhoz, hogy a \mathbf{w} sajátvektor nem hatékonyságára rámutassunk, elegendő mutatni egy öt domináló \mathbf{w}' súlyvektort. Esetünkben legyen $w'_2 := w_1/2 = 0.281323$, $w'_i := w_i$, $i = 1, 3, 4$. A \mathbf{w}' súlyvektor ugyan nem 1-re normalizált, de a korábbiak szerint ennek nincs jelentősége.

A \mathbf{w} sajátvektorból, valamint a \mathbf{w}' súlyvektorból képzett

$$\begin{bmatrix} \frac{w_i}{w_j} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2.1582 & 3.9849 & 15.866 \\ 0.4633 & 1 & 1.8464 & 7.3513 \\ 0.2509 & 0.5416 & 1 & 3.9815 \\ 0.0630 & 0.1360 & 0.2512 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \frac{w'_i}{w'_j} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{2} & 3.9849 & 15.866 \\ \mathbf{0.5} & 1 & \mathbf{1.9924} & \mathbf{7.9329} \\ 0.2509 & \mathbf{0.5019} & 1 & 3.9815 \\ 0.0630 & \mathbf{0.1261} & 0.2512 & 1 \end{pmatrix},$$

konzisztens páros összehasonlítás mátrixok mutatják, hogy a (2) egyenlőtlenség minden $1 \leq i, j \leq 4$ indexpárra teljesül, a (3) szigorú egyenlőtlenség pedig a $(k, \ell) \in \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (4, 2)\}$ indexpárokra. A $k = 1, \ell = 2$ indexpár esetén például $|\frac{w'_1}{w'_2} - a_{12}| = |2 - 2| = 0 < |\frac{w_1}{w_2} - a_{12}| = |2.1582 - 2| = 0.1582$.

Megjegyezzük, hogy elsőként Blanquero, Carrizosa és Conde [4, 3. fejezet] mutatott példát arra, hogy a sajátvektor nem hatékony. Szintén ők definiálták a súlyvektor lokális hatékonyságát az alábbiak szerint.

Definíció. A \mathbf{w} súlyvektor lokálisan hatékony, ha van olyan $V(\mathbf{w})$ környezet, amelyben egyetlen $\mathbf{w}' = (w'_1, w'_2, \dots, w'_n)^\top$ súlyvektorra sem teljesül, hogy

$$\begin{aligned} \left| a_{ij} - \frac{w'_i}{w'_j} \right| &\leq \left| a_{ij} - \frac{w_i}{w_j} \right| && \text{minden } 1 \leq i, j \leq n \text{ esetén, és} \\ \left| a_{k\ell} - \frac{w'_k}{w'_\ell} \right| &< \left| a_{k\ell} - \frac{w_k}{w_\ell} \right| && \text{valamely } 1 \leq k, \ell \leq n \text{ esetén.} \end{aligned}$$

A hatékonyság harmadik változatát Bozóki Sándor [5] definiálta.

Definíció. A \mathbf{w} súlyvektor belülről hatékony, ha nem létezik olyan $\mathbf{w}' = (w'_1, w'_2, \dots, w'_n)^\top$ súlyvektor, hogy

$$\left. \begin{aligned} a_{ij} \leq \frac{w_i}{w_j} &\implies a_{ij} \leq \frac{w'_i}{w'_j} \leq \frac{w_i}{w_j} \\ a_{ij} \geq \frac{w_i}{w_j} &\implies a_{ij} \geq \frac{w'_i}{w'_j} \geq \frac{w_i}{w_j} \end{aligned} \right\} \text{minden } 1 \leq i, j \leq n \text{ esetén, és} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} a_{k\ell} \leq \frac{w_k}{w_\ell} &\implies \frac{w'_k}{w'_\ell} < \frac{w_k}{w_\ell} \\ a_{k\ell} \geq \frac{w_k}{w_\ell} &\implies \frac{w'_k}{w'_\ell} > \frac{w_k}{w_\ell} \end{aligned} \right\} \text{valamely } 1 \leq k, \ell \leq n \text{ esetén.} \quad (5)$$

A belső hatékonyság mögötti intuíció az, hogy ha például a döntéshozó által adott mátrixelem 4, amit egy adott súlyvektor felülbecsül, mondjuk 6-tal, akkor minden 4 és 6 közötti értéket jobb közelítésnek tekintünk, mint a 6, ugyanakkor nem foglalkozunk a 4 alatti becslések minősítésével. Míg a hatékonyság definíciójában a 3 is jobban közelíti a 4-et, mint a 6, a belső hatékonyság definíciója kizárólag a 4 és 6 közötti közelítéseket engedi meg.

Vegyük észre, hogy az előző példában szereplő \mathbf{w}' súlyvektor nemcsak dominálja \mathbf{w} -t, hanem belülről dominálja: az (5) szigorú egyenlőtlenségek a 2. sor, ill. oszlop főátlón kívüli elemeire teljesülnek.

Példa. Az előző példa folytatásaként érdemes megvizsgálni a

$$\mathbf{w}'' = \begin{pmatrix} 0.562646 \\ \mathbf{0.283701} \\ 0.141195 \\ 0.035463 \end{pmatrix}$$

súlyvektort is. A

$$\begin{bmatrix} \frac{w''_i}{w'_i} \\ \frac{w''_j}{w'_j} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{1.9832} & 3.9849 & 15.866 \\ \mathbf{0.5042} & 1 & \mathbf{2.0093} & \mathbf{8} \\ 0.2509 & \mathbf{0.4977} & 1 & 3.9815 \\ 0.0630 & \mathbf{0.125} & 0.2512 & 1 \end{pmatrix}$$

szemlélteti, hogy a \mathbf{w}'' súlyvektor is dominálja \mathbf{w} -t, de nem belülről.

A definíciókból következik, hogy egy hatékony súlyvektor egyúttal lokálisan és belülről is hatékony. Blanquero, Carrizosa és Conde [4] pedig megmutatta, hogy a hatékonyság és a lokális hatékonyság ekvivalensek. Az alábbi állítás alapján a belső hatékonyság is ekvivalens a hatékonysággal.

Állítás. *A \mathbf{w} súlyvektor akkor és csak akkor hatékony, ha belülről hatékony.*

Bizonyítás. Amint azt tisztáztuk, elegendő azt belátni, hogy ha a \mathbf{w} súlyvektor nem hatékony, akkor belülről sem hatékony. A hatékonyság és a lokális hatékonyság ekvivalenciája szerint ekkor \mathbf{w} lokálisan sem hatékony, azaz \mathbf{w} tetszőleges $U(\mathbf{w})$ környezetében létezik olyan $\mathbf{w}' \in U(\mathbf{w})$ súlyvektor, ami dominálja \mathbf{w} -t. Egy kellően szűk $U(\mathbf{w})$ környezetben azonban

$$\begin{aligned} a_{ij} < \frac{w_i}{w_j} &\implies a_{ij} < \frac{w'_i}{w'_j} \leq \frac{w_i}{w_j}, \\ a_{ij} > \frac{w_i}{w_j} &\implies a_{ij} > \frac{w'_i}{w'_j} \geq \frac{w_i}{w_j}, \\ a_{ij} = \frac{w_i}{w_j} &\implies a_{ij} = \frac{w'_i}{w'_j} = \frac{w_i}{w_j}, \end{aligned} \tag{6}$$

amiből következik, hogy \mathbf{w} belülről nem hatékony. □

Következmény. *A hatékonyság, a lokális hatékonyság és a belső hatékonyság ekvivalensek.*

Blanquero, Carrizosa és Conde [4, Remark 12], valamint Conde és Pérez [8, Theorem 2.2] a hatékonyság gyenge változatát is definiálta.

Definíció. A \mathbf{w} súlyvektor gyengén hatékony, ha nem létezik olyan $\mathbf{w}' = (w'_1, w'_2, \dots, w'_n)^\top$ súlyvektor, hogy

$$\left| a_{ij} - \frac{w'_i}{w'_j} \right| < \left| a_{ij} - \frac{w_i}{w_j} \right| \quad \text{minden } 1 \leq i \neq j \leq n \text{ esetén.} \quad (7)$$

Ha a \mathbf{w} és \mathbf{w}' súlyvektorokra teljesülnek a (7) egyenlőtlenségek, akkor azt mondjuk, hogy \mathbf{w}' szigorúan dominálja \mathbf{w} . A szigorú dominancia is tranzitív. A definíciókból következik, hogy minden hatékony súlyvektor egyúttal gyengén hatékony is, ugyanakkor nem minden gyengén hatékony súlyvektor hatékony.

Példa. Rögzítsük az

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1/2 & 1 & 2 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

páros összehasonlítás mátrixot. Ekkor a

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

súlyvektor nem gyengén hatékony, mert a

$$\mathbf{w}' = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

súlyvektorból képzett $\left[\frac{w'_i}{w'_j} \right]$ konzisztens páros összehasonlítás mátrix minden diagonálison kívüli pozícióban szigorúan jobban közelíti az \mathbf{A} elemeit, mint a

$$\left[\frac{w_i}{w_j} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1/3 & 1 & 3 \\ 1/9 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrix. A példában ráadásul $\left[\frac{w'_i}{w'_j} \right] = \mathbf{A}$, tehát minden mátrixelem közelítése tökéletes, de ez általában nem szükségszerű.

Amint azt korábban láttuk, a sajátvektor nem mindig hatékony. Megmutatható azonban, hogy mindig gyengén hatékony.

Tétel ([6, 2. fejezet]). *A sajátvektor gyengén hatékony.*

3 A hatékonyság és a gyenge hatékonyság ekvivalens definíciói

A hatékony esethez hasonlóan a lokálisan és a belülről gyengén hatékony pontokat is lehet explicit módon, feladatspecifikusan definiálni.

Jelölje E , E_L és E_I a hatékony, lokálisan hatékony és belülről hatékony megoldások halmazát. Hasonlóan, jelölje WE , WE_L és WE_I a gyengén hatékony, lokálisan gyengén hatékony és belülről gyengén hatékony megoldások halmazát.

A gyenge hatékonyság definíciója alapján

$$WE = \{\mathbf{w} > \mathbf{0} \mid \text{nincsen olyan } \mathbf{w}' > \mathbf{0}, \text{ amelyre (7) teljesülne}\}.$$

Hasonló módon

$$WE_L = \{\mathbf{w} > \mathbf{0} \mid \text{van olyan } U(\mathbf{w}) \text{ környezet, hogy} \\ \text{nincsen } \mathbf{w}' \in U(\mathbf{w}), \text{ amelyre (7) teljesülne}\}$$

és

$$WE_I = \{\mathbf{w} > \mathbf{0} \mid \text{nincsen olyan } \mathbf{w}' > \mathbf{0}, \text{ amelyre az teljesülne, hogy}$$

$$a_{ij} \leq \frac{w_i}{w_j} \implies a_{ij} \leq \frac{w'_i}{w'_j} < \frac{w_i}{w_j} \quad \forall 1 \leq i \neq j \leq n, \\ a_{ij} \geq \frac{w_i}{w_j} \implies a_{ij} \geq \frac{w'_i}{w'_j} > \frac{w_i}{w_j} \quad \forall 1 \leq i \neq j \leq n\}.$$

A fenti összefüggésekből azonnal következik, hogy ha egy adott $\mathbf{w} > \mathbf{0}$ esetén van olyan (k, ℓ) , $k \neq \ell$ indexpár, hogy $a_{k\ell} = \frac{w_k}{w_\ell}$, akkor $\mathbf{w} \in WE$, $\mathbf{w} \in WE_L$ és $\mathbf{w} \in WE_I$.

Nyilvánvaló, hogy $E \subseteq WE$, $E_L \subseteq WE_L$ és $E_I \subseteq WE_I$. Megmutatjuk, hogy $E = E_L = E_I$ és $WE = WE_L = WE_I$ is teljesül. Ez azt jelenti, hogy a három definíció ekvivalens az erősebb és a gyengébb hatékonyság esetén egyaránt. A számpéldák viszont arról tanúskodnak, hogy $E \neq WE$.

Vezessük be az $f_{ij} : \mathbb{R}_{++}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i, j = 1, \dots, n$ függvényeket az alábbi módon:

$$f_{ij}(\mathbf{x}) = \left| \frac{x_i}{x_j} - a_{ij} \right|, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Adott $\mathbf{w} > \mathbf{0}$ esetén jelölje $D(\mathbf{w})$ a \mathbf{w} pontot *domináló* pontok halmazát, azaz

$$D(\mathbf{w}) = \{\mathbf{x} > \mathbf{0} \mid f_{ij}(\mathbf{x}) \leq f_{ij}(\mathbf{w}) \text{ minden } i \neq j \text{ esetén, és} \\ f_{k\ell}(\mathbf{x}) < f_{k\ell}(\mathbf{w}) \text{ valamely } k \neq \ell \text{ esetén}\}.$$

Hasonlóképpen, jelölje $SD(\mathbf{w})$ a \mathbf{w} pontot *erősen domináló* pontok halmazát, azaz

$$SD(\mathbf{w}) = \{\mathbf{x} > \mathbf{0} \mid f_{ij}(\mathbf{x}) < f_{ij}(\mathbf{w}) \text{ minden } i \neq j \text{ esetén}\}.$$

Könnyen látható, hogy ha $SD(\mathbf{w}) \neq \emptyset$, akkor $SD(\mathbf{w}) = \text{int}(D(\mathbf{w}))$ és $\text{cl}(SD(\mathbf{w})) = \text{cl}(D(\mathbf{w}))$, ahol int és cl egy adott halmaz belső pontjait, illetve lezártját jelöli.

Állítás. $D(\mathbf{w})$ és $SD(\mathbf{w})$ konvex halmazok, és ha valamelyikük nem üres, akkor \mathbf{w} a halmaz határán fekszik.

Bizonyítás. A bizonyítást az egyszerűbb $SD(\mathbf{w})$ esettel kezdjük. Könnyen látható, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \in SD(\mathbf{w}) &\iff \left| \frac{x_i}{x_j} - a_{ij} \right| < f_{ij}(\mathbf{w}) \quad \forall i \neq j \\ &\iff \frac{x_i}{x_j} - a_{ij} < f_{ij}(\mathbf{w}), \quad -\frac{x_i}{x_j} + a_{ij} < f_{ij}(\mathbf{w}) \quad \forall i \neq j \\ &\iff x_i + (-a_{ij} - f_{ij}(\mathbf{w}))x_j < 0, \quad -x_i + (a_{ij} - f_{ij}(\mathbf{w}))x_j < 0, \\ &\hspace{15em} \forall i \neq j \end{aligned}$$

Azon pontok halmaza, amelyek eleget tesznek az utóbbi szigorú egyenlőtlenségek rendszerének véges számú nyílt féltér metszete, tehát egy nyílt konvex halmaz. Ugyanakkor $\mathbf{x} = \mathbf{w}$ esetén a fenti lineáris egyenlőtlenségek egyenlőségként teljesülnek, így \mathbf{w} a $SD(\mathbf{w})$ halmaz határán fekszik, már amennyiben az nem üres.

Hasonló átrendezések után azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{x} \in D(\mathbf{w}) \iff x_i + (-a_{ij} - f_{ij}(\mathbf{w}))x_j \leq 0, \quad -x_i + (a_{ij} - f_{ij}(\mathbf{w}))x_j \leq 0 \quad \forall i \neq j, \text{ és} \quad (8)$$

$$x_k + (-a_{k\ell} - f_{k\ell}(\mathbf{w}))x_\ell < 0, \quad -x_k + (a_{k\ell} - f_{k\ell}(\mathbf{w}))x_\ell < 0 \text{ valamely} \quad (9) \\ k \neq \ell \text{ esetén.}$$

Megmutatjuk, hogy $D(\mathbf{w})$ konvex halmaz. Legyen $\mathbf{y} \neq \mathbf{z} \in D(\mathbf{w})$, $0 < \lambda < 1$ és $\hat{\mathbf{x}} = \lambda\mathbf{y} + (1 - \lambda)\mathbf{z}$. A (8) lineáris egyenlőtlenségei teljesülnek az $\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{y}$ és \mathbf{z} pontokban.

Jelöljön $(\hat{k}, \hat{\ell}), \hat{k} \neq \hat{\ell}$ egy olyan indexpárt, amelyre (9) is teljesül az $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ pontban. Ekkor $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}$ esetén (9) szintén teljesül a $(\hat{k}, \hat{\ell})$ indexpárra. Ebből azonnal következik $\hat{\mathbf{x}} \in D(\mathbf{w})$ és $D(\mathbf{w})$ konvexitása.

Az $\mathbf{x} = \mathbf{w}$ pontra (8) egyenlőségként teljesül. Így $\mathbf{w} \notin D(\mathbf{w})$, de \mathbf{w} a $D(\mathbf{w})$ egy határpontja, ha a halmaz nem üres. \square

Állítás. $E = E_L = E_I$ és $WE = WE_L = WE_I$.

Bizonyítás. Nyilván

$$E = \{\mathbf{w} > \mathbf{0} \mid D(\mathbf{w}) = \emptyset\},$$

$$E_L = \{\mathbf{w} > \mathbf{0} \mid D(\mathbf{w}) \cap U(\mathbf{w}) = \emptyset\},$$

ahol $U(\mathbf{w})$ egy megfelelően kis környezet \mathbf{w} körül, és

$$E_I = \{\mathbf{w} > \mathbf{0} \mid D(\mathbf{w}) \cap V_I(\mathbf{w}) = \emptyset\},$$

ahol $V_I(\mathbf{w}) = \{\mathbf{x} > \mathbf{0} \mid a_{ij} \leq \frac{x_i}{x_j} \leq \frac{w_i}{w_j} \text{ ha } a_{ij} \leq \frac{w_i}{w_j}, \forall i \neq j, \text{ illetve } a_{ij} \geq \frac{x_i}{x_j} \geq \frac{w_i}{w_j} \text{ ha } a_{ij} \geq \frac{w_i}{w_j}, \forall i \neq j\}$ egy a \mathbf{w} pontot tartalmazó konvex halmaz.

Ha $\mathbf{w} \in E$, akkor $D(\mathbf{w}) = \emptyset$, így $\mathbf{w} \in E_L$ és $\mathbf{w} \in E_I$, következésképpen $E \subseteq E_L$ és $E \subseteq E_I$.

Megmutatjuk, hogy $E_L \subseteq E$ is teljesül. Legyen $\mathbf{w} \in E_L$, és tegyük fel, hogy $\mathbf{w} \notin E$, azaz $D(\mathbf{w}) \neq \emptyset$. Legyen $\hat{\mathbf{x}} \in D(\mathbf{w})$. Mivel \mathbf{w} a $D(\mathbf{w})$ konvex halmaz egy határpontja, ezért az $[\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{w}]$ félig nyílt szakasz minden pontja a $D(\mathbf{w})$ halmazban fekszik. Azonban $[\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{w}]$ azon pontjai, amelyek elég közel vannak a \mathbf{w} -hez, benne vannak $U(\mathbf{w})$ -ben is. Ez ellentmond a $\mathbf{w} \in E_L$ feltevésnek, mivel $D(\mathbf{w}) \cap U(\mathbf{w}) \neq \emptyset$. Tehát $\mathbf{w} \in E$, így $E_L \subseteq E$, ebből pedig $E_L = E$ következik.

Az $E_I \subseteq E$ bizonyítása hasonló. Legyen $\mathbf{w} \in E_I$, és tegyük fel, hogy $\mathbf{w} \notin E$. Legyen $\hat{\mathbf{x}} \in D(\mathbf{w})$. Ha $a_{ij} = \frac{w_i}{w_j}$, akkor $a_{ij} = \frac{x_i}{x_j}$ minden $\mathbf{x} \in [\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{w}]$ esetén. Ha $a_{ij} < \frac{w_i}{w_j}$, akkor $a_{ij} < \frac{x_i}{x_j} < \frac{w_i}{w_j}$ a \mathbf{w} -hez elég közel fekvő $\mathbf{x} \in [\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{w}]$ pontok esetén. Hasonló teljesül $a_{ij} > \frac{w_i}{w_j}$ esetén, csak ellenkező előjellel. Ebből $[\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{w}] \cap D(\mathbf{w}) \cap V_I(\mathbf{w}) \neq \emptyset$ adódik, ez pedig újra ellentmondás. Következésképpen $E_I \subseteq E$, így $E_I = E$.

A $WE = WE_L = WE_I$ bizonyítása teljesen hasonló, egyszerűen az $SD(\mathbf{w})$ halmazt kell használni a $D(\mathbf{w})$ helyett. A bizonyítás hátralevő részét így az Olvasóra bízjuk. \square

4 Hatékonysági teszt és hatékony domináló súlyvektor keresése lineáris programozás segítségével

Mint korábban is, legyen adott egy $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{i,j=1,\dots,n}$ páros összehasonlítás mátrix és egy $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)^\top$ pozitív súlyvektor. Először egy lineáris programozás feladatot állítunk fel annak ellenőrzésére, hogy vajon \mathbf{w} hatékony megoldása-e az (1) feladatnak. Ezután, ha az derül ki, hogy \mathbf{w} nem hatékony, megmutatjuk, hogy a lineáris programozási feladat optimális megoldása olyan hatékony vektor, amely belülről dominálja a \mathbf{w} vektort.

Tekintsük a belső hatékonyság definíciójában szereplő (4) kettős egyenlőtlenségeket. Minden pozitív $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top$ súlyvektor esetén

$$\begin{aligned} a_{ij} \leq \frac{x_i}{x_j} \leq \frac{w_i}{w_j} &\iff \left(\frac{a_{ij}x_j}{x_i} \leq 1, \frac{x_i}{x_j} \frac{w_j}{w_i} \leq 1 \right) \\ &\iff \left(\frac{a_{ij}x_j}{x_i} \leq 1, \frac{x_i}{x_j} \frac{w_j}{w_i} \frac{1}{t_{ij}} \leq 1 \text{ valamely } 0 < t_{ij} \leq 1 \text{ esetén} \right), \end{aligned} \quad (10)$$

és

$$\begin{aligned} a_{ij} \geq \frac{x_i}{x_j} \geq \frac{w_i}{w_j} &\iff \left(\frac{x_i}{a_{ij}x_j} \leq 1, \frac{x_j}{x_i} \frac{w_i}{w_j} \geq 1 \right) \\ &\iff \left(\frac{x_i}{a_{ij}x_j} \leq 1, \frac{x_j}{x_i} \frac{w_i}{w_j} \frac{1}{t_{ij}} \leq 1 \text{ valamely } 0 < t_{ij} \geq 1 \text{ esetén} \right), \end{aligned} \quad (11)$$

és

$$a_{ij} = \frac{x_i}{x_j} \iff \frac{x_i}{a_{ij}x_j} = 1. \quad (12)$$

A fenti összefüggések alapján állítjuk össze a következő optimalizálási feladatot. Legyen

$$I = \left\{ (i, j) \mid a_{ij} < \frac{w_i}{w_j} \right\},$$

$$J = \left\{ (i, j) \mid a_{ij} = \frac{w_i}{w_j}, i < j \right\}.$$

Ha az I indexhalmaz üres, akkor az \mathbf{A} mátrix konzisztens. Ebben az esetben a \mathbf{w} súlyvektor hatékony és $|J| = n(n-1)/2$. A továbbiakban feltesszük, hogy I nem üres. A J indexhalmazra vonatkozóan nem élünk hasonló feltevéssel.

$$\begin{aligned} \min \quad & \prod_{(i,j) \in I} t_{ij} \\ & \frac{x_j}{x_i} a_{ij} \leq 1 \quad \forall (i, j) \in I, \\ & \frac{x_i}{x_j} \frac{w_j}{w_i} \frac{1}{t_{ij}} \leq 1 \quad \forall (i, j) \in I, \\ & 0 < t_{ij} \leq 1 \quad \forall (i, j) \in I, \\ & a_{ji} \frac{x_i}{x_j} = 1 \quad \forall (i, j) \in J, \\ & x_1 = 1. \end{aligned} \quad (13)$$

A feladat változói $x_i > 0$, $1 \leq i \leq n$ és t_{ij} , $(i, j) \in I$.

Állítás. A (13) optimalizálási feladat optimumértéke legfeljebb 1, és pontosan akkor 1, ha a \mathbf{w} súlyvektor az (1) többcélű optimalizálási feladat hatékony megoldása. Jelölje $(\mathbf{x}^*, \mathbf{t}^*) \in \mathbb{R}_+^{n+|I|}$ a (13) feladat optimális megoldását. Ha \mathbf{w} nem hatékony, akkor az \mathbf{x}^* súlyvektor hatékony és belülről dominálja a \mathbf{w} vektort.

Bizonyítás. A (10)–(12) feltételeket egyszerű átrendezéssel kaphatjuk meg. Nyilvánvaló, hogy (10) $\frac{x_i}{x_j} \frac{w_j}{w_i} \leq 1$ akkor és csak akkor teljesül, ha létezik olyan $0 < t_{ij} \leq 1$ skalár, hogy $\frac{x_i}{x_j} \frac{w_j}{w_i} \frac{1}{t_{ij}} \leq 1$. Ráadásul a szigorú egyenlőtlenségek egyszerre teljesülnek a két oldalon. A (11) indoklása hasonló, a (12) pedig evidens.

