A DIADIKUS ADATELEMZÉS MÓDSZERTANÁNAK EGY KRITIKAI VIZSGÁLATA: A KETTŐS ADATBEVITEL ÉS FELCSERÉLHETŐ ESET[1]

DOBOS IMRE
Budapesti Corvinus Egyetem

A dolgozatban egy korábban ismertetett új módszertan, az ún. diadikus adatelemzés matematika-statisztikai alapjait gondolom újra. A szerző már vizsgálta, hogy a bevezetett módszertan a klasszikus statisztikai módszertanhoz képest információ növekedéssel jár-e. Kísérletet teszek a diadikus adatelemzés matematikai struktúrájának korrekciójára.

Kulcsszavak: matematikai statisztika, korrelációelemzés, diadikus adatelemzés

1 Bevezetés

A diadikus adatelemzéshez hasonló adatfelvétel ismert a páros minták elméletéből, így maga a módszertan nem teljesen ismeretlen a statisztikus társadalom számára. A páros minták módszere azzal a kérdésfeltevéssel él, hogy a párosan felvett minta két összetartozó párja azonos eloszlással, várható értékkel és szórással rendelkezik-e. Az ilyen kérdések a társadalomtudományok széles körében, mint a szociológia, pszichológia, vagy az orvostudományok egy része, már nem elegendőek, mert a párosan felvett minta összetartozó elemeire, azaz diádjaira több változó (kérdés) megválaszolását teszi szükségessé. (Kenny et al. (2006))

Az előbbi gondolatmenet miatt a páros minták módszere alkalmatlan arra, hogy a megfigyelések közötti sztochasztikus kapcsolatokat, összefüggéseket jellemezze, de nem is az a célja. (Vincze-Varbanova (1993))

Dolgozatom célja, hogy a klasszikus statisztika problémakörét rávetítsem a diadikus adatelemzésre, és azt vizsgáljam, hogy az eddig kifejlesztett módszertani megoldások mennyire tekinthetőek kielégítőnek matematikai értelemben. A klasszikus statisztikában a változók közötti kapcsolatokat leíró fontosabb módszerek az alábbiak:

- korrelációelemzés,
- ok-okozati kapcsolatok elemzése,
- regresszió elemzés, stb.

---

[1]Beérkezett: 2017. február 4. Dobos Imre a Budapesti Corvinus Egyetem egyetemi tanára. E-mail: `imre.dobos@uni-corvinus.hu`. A szerző köszöni az OTKA K 115542 és a Dortmundi Műszaki Egyetem (Németország) Gambrinus Fellowship Programme-ja támogatását.

A diadikus adatelemzés egyik első állomása az egyes változók adatpárjainak homogenitásvizsgálata, azaz annak eldöntése, hogy az összetartozó adatpár elemei azonos sztochasztikus jellemzőkkel bírnak-e. A homogenitásvizsgálat ebben az esetben nem két minta eloszlásának az azonosságát célozza, hanem azt vizsgálja, hogy a páros lekérdezésben részt vevő diádok válaszadói azonos válaszokat adnak-e az adott kérdésre. Ezt a feladatot a klasszikus statisztika az ANOVA-táblák elemzésével végezheti el. A diadikus adatelemzés az ún. páros adatbevitel (double entry) módszerének bevezetésével a korrelációelemzést javasolja, mint megoldást erre. (Gelei-Dobos-Sugár (2014), Gelei-Sugár (2016))

A diadikus adatelemzéssel foglalkozó tanulmányokban alkalmazott módszertanok matematikai háttere az esetek nagy részében nem tisztázott teljesen. A változók közötti kapcsolatok szorosságának mérésére a diadikus adatelemzés eddig kifejlesztett módszertana nem ad általánosan elfogadható megoldást.

A dolgozat második fejezetében a diadikus adatelemzés felcserélhető esetét állítom a vizsgálat középpontjába, belátva, hogy a pontos adatelemzéshez még további feltételezésekkel szükséges élni. A következő részben a diadikus adatelemzés homogenitásvizsgálatán keresztül a fontosabb statisztikai mérőszámokat állítom elő. A negyedik fejezetben kísérletet teszek a korrelációs fogalmak pontosítására, azok alapadatokra történő visszavezetésével. Az ötödik rész a diadikus adatelemzésben használt regressziós modelleket veszi górcső alá, belátva, hogy a kettős adatbevitel módszere információveszteséget okozhat, majd összegezem elemzéseimet.

2 Az adatfelvételről: a felcserélhető eset

A diadikus adatelemzés két mintatípust különböztet meg: a felcserélhető (exchangeable case) és a nem felcserélhető, azaz megkülönböztethető (distinguishable case) megfigyelésből álló párokat. (Gonzalez-Griffin (2000)) A nem felcserélhető esetben a diádban szereplő objektumok aszimmetrikus helyzetben vannak, míg a felcserélhető esetben teljesen egyenrangúak a diádba bekerült megfigyelések. A fejezet további részében csak a felcserélhető esettel foglalkozom.

Tegyük fel, hogy három diád került a mintánkba, amit az *1. táblázatban* szemléltetek. Mivel felcserélhető volt az adatfelvétel, ezért nem tudunk a szereplőink (adataink) között semmiféle különbséget tenni, azaz felcserélhetőek a diádon belüli adatfelvételek.

