A BIZTOSÍTÁSI MATEMATIKA ILLESZKEDÉSI PROBLÉMÁJA ÉS A MATEMATIKAI PROGRAMOZÁS[1]

STAHL JÁNOS
OTP-Garancia Biztosító Rt.

1. Ez a cikk új matematikai eredményt nem tartalmaz, „mindössze" a matematikai programozás alkalmazásának egy lehetőségével szeretnénk foglalkozni. Hogy ezen alkalmazásnak a most következő vázolása a lehetőségből valósággá váljon, ahhoz persze a cikkben foglaltaknál sokkal többre, mélyebb elemzésekre, a körülmények pontosabb ismeretére és ismertetésére van szükség. A cikk megírásával elsősorban a tárgyalt megközelítéshez szeretnénk minél előbb és minél több aktuáriust megnyerni, egyáltalán a t. Olvasót valami jobbra serkenteni. Itt szeretnék köszönetet mondani a cikk két bírálójának észrevételeikért, valamint néhány kollégámnak, akik a cikk korábbi változataihoz fűztek megjegyzéseket. A cikk megfogalmazásakor többes szám első személyt használtam. Nem véletlen, hogy néhány mondatban egyes szám első személyt használok.

2. Egy biztosítónak mindig eleget kell tudnia tenni minden fizetési kötelezettségének. Ennek érdekében egyrészt megfelelő díjakat határoz meg, másrészt tartalékokat képez és megfelelő mértékű(nek tartott) szavatoló tőkével rendelkezik. Ezeket kell alkalmasan befektetnie. A biztosításban az illeszkedési probléma megoldása olyan befektetések meghatározását jelenti, amelynek hozamai jól illeszkednek a biztosító várható fizetési kötelezettségeihez.

A dolog természetéből adódóan egy fix időpontban a biztosítók azon időponthoz képest jövőbeli fizetési kötelezettségei bizonytalanok. Ugyancsak bizonytalanok (lehetnek) az akkor rendelkezésre álló (egyes) befektetések hozamai is. A bizonytalanság okai ismertek, illetve sokszor és sokhelyütt tárgyaltak. A bizonytalanság matematikai apparátussal történő kezelésénél mondhatni klasszikus eszköz a valószínűségelmélet. Ez így van a biztosítás esetében is. Ugyanakkor mintegy 40 éve a matematika különféle alkalmazásainál egy mindenképpen újnak mondható megközelítés, az operációkutatás, és részben ennek köszönhetően egy mindenképpen új eszköztár alakult ki. Ebben méltán legfontosabb elem a matematikai programozás. Úgy tűnik, hogy mindez valahogy elkerülte az aktuáriusok, vagy egy részük figyelmét.

3. A brit irodalomból az [1], [2] és [3] publikációkat ajánlották figyelmünkbe

[1]Beérkezett: 1993. június 20.