A (13) feladatban csak az I és J halmazok indexpárjaihoz tartozó feltételek jelennek meg. A reciprocitási tulajdonság miatt a többi hasonló feltétel redundáns. Először azt mutatjuk meg, hogy a (13) feladat megengedett halmaza nem üres és kompakt. Mivel a célfüggvény folytonos, azt kapjuk, hogy a (13) feladatnak van véges optimumértéke és optimális megoldása.

A (13) feladatnak van megengedett megoldása, például $\mathbf{x} = \frac{1}{w_1} \mathbf{w}$ és $t_{ij} = 1$, $\forall (i, j) \in I$ teljesíti a feltételeket. Az $x_1 = 1$ normalizálási feltétel miatt a többi x_i , $i \neq 1$ változónak pozitív alsó és felső korlátja van a megengedett

tartományon. Ezt úgy kapjuk, hogy minden $i \neq 1$ esetén $(i, 1)$ és $(1, i)$ közül egy mindenképpen az $I \cup J$ indexhalmaz eleme. A negyedik feltétel rögzíti x_i értékét, az első és második feltételből pedig pozitív alsó és felső korlát számolható ki rá vonatkozóan. Mivel az \mathbf{x} komponensei pozitív alsó és felső korláttal rendelkeznek, a második feltételből pozitív alsó korlátok határozhatók meg a t_{ij} , $(i, j) \in I$ változókra is.

A célfüggvény \mathbf{w} belső hatékonysága tesztelésére szolgál. Értéke nem lehet nagyobb, mint 1. Ha értéke kisebb, mint 1, akkor létezik olyan (i_0, j_0) indexpár, amelyre $\frac{x_{i_0}}{x_{j_0}} \frac{w_{j_0}}{w_{i_0}} \leq t_{i_0 j_0} < 1$, így $\frac{x_{i_0}}{x_{j_0}} < \frac{w_{i_0}}{w_{j_0}}$ teljesül. Ebből, valamint a (10) és (13) ekvivalens alakjaiból kapjuk, hogy \mathbf{x} belülről dominálja a \mathbf{w} vektort. Fordítva, tegyük fel, hogy \mathbf{x} belülről dominálja a \mathbf{w} vektort. Könnyen látható, hogy az \mathbf{x} normalizált vektor és a $t_{ij} = \frac{x_i}{x_j} \frac{w_j}{w_i}$, $(i, j) \in I$ komponensek (13) megengedett megoldását alkotják. Ráadásul, minden olyan (i_0, j_0) indexpárra, amelyre a belső dominancia miatt $\frac{x_{i_0}}{x_{j_0}} < \frac{w_{i_0}}{w_{j_0}}$ teljesül, fennáll $t_{i_0 j_0} < 1$ is. Ezért a tekintett megengedett megoldás célfüggvényértéke kisebb, mint 1, tehát az optimumérték szintén kisebb, mint 1.

Azzal az esettel kell még foglalkoznunk, amikor a \mathbf{w} vektorról az derül ki, hogy nem hatékony. Nyilvánvaló, hogy a (13) feladat $(\mathbf{x}^*, \mathbf{t}^*)$ optimális megoldásának \mathbf{x} -része belülről dominálja a \mathbf{w} vektort, és $t_{ij}^* = \frac{x_i^*}{x_j^*} \frac{w_j}{w_i}$ minden $(i, j) \in I$ esetén. Tegyük fel, hogy \mathbf{x}^* nem hatékony. Ekkor van olyan $\bar{\mathbf{x}}$ vektor, amely belülről dominálja őt. Ekkor $a_{ij} = \frac{\bar{x}_i}{\bar{x}_j}$, $\forall (i, j) \in J$, továbbá $a_{ij} \leq \frac{\bar{x}_i}{\bar{x}_j} \leq \frac{x_i^*}{x_j^*} \leq \frac{w_i}{w_j}$, $\forall (i, j) \in I$ és létezik legalább egy olyan $(i_0, j_0) \in I$ indexpár, amelynél a második egyenlőtlenség szigorú egyenlőtlenségként teljesül. Legyen $\bar{t}_{ij} = \frac{\bar{x}_i}{\bar{x}_j} \frac{w_j}{w_i}$, $\forall (i, j) \in I$. Könnyen látható, hogy a normalizálás után $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{t}})$ a (13) megengedett megoldása. Azonban most $\bar{t}_{ij} \leq t_{ij}^*$, $\forall (i, j) \in I$ és $\bar{t}_{i_0 j_0} < t_{i_0 j_0}^*$. Ebből azt kapjuk, hogy a célfüggvény értéke az $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{t}})$ pontban kisebb, mint az $(\mathbf{x}^*, \mathbf{t}^*)$ pontban. Ez ellentmond annak, hogy $(\mathbf{x}^*, \mathbf{t}^*)$ a (13) feladat optimális megoldása. Következésképpen, \mathbf{x}^* hatékony megoldás. \square

Bár (13) egy nemlineáris optimalizálási feladat, egy ekvivalens lineáris optimalizálási feladattá alakítható át. Legyen $y_i = \log x_i$, $v_i = \log w_i$, $1 \leq i \leq n$; $s_{ij} = -\log t_{ij}$, $(i, j) \in I$; és $b_{ij} = \log a_{ij}$, $1 \leq i, j \leq n$. A szigorúan monoton növekvő logaritmus függvényt alkalmazva a célfüggvényre és a feltételek két oldalára, a következő ekvivalens lineáris optimalizálási feladatot kapjuk:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{(i,j) \in I} -s_{ij} \\ & y_j - y_i \leq -b_{ij} \quad \forall (i, j) \in I, \\ & y_i - y_j + s_{ij} \leq v_i - v_j \quad \forall (i, j) \in I, \\ & y_i - y_j = b_{ij} \quad \forall (i, j) \in J, \\ & s_{ij} \geq 0 \quad \forall (i, j) \in I, \\ & y_1 = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

A feladat változói y_i , $1 \leq i \leq n$ és $s_{ij} \geq 0$, $(i, j) \in I$.

Tétel. A (14) lineáris programozási feladat optimumértéke legfeljebb 0, és pontosan akkor 0, ha a \mathbf{w} súlyvektor az (1) többcélú optimalizálási feladat hatékony megoldása. Jelölje $(\mathbf{y}^*, \mathbf{s}^*) \in \mathbb{R}^{n+|I|}$ a (14) feladat optimális megoldását. Ha \mathbf{w} nem hatékony, akkor az $\exp(\mathbf{y}^*)$ súlyvektor hatékony és belülről dominálja a \mathbf{w} vektort.

A (14) lineáris programozási feladatot a Pairwise Comparison Matrix Calculator programunkban implementáltuk. A `pcmc.online` címen elérhető, böngészőből közvetlenül futtatható környezetben szabadon tesztelhető a súlyvektorok hatékonysága, és ha az adott súlyvektor nem hatékony, akkor egy őt belülről domináló hatékony súlyvektor is található.

5 Gyenge hatékonysági teszt és gyengén hatékony domináló súlyvektor keresése lineáris programozás segítségével

A gyenge hatékonyság ellenőrzése és egy domináló gyengén hatékony domináló vektor keresése a hatékony esethez hasonlóan történik. Tekintsünk egy $\mathbf{w} > \mathbf{0}$ vektort. Nyilván ha $J \neq \emptyset$, azaz ha $f_{ij}(\mathbf{w}) = 0$ valamely $i \neq j$ indexpár esetén, akkor $\mathbf{w} \in WE$, így máris készen vagyunk a gyenge hatékonyság ellenőrzésével.

Most a $J = \emptyset$ esetet vizsgáljuk meg. Ekkor $|I| = n(n-1)/2$. Íme néhány ekvivalens alak az erős nem-hatékonyságra vonatkozóan. Minden $(i, j) \in I$ esetén

$$\begin{aligned} a_{ij} \leq \frac{x_i}{x_j} < \frac{w_i}{w_j} &\iff \left(\frac{a_{ij}x_j}{x_i} \leq 1, \frac{x_i w_j}{x_j w_i} < 1 \right) \\ &\iff \left(\frac{a_{ij}x_j}{x_i} \leq 1, \frac{x_i w_j}{x_j w_i} \frac{1}{t} \leq 1, 0 < t < 1 \right). \end{aligned} \quad (15)$$

A (15) utolsó alakja alapján felállíthatjuk a (13) feladat egy módosítását is, megfelelően adaptálva azt a gyenge hatékonyság esetére.

$$\begin{aligned} \min t \\ \frac{x_j}{x_i} a_{ij} \leq 1 \quad \forall (i, j) \in I, \\ \frac{x_i w_j}{x_j w_i} \frac{1}{t} \leq 1 \quad \forall (i, j) \in I, \\ 0 < t \leq 1 \\ x_1 = 1. \end{aligned} \quad (16)$$

A feladat változói $x_i > 0$, $1 \leq i \leq n$ és t .

Állítás. A (16) optimalizálási feladat optimumértéke legfeljebb 1, és pontosan akkor 1, ha a \mathbf{w} súlyvektor az (1) többcélú optimalizálási feladat gyengén hatékony megoldása. Jelölje $(\mathbf{x}^*, t^*) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$ a (16) optimális megoldását.

Ha a \mathbf{w} erősen nem-hatékony, akkor az \mathbf{x}^* súlyvektor gyengén hatékony és szigorúan belülről dominálja a \mathbf{w} vektort.

Bizonyítás. Az állítások az előző fejezet állításának bizonyításához hasonlóan igazolhatók. Az ottani indoklást használva itt is, könnyen megmutatható, hogy (16) megengedett halmaza nem üres, valamint pozitív alsó és felső korlát határozható meg minden változóra. Tehát a (16) feladatnak szintén van optimális megoldása és egy véges $t^* \leq 1$ optimumértéke.

Ha $t^* < 1$, akkor $\frac{x_i w_j}{x_j w_i} \leq t^* < 1$ minden $i \neq j$ esetén, következésképpen \mathbf{x} belülről erősen dominálja a \mathbf{w} vektort. Fordítva, tegyük fel, hogy \mathbf{x} belülről erősen dominálja a \mathbf{w} vektort. Könnyen látható, hogy a normalizált \mathbf{x} vektor a $t = \max_{i \neq j} \frac{x_i w_j}{x_j w_i}$ skalárral kiegészítve a (16) egy megengedett megoldását alkotja. Nyilván ennél a megengedett megoldásnál $0 < t < 1$, ezért az optimumértékre is $t^* < 1$ teljesül.

Tekintsük végül azt az esetet, amikor a \mathbf{w} vektorról az derül ki hogy erősen nem-hatékony, azaz erősen dominált. A (16) feladat $(\mathbf{x}^*, \mathbf{t}^*)$ optimális megoldásának \mathbf{x} -része belülről erősen dominálja a \mathbf{w} vektort és $t^* = \max_{i \neq j} \frac{x_i^* w_j}{x_j^* w_i}$. Tegyük fel, hogy \mathbf{x}^* erősen nem-hatékony. Ekkor őt belülről erősen dominálja egy $\bar{\mathbf{x}}$ vektor. Nyilván $a_{ij} \leq \frac{\bar{x}_i}{\bar{x}_j} < \frac{x_i^*}{x_j^*} \leq \frac{w_i}{w_j}$ minden $i \neq j$ esetén. Legyen $\bar{t} = \max_{i \neq j} \frac{\bar{x}_i w_j}{\bar{x}_j w_i}$. Könnyen látható, hogy a megfelelő normalizálás után kapott $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{t}})$ vektor a (16) feladat megengedett megoldása. Nyilván $\bar{t} < t^*$, ez pedig ellentmond $(\mathbf{x}^*, \mathbf{t}^*)$ optimalitásának. Következésképpen \mathbf{x}^* gyengén hatékony megoldás. \square

Ugyanazt a logaritmizálási ötletet alkalmazva, amellyel a (14) feladatot kaptuk a nemlineáris (13) feladatból, (16) is lineáris alakra transzformálható. A korábbi jelöléseket használva és bevezetve az $s = -\log t$ változót, kapjuk a következő ekvivalens lineáris programozási feladatot:

$$\begin{aligned} \min \quad & -s \\ & y_j - y_i \leq -b_{ij} \quad \forall (i, j) \in I, \\ & y_i - y_j + s \leq v_i - v_j \quad \forall (i, j) \in I, \\ & s \geq 0, \\ & y_1 = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

A változók y_i , $1 \leq i \leq n$ és s .

Tétel. A (17) lineáris programozási feladat optimumértéke legfeljebb 0, és pontosan akkor 0, ha a \mathbf{w} súlyvektor az (1) többcélú optimalizálási feladat gyengén hatékony megoldása. Jelölje $(\mathbf{y}^*, s) \in \mathbb{R}^{n+1}$ a (17) optimális megoldását. Ha \mathbf{w} erősen nem-hatékony, akkor az $\exp(\mathbf{y}^*)$ súlyvektor gyengén hatékony és belülről szigorúan dominálja a \mathbf{w} vektort.

Megjegyzés. Ha \mathbf{w} az (1) többcélú optimalizálási feladat egy erősen nem-hatékony megoldása, akkor a fenti tétel alapján kapott $\exp(\mathbf{y}^*)$ súlyvektor

gyengén hatékony, de nem feltétlenül hatékony. Az előző fejezet (14) feladata segítségével azonban tesztelhetjük, hogy a kapott vektor hatékony-e. Ha nem az, akkor a (14) feladat talál egy belülről domináló hatékony megoldást, amely egyúttal belülről és szigorúan dominálja a kiinduló, erősen nem-hatékony \mathbf{w} súlyvektort is.

A Pairwise Comparison Matrix Calculator (pcmc.online) a gyenge hatékonyságot is vizsgálja. Ha a megadott súlyvektor nem gyengén hatékony, akkor a program keres egy öt belülről és erősen domináló hatékony súlyvektort.

6 Összefoglalás és nyitott kérdések

A páros összehasonlítás mátrixból számolt súlyvektorok hatékonyságának vizsgálatával Blanquero, Carrizosa és Conde [4] foglalkozott először. Az általuk a hatékonyság tesztelésére javasolt lineáris programozási feladatokból kiindulva olyan lineáris programozási feladatokat konstruáltunk, amely nemcsak tesztelésre alkalmas, hanem ha a súlyvektor nem (gyengén) hatékony, akkor egy öt (erősen) domináló hatékony súlyvektort is talál.

A hatékonyság gráfelméleti eszközökkel is jellemezhető, amelynek alapjait szintén Blanquero, Carrizosa és Conde [4] dolgozta ki. Mivel a cikkünkben kidolgozott lineáris programozási feladatokhoz nem volt szükség gráfelméleti megközelítésre, a részleteket sem közöltük. Kidolgozásra vár a lineáris programozási és a gráfelméleti módszerek ekvivalenciájának megértése, amelytől egyrészt a domináló hatékony súlyvektorok halmazának előállítás, másrészt a sajátvektor hatékonyságának jellemzése remélhető. Jelenleg csak néhány nagyon speciális esetben sikerült bizonyítani, hogy a sajátvektor hatékony: ha a páros összehasonlítás mátrix egy [1] vagy két [2] elemének megváltoztatásával konzisztenssé tehető. Szintén nagyon speciális az a mátrixosztály [5], amely sajátvektora sosem hatékony.

Folyamatban van a 4×4 -es páros összehasonlítás mátrixok sajátvektorának hatékonyságának numerikus vizsgálata is, amelyből ötletet vagy sejtést meríthetünk. Jelenleg még az sem világos, hogy mennyire messze vagyunk az általános eset megértésétől.

Köszönetnyilvánítás

A kutatást az OTKA K 111797 támogatta. Bozóki Sándor köszöni az MTA Bolyai János Kutatási Ösztöndíj (BO/00154/16/3) támogatását.

Irodalom

1. Ábele-Nagy, K., Bozóki, S. (2016) Efficiency analysis of simple perturbed pairwise comparison matrices. *Fundamenta Informaticae*, 144(3-4):279–289.
2. Ábele-Nagy, K., Bozóki, S., Rebák, Ö. (\geq 2017) Efficiency analysis of double perturbed pairwise comparison matrices. *Journal of the Operational Research Society* (elfogadva), <http://arxiv.org/abs/1602.07137>.
3. Bajwa, G., Choo, E. U., Wedley, W. C. (2008) Effectiveness analysis of deriving priority vectors from reciprocal pairwise comparison matrices. *Asia-Pacific Journal of Operational Research*, 25(3):279–299.
4. Blanquero, R., Carrizosa, E., Conde, E. (2006) Inferring efficient weights from pairwise comparison matrices. *Mathematical Methods of Operations Research*, 64(2):271–284.
5. Bozóki, S. (2014) Inefficient weights from pairwise comparison matrices with arbitrarily small inconsistency. *Optimization: A Journal of Mathematical Programming and Operations Research*, 63(12):1893–1901.
6. Bozóki, S., Fülöp, J. (\geq 2017) Efficient weight vectors from pairwise comparison matrices. *European Journal of Operational Research* (elfogadva), <https://arxiv.org/abs/1602.03311>.
7. Chankong, V., Haimes, Y. Y. (1983) *Multiobjective Decision Making: Theory and Methodology*. Elsevier Science Publishing, New York.
8. Conde, E., Pérez, M. d. I. P. R. (2010) A linear optimization problem to derive relative weights using an interval judgement matrix. *European Journal of Operational Research*, 201(2):537–544.
9. Crawford, G., Williams, C. (1980) Analysis of subjective judgment matrices. The Rand Corporation, Office of the Secretary of Defense USA, R-2572-AF.
10. Crawford, G., Williams, C. (1985) A note on the analysis of subjective judgment matrices. *Journal of Mathematical Psychology*, 29(4):387–405.
11. Csató, L. (2013): Páros összehasonlításokon alapuló rangsorolási módszerek, *Sigma*, 44(3-4):155–198.
12. Duleba, Sz. (2009): Az AHP módszer egy lehetséges alkalmazása trendek előrejelzésére, *Sigma*, 40(3-4):157–170.
13. de Graan, J. G. (1980) Extensions of the multiple criteria analysis method of T.L. Saaty. Presented at EURO IV Conference, Cambridge, July 22–25, 1980
14. Kéri, G. (2005): Kritériumok páros összehasonlítás mátrixokra, *Sigma*, 36(3-4):139–148.
15. Komáromi, É. (2013): A Kullback-Leibler relatív entrópia függvény alkalmazása páros összehasonlítás mátrix egy prioritásvektora meghatározására, *Sigma*, 44(1-2):1–19.
16. Poesz, A. (2017) Inkonzisztencia a döntéshozatalban, PhD értekezés, Budapesti Corvinus Egyetem, Operációkutatás és Aktuáriustudományok Tanszék.
17. Rapcsák, T. (2007) Több szempontú döntési problémák, egyetemi jegyzet, Budapesti Corvinus Egyetem http://www.oplab.sztaki.hu/tanszek/download/L.Tobbsz_dont_modsz.pdf.
18. Saaty, T. L. (1977) A scaling method for priorities in hierarchical structures. *Journal of Mathematical Psychology* 15(3):234–281.
19. Temesi, J. (1991): Szubjektív információk kezelése a többtényezős problémák megoldásában, *Sigma*, 22:53–62.

EFFICIENCY OF WEIGHT VECTORS DERIVED FROM PAIRWISE
COMPARISON MATRICES

Multi-criteria decision models and ranking methods often apply pairwise comparison matrices in order to determine a weight vector. A weight vector is called efficient if no other weight vector approximates the elements of the pairwise comparison matrix such without larger errors, but with strictly smaller error in at least one position. A weight vector is called weakly efficient if the errors cannot be improved in all non-diagonal positions. Some weight vectors, calculated by, e.g., the least squares or logarithmic least squares methods, are always efficient. However, the often applied eigenvector can be inefficient. We develop linear programs to test whether an arbitrary weight vector is (weakly) efficient, and, if it is not, a dominating efficient weight vector is found. A challenging open problem, on finding sufficient and necessary conditions for the efficiency of the eigenvector, is also proposed.

MÉRFOLDKÖVEK A BEFEKTETÉSI KOCKÁZAT MODELLEZÉSÉBEN¹

BUGÁR GYÖNGYI
PTE KTK

A tanulmány a befektetési kockázat modellezésében napjainkig végbement módszertani fejlődés fontosabb mérföldköveit tekinti át. A befektetési kockázat modellezése befektetés-kombinációk, azaz portfóliók kockázatának becslését igényli. E folyamat két kritikus pontját a kockázati mérték jó megválasztása és az egyes portfólió elemek közötti kapcsolat szorosságának korrekt mérése képezi. A varianciától a várható többletveszteségig illetve a lineáris korrelációs együtthatótól a kopulák alkalmazásáig tartó fejlődés főbb sajátosságainak áttekintését követően megmutatjuk, hogyan alkalmazható a kopula-módszertan a várható többletveszteség becslése során.

Kulcsszavak: portfólió optimalizálás, kockázati mérték, kopula

1 Bevezetés

Szegő (2004), a *Journal of Banking and Finance* folyóirat egykori főszerkesztője a pénzügyi kutatások szakterületének „harmadik forradalmaként” említette a kockázatomérés területén az 1990-es évek végétől felgyorsult kutatási érdeklődést. Mindez jól érzékelteti, hogy a modern portfólió elmélet kialakulásától kezdődően – de különösen az utóbbi két évtizedben – e témakörben számos értékes hozzájárulás született.

A kockázat megfelelő modellezése nemcsak a befektetési portfóliók optimalizálásában játszik kulcsfontosságú szerepet, hanem döntő jelentőségű a bankok szabályozói tőkekövetelményének megállapításában, valamint a biztosítási tevékenységben is.

A jelen írás célja, hogy áttekintse a befektetési portfóliók kockázatának becslésében végbement módszertani fejlődés főbb sajátosságait, és rámutasson néhány jövőben megoldandó problémára is.

A tanulmány az alábbi módon épül fel: a következő rész Markowitz modern portfólió elméletet megalapozó modelljét mutatja be, majd rátérünk a befektetési kockázat becslésével kapcsolatos problémákra. Ezek között külön alfejezetekben tekintjük át a kockázati- és a függőségi mérték megválasztásával kapcsolatos fejlődés fontosabb állomásait. Ezt követően megmutatjuk, hogyan használható a kopula módszertan napjaink „favorizált” kockázati mértékének, a várható többletveszteségnek (ES) a becslésében. A tanulmányt rövid összefoglalással és néhány, a szükséges jövőbeli kutatási irányokat felvázoló megjegyzéssel zárjuk.

¹Beérkezett: 2017. február 4. E-mail: bugar@ktk.pte.hu.

2 A modern portfólió elmélet megalapozása

A kockázat önálló döntési változóként történő alkalmazása és a modern portfólió elmélet megalapozása Markowitz nevéhez köthető.

A modern portfólió-elmélet kezdete az 1950-es évekre tehető. Markowitz (1952) definiálta a várható hozam-kockázat hatékonyság fogalmát és a kockázatot célfüggvényként bevonta az optimális befektetés-kombináció kialakításának folyamatába. Mind az egyedi befektetések rangsorolásában, mind pedig a portfóliók optimalizálásában – azaz a portfóliót alkotó egyes befektetések optimális arányának meghatározásában – két döntési változót alkalmazott: a várható hozamot (E) és a hozamok varianciáját (V). Míg az elsővel az átlagos jövedelmezőséget, addig a másodikkal a befektetés kockázatát jellemezte. A portfóliót alkotó egyedi befektetések hozama közötti kapcsolat szorosságának mérésére ugyanakkor a lineáris korrelációs együtthatót használta fel.

A Markowitz-féle E-V hatékony portfóliók – a bemenő paraméterek (μ és \mathbf{C}) becslését követően – egy kvadratikus parametrikus programozási feladat megoldásával nyerhetők:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{x} &= V \rightarrow \min \\ \mu^T \mathbf{x} &= E \\ \mathbf{A} \mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (1)$$

Az (1) modellben szereplő \mathbf{x} és μ n -dimenziós vektorok megfelelő komponensei az egyes értékpapírokba fektetett tőkehányadot és az értékpapírok várható hozamát jelentik. \mathbf{A} a portfólió kiválasztást korlátozó lineáris feltételrendszer együtthatómátrixa ($m \times n$ -es), \mathbf{C} pedig a hozamok variancia-kovariancia mátrixa ($n \times n$ -es). E a létrehozott portfólió várható hozamának, míg V a portfólióhozam varianciájának jelölésére szolgál, a T szimbólum pedig a megfelelő vektor transzponáltjára utal. A feladat megoldása n értékpapírból álló portfólió esetében az egyes (lehetséges) várható hozamszintekhez tartozó, minimális varianciát biztosító befektetési arányok (\mathbf{x}) meghatározását célozza. Mint látható, a felírt modellben kizártuk a fedezetlen eladásokat (short sales), azaz azt, hogy az egyes értékpapírokba történő befektetési arányok negatívak legyenek.