olyanokként, amelyek illeszkedési problémák kezelésére operációkutatási módszert, nevezetesen portfolió analízist alkalmaznak. A publikációk részletes és kritikus ismertetése egy külön cikket igényelne. Itt röviden csak annyit, hogy ezekben a cikkekben adottak a lényegében véletlen kötelezettségek, melyek rögzített időpontokban, mondjuk évenként egyszer jelennek meg. Adottak továbbá befektetési lehetőségek, melyek ugyancsak véletlen hozamai is ugyanezen időpontokban adódnak. A befektetések egy kombinációjának a hozamait a kötelezettségekkel szembeállítva tekintik a különbségekből adódó cash flow- t. Ennek várható értéke, szórásnégyzete, valamint a befektetési kombináció ára az a három szempont, amely alapján egy kombináció értékelhető. (Mondjuk, vizsgálhatók az efficiens kombinációk stb.) Kritikaként is csak annyit, hogy elsősorban a bevezetett cash flow nem tetszik. Ez ugyanis azt jelenti, hogy negatív érték esetén az aktuális, véletlenként kezelt kamatlábon felvett hitelből elégítik ki a kötelelzettségeket, pozitív érték esetén pedig ezt a felesleget ugyanezen kamatlábbal letétbe helyezik. Ez mindenképpen csak egyetlen lehetőség, ami vagy realizálható, vagy nem. (A hitel felvételét akár törvény is tilthatja.) A hitelfelvétellel, illetve egy más piac nyújtotta lehetőségekkel hozható kapcsolatba az a technikailag viszonylag könnyen elkerülhető probléma is, hogy ezekben a cikkekben megengedik a befektetések negatív súlyokkal történő kombinálását is. Az sem eléggé tisztázott, hogy mit akarnak egy ilyen modell megoldásával elérni. Legalább két lehetőség van ugyanis. Lehet ilymódon a biztosító befektetéseinek meghatározását, vagy a biztosító befektetéseit értékelő aktuáriust támogatni. Hasonló modell természetesen használható mindkét esetben, de ugyanazt a modellt legalábbis másképpen kell használni az egyes esetekben. [3] éppen csak megemlíti ezt az alkalmazás szempontjából igen fontos megkülönböztetést. Az sem tetszik, ahogy a cikkekbeli modell a jövőt kezeli. Ennek következménye, hogy megkérdőjelezhető az eredmények optimalitása, de a valamilyen értelemben optimális választásra történő törekvés is. Mindezt részletesen már a most javasolt matematikai programozási modellek alkalmazásával kapcsolatban fejtjük ki, ugyanis ezek a problémák ott is léteznek.

Ugyanakkor ismertek kísérletek a matematikai programozás ilyen alkalmazására. A közelmúltban hallgattam egy előadást Mulvey és tanítványainak egy, befektetési döntések meghatározására szolgáló sztochasztikus programozási modelljéről, ami bankterületen alkalmazásra is került. (Mulvey ugyan nem aktuárius, „csak" matematikai programozó.) Úgy látom azonban, hogy ennek a modellnek az alkalmazása nálunk egyelőre szóba sem jöhet, és ezt is részletezni fogom később.

Természetesen érzem, hogy ezek a hivatkozások nem tekinthetők az irodalom alapos feldolgozásának. Ennek túlságosan súlyos megítélésén talán valamit javít a cikk megírásának már említett szándéka, valamint az, hogy a hivatkozott cikkeket C. D. Daykin, a brit kormány főaktuáriusa ajánlotta figyelmünkbe és az említett áttekintő előadást Prékopa András tartotta.

4. Az illeszkedési probléma matematikai megfogalmazásánál kiindulópontunk a probléma diszkretizálása. Úgy képzeljük, hogy vizsgálatainkat a $t = 0$ időpontban végezzük, és az illeszkedést (a jövőben) akkor tekintjük jónak, ha alkalmasan (mondjuk, jó sűrűn) megválasztott $(0 <)t_1 < t_2 < \ldots < t_n \ldots$ időpontokban jónak tekinthető az illeszkedés. Ezek az időpontok például úgy adódnak, hogy a jövőt reprezentáló $t > 0$ félegyenest egymáshoz illeszkedő és egymást követő kis részekre (időszakokra) bontjuk és mindegyikből választunk egy (idő)pontot. Ez az egész diszkretizálás így nem csak önkényes egy kicsit, hanem némiképpen pontatlan is, de ezt majd a modellből kapott eredmények felhasználásánál lehet és kell figyelembe venni.

Egy t_j időpontban a várható kötelezettségek nagysága legyen $L(t_j)$. A $t = 0$ időpontban rendelkezésre álló i-edik befektetési lehetőséget $(i = 1, 2, \ldots)$ egy $f_i(t_j)$ $(j = 1, 2, \ldots)$ sorozattal írhatjuk le, ahol az $f_i(t_j)$ érték a befektetésből a $t_j > 0$ időpontban származó hozam nagysága. $f_i(t) < 0$ a biztosító szempontjából kiadást, $f_i(t) > 0$ pedig hozamot jelent. Az $L(t_j)$ és az $f_i(t_j)$ értékeket úgy képzeljük, hogy azok valójában egy (rövid) időszakra vonatkoznak, nevezetesen arra az időszakra, melyből t_j-t kiválasztottuk. Az $f_i(t_j)$ sorozat tulajdonképpen az i-edik befektetési lehetőség várható cash flow-jával egyenértékű.