Az (1) modellben az egyes értékpapír-párok hozama közötti kapcsolat erősségét a Pearson-féle lineáris korrelációs együttható méri:

$$\rho(r_i, r_j) = \frac{C(r_i, r_j)}{\sigma(r_i)\sigma(r_j)} = \frac{C_{ij}}{\sigma_i\sigma_j} \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

A (2) összefüggésben $\rho(r_i, r_j)$ az i és j értékpapír-pár hozama közötti korrelációt, C_{ij} pedig a köztük lévő kovarianciát jelenti (az (1) modellben szereplő variancia-kovariancia mátrix megfelelő eleme). σ_i az i értékpapír hozamának szórása, amelyre $\sigma_i^2 = C_{ii}$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Markowitz az E-V hatékony portfóliók analitikus meghatározására – azaz az (1)-ben szereplő probléma megoldására a Kuhn-Tucker feltételeket alkalmazva – kidolgozta az ún. kritikus vonal algoritmust. Bebizonyította, hogy az (1) modell megoldásait képező hatékony portfóliók szakaszonként lineáris halmazt alkotnak az n -dimenziós térben. Ennek a szakaszonként lineáris halmaznak a megfelelő szakaszai a kritikus vonalak (innen az algoritmus elnevezése).²

Markowitz modelljét – amelynek kifejlesztéséért 1990-ben megkapta a közgazdasági Nobel-díjat – sok kritika érte amiatt, hogy alkalmazása csak abban az esetben tekinthető elméletileg teljesen megalapozottnak, ha a befektető hasznossági függvénye kvadratikus vagy a befektetés hozama normális eloszlású. Eftekhari és szerzőtársai (2000) az elliptikus eloszlást (amelynek speciális esete a normális eloszlás) említik annak feltételeként, hogy a kockázat a variancia segítségével egzakt módon mérhető legyen. Szegő (2005) kimutatta, hogy a hozamok elliptikus eloszlása minden olyan kockázati mutató alkalmazhatóságának alapfeltétele, amely a hozamok közötti kapcsolat mérésére a lineáris korrelációs együtthatót használja.

Markowitz (1991) a fent említett feltételeken túl újabb, empirikusan is alátámasztható érveket hozott fel modellje előnyeinek érzékeltetésére. Rámutatott ugyanakkor arra is, hogy módszere általában csak közelítő megoldást ad. Az említett érvek mögött meghúzódó alapgondolat, hogy módszere összhangban van a várható hasznosság maximalizálásával. Igazolta, hogy a befektető hasznossági függvényének másodfokú polinommal való közelítése – bizonyos hasznossági függvényosztályokra – közel azonos eredményekhez vezet, mint amelyekhez a Markowitz-modell alkalmazásával jutunk.³

3 Kritikus pontok a befektetési kockázat modellezésében

A befektetési kockázat mérése egy befektetés-kombináció, azaz portfólió kockázatának becslését igényli. Ennek a folyamatnak két kritikus összetevője van (Dowd, 2005). Az első egy megfelelő kockázati mérőszám azonosítása és alkalmazása, míg a második a portfólióban szereplő különféle egyedi befektetések hozama együttlözgésének (statisztikai függőségének) számszerűsítése. Napjainkra bebizonyosodott, hogy a kockázat becslésében széleskörűen használt mérőszámok, mint például a variancia vagy a kockázatotott érték, megbízhatatlanok. Egy további jelentős kihívás, hogy az egyes portfólió elemek hozama közötti kapcsolatnak a lineáris korrelációs együtthatóra alapozott becslése torz képet ad a hozamok közötti kapcsolat erősségéről.

²Az E-V hatékony portfóliók explicit származtatásához kapcsolódóan Vörös Józsefnek jelentek meg értékes munkái. Lásd Vörös (1986), Vörös (1987) és Vörös et al. (1999).

³A fentieket lásd részletesen Bugár (1997).

3.1 A varianciától a várható többletveszteségig

A kockázati mértékeket több szempont szerint rendszerezhetjük. Az egyik – talán leginkább elterjedt – csoportosítás azon alapul, hogy valamihez viszonyítva határozzuk-e meg kockázat értékét, vagy ún. abszolút módon. Ebben az értelemben relatív és abszolút mérőszámokat különböztethetünk meg. A relatív kockázati mutatók egy előre meghatározott értéktől való eltérés nagyságaként értelmezik a kockázatot, az abszolút kockázati mérőszámok pedig egy adott pénzügyi pozíció megteremtéséhez szükséges tőkenagysággal mérik azt.

A kockázati mutatók csoportosítása történhet annak alapján is, hogy csak bizonyos kedvezőtlen értékeket veszünk-e figyelembe a mutató kiszámításánál (pl. egy célértéknél csak kisebb értékeket) vagy az ingadozásra jellemző valamennyi értéket. Ezen az alapon beszélhetünk egyoldali vagy kétoldali mutatókról.

A variancia kockázati mértékként történő használatának a legfőbb előnye, hogy segítségével a portfóliók kockázata visszavezethető az egyedi befektetések kockázatára. Ezzel a portfólió optimalizálás – az (1) modell megoldásával – analitikusan könnyen elvégezhető. A variancia előnyei között fontos hangsúlyozni, hogy szubadditív, így támogatja a diverzifikációt. Alkalmazásának hátránya ugyanakkor, hogy kétoldali kockázati mérték, így nincs összhangban a befektetők által a kockázatról alkotott intuitív képpel, miszerint csak azoknak az értékeknek a bekövetkezése kedvezőtlen a befektető számára, amelyek a várható értéknél kisebbek.

A kockázatot érték névének VaR rövidítése a mutató angol nevének (Value at Risk) kezdőbetűiből ered. Általános használata csak az 1990-es években honosodott meg a szakirodalomban, annak ellenére, hogy a világ jelentősebb multinacionális bankjai már az 1970-es évek végétől kezdődően használták belső kockázat előrejelző modelljeikben. Említésre méltó, hogy a mérőszám alkalmazása valójában sokkal korábbi eredetű: az aktuáriusok már a huszadik század elején használták a belső tartalékok becslésére. A VaR befektetés-elméletben történő alkalmazása Baumol (1963) nevéhez kötődik, aki a kockázat mérésére a $\mu - k\sigma$ értéket javasolta. Az előzőekben μ a befektetés (portfólió) várható hozama, σ a portfólió hozamának szórása, k pedig az a szubjektív paraméter, amely a döntéshozó kockázattal szembeni attitűdjét (kockázatérzékenységét) fejezi ki. A Baumol által bevezetett kockázati mérőszám elliptikus hozameloszlás esetén egyenértékű a kockázatot értékkel.

Adott α megbízhatósági szinthez tartozóan a VaR a veszteségeloszlás α -kvantilise:

$$P(L \leq VaR_\alpha) = F(VaR_\alpha) = \alpha, \quad (3)$$

amelyből

$$VaR_\alpha(L) = F^{\leftarrow}(\alpha), \quad 0 < \alpha < 1. \quad (4)$$

A fentiekben az $F^{\leftarrow}(\alpha)$ a veszteséget jelentő véletlen változó (L) $F(x)$ eloszlásfüggvényének általánosított inverze (lásd Embrechts és szerzőtársai, 1999),

azaz:

$$F^{\leftarrow}(\alpha) = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geq \alpha\}. \quad (5)$$

A VaR új szemléletet képvisel a kockázatkezelés gyakorlatában. Legfőbb előnye, hogy veszteség alapú, abszolút kockázati mérték. Egyoldali mutatóként a kedvezőtlen értékeken alapul. Értelmezése egyszerű, mert egy előre meghatározott megbízhatósági szinthez tartozó maximális veszteséget számszerűsíti. Eredménye közérthető, mert a befektetés pénznemében adja meg a kockázatot.

A kockázatosított érték kockázati mértékként történő felhasználásával kapcsolatos egyik legfontosabb probléma, hogy nem veszi figyelembe a VaR-t meghaladó veszteségeket, ami vastagszélű eloszlások esetében a kockázat alábecsléséhez vezet. A VaR másik hiányossága, hogy nem teljesíti a szubadditivitást követelményét, ezért a kockázatosított értékkel mért portfólió-kockázat magasabb lehet, mint a portfóliót alkotó értékpapírok kockázatának összege. Harmadik nagy hátránya, hogy nem konvex, így a VaR-t minimalizáló portfólió nem határozható meg egyértelműen.

A Bázeli Bizottság 2004 júniusában hozta nyilvánosságra Bazel II (BCBS, 2004) néven ismert ajánlásait, amelyek a piaci kockázat VaR-ral történő becslését támogatták. A Bazel II ajánlások 2006-ban kerültek be az Európai Unió által fogadott, az egyes tagországokra – így Magyarország számára is – egységesen alkalmazandó pénzügyi szabályozásba.

A VaR alkalmazásával kapcsolatos kétségeiket már a 2000-es évek elejétől kezdődően megfogalmazták a kutatók és a kockázati szakértők. Egy sor olyan tanulmány jelent meg, amely rámutatott a VaR hiányosságaira, sőt a „Journal of Banking and Finance” 2002-ben külön kötetet is szentelt a kockázatkezelés területén előforduló statisztikai és mérési problémáknak. Szegő (2002) a kötetben megjelent tanulmányokat bemutató szerkesztői előszavának a „Soha többé VaR (ez nem sajtóhiba)” provokatív címet adta. Kiemelte, hogy a VaR alkalmazása módszertani szempontból „aggályos”, és leginkább a „problémakeresésben bizonyult megoldásnak”. A figyelmeztető jelzéseket azonban a bankok szabályozásáért felelős döntéshozók nem vették komolyan.

Egy igazán figyelemreméltó mérőföldkő a kockázatalmélet fejlődésében a kockázati mértékek axiomatikus felépítése, azaz a kockázati mérőszámoktól elvárt sajátosságok megfogalmazása és rendszerbe foglalása. A kockázati axiómarendszerek közül a leginkább elfogadott az Artzner és szerzőtársai (1999) koherens mértékeket leíró rendszere, amelyre a szerzők nevének kezdőbetűiből álló ADEH rövidítéssel szokás hivatkozni. A rendszer négy axiómát foglal magába, a translációs invariancia, a szubadditivitás, a pozitív homogenitás és a monotonitás tulajdonságok megfogalmazására (lásd bővebben: Bugár, 2015).

A koherens kockázati mértékek nevezetes képviselője a várható többletveszteség (ES – Expected Shortfall) vagy más néven feltételes kockázatosított érték (CVaR – Conditional Value at Risk). Meghatározott α megbízhatósági szinthez tartozóan ES a VaR-t meghaladó veszteségek várható értéke:

$$ES_{\alpha}(L) = E(L \mid L > VaR_{\alpha}). \quad (6)$$

Folytonos veszteségeloszlásra (6) a következő alakot ölti (Embrechts, 2014):

$$ES_\alpha(L) = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 VaR_x(L) dx . \quad (7)$$

Az ES olyan kockázati mérték, amely egyrészt kiküszöböli a VaR-ral kapcsolatos módszertani problémák nagy részét, másrészt újakat is felvet. Az ES mindenekeelőtt – a VaR-hoz hasonlóan – egyoldali, abszolút mutató. A VaR-t meghaladó átlagos veszteségként értelmezhető, ami különös jelentőséggel bír vastagszélű eloszlások esetén. Mint már említettük, koherens kockázati mérték, azaz eleget tesz az ADEH axiómarendszer követelményeinek. A fentiekben túl említésre méltó technikai sajátossága, hogy konvex. Ez utóbbi tulajdonság nagy jelentőséggel bír a portfólió-optimalizálásban. A várható hozamvárható többletvesztés hatékony portfóliók előállítására – ahogy Rockafellar és Uryasev (2000) megmutatta – egy lineáris programozási feladat megoldását igényli.

Az ES becslésének pontosságában nagy szerepet játszik az eloszlásfüggvény szélének modellezése. Nem megfelelő modell használata esetén az ES alkalmazása félrevezető lehet, hiszen a VaR-nál jóval érzékenyebb a becslési hibákra (Sarykalin és szerzőtársai, 2008). Adott konfidencia-szinten a VaR-becslések általában stabilabbak, mint az ES becslések. Az eltérés a vastagszélű eloszlások esetén a legjelentősebb és elhanyagolható a normálhoz közeli eloszlás esetén. A mintaméret növelése csökkenti az ES becslésének hibájából eredő modellkockázatot (Yamai és Yoshihara, 2002). A nagy minta elemszámot azonban csak Monte Carlo szimulációval tudjuk biztosítani.

Az ES alkalmazásának leginkább vitatott pontja visszatesztelhetőségével (back-testing) kapcsolatos. A visszatesztelés célja, hogy a kockázati mérték előrejelzéseinek pontosságát értékeljük múltbeli adatok alapján. Létezik egy statisztikai tulajdonság, az eliszitabilitás, amely lehetővé teszi az előrejelző modellek rangsorolását. A kockázat $r(L)$ becslőfüggvénye eliszitabilis, ha egyértelmű megoldása az alábbi egyenletnek:

$$r(L) = \arg \min_x E[s(x, L)] , \quad (8)$$

ahol $s : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty)$ szigorúan konzisztens értékelő-függvény.

Gneiting (2011) bizonyította, hogy az ES – a VaR-ral ellentétben – nem eliszitabilis kockázati mérték. Egyes vélemények szerint az eliszitabilitás hiánya lehetetlenné teszi az ES alkalmazására épülő modellek visszatesztelését (lásd például Carver, 2013). Más szerzők kiállnak az ES-modellek visszatesztelhetősége mellett. Acerbi és Székely (2014)⁴ kifejlesztettek három modellfüggetlen, nem parametrikus visszatesztelési eljárást. A biztató eredmények ellenére még sok ezen a területen a tennivaló addig, amíg az alkalmazandó módszertan tekintetében kielégítő szakmai konszenzus születik.

A pénzügyi szektor dinamikus fejlődése, az újonnan megjelenő piaci innovációk újabb és újabb megoldandó kérdéseket vetnek fel a szabályozók számára. A másodrendű jelzáloghitel-piaci válság felhívta a figyelmet a VaR-ral

⁴Külön érdekesség, hogy az említett szerzők rámutattak arra, hogy habár a VaR eliszitabilis, visszatesztelése során sohasem használták ki ezt a tulajdonságát.

történő kockázatmérés tarthatatlanságára. A válság idején a bankok veszteségei lényegesen meghaladták a VaR-ral kalibrált minimális tőkekövetelmény értékét. Ennek hatására – csaknem egy évtizeddel a válság kitörése után – 2016 januárjában – gyökeres változás következett be a bázeli szabályozásban: a kereskedési könyvben szereplő, piaci kockázatnak kitett pozíciók után képzendő szabályozói tőkekövetelmény megállapításánál a VaR helyett az ES alkalmazását írták elő az ún. belső modellt használó bankok számára (BCBS, 2016). Ezzel mintegy elismerést nyert az a sok erőfeszítés, amellyel az akadémiai szféra a kockázati mértékek kutatásához hozzájárult. Az ehhez fűződő euforikus képet némiképp árnyalja az ES visszateszteléséhez fűződő, fent említett bizonytalanság. A szabályozás ezt úgy igyekezett áthidalni, hogy a belső kockázatértékelő modell validitásának ellenőrzésére továbbra is a VaR alkalmazását írja elő.

3.2 A lineáris korrelációtól a kopuláig

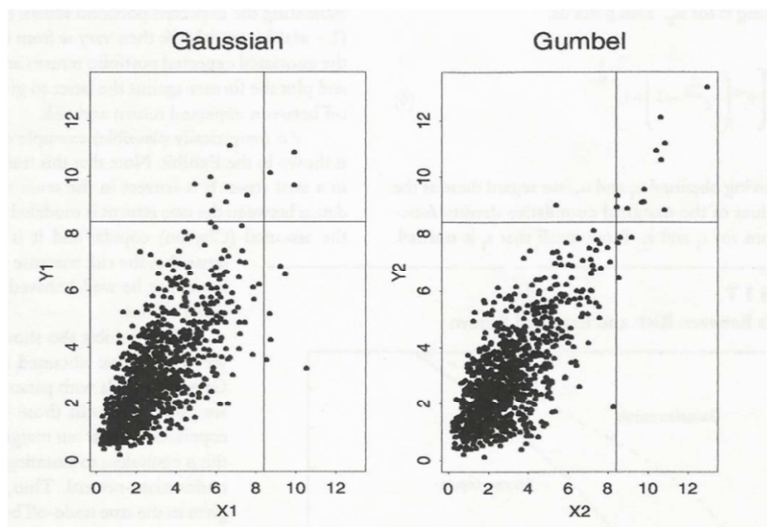
A lineáris korrelációs együtthatóval kapcsolatos legfőbb probléma, hogy kizárólag a lineáris függőséget méri. A korrelátlanság csak akkor jelent függetlenséget, ha a változók együttes eloszlása elliptikus. Napjainkban a pénzügyi változók eloszlása általában nélkülözi a szimmetriát és vastagszélű. Ez utóbbi együtt jár azzal, hogy a normális eloszlásnál jelzetthez képest nagyobb a nagy veszteségek együttes bekövetkezésének az esélye. Mindez felveti a változók közötti kapcsolatnak a lineáris korrelációra alapozott becslésétől eltérő modellezésének igényét.

A lineáris korrelációs együttható alkalmazását az is korlátozza, hogy kizárólag véges varianciával rendelkező valószínűségi változókra értelmezhető. Nem definiálható például 2-nél nem nagyobb szabadságfokú kétdimenziós t-eloszlásra (Dowd, 2005).

További jelentős probléma, hogy a lineáris korrelációs együttható nem invariáns a valószínűségi változók szigorún monoton növekvő, nem lineáris $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ transzformációjával szemben, azaz:

$$\rho(T(X), T(Y)) \neq \rho(X, Y) . \quad (9)$$

Ha például a befektetések hozamait logaritmikus hozamokká alakítjuk, akkor az egyes hozampárok közötti korreláció megváltozik. Embrechts és szerzőtársai (2002) a lineáris korrelációval kapcsolatos gyakori tévhitek elemzése során két eltérő modellre támaszkodva elvégezték két azonos peremeloszlással rendelkező valószínűségi változó együttes bekövetkezésének szimulálását. Mindkét modellben azonos volt a változók közötti lineáris korreláció mértéke. A kapott eredményeket az 1. ábra mutatja.



1. ábra. Két azonos peremeloszlással és megegyező korrelációs együtthatóval rendelkező eloszlás szimulációja. Forrás: Embrechts et al. (2002), 177. o.

A két modell által reprezentált függőségi struktúra szemmel láthatóan eltérő. Ha az így szimulált ponthalmaz két befektetésen elért veszteséget jelképez, akkor nyilvánvaló, hogy a második eset sokkal kedvezőtlenebbül érinti a befektetőt, hiszen ebben az esetben nagyobb a nagy veszteségek együttes bekövetkezésének esélye. A példa meggyőzően mutatja, hogy a lineáris korreláció félrevezető eredményeket adhat két véletlen változó közötti kapcsolat modellezésében.

A fenti problémára a kopula-módszertan kínál megoldást.

Az n -dimenziós kopula az n -dimenziós egységkockán értelmezett, n -változós $C : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ eloszlásfüggvény, amelynek mindegyik marginálisa egyenletes eloszlású a $[0, 1]$ intervallumon.

A fenti meghatározáshoz a következőképpen lehet eljutni: tekintsünk egy véletlen (valószínűségi) változókból álló n -dimenziós (X_1, X_2, \dots, X_n) vektort. Tegyük fel, hogy a vizsgált n véletlen változó mindegyike folytonos, azaz az

$$F_i(x_i) = P(X_i \leq x_i) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (10)$$

egyváltozós eloszlásfüggvények folytonosak. A valószínűségi integrál-transzformáció alkalmazásával az eredeti véletlen változók mindegyike a $[0, 1]$ intervallumon egyenletes eloszlásúvá válik, azaz

$$(U_1, U_2, \dots, U_n) = (F_1(X_1), F_2(X_2), \dots, F_n(X_n)) \quad (11)$$

n -dimenziós vektor valamennyi komponense a $[0, 1]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó. Az (X_1, X_2, \dots, X_n) -hez tartozó kopula nem más, mint az (U_1, U_2, \dots, U_n) együttes eloszlásfüggvénye:

$$C(u_1, u_2, \dots, u_n) = P(U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2, \dots, U_n \leq u_n) . \quad (12)$$

Az alkalmazások szempontjából nagy jelentősége van Sklar (1959) tételének:

Ha $H(x_1, x_2, \dots, x_n)$ egy n változós eloszlásfüggvény, F_1, F_2, \dots, F_n marginálisokkal, akkor létezik olyan n -dimenziós C kopula, amelyre:

$$H(x_1, x_2, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)). \quad (13)$$

Amennyiben az F_1, F_2, \dots, F_n marginálisok mindegyike folytonos, akkor a C kopula egyértelműen meghatározott. Megfordítva, ha C egy n -dimenziós kopula és F_1, F_2, \dots, F_n egyváltozós eloszlásfüggvények, akkor a tételben szereplő H egy n -változós eloszlásfüggvény F_1, F_2, \dots, F_n marginálisokkal.

Sklar fenti tétele lehetővé teszi a marginális eloszlások és a függőségi struktúra szétválasztását. Így a függőségi struktúra „feltérképezése” két, jól elkülöníthető lépést foglal magába:

1. A marginális eloszlások becslését, ami egyszerűbb feladat, mint az együttes eloszlás becslése;
2. A kívánt függőségi struktúra marginális eloszlásokra történő illesztését.

A kopula, mint a függőség általános „mértéke” nagyfokú rugalmasságot biztosít a modellezésben, mert az egyes kockázati tényezőkre akár eltérő marginális eloszlást is illeszthetünk. Sklar tételének felhasználásával tetszőleges eloszlás (amelynek marginálisai folytonosak) kopula függvénye előállítható az alábbi módon:

$$C(u_1, u_2, \dots, u_n) = H(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2), \dots, F_n^{-1}(u_n)), \quad (14)$$

ahol $F_i^{-1}(u_i)$ $i = 1, 2, \dots, n$ kifejezések a marginális eloszlásfüggvények inverz függvényeit jelölik. A fent definiált kopula sűrűségfüggvénye az alábbi módon értelmezhető:

$$c(u_1, u_2, \dots, u_n) = \frac{\partial^n C(u_1, u_2, \dots, u_n)}{\partial u_1 \partial u_2 \dots \partial u_n}. \quad (15)$$

4 A kopulák alkalmazása a kockázat modellezésében

A továbbiakban – a kétdimenziós esetre szorítkozva – azt mutatjuk be, hogyan lehetséges egy portfólió ES-sel mért kockázatát becsülni. A portfólió hozameloszlása – az általunk meghatározott marginális hozamokra és a hozamok függőségét jellemző kopulára (Bouyé és szerzőtársai, 2000) támaszkodva – Monte Carlo szimulációval állítható elő.

A szimuláció lépései a következők:

1. Generálunk két, a $[0, 1]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változót: v_1, v_2 .

2. Legyen $u_1 = v_1$.
3. u_1 realizált értéke alapján szimuláljuk u_2 értékét a

$$C(u_2 | u_1) = \frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial u_1} = v_2 \quad (16)$$

feltételes eloszlásra támaszkodva.

4. A (16) egyenletet megoldjuk u_2 -re.
5. u_i ($i = 1, 2$) segítségével generáljuk a kívánt marginálisok egy-egy értékét:

$$F^{-1}(u_i) = r_i \quad (i = 1, 2) . \quad (17)$$

6. A fentiek alapján egy szimulált portfólió hozam:

$$R = wr_1 + (1 - w)r_2 . \quad (18)$$

7. Az 1-6. lépéseket m -szer ismételve m számú portfólióhozamhoz jutunk.
8. A kapott empirikus hozameloszlásból meghatározható ES (a kívánt α konfidenciaszinten).

A (18) összefüggésben szereplő w portfólió súly változtatásával az ES becslése tetszőleges portfólió-allokációra elvégezhető.

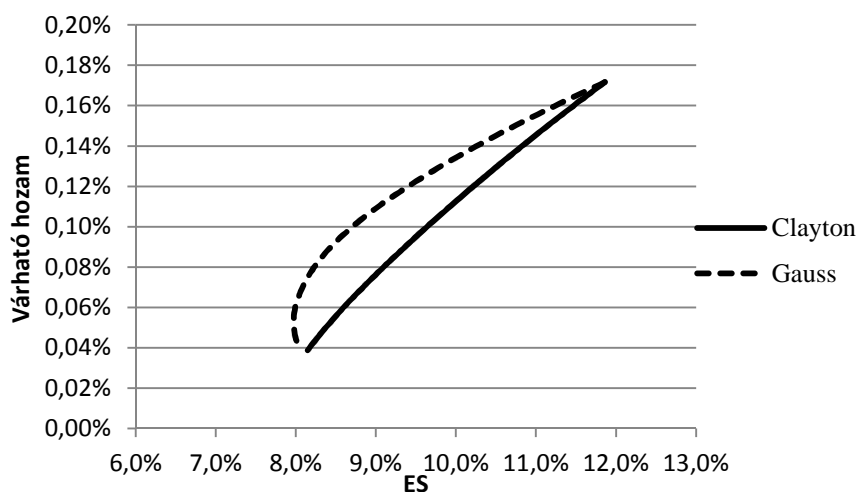
Az előzőekben leírt szimuláció valódi tőzsdei adatsorokon történő megvalósításának eredményét a 2. ábra szemlélteti. Az elemzés elvégzéséhez a londoni tőzszeindex (FTSE100) két, itt nem nevesített összetevőjének, 2008. január 3. és 2010. január 4. közötti, napi bontású árfolyam-idősorát vettük alapul. A két idősróból származtatott napi hozamok felhasználásával becsültük a két értékpapír várható hozamát, szórását és a hozamaik közötti korrelációt. Míg a hozamokra normális marginálisokat illesztettünk, addig a függőségi kapcsolatot kétféle módon modelleztük. Egyrészt Gauss-kopulával, ami jelen esetben annak felel meg, hogy a hozamok közötti kapcsolat erősségét a lineáris korrelációs együtthatóval mérjük. Másrészt a normális marginálisokra Clayton-kopulát ültettünk. Ez a tapasztalatok szerint különösen hasznosnak bizonyul befektetési portfóliók esetében, amikor a hozamok viszonylag erős függőséget mutatnak a negatív széleken, azaz a nagy veszteségek tartományában (Breymann és szerzőtársai, 2003).

A Clayton-kopula eloszlásfüggvénye:

$$C_\theta(u_1, u_2) = \max(u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1, 0)^{-1/\theta} , \quad (19)$$

ahol $\theta \in [-1, \infty) \setminus \{0\}$ a kopula paramétere.⁵

⁵ θ az adatokból könnyen becsülhető.



2. ábra. Két értékpapírból álló portfóliók kockázat–várható hozam profilja két eltérő függőségi struktúra esetén. Forrás: Bugár-Uzsoki (2013), 48. o.

A 2. ábráról leolvasható, hogy minden olyan esetben alábecsüljük a kockázatot, amikor az egyes portfólióelemek közötti kapcsolat modellezésénél – a nagy veszteségek együttes bekövetkezését hangsúlyozó Clayton-kopula helyett – a lineáris korrelációs együtthatóra támaszkodunk. A függőségi kapcsolat eltérő modellezése 0,1%-os várható hozamszint mellett – napi szinten – például közel egy 1 százalékpontos növekedést okozott az ES becsült értékében.

A kopulák megjelenése és tulajdonságaik kutatása nagyban hozzájárult a véletlen változók függőségének eredményes modellezéséhez. Fontos azonban hangsúlyozni, hogy hatékony felhasználásukhoz fontos követelmény alkalmazhatóságuk verifikálása.

A kétdimenziós kopulák több dimenzióra történő lehetséges kiterjesztését képviselik a Vine-kopulák. Jelentőségük abban keresendő, hogy ezek lehetővé teszik a többváltozós függőségi kapcsolatokat pár-kopulákkal – azaz magasabb dimenziós kopulák alkalmazása helyett kétdimenziós függőségi struktúrákkal – történő hierarchikus modellezését (Aas et al., 2006).

5 Összegzés

A tanulmányban a befektetési kockázat mérésében a modern portfólió elmélet kialakulásával kezdődő fejlődés fontosabb állomásait tekintettük át. Különkülön tértünk ki a megfelelő kockázati mérték megválasztásával és a portfólió elemek hozama közötti kapcsolatot kifejező függőségi mérték modellezésével kapcsolatos megoldási javaslatokra.

Gyakorlati szempontból nagy jelentőségű az a döntés, amellyel a Bázeli Bankfelügyeleti Bizottság (BCBS) a várható többletveszteséget (ES) – a belső

modellben alkalmazandó kockázati mértékként – 2016 januárjában beemelte a szabályozásba. Némiképp rontja a képet, hogy habár a kereskedési könyvben szereplő, piaci kockázatnak kitett pozíciók után képzendő szabályozói tőkekövetelmény megállapításánál az ES használatát írják elő, a belső kockázattertelő modell validitásának ellenőrzésére továbbra is a VaR-t kell alkalmazni.

Döntő jelentőségű tehát a jövőre nézve, hogy a Felügyelet megnyugtató módon ellenőrizni tudja a bankok által kifejlesztett belső kockázatmérési modellek hitelességét. Ez megkívánja az ES-re vonatkozó visszatesztelési eljárások fejlesztését és a lehetséges tesztek közül annak a kiválasztását, amely a fenti kívánalmat képes teljesíteni.

Véleményem szerint egy másik fontos kutatási irány a Vine-kopulák felhasználása a portfólió-elemek függőségi kapcsolatának modellezésében. Nagyméretű portfóliókra e módszertan alkalmazásának nehézségét az jelenti, hogy a többdimenziós függőségi struktúra pár-kopulákra történő felbontása nem egyértelmű és nagy a vizsgálandó lehetőségek száma.

Fontos megjegyezni, hogy a kopula-módszertan lehetőséget kínálhat eltérő kockázati tényezőknek – elsősorban piaci és hitelkockázatnak – kitett banki portfólió elemek függőségi kapcsolatának modellezésében is.

Irodalom

1. Aas, K. – Czado, C. – Frigessi, A. – Bakken H. (2006): Pair-copula constructions of multiple dependence, Discussion paper, LMU, Institut für Statistik, Sonderforschungsbereich 386, Paper 487.
2. Acerbi, C. B. – Székely, B. (2014): Backtesting Expected Shortfall. MSCI White paper, 1–37.
3. Artzner, P. – Delbaen, F. – Eber, J. M. – Heath, D. (1999): Coherent Measures of Risk, *Mathematical Finance*, Vol. 9, 203–228.
4. Basel Committee in Banking Supervision (BCBS, 2004): International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards: A Revised Framework. Bank for International Settlements, 1–251.
5. Basel Committee in Banking Supervision (BCBS, 2016): Minimum Capital Requirements for Market Risk, Bank for International Settlements, 1–88.
6. Baumol, W. J. (1963): An Expected Gain Confidence Limit Criterion for Portfolio Selection, *Management Science*, Vol. 10, 174–182.
7. Bouyé, E. – Durrleman, V. – Nikeghbali, A. – Riboulet, G. – Roncalli, T. (2000): *Copulas for Finance – A Reading Guide and Some Applications*, Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais, Paris.
8. Breymann, W. – Dias A. – Embrechts P. (2003): Dependence Structures for Multivariate High-Frequency Data in Finance, *Quantitative Finance*, Vol. 3, 1–14.
9. Bugár, Gy. (2015): *Piaci- és hitelkockázat menedzsment*, Akadémiai Kiadó, Budapest.
10. Bugár, Gy. – Uzsoki, M. (2013): Challenges and Achievements in Gauging Investment Risk, *Journal of Transnational Management*, Vol. 18 (1), 39–51.
11. Bugár, Gy. (1997): *Portfólió elemzés*, Janus Pannonius Egyetemi Kiadó, Pécs.

12. Carver, L. (2013): Mooted VaR substitute cannot be back-tested, says top quant, *Risk*, 8 March 2013.
13. Dowd, K. (2005): Copulas and Coherence – Portfolio Analysis in a Non-normal World, *Journal of Portfolio Management*, Fall 2005, 123–127.
14. Eftekhari, B. – Pedersen, C. S. – Satchell, S. E. (2000): On the volatility of measures of financial risk: an investigation using returns from European markets, *European Journal of Finance*, Vol. 6, 18–38.
15. Embrechts, P. – Resnick S. I. – Samorodnitsky, G. (1999): Extrem Value Theory as a Risk Management Tool, *North American Actuarial Journal*, Vol. 3, No. 2, 30–41.
16. Embrechts, P. – McNeil, A. – Straumann, D. (2002): Correlation and Dependence in Risk Management: Properties and Pitfalls. In: Dempster, M. A. H. (eds.) *Risk Management: Value at Risk and Beyond*. Cambridge. 176–223.
17. Embrechts, P. (2014): An Academic Response to Basel 3.5 - Risk Aggregation and Model Uncertainty. Conference on Extreme Events and Uncertainty in Insurance and Finance. Paris, 10 January (ppt slides).
18. Gneiting, T. (2011): Making and Evaluating Point Forecasts, *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 106, 746–762.
19. Markowitz, H. M. (1952): Portfolio selection, *Journal of Finance*, Vol. 8, 77–91.
20. Markowitz, H. M. (1991): Foundations of portfolio theory (Nobel Prize Lecture), *Journal of Finance*, Vol. 46, 469–477.
21. Rockafellar, R. T. – Uryasev, S. (2000): Optimization of Conditional Value-at-Risk, *Journal of Risk*, Vol. 2, 21–41.
22. Sarykalin, S. – Serraino, G. – Uryasev, S. (2008): Value-at-Risk vs. Conditional Value-at-Risk in *Risk Management and Optimization. Inform. Tutorials in Operations Research*, 270–294.
23. Sklar, A. (1959): Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges, *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris*, Vol. 8, 229–231.
24. Szegő, G. (2002): No more VaR (this is not a typo), *Journal of Banking and Finance*, Vol. 26, 1247–1251.
25. Szegő, G. (2004): On the (Non)Acceptance of Innovations. in G. Szegő *Risk Measures for the 21st Century* (ed.), John Wiley & Sons Ltd., 1–9.
26. Szegő, G. (2005): Measures of Risk, *European Journal of Operational Research*, Vol. 63, 5–19.
27. Vörös, J. (1986): Portfolio analysis – An analytic derivation of the efficient portfolio frontier, *European Journal of Operational Research*, Vol. 23, 294–300.
28. Vörös, J. (1987): The explicit derivation of the efficient portfolio frontier in case of degeneracy and general singularity, *European Journal of Operational Research*, Vol. 32, 302–310.
29. Vörös, J. – Kriens, J. – Strijbosch, L. W. G. (1999): A Note on the Kinks at the Mean Variance Frontier, *European Journal of Operational Research*, Vol. 112, 236–239.
30. Yamai, Y. – Yoshida, T. (2002): Comparative Analyses of Expected Shortfall and Value-at-Risk – their Estimation Error, Decomposition, and Optimization. *Monetary and Economic Studies*, Vol. 20 (1), 87–121.

MILESTONES IN MODELLING INVESTMENT RISK

This paper reviews the most important milestones of the methodological development in modelling investment risk. This process requires the estimation of portfolio risk, and it has two critical points. The first one is the proper selection of risk measure and the second one is the correct modelling of dependency between different portfolio elements. After reviewing the most important features characterizing the development from variance to expected shortfall in measuring risk and from linear correlation to copula approach in modelling dependency, it will be shown how copula methodology can be used in estimating expected shortfall.

Keywords: portfolio optimization, risk measure, copula

NEMLINEÁRIS SZIMBOLIKUS TRANSZFORMÁCIÓK OPTIMALIZÁLÁSI FELADATOKRA¹

CSENDES TIBOR – DOBJÁNNÉ ANTAL ELVIRA

Szegedi Tudományegyetem – Neumann János Egyetem, Kecskemét

A szimbolikus algebra rendszerek elterjedése kapcsán egyre nyilvánvalóbb az optimalizálási feladatok átírásának, kedvezőbb alakra hozásának lehetősége. Az ilyen egyszerűsítések haszna többrétű lehet. Egyrészt kevesebb művelettel kiértékelhető alakra hozhatjuk az érintett függvényeket. Fölismerhetünk továbbá olyan, a feladat redundanciájára vonatkozó összefüggéseket, amiket általában nincs esélyünk észrevenni. Ezek ismeretében az átalakított feladat megoldásaiból az optimális pontokból álló alteret is meghatározhatjuk. Végül az esetleges dimenziócsökkentés a legtöbb optimalizálási eljárás iterációs számának csökkenését eredményezi. Az automatikus működés miatt eljárásunk érdemi emberi közbeavatkozást nem igényel, és így nagyméretű, bonyolult feladatok is kezelhetővé válhatnak. A jelen cikkben áttekintjük az e téren végzett munkánkat, és új eredményeket mutatunk az intervallum aritmetikán alapuló globális optimalizálási algoritmus hatékonyságának és pontosságának növelése vonatkozásában.

1 Bevezető

Szimbolikus eszközök régóta használatosak optimalizálási feladatok megoldásában. Például a szimbolikus preprocessálás a lineáris programozásban [16], illetve ilyen átalakítás az AMPL automatikus „presolving” mechanizmusa is [9,10]. Egy újabb példa Liberti és munkatársai Reformulation-Optimization Software Engine nevű (vegyes-) egészértékű optimalizálási segédprogramja [14].

Csendes és Rapcsák cikkei [7,19] megmutatták, hogy lehetséges korlátozás nélküli nemlineáris optimalizálási feladatokat úgy átírni automatikus módon szimbolikus eszközökkel, hogy kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés létezzon a két probléma szélsőértékei között. Ez a módszer alkalmas a redundáns változók kiküszöbölésére és a feladat más szempontból való egyszerűsítésére is.

Az eredeti (kicsit bonyolult) motiváló feladat a következő légzésmechanikai paraméterbecslési probléma volt [13], az

$$F(R_{aw}, I_{aw}, B, \tau) = \left[\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m |Z_L(\omega_i) - Z'_L(\omega_i)|^2 \right]^{1/2}$$

¹Az elvégzett kutatást részben a Nemzeti Fejlesztési Ügynökség TÁMOP-4.2.2/08/1/2008-0008 pályázata támogatta. Beérkezett: 2017. január 7. E-mail: csendes@inf.szte.hu.

minimalizálása, ahol $Z_L(\omega_i) \in \mathbf{C}$ a mért impedancia érték és $Z'_L(\omega_i)$ az impedancia modellfüggvénye az ω_i frekvencia értékekre ($i = 1, 2, \dots, m$). A keresett modell paraméterek R_{aw}, I_{aw}, B , és τ . Az eredeti nemlineáris modellfüggvény a fizikai modell paramétereivel:

$$Z'_L(\omega) = R_{aw} + \frac{B\pi}{4.6\omega} - \iota \left(I_{aw}\omega + \frac{B \log(\gamma\tau\omega)}{\omega} \right),$$

ahol $\gamma = 10^{1/4}$ és ι a képzetes egység.

A szimbolikus algoritmus kidolgozását a következő egyszerűsített modellfüggvény motiválta, ami lineáris a modell paraméterekben:

$$Z'_L(\omega) = R_{aw} + \frac{B\pi}{4.6\omega} - \iota \left(I_{aw}\omega + \frac{A + 0.25B + B \log(\omega)}{\omega} \right).$$

A nehezen fölismerhető ügyes helyettesítés lényegében az $A = B \log(\tau)$. A modell paraméterek száma megegyezik a két alakban. Az átalakítás nagy érdeme, hogy lineáris modellek legkisebb négyzetes illesztése egyszerű, nem is igényel optimalizálást.

A cikk a következő szerkezetet követi: a második szakaszban ismertetjük az ötletet és megadjuk a kapcsolódó elméleti eredményeket, a harmadik szakaszban pedig az eljárással elérhető javulás részleteit adjuk meg több szempont szerint rendezve.

2 Az egyszerűsítési módszer, ötlet és elméleti eredmények

Tekintsük a korlátozás nélküli nemlineáris optimalizálási feladatot a

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}), \quad (1)$$

alakban, ahol $f(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ egy sima függvény, amit képlet formájában is ismerünk. Itt képleten szimbólumoknak (konstans, változó, műveleti jel, függvénynév és zárójel) egy zárt alakban fölírt, szintaktikailag helyes kombinációját értjük. Ezt egy számítógépes algebra rendszerben (mint amilyen például a Mathematica) általában egy irányított körmentes gráfot [20] leíró listával adhatjuk meg. A szimbolikus alak rendelkezésre állása az egyszerűsítés természetes föltétele, habár az optimalizálandó függvény gyakran csak eljárással adott, esetleg közelítés formájában, vagy például szimulációra támaszkodva érhető el.

Az egyszerűsítő eljárás azt dönti el, hogy (1) átalakítható-e olyan ekvivalens alakba, amely kedvezőbb valamely szempontból: az új függvény kevesebb aritmetikai műveletet igényel a kiértékeléshez, a probléma dimenziója alacsonyabb, vagy egyszerűbb megoldani valamely más okból. Az ekvivalens alak itt azt jelenti, hogy kölcsönösen egyértelmű leképezés adható az eredeti és az átalakított feladat szélsőérték pontjai között.

Csendes és Rapcsák [7] megmutatták, hogy egy $g(\mathbf{y})$ célfüggvény ekvivalens $f(\mathbf{x})$ -el, ha $g(\mathbf{y})$ előáll a következő transzformációval:

- alkalmazzunk egy helyettesítést $f(\mathbf{x})$ -re:

$$y_i := h(\mathbf{x}), \quad 1 \leq i \leq n,$$

ahol $h(\mathbf{x})$ egy sima függvény, aminek értékkészlete \mathbb{R} , és szigorúan monoton legalább egy x_i változójában,

- a megmaradó változókat nevezzük át:

$$y_j := x_j, \quad j = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n,$$

és

- hagyjuk el azokat az y_i változókat, amelyek nem szerepelnek a kialakult célfüggvényben.

Alkalmos helyettesítésen olyan $y_i = h(\mathbf{x})$ helyettesítést értünk, amelyre teljesül, hogy

- $h(\mathbf{x})$ sima, monoton legalább egy x_i változóban, és az értékkészlete \mathbb{R} ,
- $h(\mathbf{x})$ jellemzi legalább egy x_i változó összes előfordulását, azaz x_i teljesen eltávolítható $f(\mathbf{x})$ -ből, ha $h(\mathbf{x})$ -et y_i -vel helyettesítjük, és
- $y_i = h(\mathbf{x})$ nem egy egyszerű átnevezés, tehát $h(\mathbf{x}) \neq x_i, i = 1, \dots, n$.

Az $y_i = h(\mathbf{x})$ helyettesítés után \mathbf{y} változóinak száma legföljebb annyi, mint az \mathbf{x} dimenziója. A redundáns változók törlődnek, ha $h(\mathbf{x})$ több változó összes előfordulását jellemzi. Más szóval, fel tudjuk ismerni, hogy a modellünket kevesebb ismeretlennel is meg lehet-e fogalmazni. A megadott, a helyettesítésre vonatkozó feltételek elegendőek, de nem feltétlen szükségesek. Ennek megfelelően a tárgyalt eljárás csak egy a lehetőségek között, más utak is elképzelhetők.

Tekintsük például az $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^2$ függvény minimalizálását. Ez nyilvánvalóan ekvivalens a $g(y_1) = y_1^2$ szélsőértékének megkeresésével, és az x_1 és x_2 optimális értékeit meghatározhatjuk az $y_1 = x_1 + x_2$ egyenletből, ami egy alkalmas helyettesítést ad. Ezen a módon végtelen sok minimumpontot is tudunk kezelni, ami amúgy nem lenne lehetséges a szokásos numerikus módszerekkel. Ez az egyik fő célja a módszerünknek: szimbolikus helyettesítéssel felismerni és alkalmas helyettesítéssel megszüntetni a redundanciát a függvényünkben.

Az első cikkben [7] igazolt két tétel feltételeket ad az alkalmazott transzformációkra ahhoz, hogy az eredeti és az átirított feladat megoldásai származtathatók legyenek.

1. tétel. *Ha $h(\mathbf{x})$ sima és szigorúan monoton az x_i változóban, akkor az ennek megfelelő transzformáció egyszerűsíti a függvényt abban az értelemben,*

hogy $h(\mathbf{x})$ minden előfordulását egy új változóval helyettesítjük az átalakított $g(\mathbf{y})$ függvényben, míg $f(\mathbf{x})$ minden helyi minimumpontja (maximumpontja) transzformáltja a $g(\mathbf{y})$ függvény minimumpontja (maximumpontja) lesz.

2. tétel. Ha $h(\mathbf{x})$ sima és szigorúan monoton az x_i változóban, és az értékkészlete egyenlő a valós számokkal (\mathbb{R}), akkor a $g(\mathbf{y})$ átalakított függvény minden \mathbf{y}^* helyi minimumpontjához (maximumpontjához) van olyan \mathbf{x}^* , hogy \mathbf{y}^* az az \mathbf{x}^* transzformáltja, és \mathbf{x}^* helyi minimumpontja (maximumpontja) $f(\mathbf{x})$ -nek.

Ugyanez a cikk módszert javasolt az alkalmas helyettesítési képletek megkeresésére az 1. és 2. állításban [7], ehhez képezni kell a $\partial f(\mathbf{x})/\partial x_i$ parciális deriváltakat, majd szorzatra bontani ezeket, és a faktorok között megkeresni az alkalmas helyettesítő képleteket.

1. állítás. Ha az x_i változó az $f(x)$ sima függvény képletében mindenütt a $h(x)$ kifejezés formájában fordul elő, akkor a $\partial f(x)/\partial x_i$ parciális derivált fölírható $(\partial h(x)/\partial x_i)p(x)$ alakban, ahol $p(x)$ folytonosan differenciálható.

2. állítás. Ha az x_i és x_j változók az $f(\mathbf{x})$ függvényben mindenhol egy $h(\mathbf{x})$ kifejezés formájában jelennek meg, akkor a $\partial f(\mathbf{x})/\partial x_i$ és $\partial f(\mathbf{x})/\partial x_j$ parciális deriváltak szorzatra bonthatók úgy, hogy $(\partial h(\mathbf{x})/\partial x_i)p(\mathbf{x})$, illetve $(\partial h(\mathbf{x})/\partial x_j)q(\mathbf{x})$, és $p(\mathbf{x}) = q(\mathbf{x})$.

Ha $\partial f(\mathbf{x})/\partial x_i$ nem bontható szorzatra, akkor csak olyan alkalmas helyettesítést végezhetünk, amelynek képlete az x_i változó lineáris függvénye.

Az említett elméleti eredmények alapján egy olyan számítógépes programot lehet írni, amely korlátozás nélküli optimalizálási feladatok egyszerűsítésére automatikusan képes alkalmas helyettesítést keresni. Az implementációnk a következő lépéseket követi.

1. Határozzuk meg a célfüggvény gradiensét.
2. Faktorizáljuk a parciális deriváltakat.
3. Gyűjtsük össze az x_i -re vonatkozó lehetséges helyettesítési képleteket az l_i listába:
 - (a) Inicializáljuk l_i -t az üres halmazzal.
 - (b) Ha a faktorizálás eredményes volt $\partial f(\mathbf{x})/\partial x_i$ -re nézve, akkor egészítsük ki az l_i listát a faktorok megfelelő integráljaival.
 - (c) Bővítsük az l_i listát $f(\mathbf{x})$ olyan részkiefejezéseivel, amelyek lineárisak x_i -ben.
 - (d) Töröljük l_i azon elemeit, amelyek nem teljesítik az alkalmas helyettesítés feltételeit (az l_i -beli kifejezéseknek monotonnak kell lenniük x_i -re vonatkozóan).
4. Hozzunk létre alkalmas helyettesítéseknek $f(\mathbf{x})$ -re való alkalmazásából egy S listát: $S = \bigcup l_i$, $i = 1, \dots, n$.

5. Válasszuk ki a legkisebb műveletigényű elemet S -ből, ami az egyszerűsített célfüggvény lesz.
6. Oldjuk meg az egyszerűsített célfüggvény minimalizálási feladatát (ha lehetséges).
7. Határozzuk meg az eredeti feladat megoldását az inverz transzformáció alkalmazásával.

Az algoritmus által megkívánt lépések többsége (parciális differenciálás, szorzatra bontás, szimbolikus integrálás és helyettesítés) közvetlenül elérhető a modern számítógépes algebra rendszerekben. Másrészt a Maple rendszerben írt első implementációnk azt mutatta, hogy még a piacvezető számítógépes algebra rendszerekben is komoly hiányosságok vannak a behelyettesítési képességek és az intervallum aritmetika végtelen intervallumokra való alkalmazása terén [4].

Egy függvény monotonitását intervallum aritmetikával is lehet ellenőrizni. Egy $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvény akkor szigorúan monoton, ha bármely $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ -re ha $\mathbf{x} < \mathbf{y}$, akkor $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{y})$ ($f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{y})$). Ez ellenőrizhető az f deriváltja értékkészletével: amennyiben az nem tartalmazza a nullát, akkor f monoton. Az algoritmusunkban azt kell tisztázni, hogy a $h_i(\mathbf{x})$ helyettesítő képletre igaz-e, hogy $\partial h_i(\mathbf{x})/\partial x_i$ nem veheti föl a nulla értéket. Meg kell említeni, hogy a monotonitás intervallum aritmetikával való ellenőrzését nehezíti az intervallumos számítások gyakori túlbecslése (az, hogy a kapott korlátok sokszor nem élesek).