Szokásosabb lett volna, ha a kötelezettségeket és a befektetések hozamait sztochasztikus folyamattal modellezzük. Őszintén szólva a sztochasztikus modelleket kevésbé kedvelem, mert/ezért nem is értek eléggé az alkalmazásukhoz szükséges apparátusokhoz sem. Persze az alapvető kérdés mindig az, hogy van-e létjogosultsága, teljesülnek-e a feltételei egy valamilyen matematikai modell alkalmazásának. Úgy gondolom, hogy erre a kérdésre itt negatív a válasz. Ugyanis annyira azért értek ehhez az apparátushoz és ismerem a körülményeinket, hogy ezt az utat, legalábbis most, ne tekintsem járhatónak. A kötelezettségek leírására még csak használhatnánk ezt a fogalmat, a folyamat várható értékét, szórását stb., de a befektetési oldalon ezt még más körülmények között sem a legjobb megtenni. Számolható, közvetlenül használható modell pedig végképpen nem adódna. Erre még visszatérünk, de, mint már említettük, legfőbb törekvésünk, hogy egy, a mi körülményeink között már most is alkalmazható(nak tűnő) lehetőséget vázoljunk.

A befektetési portfolió kialakítása az egyes $f_i(t_j)$ sorozatokhoz rendelendő nemnegatív súlyok meghatározását jelenti. Ezek a súlyok azt fejezik ki, hogy milyen mértékben él a biztosító a megfelelő befektetési lehetőséggel. Többféleképpen is megfogalmazható azonban, hogy mit jelent az illeszkedés, és mit jelent a jól illeszkedés. Az alábbiakban ezek közül foglalkozunk néhánnyal, és ez mondanivalónk egyik lényeges része.

Egy t_j időpontban a befektetések hozama $\sum_i x_i f_i(t_j)$, ahol x_i az i-edik befektetéshez rendelt (meghatározandó) súly. Mihez illeszkedjen, mihez legyen közel ez az összeg? Eléggé kézenfekvőnek tűnik azt megkövetelni, hogy $L(t_j)$-hez, hiszen a probléma megfogalmazásakor eleve a biztosító várható kötelezettségeiről beszéltünk.

Mit jelentsen tehát az illeszkedés? Legalább a

$$\sum_i x_i f_i(t_j) > L(t_j) \qquad (j = 1, 2, \ldots) \tag{1}$$

feltételek teljesülését. Azért használtuk a legalább kifejezést, mert valakinek jobban tetszhet egy „nagyobb biztonságot ígérő"

$$\sum_i x_i f_i(t_j) > kL(t_j) \qquad (j = 1, 2, \ldots) \tag{2'}$$

vagy egy

$$\sum_i x_i f_i(t_j) > L(t_j) + kD(t_j) \qquad (j = 1, 2, \ldots) \tag{2''}$$

alakú feltétel megfogalmazása. Itt $D(t_j)$ $L(t_j)$ bizonytalanságának, ingadozásának (szórásának) valamilyen kifejezése, a $k > 0$ pedig a valakinek tetsző adott biztonsági tényező, ami (2')-nél 1-nél is nagyobb (legalábbis, ha $L(t_j) > 0$, ami viszont itt elég természetes).

Kezdjük el vizsgálni, hogy az (1) feltételeket kielégítő illeszkedések közül melyik tetszhet a legjobban. Ez majd együtt jár(hat) az illeszkedési feltételek megfogalmazásának módosításával is.

A biztosító befektetési tevékenységét úgy képzeljük, hogy egy adott időpontban a management befektetésekért felelős része az akkor rendelkezésre álló eszközök és várható kötelezettségek felmérése alapján hoz a befektetésekről valamilyen döntést. Egy későbbi időpontban, a közben befolyt, esetleg újabb megkötött szerződésekből is származó díjbevételek, a közben megtörtént kárkifizetések, esetleges szerződés visszavásárlások miatti kifizetések stb., az akkorra rendelkezésre álló befektetési lehetőségek, valamint a várható kötelezettségekre vonatkozó aktuális információk alapján újabb hasonló döntés születik. Ezen döntés részeként a korábbi befektetési döntések közül egyesek módosulhatnak is. Hogy miért és melyek, ez $t = 0$-ban még nem (lehet) ismert, de $t = 0$-ban az sem szükségképpen ismert pontosan, hogy ez a későbbi időpont mikor következik be. Ez természetesen egy nagyon elnagyolt elképzelés és megfogalmazás, de a lényeg benne van és sok minden belefér. Csak a példa kedvéért említjük azt a lehetőséget, hogy a biztosító tervezhet úgy is, hogy kötelezettségeit részben, vagy valamilyen növekedési szakaszban egészben a díjbevételekből fedezi, mikor is (és nem csak ekkor) pontosabb az $L(t_j)$-kkel kapcsolatban tiszta (most a díjbevételekből nem fedezett vagy nem fedezhető) kötelezettségekről beszélni. Ugyanilyen részletezettséggel említjük azt is, hogy egyes befektetések hozamából visszatérítési kötelezettsége van, vagy lehet a biztosítónak. Ennek figyelembevételére egy lehetőség, hogy ezt a visszatérítést az ilyen befektetésekhez tartozó $f_i(t_j)$ hozamok csökkentésével fejezzük ki. Nyilván teljesen más valós problémákról van szó a különböző ilyen esetekben, ugyanakkor a mi mondanivalónk szempontjából nincsenek nagy különbségek.

Legyen tehát $T > 0$ egy valamiképpen rögzített időpont, és legyenek $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots t_n = T$. A $(0, T)$ az az időtartam, amelyre a management úgy képzeli, hogy jó előrelátása van és/vagy amelyen belül nem (nagyon) akarja, nem tudja (nem szeretné(?)) a biztosító befektetéseit megváltoztatni, illetve legkésőbben a T időpontban hoz valamilyen újabb döntést a befektetésekkel kapcsolatban. Ha T'-vel jelöljük azt az időpontot, amikor újabb befektetési döntések születnek, akkor úgy képzeljük, hogy csak a T'-nél korábbi t_j időpontokra vonatkozó feltételek teljesülése az igazán érdekes, a T'-nél későbbi időpontokra vonatkozó döntések részben vagy teljesen, olcsón vagy drágán a T' időpontban még módosíthatók. Azaz megvan a lehetőség a befektetések igazítására, amit a következő időszak befektetéseire vonatkozó programozási modell megfogalmazásánál lehet illetve kell megtenni. Másképpen fogalmazva, az (1) feltételekben mindig csak a korábbi és változatlan befektetésekkel nem fedezett várható kötelezettségek szerepelnek, de úgy éreztük, hogy ezzel csak a jelöléseket bonyolítottuk volna. Ez egy nem kifejezetten matematikai eredményeket prezentáló cikkben biztosan felesleges, de egyébként is kerülendő.

Mindenesetre úgy gondoljuk, hogy eredményeiben használhatóbb modellhez jutnak akkor, ha a közeljövőre több illeszkedési feltételt fogalmaznak meg, mint az időszak végére. Sőt, a T-nél nagyobb, vagy valamiképpen távolinak tekintett időpontokra esetleg nem is fogalmaznak meg ilyen feltételeket, hanem egy távolinak tekintett időponttól „hátralévő" időtartamot mondjuk, olymódon kezelnek, hogy a befektetések akkor jelentkező hozamait valamiképpen T-re, vagy a szóbanforgó időpontra (vissza)diszkontálva a kapott érték meghaladja az ugyanakkor jelentkező, hasonlóan kezelt várható kötelezettségekből számított értéket. Ezeket a feltételeket kiegészíti(k), ha tetszik akkor a $t = 0$ időpontra vonatkozó azon feltétel(ek), amely(ek) a befektethető összeg felosztását írja (írják) le. (A rendelkezésre álló összeg nagysága, figyelembe veendő befektetési előírások stb.)