3 Implementáció és számítógépes eredmények

A [4] cikkben bemutatott Maple implementáció során felmerült – a programkörnyezetből adódó – hiányosságok kiküszöbölésére az eljárást megvalósítottuk Mathematicában is [3]. A korábbival összehasonlítva a Mathematicának több előnye is van. Először is, a mi célunkhoz szükséges helyettesítések sokkal jobban működnek, mivel a Mathematica programozási nyelve term-átíráson alapul [15]. Pontosabban, a Mathematica helyettesítő rutinja reguláris kifejezésekkel megadott term-átírási szabályokkal vezérelhető, ráadásul ezek a felhasználó által definiált szabályok magasabb precedenciát élveznek a rendszerbe építettekkel szemben [11]. A megírt speciális helyettesítő rutin mintegy ötven programsorból áll, ami a Mathematica elegáns, kifejező nyelvét ismerők számára önmagában is árulkodik összetettségéről. Tucatnyi (késleltetett) szabályt vezetünk be, amiket négy különböző módon értékelünk ki, bevonva a képlet Mathematica által kifejtett, egyszerűsített, és faktorizált alakjait is. Valószínűleg ez a rutin a program legfontosabb része, hiszen több fázisban is meghívódik, így kis javításokkal alapvetően megváltoztatható az egyszerűsítési folyamat eredménye.

A Mathematicában található intervallum aritmetika is megbízhatóbb: ez a helyettesítésre szóba jövő kifejezések gyors és megbízható értékkészlet-

becsléséhez különösen fontos. Az értékészlet behatárolására szolgáló naiv intervallumos befoglalást a beépített intervallum aritmetikával valósítottuk meg.

Az új program támogatja az összes lehetséges helyettesítés felsorolását is, majd ezek közül a legkedvezőbb kiválasztását az algoritmusunk 4.-5. lépésében, futási idő tekintetében mégis felveszi a versenyt az egyszerűbb Maple változattal, amely mohó módon az első megtalált alkalmas helyettesítést szolgáltatta. Köszönhető ez a mindkét számítógépes algebra rendszer által kínált, de a Mathematicában alapvetőbb [12,23] funkcionális programozási paradigma alkalmazásának, és a Mathematica rendszer további kedvező tulajdonságainak, mint amilyen a lista műveletek automatikus párhuzamosítása. Ugyanakkor az összes lehetséges helyettesítésen értelmezett keresési térre vonatkozó korlátozás és szétválasztás jellegű stratégia megalkotása gyorsítana az eljárásán, ez egy eddig kiaknázatlan továbbfejlesztési lehetőség.

Készült egy webes alkalmazás is a bemutatott algoritmus képességeinek demonstrálására, ez a Mathematica programkóddal együtt a következő linken érhető el:

<http://www.inf.u-szeged.hu/~csendes/symsimp/>

3.1 Előrelépés a Maple változathoz képest

A Mathematica implementáció hatékonyságát először is a saját tesztalmanazon, abból is a Maple verzió számára problémás eseteken vizsgáltuk. A korábbi vizsgálatainkban szereplő tesztesetekre a Mathematicában elért eredményt az 1. táblázat tartalmazza. Az ebben nem szereplő esetekben a két implementáció kimenete azonos volt. Az érdekesebb helyettesítések kiemelése érdekében az egyszerű átnevezéseket ($y_j := x_j$) nem tüntetjük fel. Jelölések: Azon.: a feladat azonosítója, Fel.: a feladat típusa, Ered.: az eredmény jellege. Utóbbi két jellemző tartalma: A feladat típusát A-nak definiáljuk, ha egyszerűsítő átalakítások adhatók a bemutatott elmélettel összhangban. A feladat típusa D, ha nem számítottunk semmilyen hasznos átalakításra. Az eredmény jellege azt mutatja, hogy a programunk korrekt helyettesítést adott (1), vagy semmilyen helyettesítést sem adott (2). A kategorizálás részletesebb volt korábbi közleményeinkben [2,3,4].

| Azon. | f függvény | g függvény | Helyettesítések | Fel. | Ered. |
|--------|-------------------------------------|-------------------------|-----------------------|------|-------|
| Sin2 | $2x_3 \cdot \sin(2x_1 + x_2)$ | $2x_3 \sin(y_1)$ | $y_1 = 2x_1 + x_2$ | A | 1 |
| Exp1 | $e^{x_1+x_2}$ | e^{y_1} | $y_1 = x_1 + x_2$ | A | 1 |
| Exp2 | $2e^{x_1+x_2}$ | $2e^{y_1}$ | $y_1 = x_1 + x_2$ | A | 1 |
| Sq1 | $x_1^2 x_2^2$ | semmi | semmi | D | 2 |
| Sq2 | $(x_1 x_2 + x_3)^2$ | y_1^2 | $y_1 = x_1 x_2 + x_3$ | A | 1 |
| SqCos1 | $(x_1 x_2 + x_3)^2 - \cos(x_1 x_2)$ | $y_1^2 - \cos(x_1 x_2)$ | $y_1 = x_1 x_2 + x_3$ | A | 1 |
| SqExp2 | $(x_1 + x_2)^2 + 2e^{x_1+x_2}$ | $y_1^2 + 2e^{y_1}$ | $y_1 = x_1 + x_2$ | A | 1 |
| SqExp3 | $(x_1 + x_2)^2 + 2e^{1+x_1+x_2}$ | $y_1^2 + 2e^{1+y_1}$ | $y_1 = x_1 + x_2$ | A | 1 |

1. táblázat. A problémás saját tesztfüggvényeken elért eredmények a Mathematica implementációval

A Maple intervallum aritmetikája kapcsán jelentkező anomáliák miatt az eredeti implementációban heurisztikát alkalmaztunk az értékkészlet-becslésre. A felmerülő hibák másik nagy csoportját a gyenge helyettesítő rutin okozta. A következőkben részletesen kifejtjük az eredményekben jelentkező különbségeket. A *Sin2* problémára az új implementáció alkalmas helyettesítést talált, míg a régi egy összetettebb, de nem monoton helyettesítést szolgáltatott.

Exp2-ben $e^{x_1+x_2}$ értékkészlete nem a teljes valós számok halmaza, de a Maple-ben használt heurisztikus értékkészlet-becslés alkalmas helyettesítésként ismert fel. A Mathematicában készült értékkészlet-becslő rutin jobban teljesített ebben az esetben.

Az *Sq1* esetén a Maple nem ismert fel $x_1^2x_2^2$ -ben a x_1x_2 képletet, habár *Sq2*-nél $x_1x_2+x_3$ -at megtalálta a négyzetes alakban. Mivel az utóbbi a legmagasabb szinten szorzat helyett összeadás típusú, a reprezentációja különböző. Mathematicában hasonló az eset, de az egyedi helyettesítési szabályokból építkező speciális helyettesítő rutin jól vizsgázott erre a feladatra. Másrészt x_1x_2 nem monoton sem x_1 , sem x_2 függvényeként a teljes keresési tartományban (amit \mathbb{R} -nek feltételezünk), ezért nem volt alkalmas helyettesítésként megjelölve.

Hasonlóképp az *SqCos1* tesztfeladatra az új, Mathematica-alapú eljárás helyesen állapította meg, hogy $y_1 = x_1x_2$ nem monoton, ezért eltávolította a lehetséges helyettesítések listájából.

SqExp2-3 esetén ugyancsak a Maple mintaillesztés terén jelentkező gyengesége figyelhető meg, mivel $x_1 + x_2$ -t felismerte $e^{x_1+x_2}$ -ben, $e^{1+x_1+x_2}$ -ben azonban nem. A Mathematica implementációban nem jelentkezett ez a probléma. Összefoglalásul megállapíthatjuk, hogy a Mathematica alapú implementációnk lényeges javítást jelent a korábbihoz képest, és lényegében az elvárható módon működik.

3.2 Globális optimalizálási tesztfeladatokon elért eredmények

A Mathematica implementáció vizsgálata során a standard és egyéb gyakran használt globális optimalizálási tesztfeladatokat tartalmazó teszthalmazt némileg bővítettük a korábbi publikációhoz képest [4,3]. A legtöbb esetben az új eredmény megegyezik a korábbi megvalósításával. A két eltérést a *Schwefel-227* (*Sch227*) és a *Schwefel-32* (*Sch32*) függvény kétdimenziós alakjánál tapasztaltuk. A *Schwefel-227* feladatra a Maple változat az $y_1 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1$ helyettesítést adta. Ez a kifejezés jellemzi x_2 minden előfordulását, de nem monoton egyik változójában sem, ezért a Mathematica változat nem javasolta helyettesítésre. A Rosenbrock-feladattal rokon kétdimenziós *Schwefel-32* esetén a Mathematica talált alkalmas helyettesítést, míg a Maple nem.

Ezúttal az átalakítás futási idejét is mértük. Minden átírás a Mathematica 9.0-es verziójával készült, a futási időt fél órában maximáltuk. Azokban az esetekben, amikor a teljes egyszerűsítés nem zajlott le 1800 másodpercen belül, a futást megállítottuk. A numerikus tesztek egy Intel i5-3470 processzorral, 8 GB RAM-mal, és 64-bites operációs rendszerrel felszerelt számítógépen

tógépen futtattuk.

A teljesítmény profil értékelése alapján kijelenthető, hogy a futási idő nagy részét – nem meglepő módon – a szimbolikus képlet-átalakítások és a kiterjesztett helyettesítő rutin igényelte. Míg az 1. táblázat átalakításainak mindegyike kevesebb, mint 0,2 másodperc alatt lezajlott, a standard tesztfeladatok futási ideje sokkal nagyobb szórást mutatott. A 45-ből 24 teszt eset kevesebb, mint egy másodperc alatt futott. További 10 esetben kevesebb, mint egy perc elegendőnek bizonyult. Viszont 7 esetben több, mint fél órát igényelt volna az automatikus egyszerűsítő.

Összesen 45 jól ismert globális optimalizálási tesztfeladatot vizsgáltunk, és ezek közül 8 esetben a Mathematica program talált ekvivalens átírást. Más szavakkal, a módszerünk a tesztalmaz 18%-ára ajánlott valamiféle egyszerűsítést. Tekintve, hogy ezekre a feladatokra nincs más ismert módszer, amely ilyen jellegű automatikus egyszerűsítéseket állítana elő, az eredmény figyelemre méltó. Megvizsgáltuk, hogy a produkált átírások milyen hatást gyakorolnak egy klasszikus numerikus multi-start megoldó teljesítményére. Az összes tesztfeladat átlagában a függvény-kiértékelések számának az átírásnak köszönhető relatív javulása 32,0% volt. Ugyanakkor ez a mutató a saját tesztfeladataink átlagában kedvezőbb (51,8%), a standard problémákon kevésbé jó (14,7%). A futási idők tekintetében az átalakított feladatalak szinte minden esetben egy kicsivel gyorsabb futást tett lehetővé a GLOBAL optimalizáló eljárás számára. Az egész tesztalmazra a futási idő átlagos relatív javulása 31,5%. E mutató a saját tesztfeladataink átlagában 56,9%, a standard problémákra pedig 9,3%.

3.3 Az intervallumos befoglalás javítása

Intervallumos módszerek [1] mind népszerűbbek olyan esetekben, amikor globális optimalizálási feladatok megbízható megoldására van szükség. Az intervallum aritmetikát támogató olyan korszerű számítógépes eszközök, mint a Matlab intervallumos kiegészítő csomagja, az Intlab, vagy magas szintű programozási nyelvek, amelyek mind az intervallumos befoglaló függvényeket, mind a deriváltakat automatikusan tudják generálni (pl. C-XSC) szélesítették a lehetséges alkalmazások körét. Mégis, az intervallumos számítások fő nehézsége, az úgynevezett túlbecslés nagyon meg tudja növelni az egyes feladatok megoldásához szükséges számítási időt.

A túlbecslésre az egyik gyakran használt elrettentő példa az $f(x) = x^2 - x$ függvény értékkészletének intervallumos befoglalása az ún. naiv intervallum aritmetika segítségével. Tekintsük az $X = [0, 1]$ intervallumot. Ezen az $f(x)$ értékkészlete nyilván $f(X) = [-0,25, 0]$, hiszen 0 és 1 épp $f(x)$ zérushelyei, és $f(x)$ minimuma a 0,5 pontban van, az értéke $-0,25$. Ezzel szemben $f(x)$ egy befoglaló függvénye $F(X) = X \cdot X - X$, amit a $[0, 1]$ intervallumon kiértékelve $[0, 1] \cdot [0, 1] - [0, 1] = [0, 1] - [0, 1] = [-1, 1]$ -et kapunk. Ez az intervallum nyolcszor szélesebb, mint $f(x)$ értékkészlete a $[0, 1]$ intervallumon! Miközben mindössze két műveletet hajtottunk végre, és nyilvánvalóan a bonyolultabb függvények esetén nagyobb túlbecslésre számíthatunk.

A probléma részletes elemzésébe most nem tudunk belemenni, de arra szeretnénk rámutatni, hogy a problémát az okozza, hogy ha matematikai bizonyító erővel bíró befoglaló függvényeket hatékonyan akarunk kiszámítani számítógépen, akkor minden művelet végrehajtása során azt kell föltételeznünk, hogy az argumentum intervallumok függetlenek, azaz az azokban lévő valós számok bármely kombinációja előfordulhat. Ez nyilván nem teljesül a példánkban. Az intervallum aritmetika hüvelykszabálya szerint akkor lehet pontos befoglalást kapni, ha a függvényünk úgynevezett SUE típusú (single use expression), amely tehát minden változót csak egyszer használ a kiértékelés során. Ezt sajnos nem lehet föltételezni általában gyakorlati feladatok esetén, sőt, a nagy méretű modellezési feladatok összeállításában alkalmazott folyamatszintézis rendszerek [8] épp hogy erősen redundáns kifejezéseket produkálnak.

A cikkünkben leírt módszer alapján véve az optimalizálandó függvényünk kiértékeléséhez szükséges műveletek számát akarja csökkenteni, és amennyiben ez lehetséges, fölismerni az eredeti alakban a redundanciát. Ez nem ugyanaz, mint ami az intervallumos kiértékelés pontosságának növeléséhez kell. A probléma megoldásának első lépéseként mégis azt vizsgáltuk meg, hogy a meglévő nemlineáris függvény egyszerűsítési transzformációknak mi a hatása globális optimalizálási feladatok intervallumos módszerekkel való megoldására. A tesztelt algoritmus az intervallumos Newton-módszerrel kiegészített korszerű korlátozás és szétválasztás típusú globális optimalizálási algoritmus volt [18]. A megállási feltételbeli konstans legalább két értékes jegynyi relatív pontosságot követelt meg.

Tekintsük először a jól ismert Rosenbrock-feladatot (banánfüggvényként is ismert, a képlete $(1-x)^2 + 100(x^2 - y)^2$, az egyetlen helyi minimumpontja nyilvánvalóan $(1, 1)^T$, az optimum értéke nulla). Maga az egyszerűsítés elhanyagolható mennyiségű számítást kellett volna hogy megtakarítson, hiszen a két függvényalak közti eltérés a végzett műveletek számában nem jelentős. Az eredeti függvényalakra a következő eredményt kaptuk:

```
Function name:  ros2
The set of global minimizers is located in the union of the following boxes:
c1:[0.99487304687500, 1.00235210730573] [0.98876953125000, 1.00708007812500]
c2:[1.00271012643331, 1.00488165028086] [1.00097656250000, 1.01318359375000]
The global minimum is enclosed in:
[0.0000000000000000, 0.000022260135021864]
Statistics:
  Iter  Feval  Geval  Heval  MLL  Time(sec)
    36    251   174    15    10    0.94
```

Megállapíthatjuk, hogy az eredmény helyes, a *c1* intervallum tartalmazza a megoldást, és a kapott relatív pontosság is jó: 2-3 jegynyi a helyben, és hasonló az optimális célfüggvény értékben. Lássuk az átalakított feladatra kapott outputot:

```
Function name:  ros2v
The set of global minimizers is located in the union of the following boxes:
c1:[-0.0000000000000000, 0.0000000000000000] [-0.0000000000000000, 0.0000000000000000]
The global minimum is enclosed in:
[0.0000000000000000, 0.0000000000000000]
```

```

Statistics:
  Iter   Feval   Geval   Heval   MLL   Time(sec)
    9     42     31     1     1     0.11

```

Ez nyilván az átalakított feladat eredménye, tehát a nulla értékek a helyben és az optimum értékében helyesek. A kapott pontosság olyan jó, hogy igazából össze sem vehető az eredetiével. A Matlab kiíratási rendszere ismeretében azt lehet mondani, hogy a kapott intervallumok eltérnek ugyan a $[0,0]$ intervallumtól, de az eltérések mértéke olyan kicsi, hogy azt még a standardnál hosszabb számábrázolás sem tudja megmutatni. Minden esetre olyan tíz nagyságrenddel pontosabb az eredményünk. Ráadásul ezt a szép eredményt nem növekvő számítási ráfordítással értük el, hiszen minden hatékonysági mutató javult: 36 helyett elég volt 9 iteráció (Iter). A függvényhívások (Feval), a gradienshívások (Geval) és a Hesse mátrix számítások (Heval) száma is csökkent, rendre: 251-ről 42-re, 174-ről 31-re és 15-ről 1-re. Az is nagyon beszédes, hogy a földolgozatlan részintervallumok maximális száma (MLL) is kisebb lett: 10-ről 1-re. Ez azt jelzi, hogy a módszer a lehető legegyszerűbbnek találta az átírt feladatot. A CPU idő csökkenése ugyan összhangban van az előbb mondottakkal, de ennek kisebb a jelentősége, hiszen valódi feladaton inkább az előző mutatók a fontosak. Összességében azt mondhatjuk, hogy a kapott eredmény már-már gyanúsán kedvező.

Lássunk most egy másik standard globális optimalizálási feladatot, a Levy-10 nevűt.

```

Function name: L10
The set of global minimizers is located in the union of the following boxes:
c1: [0.99999993564181, 1.00000006433416] [0.96591507795486, 1.04004632763272]
     [0.99366780273703, 1.12761120490455] [0.93750000000000, 1.19587646550836]
     [0.89381419541709, 1.00189285440539]
The global minimum is enclosed in:
[0.000000000000000000, 0.000567456706858098 ]
Statistics:
  Iter   Feval   Geval   Heval   MLL   Time(sec)
    17    127     85     6     17    3.20

```

Az egyszerűsített feladatra kapott eredmény:

```

Function name: L10v
The set of global minimizers is located in the union of the following boxes:
c1: [0.00000000000000, 0.00077514614094] [-0.01031504005235, 0.02046607537265]
     [-0.04137133829842, 0.01705999539191] [-0.04080756533673, 0.04296875000000]
     [-0.02127534259525, 0.01985113485206]
The global minimum is enclosed in:
[0.000000000000000000, 0.000000000000000000]
Statistics:
  Iter   Feval   Geval   Heval   MLL   Time(sec)
    258   2130   1651   133    32    51.73

```

Megállapíthatjuk, hogy ez esetben a hatékonysági mutatók mind rosszabbak lettek, az átírt feladatra egy-két nagyságrenddel több számítógépes erőforrást kellett fordítani. Ennek ellenére ez is egy lelkesítő eredmény, mert ugyan a megállási feltétel változatlan volt, mégis ismét sokkal pontosabb eredményt kaptunk. A pontosság javulását is figyelembe véve a függvényhívások stb. száma fajlagosan lényegesen csökkent. Ennek valószínűleg az az

oka, hogy az átírt függvény kedvezőbb volt a Newton-lépés számára. Ezt a megállapítást a többi, itt nem részletezett tesztünk is alátámasztja.

A számítógépes vizsgálatokat megismételtük az olyan gyakran használt globális optimalizálási tesztfeladatokra, amelyen az egyszerűsítési eljárásunk változtatott. Az eredményeket a 2. táblázatban foglaltuk össze. Tehát a következő lépéseket követtük: lefuttattuk a [18] cikkben leírt intervallumos globális optimalizáló algoritmust minden gyorsító teszttel (monotonitási teszt, konkavitási teszt, intervallumos Newton-lépés) az eredeti és az átírt feladaton. Ezután megmértük a globális optimum helyében és értékében kapott bizonytalanságot. Ezt azzal jellemeztük, hogy a kiindulási több-dimenziós intervallum méretéhez képest mekkora az eredmény intervallumok összterfogatata. A kapott értékeket százalékos formában jelenítettük meg. Az átírt feladatok eredményeit úgy kaptuk, hogy az átalakított kiinduló box térfogatához hasonlítottuk az eredmény térfogatát. Így a táblázatunk összevethető értékeket tartalmaz.

A 2. táblázatban használt jelölések a következők. Min. pont rel. mérete (%): a globális minimum pontot befoglaló boxok összterfogatának a kiinduló boxhoz viszonyított százalékos aránya. Min. rel. mérete (%): a minimumot befoglaló box térfogatának a kiinduló boxhoz viszonyított százalékos aránya. A futtatási időt másodpercben mértük, és minden kísérletet 10 alkalommal megismételtünk. Maga az optimalizáló eljárás determinisztikus, a megismételt futtatásra csak a futásidő megbízható meghatározása végett volt szükség. Az átírt feladatok azonosítója végére egy "v" betűt írtunk, tehát az eredeti és az egyszerűsített feladatok egymás után következnek a táblázatban a könnyebb összevetés érdekében.

| Azon. | Min. pont rel. mérete (%) | Min. rel. mérete (%) | Futási idő (mp) |
|---------|---------------------------|-------------------------|-----------------|
| Br | $6.4114 \cdot 10^{-4}$ | $1.4059 \cdot 10^{-11}$ | 1.5304 |
| Brv | $0.0000 \cdot 10^0$ | $8.7349 \cdot 10^{-8}$ | 0.4243 |
| L8 | $6.3680 \cdot 10^{-10}$ | $6.4578 \cdot 10^{-8}$ | 1.0499 |
| L8v | $1.2049 \cdot 10^{-5}$ | $1.9293 \cdot 10^{-31}$ | 4.2791 |
| L9 | $1.4414 \cdot 10^{-9}$ | $5.3049 \cdot 10^{-8}$ | 1.8486 |
| L9v | $1.3570 \cdot 10^{-7}$ | $3.5078 \cdot 10^{-32}$ | 16.662 |
| L10 | $1.1151 \cdot 10^{-15}$ | $1.7733 \cdot 10^{-8}$ | 3.0077 |
| L10v | $9.5443 \cdot 10^{-11}$ | $6.3778 \cdot 10^{-33}$ | 51.2230 |
| L11 | $3.7110 \cdot 10^{-30}$ | $5.5522 \cdot 10^{-13}$ | 7.3071 |
| L11v | $4.0440 \cdot 10^{-15}$ | $3.8334 \cdot 10^{-35}$ | 1025.0000 |
| Rb2 | $7.3628 \cdot 10^{-7}$ | $5.5650 \cdot 10^{-8}$ | 0.9220 |
| Rb2v | $0.0000 \cdot 10^0$ | $3.8670 \cdot 10^{-33}$ | 0.1123 |
| Rb5 | $1.1622 \cdot 10^{-11}$ | $5.6901 \cdot 10^{-6}$ | 60.3720 |
| Rb5v | $6.2214 \cdot 10^{-91}$ | $2.2637 \cdot 10^{-7}$ | 36.8400 |
| Sch3.2 | $9.3274 \cdot 10^{-3}$ | $4.4420 \cdot 10^{-4}$ | 0.3214 |
| Sch3.2v | $0.0000 \cdot 10^0$ | $0.0000 \cdot 10^0$ | 0.1014 |

2. táblázat. Futási eredmények az intervallumos globális optimalizáló eljárással ([18]), 10 futtatás átlagában

A 2. táblázat eredményei kiértékelése során tekintettel kell lennünk arra, hogy az algoritmust az alap beállításokkal futtattuk, változatlan formában.

Így nem is hangoltuk azt az adott helyzetre. Ennek következménye az, hogy a globális minimum helyében, illetve értéke korlátaiban nagyon eltérő pontosságú eredményeket kaptunk. Mindenesetre az megállapítható, hogy az egyszerűsített feladatokra kapott eredmények minden esetben hatalmas pontosságjavulást mutatnak vagy a helyben, vagy az értékben, vagy mindkettőben. Ezzel messze nem arányos a mutatkozó számítási idő igény. Tehát azt jelenthetjük ki, hogy az alkalmazott szimbolikus egyszerűsítési módszer sok nagyságrendnyi pontossági javulást okoz, ezzel össze nem mérhető, sokkal kisebb arányú számítási idő növekedés árán.

Az intervallumos Newton-módszer az intervallumos globális optimalizálási algoritmusok legkritikusabb eleme, jellemző módon más gyorsító technikákkal (például a monotonitási teszt) utolérhetetlen hatékonyságú is lehet, de nagy időpazarlást is okozhat. Tanulmányunk alapján azt az óvatos következtetést tudjuk levonni, hogy a szimbolikus egyszerűsítő transzformációk a megvizsgált standard globális optimalizálási feladatokon nagyon ígéretes hatékonyságjavulást mutattak. A jelen tanulmány csak a kezdetét jelzi a fejlesztési munkának, hiszen a talált rendkívüli pontosságnövelő hatás ügyes kiaknázási módjait még nem ismerjük. A következő vizsgálatok kiterjedt tesztelés után olyan átírási algoritmusokat keresnek majd, amelyek az intervallumos globális optimalizáló algoritmusok pontosságának növelésére, illetve hatékonyságuk javítására törek. Ezzel együtt az intervallumos globális optimalizálási algoritmust is ennek megfelelően hangolni kell majd, hogy a megállási feltételekkel jól szabályozható legyen a pontosság növekedés nyeresége a számítási idő vonatkozásában.