Mikor jó a biztosítónak egy olyan befektetési portfolió, amely a megválasztott t_j időpontokban kielégíti az (1) feltételeket? Másképpen fogalmazva: próbálkozzunk meg racionálisnak tűnő célfüggvények megfogalmazásával.

Valójában az (1) feltételeknél, legalábbis a túl közeli időpontokra vonatkozó feltételekben „zavaró" az egyenlőtlenség megengedése. Mint már említettük, $t = 0$-ban esetleg nem (pontosan) ismeretes még az a $T' < T$ időpont, amikor újra döntenek befektetésekről. Ha a biztosító az (1) feltételeknek olyan megoldására alapozná befektetési döntését, amelyben túl sok feltététel teljesül egyenlőtlenségként és túl nagy mértékűek az eltérések, akkor ebből a megoldásból csak igen kevés valósulhatna meg, illetve ezt a megoldást igen hamar kellene módosítani. Ugyanis célszerű lehet a megmaradó feleslegek befektetéséről valamilyen hosszabb távú döntést hozni, amikoris a teljes előrelátható jövőt helyes figyelembe venni. Úgy is fogalmazhatunk, hogy ekkor T' túl kicsi lesz, vagy lehet T-hez képest, illetve T' túl közel lesz, vagy lehet $t = 0$-hoz.

Az eddigi (keret)modellnek ez a gyengesége a célfüggvény alkalmas megválasztásával kompenzálható. Ismét csak vázoljuk a lehetőségeket, pontosabban csak néhány lehetőséget.

Nyilván előírható célfüggvényként az (1) feltételekbeli eltérések valamilyen súlyozott összegének (a kiegészítő változók alkotta vektor valamilyen normájának) a minimalizálása. Az egyes időpontokra vonatkozó kiegészítő változók azt fejezik ki, hogy abban az időpontban a befektetések várható hozama mennyivel nagyobb a várható kötelezettségeknél. Lévén, hogy adott a biztosító által befektethető összeg és semmilyen befektetési lehetőség nem nyújt korlátlan hozamokat, azért, ha a későbbi, a T időpont utáni időpontoknak megfelelő (1)-beli kiegészítő változók valamilyen összegének maximalizálására törekszünk, akkor ez a T-nél korábbi időpontoknak megfelelő kiegészítő változók csökkenésével jár. Racionálisnak tűnik például olyan befektetési döntés meghozatala, melynek a T időpontnál későbbi hozamait T-re visszaszámolva maximális (T-beli jelen)érték adódik, hiszen egy ilyen döntés kedvező helyzetet teremthet a következő beruházási döntéshez. Más esetben, ha t_1 elég távoli időpont, akkor elképzelhető a megfelelő eltérés változó maximalizálása is, ami valójában egy speciális esete a fentebb említettnek, de előírható a befektetési portfolió (most $t = 0$-beli) jelenértékének maximalizálása is. Mindez nyilván attól függ, hogy miképpen lesz a matematikai programozás nyújtotta keret kitöltve. Mielőtt erről mondanánk valamit, engedtessék meg két megjegyzés.

Az (1) feltételekbelieknél még több „felesleget" tartalmazhat egy (2') vagy (2") feltételnek megfelelő eltérésváltozó. Egyrészt egy ilyen feltételt inkább „távoli" időpontra látszik helyesnek előírni, hiszen „közeli" időpontra úgy is „pontosabb" az előrelátás. Másrészt ezen kiegészítő változók nagyságát (külön feltételekkel) eleve korlátozni lehet, illetve ha a jövőbeli valóságos kötelezettségek miatt egy ilyen (2') vagy (2") feltétellel kezelt t_j időpontban túl sok felesleg adódik, akkor ennek befektetéséről úgy is döntést kell hozni. Ez vagy akkor, az abban az időpontban felírt programozási modell segítségével történik, vagy pedig a $t = 0$ időpontbeli modellben is lehet már szerepeltetni a várható feleslegre, vagy annak egy részére vonatkozó feltételeket. Valójában ilyen megjegyzés az (1) feltételek kiegészítő változóira is érvényes.