Irodalom

1. Alefeld, G., Herzberger, J. *Introduction to Interval Computation*. Academic Press, New York, 1983.
2. Antal Elvira: A matematikai modellezés hatása nemlineáris optimalizálási feladatok megoldásának hatékonyságára. PhD értekezés, Szeged, 2017.
3. Antal, E., Csenedes, T. Nonlinear Symbolic Transformations for Simplifying Optimization Problems *Acta Cybernetica* 22:715–733, 2016.
4. Antal, E., Csenedes, T., Virágh, J. Nonlinear Transformations for the Simplification of Unconstrained Nonlinear Optimization Problems. *Cent. Eur. J. Oper. Res.* 21(4):665–684, 2013.
5. Avanzolini, G., Barbini, P. Comment on “Estimating Respiratory Mechanical Parameters in Parallel Compartment Models”. *IEEE Trans. Biomed. Eng.* 29:772–774, 1982.
6. Csenedes, T., Pál, L., Sendín, J. O. H., Banga, J. R. The GLOBAL Optimization Method Revisited. *Optimization Letters* 2:445–454, 2008.
7. Csenedes, T., Rapcsák, T. Nonlinear Coordinate Transformations for Unconstrained Optimization. I. Basic Transformations. *J. Global Optim.* 3(2):213–221, 1993.

8. Farkas, T., Rév, E., and Lelkes, Z. Process flowsheet superstructures: Structural multiplicity and redundancy: Part I: Basic GDP and MINLP representations. In *Computers & Chemical Engineering*, 29(10): 2180–2197, 2005.
9. Fourer, R., and Gay, D. M. Experience with a Primal Presolve Algorithm. In Hager, W. W., Hearn, D. W. and Pardalos, P. M., editors, *Large Scale Optimization: State of the Art*, pages 135–154. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994.
10. Gay, D. M. Symbolic-Algebraic Computations in a Modeling Language for Mathematical Programming. In Alefeld, G., Rohn, J. and Yamamoto, T., editors. *Symbolic Algebraic Methods and Verification Methods*, pages 99–106. Springer-Verlag, 2001.
11. Gaylord, Richard J., and Kamin C, Samuel N. Wellin, Paul R.: *An Introduction to Programming with Mathematica*. 2. kiad. New York, NY, Springer New York, 1996, 141–143. p. ISBN 978-1-4612-2322-1.
12. Heck, André: Introduction to computer algebra. In Introduction to Maple. New York, NY, Springer New York, 2003, 11. p. ISBN 978-1-4613-0023-6.
13. Hantos, Z., Daróczy, B., Csendes, T., Suki, B., and Nagy, S. Modeling of Low-frequency Pulmonary Impedance in the Dog. *J. of Applied Physiology* 68:849–860, 1990.
14. Liberti, L., Cafieri, S., Savourey, D. The Reformulation-Optimization Software Engine. *Mathematical Software – ICMS 2010, LNCS 6327*, pages 303–314, 2010.
15. Maeder, Roman E.: *The Mathematica Programmer*. Academic Press, 1994, 8. p. ISBN 978-0-12-464990-3.
16. Mészáros, Cs., Suhl, U. H. Advanced preprocessing techniques for linear and quadratic programming. *OR Spectrum* 25(4):575–595, 2003.
17. Pál, L. *Global optimization algorithms for bound constrained problems*. Ph.D. thesis, University of Szeged, 2011.
18. Pál, L. and Csendes, T. INTLAB implementation of an interval global optimization algorithm. *Optimization Methods and Software* 24:749–759, 2009.
19. Rapcsák, T., Csendes, T. Nonlinear Coordinate Transformations for Unconstrained Optimization. II. Theoretical Background. *J. Global Optim.* 3(3):359–375, 1993.
20. Schichl, H., Neumaier, A. Interval Analysis on Directed Acyclic Graphs for Global Optimization. *J. Global Optim.* 33(4):541–562, 2005.
21. Stoutemyer, D. R. Ten commandments for good default expression simplification. *J. Symb. Comput.* 46:859–887, 2011.
22. Tóth, B., Csendes, T. Empirical investigation of the convergence speed of inclusion functions. *Reliable Computing*, 11:253–273, 2005.
23. Wellin, P.: Functional programming. In *Programming with Mathematica: An Introduction*. Cambridge University Press, 2014, 115–188. ISBN 978-1-107-00946-2.
24. Wolfram Mathematica 9 Documentation Center, Mathematica Tutorial: Basic Internal Architecture: <https://reference.wolfram.com/mathematica/tutorial/BasicInternalArchitecture.html>
25. Wolfram Mathematica. Software Development: CUDA and OpenCL support. <http://www.wolfram.com/mathematica/new-in-8/cuda-and-opencl-support>. [2017.01.12.].

NONLINEAR SYMBOLIC TRANSFORMATIONS FOR OPTIMIZATION
PROBLEMS

With the advent of symbolic computer algebra systems the possibility has become clear for reforming the optimization problems into a more advantageous form. The advantages of such simplifications are many-folded. At one hand the respective functions can hopefully be evaluated with less operations. Then we can recognize such redundant relations among the variables that usually cannot be noticed. Knowing these allows us to determine the subspace that consists only of optimal points. And finally, due to the possible dimension decrease the iteration numbers of most of the optimization techniques can drop. The procedure does not require human interaction, hence large scale and complex problems can become solvable by applying our simplification tool. The present paper overviews our work done on this field and new results are demonstrated on the application of the novel algorithm to improve the efficiency and precision of interval arithmetic based optimization algorithms.

KORRELÁCIÓ, TORLÓDÁSI JÁTÉKOK, A GYÁVA NYÚL JÁTÉK¹

FORGÓ FERENC

*Budapesti Corvinus Egyetem**Komlósi Sándor 70-ik születésnapjára*

Az n -személyes, kétkiszolgálós, egyszerű, vegyes, lineáris torlódási játékok osztályát vizsgáljuk abból a szempontból, hogy mennyire képes a puha korrelált egyensúly (Forgó 2010) által biztosított társadalmi hasznosság megközelíteni a társadalmi hasznosság abszolút maximumát. Erre a célra a kényszerítési érték mérőszámát (Ashlagi et al. 2008) használjuk. Bebonyítjuk, hogy a vizsgált játékosztályra a kényszerítési érték pontosan 2. Ennek a játékosztálynak egy alosztályát alkotják az n -személyes gyáva nyúl játékok, amelyek esetében a kényszerítési érték ugyancsak 2. Ugyanakkor, ha $n = 2$ (a klasszikus gyáva nyúl játék) vagy $n = 3$, akkor a kényszerítési érték $\frac{3}{2}$. Egy környezetvédelmi példán illusztráljuk, hogy miként működik a puha korrelált egyensúly protokollja.

Kulcsszavak: korrelált egyensúly, puha korrelált egyensúly, torlódási játékok, gyáva nyúl játék, kényszerítési érték

1 Bevezetés

A játékelméletben egészen a kezdetektől látható az a cél, hogy minél nagyobb társadalmi hasznosságot (social welfare, SW) tudjunk elérni úgy, hogy ez lehetőleg a játékosok egyéni törekvéseinek eredményeképpen jöjjön létre. Sokféle eszköz áll rendelkezésre, amelyekben közös az eredeti tisztán nem-kooperatív és egyszeri szimultán döntéseken alapuló modell módosítása, kiegészítése, általánosítása. Neumann János óta (1928) világos a kevert bővítés jelentősége. Enélkül a legérdekesebb véges játékok esetében általában még az egyensúlyt sem tudjuk biztosítani. Nem véletlen, hogy Nash híres egzisztencia tétele is erre vonatkozik, Nash (1950).

Az általánosítások közül ebben a cikkben a „klasszikus” korrelált egyensúllyal (CE), Aumann (1974, 1987), illetve ennek is egy speciális általánosításával foglalkozunk, amit puha korrelált egyensúllynak (SCE) nevezünk, Forgó (2010). A korrelált egyensúly egyes változataiban közös vonás, hogy az „egyensúly” interpretálásában nagy szerepet játszik egy szemléletes forgatókönyv (protokoll). Ennek a forgatókönyvnek a részleteiben különböznek a CE egyes általánosításai.

¹A kutatást az NKFI K-119930 támogatta. Beérkezett: 2017. február 24. E-mail: ferenc.forgo@uni-corvinus.hu.

Fontos, hogy egy adott játékosztályban mennyire képes pl. az *SCE* javítani az *SW*-n. Erre a célra Ashlagi et al. (2008) kétféle mérőszámot javasoltak és használtak. A mediációs érték (mediation value, *MV*) azt mutatja meg, hogy az *SCE* hányszorosára tudja növelni a legjobb esetben az *SW*-t valamilyen referencia szinthez képest. Ilyen lehet pl. a legjobb Nash egyensúlypont (*NEP*), vagy akár a legjobb tiszta Nash egyensúlypont (*PNEP*). A másik a kényszerítési érték (enforcement value, *EV*), ami azt mutatja meg, hogy az *SW* abszolút maximuma hányszorososa az *SCE* által elérhető maximális *SW*-nek. Az *MV* egy „legjobb eset” (best case), míg az *EV* egy „legrosszabb eset” (worst case) mérőszám. Az *EV* egy költségmodell keretében megfelel a „stabilitás ára (price of stability)” mutatószámnak, Roughgarden and Tardos (2002), amikor is a viszonyítási alap a legjobb *NEP*. Ebben a cikkben a vizsgált játékosztály a kétszemélyes egyszerű lineáris torlódási játékok osztálya és elsősorban az *EV* érdekel bennünket.

Megmutatjuk, hogy minden 2×2 -es szimmetrikus bimátrix játék ekvivalens egy kétkiszolgálós, kétszemélyes egyszerű lineáris torlódási játékkal. Ezek között kitüntetett figyelmet érdemelnek a társadalmi dilemmák. Legtöbbet a fogolydilemmával és n -személyes általánosításával foglalkoztak, Carroll (1988) és Hamburger (1973). Közismert, hogy az (n -személyes) fogolydilemma esetében egyetlen *CE* van és ez egybeesik az egyetlen *NEP*-el. Az *SCE* azonban képes Pareto-javítani a *NEP* kifizetésen, Forgó (2010), Forgó (2016). Ebben a cikkben a társadalmi dilemmák közül a „gyáva nyúl” (game of chicken) játékkal és n -személyes általánosításával foglalkozunk. Egy kitűnő referencia Szilagyi and Somogyi (2010). Megmutatjuk, hogy az *EV* pontos értéke a vegyes kétkiszolgálós egyszerű lineáris torlódási játékok osztályán 2, az ennek alosztályát alkotó n -személyes gyáva nyúl játékok osztályán ez az érték szintén 2. A két- és háromszemélyes gyáva nyúl játékok osztályán viszont jobb a helyzet, $EV = \frac{3}{2}$. Az *SW*-t maximalizáló *SCE* kiszámítását egy négyszemélyes gyáva nyúl játékon illusztráljuk.

A cikk szerkezete a következő. A második fejezetben az *SCE*-vel kapcsolatos legfontosabb definíciókat és előzményeket tárgyaljuk. A harmadik fejezetben a kétkiszolgálós torlódási játékokkal foglalkozunk és ezeknek a társadalmi dilemmákkal való kapcsolatát vizsgáljuk. A negyedik fejezetben meghatározzuk az *EV* értékét a „gyáva nyúl” típusú vegyes kétkiszolgálós egyszerű lineáris torlódási játékok, valamint a két- és háromszemélyes gyáva nyúl játékok osztályán. Az ötödik fejezetben egy példát ismertetünk. A hatodik fejezetben összefoglaljuk az eredményeket és további kutatási irányokat jelölünk ki.

2 Fogalmak és előzmények

A Nash-egyensúly egy fontos általánosításához vezet, ha a kevert stratégia fogalmát tágabban értelmezzük. Legyen $N = \{1, \dots, n\}$ a játékosok halmaza és $G = \{S_1, \dots, S_n; f_1, \dots, f_n\}$ egy véges játék. Amikor G kevert bővítéséről beszélünk, akkor legalábbis a leggyakoribb interpretációban, feltesszük azt,

hogy a játékosok egymástól függetlenül, kevert stratégiájuk által meghatározottan, véletlenszerűen választanak tiszta stratégiát, amit sokszor akciónak is neveznek. Ehhez mindegyik játékos külön-külön egy véletlen mechanizmust (random device, *RD*) használ. Ezek az eloszlások egy valószínűségeloszlást generálnak az $S = \times_{i=1}^n S_i$ akcióprofilok véges halmazán. Ha félretesszük azt a feltételezést, hogy az egyéni randomizálások egymástól függetlenek, akkor bővülnek a lehetőségek: tetszőleges valószínűségeloszlást használhatunk S -en egy akcióprofil véletlenszerű kiválasztására. Ez tulajdonképpen az akcióválasztások összehangolása (korrelálása), amit úgy kell megvalósítani, hogy ne kelljen valamilyen szerződésben a játékosokat az összehangolt cselekvésre kötelezni.

Az egyszerűség kedvéért először kétszemélyes (bimátrix) játékokat tekintünk, a több személyre való kiterjesztés csak jelölésbeli kellemetlenségeket okozna, a lényeg ugyanaz. Jelöljük az első (sor)játékos akcióinak halmazát I -vel, a másodikét (oszlop) J -vel, az első játékos kifizetéseit a_{ij} , a másodikét b_{ij} -vel, $i \in I, j \in J$. Jelölje $A = [a_{ij}]$ és $B = [b_{ij}]$ a két játékos kifizetómátrixát. Legyen p_{ij} az (i, j) akcióprofil választásának valószínűsége. A p_{ij} valószínűségeket rendezzük el egy nemnegatív P mátrixban, amely elemeinek összege 1. A P mátrix köztudott. Ezt a valószínűségeloszlást és az azt reprezentáló P mátrixot korrelált stratégiának nevezzük. Ez már nem a szó eredeti értelmében vett stratégia, és talán az elnevezés sem szerencsés, de általában ez használatos.

A véletlen választást, az *RD*-t, egy „játékvezető” működteti. Amint a választás megtörtént, a játékvezető az első játékosnak, úgy, hogy a második ezt ne tudja, javasolja, hogy az i akciót játssza. Ugyanígy javasolja a második játékosnak, hogy a j akciót játssza. A korrelált stratégiát korrelált egyensúlynak hívjuk, ha várható értékben egyik játékosnak sem érdeke a játékvezető javaslatát elutasítani és valami mást játszani, mint az éppen javasolt akció, feltéve, hogy a másik játékos megfogadja a játékvezető javaslatát. Itt tulajdonképpen a játék lejátszásának egy forgatókönyvét adtuk meg. Ez a forgatókönyv a korrelált egyensúly feltalálójának, Aumannnak (1974) a nevéhez fűződik.

A fentiek alapján a korrelált egyensúlyok halmaza egyenlő az alábbi lineáris egyenlőtlenségrendszer összes megoldásainak halmazával

$$\begin{aligned}
 p_{ij} &\geq 0, \quad i \in I, j \in J \\
 \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} p_{ij} &= 1 \\
 \sum_{j \in J} (a_{ij} - a_{kj}) p_{ij} &\geq 0, \quad i, k \in I \\
 \sum_{i \in I} (b_{ij} - b_{il}) p_{ij} &\geq 0, \quad j, l \in J.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Ezt az egyenlőtlenségrendszert használhatjuk a korrelált egyensúly formális definíciójára is. Az egyenlőtlenségeket szokás „ösztönző feltételeknek” (incentive constraints) nevezni.

1. Definíció. A $P = [p_{ij}]$ valószínűségeloszlást a $G = (A, B)$ bimátrix játék korrelált egyensúlyának (CE) nevezzük, ha kielégíti az (1) egyenlőtlenségrendszert.

A korrelált egyensúly valóban általánosítása a Nash-egyensúlynak, amit a következő egyszerűen igazolható tételben fogalmazzunk meg.

1. Tétel (Aumann 1974). Ha (x, y) a $G = (A, B)$ bimátrix játék NEP -je, akkor a $p_{ij} = x_i y_j$, $i \in I$, $j \in J$ korrelált stratégia CE . Ha viszont p_{ij} egy olyan CE , amelyre fennáll, hogy $p_{ij} = u_i v_j$, $i \in I$, $j \in J$ valamely u, v valószínűségi vektorokra (vagyis a p_{ij} valószínűségekből összeállított P mátrix rangja 1), akkor az (u, v) stratégiaprofil egy NEP .

A CE -t nemcsak bimátrix játékokra, hanem akárhány személyes véges játékokra is lehet definiálni, mint azt a későbbiekben meg is fogjuk tenni. A CE itt is egy eloszlás a játék lehetséges kimenetelein. Az interpretáció teljesen ugyanaz: a játékvezető kisorsol egy akció n -est, majd minden játékosnak titokban javasolja, hogy játssza a kisorsolt akciót. Ekkor egyetlen játékos sem tudja javítani a várható kifizetését azzal, hogy eltér a játékvezető által javasolt akciótól.

A CE -k halmaza sokkal egyszerűbb szerkezetű, mint a NEP -eké: egy konvex politóp. Általában végtelen sok CE létezik. Ezek közül lehet úgy választani (pl. a játékvezető választhat), hogy valamilyen célt reprezentáló függvényt maximalizálunk a CE -k halmazán és a kiválasztott CE -t majd a játékvezető implementálja egy megfelelő RD segítségével. Ha a játékosok hasznosságai összeadhatók, akkor egy ilyen cél lehet a hasznosságok összegének a maximalizálása. Az így kapott CE egyszerre valósít meg „kollektív” hasznosságot és stabilitást, abban az értelemben, hogy a kollektív „optimum” önmegvalósító (self enforcing), ha a játékosok hajlandók a játék szabályait elfogadni (azt tehát, hogy a mindenki által ismert eloszlás szerint sorsol a játékvezető és a leírt titoktartási szabályokat betartják).

Felmerült az a kérdés, hogy a CE további általánosításával lehetne-e még nagyobb SW -t elérni. A továbbiakban, hacsak nem jelezzük, SW -n automatikusan az egyes játékosok hasznosságainak (kifizetéseinek) az összegét értjük. Világos, hogy ez egyáltalán nem magától értetődő, de mivel az irodalomban az egyes egyensúlytípusok összehasonlításánál általában ezt használják, nem érdemes ettől eltérni.

Moulin és Vial (1978) tértek el először az Aumann-féle protokolltól. Csak bimátrix játékokat vizsgáltak. Nagyobb elkötelezettséget követelnek a játékosoktól: Legelőször dönteniük kell, hogy vakon követik-e a játékvezető javaslatát a sorsolás megtörténte után, vagy nem akarják elkötelezni magukat, amikor is nem kapnak semmilyen javaslatot, de azt csinálhatnak, amit akarnak. Valami olyasmire gondolhatunk, mint amikor valakinek döntenie kell, hogy szabad kezét adjon-e a brókerének a befektetés kiválasztásához, vagy pedig saját maga hozza meg a befektetési döntést.

Szemléletes, ha a forgatókönyvet a következőképpen képzeljük el. A játékvezető elvégzi a sorsolást az adott, közismert valószínűségeloszlás szerint. A kisorsolt akciót (illetve egy papírt, amire az akció fel van írva) beteszi az

egy játékosok számára kijelölt piros borítékokba. A játékosok valamennyi akcióját, azt is, amelyik a piros borítékban van, beteszi egy fehér borítékba. A játékosok egymástól függetlenül (szimultán) választanak a piros és a fehér boríték közül. Ha egy játékos a pirosat választotta, akkor azt az akciót kell végrehajtania, ami a borítékban van. Ha a fehéret választotta, akkor szabadon választ a borítékban lévő akciók közül, vagyis az akcióhalmazából bármelyiket választhatja. A valószínűségeloszlást, amely szerint a játékvezető a sorsolást végzi, gyenge korrelált egyensúlynak (weak correlated equilibrium, *WCE*)-nek nevezzük, ha egyik játékos sem tudja növelni a várható kifizetését azzal, ha a piros boríték helyett a fehéret választja, feltéve, hogy mindenki más a pirosat választotta.

Moulin és Vial (1978) mutattak példát arra, amikor a *WCE* nagyobb *SW*-t ad, mint bármelyik *CE*.

Felmerül a kérdés, hogy nem lehet-e a *CE* protokollját másképpen megváltoztatni úgy, hogy továbbra is a *CE* általánosítását kapjuk, de olyan játékok esetében is (nem mindegyiknél természetesen) el tudunk érni Pareto-jobb kifizetéseket, amelyeknél a *WCE* ezt nem tudja megtenni. A következő protokoll alapján Forgó (2010) a *CE* egy új általánosítását vezette be, amelyet „puha korrelált egyensúlynak” (soft correlated equilibrium, *SCE*) nevezett. A protokoll leírásánál célszerű ismét a „borítékos” interpretációt használni a szemléletesség kedvéért.

Most is azzal kezdünk, hogy a játékvezető egy köztudott valószínűségeloszlás szerint kisorsol egy akcióprofil. Minden játékos számára a saját piros borítékjába teszi a kiválasztott akciót. A fehér borítékjába a többi akciót. Vegyük észre a *WCE*-től való eltérést: míg ott minden akciót elhelyezett a játékvezető a fehér borítékba, itt a kiválasztott (piros borítékban lévő) akciót nem. Innentől kezdve a protokoll ugyanaz. A játékosok szimultán választanak a piros és a fehér borítékok közül. A valószínűségeloszlást *SCE*-nek nevezzük, ha várható értékben egyik játékosnak sem érdeke a fehér borítékot választani, feltéve, hogy az összes többi a pirosat választotta.

Nézzük meg, hogy miképpen tudjuk jellemezni a háromféle korrelált egyensúlyt, a *CE*-t, a *WCE*-t és az *SCE*-t egy lineáris egyenlőtlenségrendszer segítségével n -személyes véges játékok esetében. Az egyenlőtlenségek az úgy nevezett „ösztönző feltételek”, amelyek annak a várható hasznát, hogy egy játékos engedelmessékedik a játékvezetőnek, hasonlítja össze azzal, amikor ezt nem teszi meg, mindig feltéve, hogy a többi játékos követi a játékvezető utasításait.

Legyen $G = \{S_1, \dots, S_n; f_1, \dots, f_n\}$ egy n -személyes játék normál formában, az S_1, \dots, S_n véges akcióhalmazokkal és az f_1, \dots, f_n kifizetőfüggvényekkel. Az ösztönző feltételeket az i rögzített játékosra írjuk fel és az egyszerűség kedvéért ezt az indexet elhagyjuk ott, ahol ez nem okoz félreértést.

A következő jelöléseket használjuk:

$N = \{1, \dots, n\}$: a játékosok halmaza.

$I = \{1, \dots, m\}$: az i játékos akcióhalmaza, amelyeket az akciók indexei reprezentálnak.

S_- : az i játékos kivételével az összes többi játékos akcióhalmazainak

Descartes-szorzata (a csonka akcióprofilok halmaza).

$s_- \in S_-$: egy csonka akcióprofil.

(j, s_-) , $j \in I$, $s_- \in S_-$: egy (teljes) akcióprofil.

$S = \{(j, s_-) : j \in I, s_- \in S_-\}$: a (teljes) akcióprofilok halmaza.

$f(j, s_-)$: az i játékos kifizetése, ha ő a j akciót játssza, a többiek pedig s_- -t.

p : egy valószínűségeloszlás S -en.

$p(j, s_-)$: az a valószínűség, amelyet a p eloszlás a (j, s_-) akcióprofilhoz rendel.

A CE olyan p valószínűségeloszlás, amely minden i -re ($i \in N$) kielégíti az alábbi ösztönző feltételt

$$\sum_{s_- \in S_-} f(j, s_-)p(j, s_-) \geq \sum_{s_- \in S_-} f(k, s_-)p(j, s_-)$$

minden $j, k \in I$ -re, vagy, ami ezzel ekvivalens

$$\sum_{s_- \in S_-} f(j, s_-) \frac{p(j, s_-)}{\sum_{t_- \in S_-} p(j, s_-)} \geq \sum_{s_- \in S_-} f(k, s_-) \frac{p(j, s_-)}{\sum_{t_- \in S_-} p(j, s_-)}$$

minden $j, k \in I$ -re, feltéve, hogy $\sum_{s_- \in S_-} p(j, s_-) > 0$. Itt a bal oldalon a kifizetés várható értéke szerepel akkor, ha az i játékos engedelmeskedik a játékvezetőnek, a jobb oldalon pedig annak a kifizetésnek a várható értéke, ha a $k \in I$ stratégiát választja függetlenül attól, hogy mi a játékvezető javaslata.

A WCE olyan p valószínűségeloszlás, amely kielégíti minden i ($i \in N$) játékos alábbi ösztönző feltételeit

$$\sum_{j \in I} \sum_{s_- \in S_-} f(j, s_-)p(j, s_-) \geq \sum_{j \in I} \sum_{s_- \in S_-} f(k, s_-)p(j, s_-) \quad \text{minden } k \in I\text{-re.}$$

A bal oldalon annak a kifizetésnek a várható értéke van, amit az i játékos kap, ha elkötelezi magát, hogy mindig végrehajtja a játékvezető javaslatát, a jobb oldalon pedig az a várható kifizetés szerepel, amelyet az i játékos akkor kap, ha nem kötelezi el magát és a $k \in I$ akciót választja. Világos, hogy a WCE általánosítása a CE -nek, hiszen ösztönző feltételei a CE bizonyos ösztönző feltételeinek összegzésével álltak elő.

Az SCE definiálásához kell némi előkészület. Egy rögzített $j \in I$ -re tekintsük az alábbi feltételeket:

$$\sum_{s_- \in S_-} f(j, s_-)p(j, s_-) \geq \sum_{s_- \in S_-} f(l, s_-)p(j, s_-) \quad \text{minden } l \in I\text{-re,}$$

és nevezzük ezeket j -halmaznak. Világos, hogy a j -halmazok egyesítése minden $j \in I$ -re pontosan a CE ösztönző feltételeinek a halmazát adja az i játékosra. A WCE ösztönző feltételeit az i játékosra úgy kapjuk, hogy minden j -halmazból a k indexű feltételeket összegezzük, $k \in I$.

Ugyanezt tesszük az *SCE* esetében, azzal a különbséggel, hogy a j -halmazból más feltételeket adunk össze, mint a *WCE* esetében. Tekintsük a következő halmazt

$$K = \prod_{j=1}^m (I \setminus \{j\}).$$

A K elemeit megengedett (index)halmazoknak nevezzük. Például, ha $m = 3$, akkor $(2, 3, 2)$ megengedett, míg $(1, 3, 2)$ nem megengedett. Az *SCE* ösztönző feltételeit az $i \in N$ játékos számára az alábbi egyenlőtlenségekkel definiáljuk

$$\sum_{j \in I} \sum_{s_- \in S_-} f(j, s_-) p(j, s_-) \geq \sum_{j \in I} \sum_{s_- \in S_-} f(k_j, s_-) p(j, s_-)$$

minden $(k_1, \dots, k_m) \in K$ megengedett halmazra.

Valóban, az *SCE* ösztönző feltételei az i játékos számára m egyenlőtlenség összes lehetséges összegei, amelyek mindegyikét egy-egy j -halmazból vesszük azzal a megkötéssel, hogy azokat az egyenlőtlenségeket, amelyeket a *WCE* definiálásakor használtunk, nem választhatjuk. Már a *WCE* és az *SCE* definíciójából is látszik, hogy a *CE* két különböző általánosításáról van szó, és ezek egyike sem általánosítása a másiknak.

Az *SCE* ösztönző feltételeinek száma az i játékosra $(m-1)^m$. Ez nagyon sok, összehasonlítva azzal, hogy ugyanez a *WCE* esetében m , míg a *CE* esetében m^2 . Ezek között az egyenlőtlenségek között sok redundáns van, amelyek kiküszöbölése nehéz feladat, de még a redundancia megszüntetése után is túl sok marad ahhoz, hogy nagy m esetében bármit is lehessen vele kezdeni. A probléma azonban megoldható. Lehet ugyanis egy olyan ekvivalens egyenlőtlenségrendszer definiálni, amely esetében a feltételek száma csak kvadratikusan növekszik m növekedésével.

2. Tétel (Forgó 2010). *Minden $i \in N$ játékos esetében van olyan lineáris egyenlőtlenségrendszer, amelynek mérete (a változók és feltételek száma) kvadratikusan nő az akciók számának növekedésével, és az általa meghatározott lehetséges tartomány alkalmas vetítése megegyezik az *SCE*-k halmazával.*

Mivel az *SCE* (és a *WCE*) fogalomalkotásnak a legfőbb célja az, hogy „jobb” várható kifizetéseket érjünk el, mint a *CE*-vel, az általánosítás erejét azzal lehet demonstrálni, hogy mutatunk olyan fontos játékosztályokat, ahol az *SCE* jobban teljesít. A bináris játékokban (minden játékosnak csak két lehetséges akciója van), ahol a *WCE*-ek halmaza megegyezik a *CE*-ek halmazával, az *SCE* jobban teljesíthet, de nem bináris játékokban is lehet hatásos, Forgó (2010). A későbbiekben ezt a torlódási játékok egyes osztályaira tesszük majd meg.

Hogyan interpretálhatjuk az *SCE*-t általában? (Az egyes konkrét játékokban konkrétabb értelmezést is adhatunk.) Gondoljunk az egész forgatókönyvre úgy, hogy van egy klub, és a játékosok szabadon dönthetnek arról, hogy belépnek-e. Tudják, hogy a klubtagság előnyökkel és hátrányokkal is járhat. Előny, hogy a sorsolás után a kisorsolt akciók csak a klubtagok számára lehetőségek, a kívül maradottaknak nem. Hátrány, hogy ha belépnek

a klubba, a klub szabályzata kimondja, hogy feltétlenül engedelmessé kell és azt az akciót kell végrehajtani, amely ki lett sorsolva. *SCE*-ben senkinek sem érdeke a klubból kilépni, ha a többiek benn maradnak. Különböző játékokban konkrét formát ölt a „klub”, a „szabályok”, az „akciók” stb.

Milyen játékosok hajlandók részt venni olyan játékokban, amelyeket a *WCE* vagy az *SCE* protokollja szerint játszanak? Azt várhatjuk, hogy a minél nagyobb várható kifizetésben érdekelt, szabálykövető, intelligens játékosok hajlandók részt venni olyan játékokban, amiben megvan a lehetősége nagyobb kifizetés elérésének, amennyiben mindenki betartja a szabályokat és/vagy megvan az eszköz a szabályok betartatásának. A *WCE* és az *SCE* ebből a szempontból is hasonlóak, csak a szabályok különböznek valamennyire. A legtöbb sportágban alkalmaznak és betartatnak sokszor teljesen önkényesnek tűnő szabályokat, amelyek egyik célja, hogy a játékot érdekessé tegyék. A sport népszerűsége nem kérdőjelezhető meg.

A korreláción kívül vannak más eszközök is a hatékonyság növelésére. Az egyik experimentális kutatás, amelyet Bracht and Feltovich (2008) végzett el, azt mutatja, hogy a játékosok az elvárható módon cselekszenek olyan játékokban, ahol az előzetes elkötelezettség lehetősége integráns része a játéknak, és azt a célt szolgálja, hogy a várható kifizetéseket növelni lehessen. Egy másik kísérletben Cason and Sharma (2006) azt találta, hogy a *CE* realizálható, ha a játékosok biztosak abban, hogy mások is követik a játékvezető ajánlásait. Ez azt sugallja, hogy a kritikus kérdés nem annyira a szabályok és a protokoll, hanem a játékosok kölcsönös bizalma. Természetesen ezt a bizalmat csak úgy lehet tesztelni, ha a szabályok és a protokoll mindenki számára világosak.

3 Puha korrelált egyensúly egyszerű, kétki-szolgálós, lineáris torlódási játékokban

Ha különböző korrelált egyensúly koncepciók (*CE*, *WCE*, *SCE*) „erejét” szeretnénk összehasonlítani abból a szempontból, hogy mennyire növeli az *SW*-t a *NEP*-hez képest, többféle megközelítést alkalmazhatunk. A számítástudományban jól bevált az ún. legrosszabb eset elemzés (worst case analysis) és az átlagos eset elemzés (average case analysis). Az előbbit használva azt határozzuk meg, hogy egy problémaosztályon belül a legrosszabb esetben mennyire javul az *SW* értéke abszolút vagy relatív értelemben valamely korrelált egyensúly forgatókönyvének alkalmazásával. Az utóbbit használva a problémaosztályból véletlenszerűen, egyenletes eloszlás szerint választunk egy problémát, arra alkalmazzuk a korrelációt, és a korreláció eredményeképpen kapott átlagos javulást tekintjük mértéknek. Ezen kívül még vannak más megközelítések is.

Az első és talán a legszebb példája a legrosszabb eset elemzésnek játékelméleti kontextusban Roughgarden és Tardos (2002) munkája, akik a költségalapú torlódási játékok egy osztályán határozták meg az „anarchia árát” (price of anarchy), ami a legrosszabb *NEP* társadalmi költségének és a mini-

mális társadalmi költségnek a hányadosa. A „stabilitás ára” (price of stability) ugyanez a hányados azzal különbséggel, hogy a legjobb *NEP* társadalmi költsége a viszonyítási alap.

Ha nem a *NEP* a viszonyítási alap, hanem a korrelált egyensúly valamilyen fajtája és ugyanezt a megközelítést alkalmazzuk, akkor egy „alacsonyabb szintű” irányított stabilitás árát kaphatjuk meg. Christodoulou és Koutsoupias (2005) kiszámították a *CE* esetben a stabilitás árát a torlódási játékok egy osztályára. Ashlagi et al. (2008) társadalmi költségek helyett a társadalmi jóléttel számoltak. Első látásra úgy tűnik, mintha ez nem lenne lényeges különbség, de az említett szerzők meggyőző példákat mutatnak arra, hogy egészen eltérő eredményeket kaphatunk a két megközelítéssel. Mi a következőkben ez utóbbit választjuk, tehát a játékosok kifizetőfüggvényeinek összegeként értelmezett *SW*-t használjuk. A mérőszámok formális definícióit kicsit későbbre halasztjuk.

A játékosztály, amit tekintünk, a torlódási játékok egy alosztálya. Az egyszerű torlódási játékokban a játékosok választhatnak bizonyos kiszolgálók között, amelyeknek a szolgálatait szeretnék igénybe venni. Egy játékos hasznossága (kifizetése) csak attól függ, hogy hányan használják (választották) az illető kiszolgálót. Például ha a közlekedők választhatnak két alternatív útvonal között, amelyek *A* várost *B* várossal kötik össze, akkor, ha sok közlekedő választja az egyik utat, ezáltal torlódást és lassulást okozva, akkor az ezen úton haladók hasznossága csökken a használók számának növekedésével. Mi csak két-kiszolgálós torlódási játékokkal foglalkozunk.

Először az általános esetet nézzük, amikor a játékosok száma $n \geq 2$. Egy ilyen játékot a legegyszerűbben egy „torlódási alak” (congestion form) adhatunk meg, ami két nemnegatív n komponensű vektor: $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n)$. A jelentése a következő: ha j darab játékos választja az *F1* első kiszolgálót, akkor mindegyik játékos a_j hasznossághoz jut, és ha k darab játékos választja az *F2* második kiszolgálót, akkor ezek mindegyike b_k hasznossághoz jut. A torlódási alakból konstruálni tudunk egy torlódási játékot. A játékosok halmaza $N = \{1, \dots, n\}$, minden játékos akcióhalmaza $\{F1, F2\}$, amelyet röviden $\{1, 2\}$ -vel jelölünk, a kifizetéseket pedig az a és b hasznosságvektorok határozzák meg. Egy akcióprofil (i_1, \dots, i_n) , ahol $i_j \in \{1, 2\}$, $j \in N$. Például, ha $n = 4$, akkor $(1, 1, 2, 1)$ azt a helyzetet jelenti, amikor az 1, 2, 4 játékosok az *F1* kiszolgálót, a 3 játékos pedig az *F2* kiszolgálót választja. Jelöljük az akcióprofilok halmazát S -el.

Legyen $I_1(i_1, \dots, i_n) = \{k \in N : i_k = 1\}$, és $I_2 = N \setminus I_1$, amelyek azoknak a játékosoknak a halmazai, akik rendre az *F1* és *F2* kiszolgálókat választották az $(i_1, \dots, i_n) \in S$ akcióprofilban. Jelölje p_{i_1, \dots, i_n} annak a valószínűségét, hogy a játékvezető az (i_1, \dots, i_n) akcióprofilat választja, $|T|$ pedig egy T véges halmaz elemeinek számát. Az $f_j(i_1, \dots, i_n)$ hasznosság, amit a j játékos kap, írható a következőképpen:

$$f_j(i_1, \dots, i_n) = \begin{cases} a_{|I_1(i_1, \dots, i_n)|}, & \text{ha } i_j = 1, \\ b_{|I_2(i_1, \dots, i_n)|}, & \text{ha } i_j = 2. \end{cases}$$

Definiáljuk a g_j függvényt

$$g_j(i_1, \dots, i_n) = \begin{cases} a_{|I_1(i_1, \dots, i_n)|+1}, & \text{ha } i_j = 2, \\ b_{|I_2(i_1, \dots, i_n)|+1}, & \text{ha } i_j = 1. \end{cases}$$

$g_j(i_1, \dots, i_n)$ az a hasznosság, amelyet a j játékos kapna, ha az $F2$ kiszolgálóról az $F1$ -re váltana, vagy az $F2$ -ről $F1$ -re, feltéve, hogy senki más nem változtatja meg a választását.

Ebben a speciális esetben (két kiszolgáló van) a torlódási játék egy bináris játék, amelyben az SCE -k halmazát definiáló ösztönző feltételek igen egyszerű formát öltenek. A j játékos ösztönző feltétele (csak egy ilyen van!) az alábbi módon írható fel

$$\sum_{(i_1, \dots, i_n) \in S} f_j(i_1, \dots, i_n) p_{i_1, \dots, i_n} \geq \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in S} g_j(i_1, \dots, i_n) p_{i_1, \dots, i_n}.$$

Az SW várható értéke

$$\sum_{j=1}^n \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in S} f_j(i_1, \dots, i_n) p_{i_1, \dots, i_n}.$$

Ha az SW -t maximalizálni akarjuk az SCE -k halmazán, akkor egy LP feladatot kapunk, amelyet „teljes méretű LP ”-nek fogunk nevezni. Az a tény, hogy a torlódási játékban a kifizetéseket csak az határozza meg, hogy hányan választják az $F1$ és $F2$ kiszolgálókat, lehetővé teszi egy olyan LP feladat használatát, amelynek a nemnegativitási és a normalizáló feltételeken kívül csak egy feltétele van. Ezt fogjuk „kisméretű LP ”-nek nevezni. Jelölje t azoknak a játékosoknak a számát, akik az $F2$ kiszolgálót választották, $t = 0, 1, \dots, n$. Legyen továbbá $S_t = \{(i_1, \dots, i_n) \in S : |I_2(i_1, \dots, i_n)| = t\}$ azoknak az akcióprofiloknak a halmaza, amelyekben t játékos választotta $F2$ -t. Tegyük fel, hogy valamennyi p_{i_1, \dots, i_n} valószínűség egyenlő, $(i_1, \dots, i_n) \in S_t$, és jelöljük ezt p_t -vel.

Ennek a jelölésnek a használatával minden játékos ösztönző feltétele az alábbi

$$(a_n - b_1)p_0 + \sum_{t=1}^{n-1} \left[\binom{n-1}{t-1} (b_t - a_{n-t+1}) + \binom{n-1}{t} (a_{n-t} - b_{t+1}) \right] p_t + (b_n - a_1)p_n \geq 0. \quad (3)$$

A normalizáló feltétel és a nemnegativitási feltételek

$$\sum_{t=0}^n \binom{n}{t} p_t = 1, \quad (4)$$

$$p_0, p_1, \dots, p_n \geq 0,$$

és az SW

$$\sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (b_t t + a_{n-t}(n-t)) p_t.$$

Így a kisméretű LP az a feladat, amely az SW -t maximalizálja a (3) és (4) feltételek mellett. Ez egy „könnyű” feladat, a játékosok számára lineáris idő alatt oldható meg, Dyer (1984). Nem nehéz megmutatni, hogy ha p_0^* , p_1^* , \dots , p_n^* a kisméretű LP egy optimális megoldása, akkor a

$$p_{i_1, \dots, i_n}^* = p_t^*, \quad (i_1, \dots, i_n) \in S_t, \quad t = 0, 1, \dots, n \quad (5)$$

a teljes méretű LP egy (nem az egyetlen!) optimális megoldása, amely ugyanakkora SW értéket szolgáltat, mint a kisméretű LP optimális célfüggvényértéke.

Az SCE erejének mérésére általában két mutatószámot használnak, amelyeket Ashlagi et al (2008) javasoltak a CE -re. Ezek a „mediációs érték” (MV) és a „kényszerítési érték” (EV). Mi ebben a cikkben csak az EV -vel foglalkozunk, ami költségmodellben a stabilitás árának felel meg.

Legyen C a véges játékok egy osztálya és $G \in C$. Jelölje $P(G)$ a G akcióprofiljain értelmezett összes valószínűségeloszlások halmazát, és $S(G)$ az SCE -k halmazát. Jelöljük $SW(p)$ -vel a p eloszláshoz tartozó várható társadalmi hasznosságot (a játékosok várható hasznosságainak az összege). Definiáljuk az $EV(G)$ kényszerítési értéket az alábbi módon

$$EV(G) = \frac{\max_{p \in P(G)} SW(p)}{\max_{p \in S(G)} SW(p)}.$$

Az EV kényszerítési értéket a C játékosztályon pedig így definiáljuk

$$EV = \sup_{G \in C} EV(G).$$

Az EV egy valódi „legrosszabb-eset” elemzés eredménye, és azt mutatja, hogy (relatívén) maximum mennyit veszíthetünk az SW maximumához képest az SCE protokollját alkalmazva. Nyilván az $EV = 1$ a legjobb érték.

Ha ezeket az értékeket konkrétan ki szeretnénk számolni, illetve becslést adni rájuk, a legegyszerűbb esetre, a két-kiszolgálós, lineáris torlódási játékokra kell szorítkozunk, illetve, ha még egyszerűbb esetet akarunk elemezni, akkor a játékosok számát is a lehető legkisebbnek, kettőnek kell vennünk. Persze ez utóbbi esetben a linearitás automatikusan teljesül. Ezek a játékok szoros kapcsolatban vannak a társadalmi dilemma (social dilemma, SD) játékokkal.

Egy SD olyan szimmetrikus kétszemélyes bináris bimátrix játék, amelynek valamely „dilemma típusú” tulajdonsága van (általában intuícióellenes vagy problémás NEP létezése) A leghíresebb SD a fogolydilemma (prisoners’ dilemma, PD). Más példák: nemek háborúja, gyáva nyúl, szarvasvadászat, galamb-héja stb.). Bevezető játékelmélet könyvekben lehet olvasni a hozzájuk tartozó történetekről (például Osborne and Rubinstein (1994), Forgó et al. (1999)). A szimmetrikus kétszemélyes bináris bimátrix játékok és az egyszerű torlódási játékok kapcsolatát két, szinte triviális állítás formájában fogalmazzuk meg.

1. Állítás (Forgó 2016). *Minden szimmetrikus bináris bimátrix játék egy kétszemélyes, kétkiszolgálós (lineáris) torlódási játék.*

Bizonyítás. Egy szimmetrikus bináris bimátrix játékot az a, b, c, d paraméterek határoznak meg

$$\begin{array}{cc} & A & B \\ A & a, a & b, d \\ B & d, b & c, c \end{array}$$

Az ehhez tartozó torlódási alak

$$\begin{array}{ccc} & F1 & F2 \\ \text{Használók száma} & A & B \\ 1 & b & d \\ 2 & a & c \end{array} \quad (6)$$

Például a generikus PD a $0 \leq b < c < a < d$ paraméterekkel adható meg. A hozzátartozó torlódási alakban A reprezentálja a „kooperál”, B pedig a „nem kooperál” „kiszolgálókat”. Ez egy vegyes torlódási játék, amennyiben az egyik kiszolgálónál növekszik, míg a másiknál csökken a játékosok hasznossága a torlódás növekedésével. Az sem mindegy, hogy a legalacsonyabb hasznosság annál a kiszolgálónál van-e, amelynél a hasznosságok növekszenek a „torlódás” növekedésével úgy, mint a PD esetében, vagy ott van a legalacsonyabb hasznosság, ahol a hasznosságok csökkennek a torlódás növekedésével, úgy, mint a „gyáva nyúl” (GN) játéknál, amit a következő fejezetben fogunk vizsgálni.

Az 1. Állítás megfordítása is igaz.

2. Állítás (Forgó 2016). *Minden kétszemélyes kétkiszolgálós torlódási játék reprezentálható egy szimmetrikus bimátrix játékkal.*

Bizonyítás. Ha a torlódási alak a (6) formában van megadva, akkor mindkét játékosnak $F1$ és $F2$ a választási lehetősége, és a játékot az alábbi szimmetrikus bimátrix játékként adhatjuk meg:

$$\begin{array}{cc} & F1 & F2 \\ F1 & a, a & b, d \\ F2 & d, b & c, c \end{array}$$

□

4 „Gyáva nyúl” típusú, vegyes, kétkiszolgálós, egyszerű, lineáris torlódási játékok

Az n -személyes GN -típusú vegyes kétkiszolgálós egyszerű lineáris torlódási játékot (ezentúl röviden csak GN -típusú játék) az alábbi torlódási alakkal

adjuk meg.

$$\begin{array}{ll}
 & F1 & & F2 \\
 a_1 & = (n-1)x & & b_1 = y \\
 a_2 & = (n-2)x & & b_2 = y + z \\
 & \dots & & \dots \\
 a_t & = (n-t)x & & b_t = y + (t-1)z \\
 & \dots & & \dots \\
 a_{n-1} & = x & & b_{n-1} = y + (n-2)z \\
 a_n & = 0 & & b_n = y + (n-1)z .
 \end{array} \tag{7}$$

A lineáris torlódási függvényeket meghatározó x, y, z nem-negatív paraméterekről feltesszük, hogy $x > 0$, y és z közül legalább az egyik nem 0. Az $F1$ első kiszolgáló esetében nem növekszik, az $F2$ második kiszolgáló esetében nem csökken egy használó hasznossága. Kissé sérti az általánosságot, de nagymértékben megkönnyíti az elemzést, ha a legalacsonyabb hasznosságot 0-ra normalizáljuk.

Először meghatározzuk ezen a játékosztályon az EV értékét. Ha bevezetjük a $q_t = \binom{n}{t} p_t$, $t = 0, 1, \dots, n$ új változókat, a kisméretű LP feladat (SW maximalizálása a (3), (4) feltételek mellett) a (7) táblázatot felhasználva némi átalakítás és egyszerűsítés után a következő formát ölti, miután bevezetjük a következő jelöléseket, amelyekben explicitté tesszük a paramétereiktől való függőséget.

$$C(n, x, y, z, t) = t(n - 2t + 1)x + (2t - n)y + t(2t - n - 1)z$$

$$W(n, x, y, z, t) = t(n - t)x + t(y + (t - 1)z) .$$

A kisméretű LP

$$\begin{array}{l}
 P : \quad \max \sum_{t=0}^n W(n, x, y, z, t) q_t \\
 \sum_{t=0}^n C(n, x, y, z, t) q_t \geq 0 \\
 \sum_{t=0}^n q_t = 1, \quad q_t \geq 0, \quad t = 0, 1, \dots, n .
 \end{array} \tag{8}$$

Emlékeztetünk arra, hogy korábbi jelöléseinkkel összhangban t játékos választja $F2$ -t, $n - t$ játékos pedig $F1$ -et. Az n, x, y, z paraméterek adott értékei mellett a P feladat optimális célfüggvényértéke adja meg azt a maximális SW -t, amit az SCE segítségével realizálni lehet. Hasznos lesz a következőkben az alábbi egyszerű lemma. Jelöljük $P(n, x, y, z)$ -vel P optimális célfüggvényértékét.