Mindig megfogalmazhatók olyan feltételek is, melyek azt írják elő, hogy olyan változók (is) kerüljenek a feladat megoldásába, melyeknek megfelelő befektetések a biztosító számára (a modell vizsgálatakor a jövőre vonatkozóan) kívánatos likviditást biztosítanak. A biztosítókra vonatkozó ilyen, és egyéb befektetési előírásoknak megfelelő korlátozó feltételek megfogalmazása könnyen megoldható feladatnak tűnik. Hasonló mondható a duration szerepeltetéséről is, hiszen a t_j-k rögzítettek.

5. A matematikai programozási modellek mondhatni szokásos használata alapján nyilvánvaló, hogy az előbbi lehetőségeknek az alkalmazás szempontjából értelmes megfogalmazása, vagy az alkalmazás szempontjából érdekes egyéb lehetőségek megfogalmazása technikai nehézséget nem okoz, és éppen az alkalmazás szempontjából is értelmesen megoldható. Másképpen fogalmazva, egy konkrét helyzet analízise alapján dönthető el, hogy például az említettek közül mit és hogyan választanak célfüggvénynek, mit és hogyan építenek a feltételek közé, mindezt hányféleképpen teszik meg és mit kezdenek a modell(ek)ből kapott eredményekkel. Ez az, amit értelmesen kell megoldani és magának a számítássorozatnak a bonyolítása tekinthető nem túl nehéznek. Addig biztosan nem, amíg a programozási modell(ek) csak folytonos változókat tartalmaz(nak).

Mint említettük, egy befektetést kifejező $f(t_j)$ sorozat a befektetés várható cash flow-jával egyenértékű. Hogy egy kötvény megvásárlása, vagy egy kölcsön nyújtása milyen cash flow-t eredményez, az viszonylag pontosan meghatározható. Egy részvény, vagy egy ingatlan megvásárlásából adódó cash flow-nál már sok bizonytalanság lehetséges. Egy részvény jövőbeni osztalékairól, árfolyamairól a managementnek már eleve különféle elképzelései lehetnek. Egy ingatlannál a különféle hasznosítási lehetőségek különböző cash flow-khoz vezetnek, de ugyanolyan jellegű hasznosítások is eredményezhetnek különböző cash flow-kat. Például, egy ingatlan megvásárlása bérbeadás céljából attól függően, hogy ez mennyi ideig tart. Röviden: egyes befektetési lehetőségek valójában csak több $f(t_j)$ sorozattal írhatók le, melyek mindegyike a befektetéssel kapcsolatos valamilyen tervet, elvárást stb. takar, és amelyek közül legfeljebb csak egy valósulhat meg. Ennek leírására szolgál(hat) az egészértékű programozás, és egészértékű programozási feladatok kezelésének nem a leghatékonyabb módja az, ha sorra vesszük az egyes lehetőségek kiválasztásával adódó folytonos feladatokat. Még akkor sem, ha ezek száma nem túl nagy, bár akkor esetleg egy ilyen út járható. Mindez viszont már attól (is) függ, hogy milyen méretű programozási feladatokról van szó. Az eddigiekhez hasonlóan és annak megfelelően ezt a kérdést itt csak nagyon pontatlanul tudjuk megválaszolni.