1. Lemma. *Ha $\lambda > 0$, akkor $W(n, \lambda x, \lambda y, \lambda z, t) = \lambda W(n, x, y, z, t)$ és $P(n, \lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda P(n, x, y, z)$ minden n, x, y, z, t -re.*

Bizonyítás. A P feladat célfüggvényébe és feltételeibe való behelyettesítéssel azonnal kapjuk a lemma állítását. \square

1. Következmény. *EV értékét nem befolyásolja az x, y, z paramétereknek egy $\lambda > 0$ faktorra való átskálázása.*

2. Következmény. *Az általánosság megsértése nélkül feltehetjük, hogy y és z közül valamelyik értéke 1.*

3. Tétel. *A GN-típusú játékok osztályára $EV \leq 2$.*

Bizonyítás. Két esetet különböztetünk meg.

a) $x \leq z$. Ekkor W a t valós szám konvex (lineáris, ha $x = z$) kvadratikus függvénye a $[0, n]$ intervallumon. Így maximumát az intervallum valamelyik (vagy mindkettő) végpontjában veszi fel. Mivel $W(n, x, y, z, 0) = 0$ és $W(n, x, y, z, n) > 0$, a maximumpont $t = n$. Mivel $C(n, x, y, z, n) = n(n-1)(z-x) + ny > 0$, ezért $q_n = 1$, $q_t = 0$, $t \neq n$ kielégíti a (8) feltételt, és ezáltal lehetséges megoldása P -nek, ezért $EV = 1$.

b) $x > z$. Tegyük fel, hogy n páros. Ekkor $q_{\frac{n}{2}} = 1$, $q_i = 0$, $i \neq \frac{n}{2}$ egy SCE , amit ellenőrizhetünk a P feltételeibe való behelyettesítéssel. Valóban

$$C(n, x, y, z, \frac{n}{2}) = \frac{n}{2}(x-z) > 0.$$

A $W(n, x, y, z, t)$ egész számegegyenesen vett t szerinti abszolút maximuma a

$$t^* = \frac{y + nx - z}{2(x - z)} \quad (9)$$

pontban van. Azonnal látszik, hogy $t^* \geq \frac{n}{2}$. Ha $t^* \geq n$, mivel W a t konkáv kvadratikus függvénye és ezért monoton növekvő a maximumpontjáig, ezért a $[0, n]$ intervallumon a maximumát a $t = n$ pontban veszi fel. Így az alábbi becslést kapjuk EV -re

$$EV \leq \frac{W(n, x, y, z, n)}{W(n, x, y, z, \frac{n}{2})} = \frac{n(y + (n-1)z)}{\frac{n^2}{4}(x+z) - \frac{n}{2}z + \frac{n}{2}y} < 2. \quad (10)$$

Tekintsük most azt az esetet, amikor $t^* < n$. Ekkor (9)-ből az alábbi egyenlőtlenséget kapjuk

$$y < nx - (2n-1)z. \quad (11)$$

Ha $z > 0$, akkor a 2. Következmény miatt feltehetjük, hogy $z = 1$. Így

$$\begin{aligned} EV &\leq \frac{W(n, x, y, 1, t^*)}{W(n, x, y, 1, \frac{n}{2})} = \\ &= \frac{\frac{(y+nx-1)^2}{4(x-1)}}{\frac{n^2}{4}(x+1) - \frac{n}{2} + \frac{n}{2}y} = \frac{(y+nx-1)^2}{n^2(x^2-1) + 2n(x-1)(y-1)}. \end{aligned}$$

Ha a jobb oldal y szerinti deriváltját vesszük, akkor könnyű látni, hogy az pozitív minden $n \geq 2$ -re, vagyis y növekvő függvénye. A $z = 1$ behelyettesítéssel (11)-ből azt kapjuk, hogy

$$y < 1 + nx - 2n. \quad (12)$$

Így

$$EV \leq \frac{W(n, x, 1 + nx - 2n, 1, n)}{W(n, x, 1 + nx - 2n, 1, \frac{n}{2})} = \frac{4}{3} < 2. \quad (13)$$

Ha $z = 0$, akkor $y > 0$ és a 2. Következmény miatt $y = 1$ feltehető. Ekkor (11) az alábbi egyszerű formát ölti

$$1 < nx$$

és

$$EV \leq \frac{W(n, x, 1, 0, t^*)}{W(n, x, 1, 0, \frac{n}{2})} = \frac{\frac{(1+nx)^2}{4x}}{\frac{n^2}{4}x + \frac{n}{2}} = \frac{(1+nx)^2}{n^2x^2 + 2nx}, \quad (14)$$

ami kisebb, mint $\frac{4}{3}$ ha $nx > 1$.

A bizonyítás hasonló, ha n páratlan. Az egyetlen különbség, hogy ebben az esetben $q_{\frac{n}{2}-1} = \frac{1}{2}$, $q_{\frac{n}{2}+1} = \frac{1}{2}$, $q_i = 0$, $i \neq \frac{n}{2} - 1, \frac{n}{2} + 1$ SCE-vel kell számolnunk a (10), (13) és (14) nevezőiben. \square

4. Tétel. A GN-típusú játékok osztályára $EV \geq 2$.

Bizonyítás. Tekintsünk egy n -személyes GN-típusú játékot az $x = 1 + \frac{2}{n}$, $y = 0$, $z = 1$ paraméterekkel, és tegyük fel, hogy $n \geq 4$ és páros. Először meghatározzuk $\max_{q \in LP} \sum_{t=0}^n W(n, 1 + \frac{2}{n}, 0, 1, t)q_t$ pontos értékét, ahol LP a P kisméretű LP lehetséges tartománya. Azt állítjuk, hogy a $q_{\frac{n}{2}} = \frac{n+2}{2n+2}$, $q_{\frac{n}{2}+1} = \frac{n}{2n+2}$, $q_i = 0$, $i \neq \frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 1$ SCE optimális megoldása az alábbi formában felírt kisméretű LP-nek

$$\begin{aligned} P : \quad & \max \sum_{t=0}^n W(n, 1 + \frac{2}{n}, 0, 1, t)q_t \\ & - \sum_{t=0}^n C(n, 1 + \frac{2}{n}, 0, 1, t)q_t \leq 0 \\ & \sum_{t=0}^n q_t = 1, \quad q_t \geq 0, \quad t = 0, 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (15)$$

Behelyettesítéssel láthatjuk, hogy a megadott megoldás lehetséges, és a cél-függvény értéke $\frac{n(n+1)}{2} - 1$. A P duálisa az alábbi kétváltozós LP

$$\begin{aligned} D : \quad & \min v \\ & v \geq C(n, 1 + \frac{2}{n}, 0, 1, t)u + W(n, 1 + \frac{2}{n}, 0, 1, t) \quad (t = 0, 1, \dots, n) \\ & u \geq 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Azt állítjuk, hogy $u = \frac{n}{2} - 1$, $v = \frac{n(n+1)}{2} - 1$ a (16) egy lehetséges megoldása. Egyszerű számolással (kvadratikus függvény maximalizálása) láthatjuk, hogy a következő konkáv kvadratikus függvény

$$Q(t) = C(n, 1 + \frac{2}{n}, 0, 1, t)u + W(n, 1 + \frac{2}{n}, 0, 1, t)$$

t szerinti folytonos maximumpontja $t = \frac{n+1}{2}$, amely nem egész, de pontosan a $[\frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 1]$ egész végpontú szakasz felezőpontja. A kvadratikus függvény szimmetriája miatt az egészértékű maximum a két végpontban van és a függvényérték mindkét pontban $\frac{n(n+1)}{2} - 1$, amely egyenlő a P -nek a $q_{\frac{n}{2}} = \frac{n+2}{2n+2}$, $q_{\frac{n}{2}+1} = \frac{n}{2n+2}$, $q_i = 0$, $i \neq \frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 1$ lehetséges megoldásában (ami egy SCE) felvett célfüggvényértékével. Így a lineáris programozás gyenge dualitás tétele értelmében ez az SCE a P optimális megoldása. Most tehát éppen azt mutattuk meg, hogy

$$\max_{q \in LP} \sum_{t=0}^{t=n} W(n, 1 + \frac{2}{n}, 0, 1, t) q_t = \frac{n(n+1)}{2} - 1.$$

A $W(n, 1 + \frac{2}{n}, 0, 1, t)$ függvény a t -szerinti abszolút folytonos maximumát a $[0, \infty)$ tartományon a

$$t^* = \frac{n(1 + \frac{2}{n}) - 1}{\frac{4}{n}},$$

pontban veszi fel. Ez nem lehet kisebb, mint n , ha $n \geq 4$, amit viszont feltettünk. Így $W(n, 1 + \frac{2}{n}, 0, 1, t)$ t -szerinti folytonos maximuma a $[0, n]$ tartományon $W(n, 1 + \frac{2}{n}, 0, 1, n) = n(n-1)$. Ezért a következő becslést kapjuk EV -re

$$EV \geq \frac{n(n-1)}{\frac{n(n+1)}{2} - 1} = \frac{2n(n-1)}{n(n+1) - 2}. \quad (17)$$

Az egyenlőtlenség jobb oldala n növekvő függvénye, amely 2-höz tart, ha $n \rightarrow \infty$ páros n -eken keresztül. \square

3. Következmény. A GN -típusú játékok osztályára $EV = 2$.

Tekintsük most azt a speciális esetet amikor $n = 2$ és

$$y + z < x < 2y + 2z. \quad (18)$$

Ez a jól ismert gyáva nyúl játék (GN -játék), amelyik bimátrix formában a következő

$$\begin{bmatrix} y+z, y+z & y, x \\ x, y & 0, 0 \end{bmatrix}.$$

Mindkét játékos első stratégiája egy alacsony kockázatú akció (L), a második pedig egy magas kockázatú (H). Két NEP van a tiszta stratégiák között: (L, H) és (H, L) . Az SW maximuma $2(y+z)$, amely az (L, L) stratégiapáros-hoz tartozik. Ez azt jelenti, hogy ha bármelyik játékos egyedül választja H -t, akkor a legmagasabb hasznosságot éri el, míg ha mindketten H -t választják, az katasztrofális számukra. Abból a célból, hogy egy GN -típusú játék egy n -személyes GN -játékot adjon, ezeknek a tulajdonságoknak a megmaradását követeljük meg, vagyis a torlódási alakban specifikáltakon kívül feltesszük a következőket:

- (i) egy játékos a maximális hasznosságot akkor éri el, ha egyedül játssza H -t, míg mindenki más L -et,

(ii) a maximális SW -t az L kollektív választása adja.

A torlódási alakban most $F1$ a H szerepét, míg $F2$ az L -ét játssza. Így a torlódási alakból, a korábbi jelöléseket használva a két követelmény:

$$(i) (n-1)x > y + (n-1)z$$

(ii) $W(n) > W(t)$, minden $t = 0, 1, \dots, n-1$ esetében.

Amint azt a 3. Tétel bizonyításában láttuk, (ii) fennáll, ha $x \leq z$. Ha pedig $x > z$, akkor a

$$t^* = \frac{y + nx - z}{2(x-z)} \geq n,$$

vagy az ezzel ekvivalens

$$y \geq nx - (2n-1)z \quad (19)$$

egyenlőtlenség teljesülése esetén (ii) fennáll. Felmerül a kérdés, hogy jobb EV -t kapunk-e, ha a GN -játékok osztályára korlátozzuk magunkat? A feleletet a következő tétel adja meg.

5. Tétel. *A GN -játékok osztályára $EV = 2$.*

Bizonyítás. Mivel a GN játékok egyúttal GN -típusú játékok is, ezért a 3. Tétel állítása szerint $EV \leq 2$. Annak belátásához, hogy $EV \geq 2$, azt fogjuk megmutatni, hogy a 4. Tétel bizonyításában szereplő $x = 1 + \frac{2}{n}$, $y = 0$, $z = 1$ ($n \geq 4$ és páros) paraméterekkel adott GN -típusú játék egyúttal egy GN játék is. Ha a paramétereket behelyettesítjük (i)-be és (19)-be, akkor azt kapjuk, hogy

$$(n-1)\left(1 + \frac{2}{n}\right) > (n-1),$$

$$n\left(1 + \frac{2}{n}\right) - 2n + 1 \leq 0,$$

ami könnyen igazolhatóan fennáll, ha $n \geq 3$. \square

Kis n -ekre 2-nél lényegesen jobb értékeket kapunk. Különösen fontos maga a „klasszikus” GN -játék esete, amikor $n = 2$.

6. Tétel. *A 2-személyes GN -játékokra $EV = \frac{3}{2}$.*

Bizonyítás. Elegendő a 3. Tétel bizonyításából a b) esetet és abból is azt az alesetet tekinteni, amikor $t^* = \frac{y+2x-z}{2(x-z)} > 2$, mivel a bizonyításban azt már beláttuk, hogy ha $t^* \leq 2$, akkor $EV \leq \frac{4}{3} < \frac{3}{2}$. A maximális SW a (18) feltétel szerint $2(y+z)$. Az SW maximumát az SCE -k halmazán az alábbi LP optimális célfüggvényértéke adja

$$\max (x+y)p_1 + 2(y+z)p_2$$

$$2ypq_0 + (z-x)q_1 + 2(x-y-z)q_2 \leq 0$$

$$q_0 + q_1 + q_2 = 1$$

$$q_0, q_1, q_2 \geq 0.$$

Könnyű megmutatni egyszerű behelyettesítéssel, hogy $q_0 = 0$, $q_1 = \frac{2}{3}$, $q_2 = \frac{1}{3}$ a (20) egy lehetséges megoldása. Ebből kapjuk az alábbi becslést, felhasználva a (18) egyenlőtlenséget

$$\frac{2(y+z)}{\frac{2}{3}(x+y) + \frac{2}{3}(y+z)} \leq \frac{2x}{\frac{2}{3}(x+y) + \frac{1}{3}x} \leq \frac{3}{2}.$$

Tekintsük most az $x = 1 + \varepsilon$, $y = 0$, $z = 1$ paraméterekkel definiált GN -játékot, ami nyilvánvalóan kielégíti a (18) feltételt, ha ε elég kicsi. Könnyen igazolható, hogy $q_0 = 0$, $q_1 = \frac{2}{3}$, $q_2 = \frac{1}{3}$ a (20) feladat egy optimális megoldása, és a célfüggvény értéke $\frac{2}{3}(1 + \varepsilon) + \frac{2}{3}$. Az SW abszolút maximuma 2. Így

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2}{\frac{2}{3}(1 + \varepsilon) + \frac{2}{3}} = \frac{3}{2},$$

amivel a tétel állítását bebizonyítottuk. \square

Érdekes, hogy az EV nem romlik, ha a játékosok számát eggyel növeljük.

7. Tétel. *A 3-személyes GN -játékokra $EV = \frac{3}{2}$.*

Bizonyítás. Az SW maximumát az SCE -k halmazán az alábbi LP optimális célfüggvényértéke adja:

$$\begin{aligned} \max & (2x + y)q_1 + 2(x + y + z)q_2 + (3y + 6z)q_3 \\ & 3yq_0 + (-2x + y + 2z)q_1 - yq_2 + (6x - 3y - 6z)q_3 \leq 0, \\ & q_0 + q_1 + q_2 + q_3 = 1 \\ & q_0, q_1, q_2, q_3 \geq 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Az SW maximuma vagy $2(x + y + z)$ vagy $3y + 6z$. Az első esetben $q_2 = 1$, $q_i = 0$, $i \neq 2$ egy SCE és $EV = 1$. A második esetben a $2(x + y + z) < 3y + 6z$ egyenlőtlenségből azt kapjuk, hogy $x > z + \frac{1}{2}$. Mivel $q_2 = 1$, $q_i = 0$, $i \neq 2$ egy lehetséges megoldás, az alábbi becsléshez jutunk

$$EV \leq \frac{3y + 6z}{2x + 2y + 2z} < \frac{3y + 6z}{2(z + \frac{1}{2}) + 2y + 2z} = \frac{3y + 6z}{2y + 4z + 1} < \frac{3}{2}. \quad (22)$$

Tekintsük ismét azt a GN -játékot, amelynek paraméterei $x = 1 + \varepsilon$, $y = 0$, $z = 1$. Könnyen belátható, hogy $q_2 = 1$, $q_i = 0$, $i \neq 2$ egy SCE és optimális megoldása a (21) feladatnak, az optimális célfüggvény érték pedig $4 + 2\varepsilon$. Az SW abszolút maximuma 6. Így

$$EV \geq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{6}{4 + 2\varepsilon} = \frac{3}{2}. \quad (23)$$

A (22)-t és (23)-at összevetve azt kapjuk, hogy $EV = \frac{3}{2}$, ami a tétel állítása. \square

Már $n = 8$ -tól kezdve a (17) egyenlőtlenségből egy ennél nagyobb alsó korlátot ($EV \geq 1,6$) kapunk, majd ez az alsó korlát a (17) egyenlőtlenség szerint n növekedésével (páros n -eken keresztül) monoton növekedve tart 2-höz.

5 Egy példa

Van négy vállalat, amelyek közül mindegyik dönthet, hogy egy tóba az ipari vizet tisztítatlanul, vagy tisztítva ereszti be. Kétoldalú szerződéseik vannak egymással, amelyekben megígérik, hogy a vizet tisztítják mielőtt a tóba eresztik. Ha bármelyikük is megszegi az ígétét, akkor büntetést kell fizetnie. A büntetés mértéke függ a tóba bekerülő káros anyagok teljes mennyiségétől, amely arányos a szerződést megszegő vállalatok számával. Így tehát mindegyik vállalat számára két cselekvési lehetőség van: tisztítani (T) vagy nem tisztítani a vizet (P). A hasznosságok az elérhető nyereségből vezethetők le és olyanok, hogy minden vállalat egy gyáva nyúl játékot játszik mindegyik másikkal. Tegyük fel, hogy a hasznosságok az alábbi táblázatban találhatóak. (Az egyik vállalat a sor- a másik az oszlopjátékos.)

| | | |
|-----|--------|--------|
| | T | P |
| T | (6, 6) | (2, 7) |
| P | (7, 2) | (0, 0) |

Ebből egy torlódási játék konstruálható az alábbi torlódási alakkal:

| vállalatok száma | T | M |
|------------------|-----|-----|
| 1 | 21 | 6 |
| 2 | 14 | 10 |
| 3 | 7 | 14 |
| 4 | 0 | 18 |

Láthatjuk, hogy ez egy 4-személyes GN -játék. Az SW maximalizáló SCE -ket a következő (kisméretű) LP megoldásával kapjuk:

$$\max 27q_1 + 48q_2 + 63q_3 + 72q_4$$

feltéve, hogy

$$24q_0 + 3q_1 - 6q_2 - 3q_3 + 12q_4 \leq 0$$

$$q_0 + q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 1$$

$$q_0, q_1, q_2, q_3, q_4 \geq 0.$$

Az optimális megoldás: $q_0 = 0$, $q_1 = 0$, $q_2 = 0$, $q_3 = 0,8$, $q_4 = 0,2$ az $SW = 64,8$ optimális célfüggvényértékkel. A legjobb (tisztá) NEP esetében $SW = 63$. Így az SCE protokoll alkalmazásával 2,86%-os társadalmi hasznosság javulás érhető el a Nash-egyensúllyal összehasonlítva.

Ennek az SCE -nek az implementálására létesíthetünk egy „klub”-ot, amelyhez bármely vállalat csatlakozhat, vagy kívül maradhat. A csatlakozók visszavonhatatlanul elkötelezik magukat, hogy a klub vezetésének utasításait követik, bármi legyen is az. Mielőtt bárki is belépne a klubba, a vezetőség nyilvánosságra hozza, hogy 0,2 valószínűsége van annak, hogy egyöntetűen minden klubtagnak tisztítani kell és 0,8 valószínűséggel háromnak tisztítani kell, egynek pedig nem. Hogy melyik legyen az, akinek nem kell tisztítani, azt egy további sorsolás dönti el. Logikus a szimmetriára való tekintettel,

hogy mindegyik vállalat azonos valószínűséggel $(0,25)$ részesüljön ebben a kedvezményben. Így végeredményben a sorsolás olyan lehet, hogy öt cédulát teszünk egy urnába a következő megjelölésekkel (ez a tisztítási kötelezettségre vonatkozik):

| | Valószínűség |
|-------------------------------------|--------------|
| Mindenki | $0,2$ |
| Mindenki az 1. vállalat kivételével | $0,2$ |
| Mindenki a 2. vállalat kivételével | $0,2$ |
| Mindenki a 3. vállalat kivételével | $0,2$ |
| Mindenki a 4. vállalat kivételével | $0,2$ |

Ez az *SCE* stabil abban az értelemben, hogy ha mindenki csatlakozik a klubhoz, akkor egyetlen vállalat sem érdekelt abban, hogy egyedül elhagyja azt.

6 Összefoglalás

Megmutattuk, hogy az n -személyes, vegyes, egyszerű, kétkiszolgálós lineáris torlódási játékok egy osztályában, az n -személyes „gyáva nyúl”-típusú játékok körében a korrelált egyensúly egy általánosítása, a puha korrelált egyensúly még a legrosszabb esetben is biztosítani tudja, hogy a társadalmi jólét (a vizsgált modellben a játékosok hasznosságainak összege) abszolút maximumának legalább a felét elérjük, vagyis a kényszerítési érték 2 . A gyáva nyúl játékokra, amelyek a gyáva nyúl típusú játékok egy alosztálya és természetes általánosítása n játékosra a klasszikus kétszemélyes gyáva nyúl játéknak, ugyanez a garancia vonatkozik. A két- és háromszemélyes gyáva nyúl játékokra megmutattuk, hogy a kényszerítési érték $\frac{3}{2}$. A puha korrelált egyensúly protokollját egy környezetvédelmi példán illusztráltuk.

További kutatómunkára sokféle irányban mutatkozik lehetőség. Elsősorban azt érdemes megnézni, mi történik, ha a kiszolgálóhelyek száma legalább 3 . Ebben az esetben a gyenge korrelált egyensúly is növelheti a társadalmi hasznosságot és így lehetőség nyílik a korrelált egyensúly, a gyenge- és puha korrelált egyensúly teljesítményének összehasonlítására, illetve annak elemzésére, hogy mikor melyik általánosítás a legmegfelelőbb. A társadalmi hasznosságot is lehetne a hasznosságok összege (utilitáriánus megközelítés) helyett a legkisebb hasznossággal (egalitáriánus megközelítés) definiálni és az eredményeket összehasonlítani. Át lehet térni, megváltoztatva a megváltoztatókat, társadalmi hasznosságról a társadalmi költségekre, és ugyanazokat a kérdéseket feltenni. Így „stabilitás ára” típusú eredményeket kaphatunk a puha korrelált egyensúlyra, amelyet már közvetlenül tudunk összehasonlítani a Nash-egyensúlyra és a klasszikus korrelált egyensúlyra vonatkozó eredményekkel. Egy másik irány lehet a legrosszabb eset elemzés mellett az átlagos eset vizsgálata. Ekkor a szimuláció jön elsősorban szóba, munkát adva ezen terület kutatóinak is.

Irodalom

1. Ashlagi I., Monderer D. and Tennenholtz M. (2008) On the value of correlation. *Journal of Artificial Intelligence*, 33:575–613.
2. Aumann R. J. (1974) Subjectivity and correlation in randomized strategies. *Journal of Mathematical Economics*, 1:67–96.
3. Aumann R. J. (1987) Correlated equilibrium as an expression of Bayesian rationality. *Econometrica*, 55:1–18.
4. Bracht J. and Feltovich N. (2008) Efficiency in the trust game: an experimental study of precommitment, *International Journal of Game Theory*, 37:39–72.
5. Carrol J. W. (1988) Iterated N-player prisoners' dilemma games. *Philosophical Studies*, 53:411–415.
6. Cason T. N. and Sharma T. (2006) Recommended play and correlated equilibria: An experimental study. Krannert Graduate School of Management, Perdue University West Lafayette, Indiana, Institute for Research in the Behavioral, Economic, and Management Sciences, Paper No. 1191.
7. Christodoulou G. and Koutsoupias E. (2005) *On the price of anarchy and stability of correlated equilibria of linear congestion games*. In Proceedings of the 13th Annual European Symposium, ESA: 59–70.
8. Dyer M. E. (1984) An $O(n)$ algorithm for the multiple choice-knapsack linear program. *Mathematical Programming*, 29:57–63.
9. Forgó F., Szép J. and Szidarovszky F. (1999) *Introduction to the Theory of Games: Concepts, Methods, Applications*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London.
10. Forgó F. (2010) A generalization of correlated equilibrium: A new protocol. *Mathematical Social Sciences*, 60:186–190.
11. Forgó F. (2014) Measuring the power of soft correlated equilibrium in 2-facility simple non-increasing linear congestion games. *Central European Journal of Operations Research*, 22:139–165.
12. Forgó F. (2016) The prisoners' dilemma, congestion games and correlation. In: *Progress in Economics Research*, 34:129-141 Editor: Albert Tavadze, Nova Science Publishers, Inc. New York.
13. Hamburger H. (1973) N-person prisoners' dilemma. *Journal of Mathematical Sociology*, 3:27–48.
14. Moulin H., Vial J.-P. (1978) Strategically zero-sum games: the class of games whose completely mixed equilibria cannot be improved upon. *International Journal of Game Theory*, 7:201–221.
15. Nash J. (1950) Equilibrium points in n-person games. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 36:48–49.
16. Nash J. (1951) Non-Cooperative games. *The Annals of Mathematics*, 54:286–295.
17. von Neumann J. (1928) Zur Theorie der Gesellschaftsspiele. *Mathematische Annalen*, 100:295–320.
18. Osborne M. J. and Rubinstein A. (1996) *A Course in Game Theory*. The MIT Press Cambridge MA.
19. Roughgarden T. and Tardos E. (2002) How Bad is Selfish Routing? *Journal of the ACM*, 49:236–259.

20. Szilagyi M. N. and Somogyi I. (2010) A systematic analysis of the N -person chicken game. *Complexity*, 15:56–62.

CORRELATION, CONGESTION GAMES, CHICKEN GAME

We study the class of n -person, two-facility, simple, mixed, linear congestion games and determine how close the social welfare achievable by soft correlated equilibria (Forgó 2010) can get to the absolute maximum of social welfare. For this purpose we use the enforcement value (Ashlagi et al. 2008). We prove that the enforcement value for the class of games under study is exactly 2. For the class of n -person chicken games that form a subclass of n -person, two-facility, simple, mixed, linear congestion games the enforcement value is also 2. For the special case $n = 2$ (the classical chicken game) and $n = 3$, however, the enforcement value is $\frac{3}{2}$. We illustrate the working of the protocol of soft correlated equilibrium in an example of environmental background.

Keywords: correlated equilibrium, soft correlated equilibrium, congestion games, chicken game, enforcement value