Először próbáljunk valamit mondani egy ilyen programozási modell feltételeinek a számáról. Életbiztosítási tartalékok befektetése esetén többéves időtartamot is lefedhet a modell, és az első egy-két évben akár havonta lehet egy-egy t_j időpontot szerepeltetni benne. Más, ismétlődő befektetési döntések esetén jogos (?) elképzelés az, hogy egy alkalommal megpróbál(ja)nak egy évre előrelátni, és az évet hónapokra, negyedévekre bontani. Ezzel mondtunk valamit az (1) feltételek számáról. Hogy a **4.**-ben vázolt egyéb feltételek közül mennyit és melyeket érdemes bevezetni, arról itt még ennyit sem lehet mondani. Ugyanakkor az első esetben mindenképpen korlátozottabbak a befektetési lehetőségek, illetve a második esetben van lehetőség olyan befektetések figyelembevételére, amelyek a programozási modellben csak több $f(t_j)$ sorozattal írhatók le. Másképpen fogalmazva, a két extrémnek szánt esetből megfogalmazható konklúziókat: mindaddig, amíg folytonos programozási modellek alkalmazására gondolhatunk, addig ezek mérete a mai PC-ken rendelkezésre álló programtermékek számára nem jelent komoly kihívást. Ahol pedig az egészértékű programozás alkalmazására van szükség, ott a feladat mérete elég kicsi ahhoz, hogy ez ne okozzon (technikai) problémát. Bár ma már az EXCELL-lel is rövid idő alatt megoldható ilyennél nagyobb egészértékű programozási feladat (sőt, más is), és ez a helyzet csak javulni fog. Amikor a matematikai programozás ezen alkalmazásáról kezdtem gondolkodni, akkor még eszembe sem jutott egy EXCELL típusú programtermék használata.

Itt szeretnénk visszautalni egy 4.-beli megjegyzésre. Ugyanis az elmondottak már magyarázatot adnak arra, hogy miért érezzük problematikusabbnak a szokásos sztochasztikus eszközökkel történő leírást a befektetések hozamainál, mint a kötelezettségek kifejezésekor. A körvonalazott modell(ek) szintjén a befektetések hozamaival kapcsolatos bizonytalanságnál a kötelezettségekkel kapcsolatos bizonytalanság sokkal közelebb van ahhoz, ami egy valószínűségi változóval írható le. Ugyancsak sokszor tűnhet reálisnak különböző t-khez tartozó $L(t)$ kötelezettségek kapcsolatáról feltételezni valamit. Az más kérdés, hogy most, vagy máskor van-e a kötelezettségeknek lényegében a várható értékkel történő becslésüknél jobb módszere. A kötelezettségek leírására esetleg használt sztochasztikus folyamatra vonatkozó valamilyen feltételezés mindenképpen lehetőséget nyújt azonban a tárgyalt programozási feladatokba is újabb feltételek bevezetésére.

6. Az eddig elmondottakat úgy is össze lehetne foglalni, hogy egy befektetési döntés meghozatalakor vizsgáljanak alkalmasan megfogalmazott matematikai programozási feladatokat, a következő ilyen alkalommal tegyék ugyanezt stb. A matematikai programozásban egy célfüggvény legnagyobb, vagy legkisebb értékét keressük a korlátozó feltételek mellett. Joggal vetődik fel a kérdés, hogy miért is kell egyáltalán optimalizálni. A történet nem ér véget a feladat megoldásával, előbb vagy utóbb egy újabb matematikai programozási modellt kell megoldani. Ennek a modellnek a feltételrendszere nagymértékben függ az előző modell, mondjuk, optimális megoldásától és elképzelhető, hogy az új modell megoldásakor éppen ezért kapnak egy „rossz" optimális megoldást. (Rosszabbat, mint amihez akkor jutottak volna, ha az előző modellnek nem az optimális megoldását fogadják el az akkori befektetési döntés alapjául.)

Az optimalizálással kapcsolatban feltett kérdés megválaszolását azzal kezdjük, hogy valójában nem arról van szó, hogy azért kell optimalizálni, mert valamilyen programozási feladat optimális megoldása képezi majd a befektetési döntés alapját. Elképzelésünk szerint több programozási feladatot kell ehhez megoldani, és nem feltétlenül arról van szó, hogy valamelyik megoldása alapján születik meg a befektetési döntés. Optimalizálni azért kell, vagy azért jó, mert ilymódon sokkal pontosabb képet kapunk a különböző, egyébként egymáshoz nagyon is közeli modellek megoldásainak kapcsolatáról. Ehhez jönnek még az egyes modellekkel kapcsolatban elvégezhető érzékenységi vizsgálatok, melyek eredményeinek figyelembevétele tovább növelheti a modell nyújtotta támogatás erejét. Ugyanakkor kétségtelenül nagyon sajnálatos, hogy (egyelőre?) nincs olyan eredmény, amely jól használható matematikai választ adna az egymást követő programozási feladatok optimumértékeinek és azon programozási feladat optimumértékének a kapcsolatára, amelyet akkor írhatnánk fel, ha pontosan tudnánk előre, hogy mi történik majd a jövőben.

A matematikai programozás használatának ereje és előnye éppen abban van, hogy ez egy (legalábbis technikai szempontból) könnyen és sokféleképpen használható eszköz. Az aktuárius (legalább néhány paraméter számértékében) biztosan más feladatot vagy feladatsorozatot vizsgál, mint a management. Az aktuárius szempontjából például nem sok zavaró van abban, ha egy (2') vagy (2") alakú feltételben túl sok a felesleg, sőt. A biztosító managementjéhez képest más szempontjai, esetleg előírásai is lehetnek a befektetések értékelésében, és/vagy abban, hogy az $f(t_j)$ sorozatok konstruálásakor miképpen veszi figyelembe az (esetleges) inflációt. Ugyanakkor talán kevésbé érzékeny arra, hogy a modellek megfogalmazásakor miképpen kezelik a likviditás problémáját. Minthogy mindezeknek megfelelő megoldása valójában a befektető managementnek és a biztosító aktuáriusának közös érdeke, azért nem is tudunk annál jobbat elképzelni, mint hogy az aktuárius már vegyen részt a befektetést megelőző programozási feladatok vizsgálatában.

Ezen nagyon fontos megállapításon túl szeretnénk még két további, ugyancsak nagyon fontosnak tekintett megjegyzést tenni. Jól látszik, hogy ilyen (matematikai programozási) modellek vizsgálata nem szűkül(het) le a befektetési tevékenység támogatására, illetve a cikkben tárgyalt modellek is kiterjeszthetők egyéb elemzések segítésére. Például arra, hogy mire elegendőek-e az (1) feltételekbeli kiegészítő változók, mondjuk, milyen mértékben fedezik a költségeket, de ilyen szinten számos más lehetőség is felvethető.

A tárgyalt modell egyebek mellett lényegében a befektetések tényleges vagy becsült cash-flow-jára támaszkodik. Ha ez (a szemlélet) elterjed, akkor annak nagyon messzenyúló következményei lehetnek és talán lesznek is. Itt csak egy ilyet szeretnénk említeni, amit csak részben indokol, hogy momentán az Állami Biztosításfelügyeleten dolgozom. Ha ezek a cash-flow-k (megfelelő formában) megjelennek a biztosítóknak a Felügyelet felé rendszeresen szolgáltatandó adatok között, akkor ez a felügyeleti tevékenység körét és minőségét alapvetően megváltoztathatja.

Irodalom

1. A. J. WISE: The matching of assets to liabilities, Journal of the Institute of Actuaries, Vol. 111 (1984), 451–501.
2. A. D. WILKIE: Portfolio selection in the presence of fixed liabilities: a comment on „The matching of assets to liabilities", Journal of the Institute of Actuaries, Vol. 112 (1985), 229–277.
3. A. J. WISE: Matching and portfolio selection, Journal of the Institute of Actuaries, Vol. 114 (1987) Part 1: 113–132, Part 2: 551–568.

MATCHING IN INSURANCE AND MATHEMATICAL PROGRAMMING

Choosing an investment portfolio on such a way that its incomes are close to the expected liabilities of an insurer is a field where mathematical programming can be applied. The paper deals with some of the possible pros and cons of this application. The real aim of this paper is to draw attention to this possibility.