Megfigyelések	1. változó (X)	
	1. adat (X_1)	2. adat (X_2)
1. számú pár	x_{11}	x_{12}
2. számú pár	x_{21}	x_{22}
3. számú pár	x_{31}	x_{32}

1. táblázat. A diadikus adatelemzés három diád esetén

Ha a megfigyelésünk felcserélhető, amit feltételeztem, akkor a következő, *2. táblázat* is egy lehetséges induló táblázat, amit úgy nyerünk, hogy az 1. diádban felcseréltük a megfigyelésünket. Ezt szemlélteti a 2. táblázat.

Megfigyelések	1. változó (X)	
	1. adat (X_1')	2. adat (X_2')
1. számú pár	x_{12}	x_{11}
2. számú pár	x_{21}	x_{22}
3. számú pár	x_{31}	x_{32}

2. táblázat. A diadikus adatelemzés három diád esetén az első diád elemeinek felcserélése után

Az előbb szemléltetett eljárást még további hat alkalommal folytathatjuk, azaz felcserélhető esetben $2^3 = 8$ különböző indulótáblázatunk lehet. Ezt általánosítva, ha n darab diád áll rendelkezésre a vizsgálatokhoz, akkor 2^n különböző induló táblázat áll rendelkezésre, mivel nem tudunk a diád elemei között különbséget tenni.

A teljesség kedvéért soroljuk fel a *3. táblázatban* adódó nyolc mintát.

	Minta 1	Minta 2	Minta 3	Minta 4	Minta 5	Minta 6	Minta 7	Minta 8
1.pár	(x_{11}, x_{12})	(x_{11}, x_{12})	(x_{11}, x_{12})	(x_{11}, x_{12})	(x_{12}, x_{11})	(x_{12}, x_{11})	(x_{12}, x_{11})	(x_{12}, x_{11})
2.pár	(x_{21}, x_{22})	(x_{21}, x_{22})	(x_{22}, x_{21})	(x_{22}, x_{21})	(x_{21}, x_{22})	(x_{21}, x_{22})	(x_{22}, x_{21})	(x_{22}, x_{21})
3.pár	(x_{31}, x_{32})	(x_{32}, x_{31})	(x_{31}, x_{32})	(x_{32}, x_{31})	(x_{31}, x_{32})	(x_{32}, x_{31})	(x_{31}, x_{32})	(x_{32}, x_{31})

3. táblázat. A diadikus adatelemzés három diád esetén előálló minták felsorolása

A fentiek következménye, hogy olyan módszert kell az adatelemzéshez keresni, amely az előbbiekben előálló problémát kezelni tudja. Hogy ez a rendezési probléma milyen nehézséget okoz, azt egy korábbi dolgozatból származó adatállományon szemléltetem. (Gelei-Dobos, 2016)

Most csak egy változót vizsgálok (mennyire ismerik egymást a válaszadók), és az adatfelvétel véletlenszerűen kialakult sorrendjét veszem a diádokban. Tételezzük fel azt is, hogy a feladat annak a vizsgálata, hogy – páros mintát feltételezve – a két „minta” átlaga azonos-e. Az is feltételezhető, hogy a két minta összefügg, ezért a páros minták átlagára vonatkozó próba alkalmazható.

A következő lépésben aztán cseréljük fel a diádok elemeit úgy, hogy az első oszlopban a diád válaszai közül a kisebb értékű, míg a második oszlopban a magasabb értékű elem szerepeljen. Az SPSS 22 programcsomag a következő eredményt adta a két esetben.

	Páros különbség						
	Átlag	Szórás	Sztenderd hiba	95%-os konfidencia intervallum		t-teszt	Szignifikancia
				alsó	felső		
1.minta	0,07865	1,79788	0,19058	−0,30008	0,45738	0,413	0,681
2.minta	1,13483	1,39146	0,14749	0,84172	1,42795	7,694	0,000

4. táblázat. A két vizsgálat összevetése, páros minták tesztje, $df = 88$

A *4. táblázatból* azonnal leolvasható, hogy az adatfelvitel során kapott mintában a diádokban szereplő válaszadók lényegében azonos választ adtak, mivel az átlagok eltérése szignifikánsan nem utasítható el. Míg a másik, újrarendezett mintában, ahol nagyság szerint rendeztük a válaszokat, az eredmény az, hogy szignifikánsan el kell utasítani az átlagok egyezőségét.

Ez a vizsgálat tehát azt támasztja alá, hogy a felcserélhető esetben az adatok felcserélhetőségi problémájával foglalkoznunk kell. Erre lehet egy válasz a kettős adatbevitel (double enrty). Ez azonban nem oldja meg az előbbi problémát, csak az adatállományt növeli kétszeresére, de ekkor is a lehetséges ,,minták" száma 2^n számú lesz.

A fentiek miatt olyan adatelemzési módszert kell találni, ami tökéletesen független az adatok felviteli sorrendjétől. Az ilyen operáció lehet a diádon belüli adatok összegének és/vagy különbségük abszolút értékének a megragadása, mert az minden egyes diádra állandó, függetlenül a felvitel sorrendjétől. (Ezzel később foglalkozom még a korreláció kapcsán!)

Itt jegyezem meg, hogy a nem felcserélhető esetben ez a probléma nem áll fenn, mert a diadikus, páros mintavétel esetén az oszlopok egyértelműen meghatározottak az (aszimmetrikus) szerepek rögzítésével.

A további elemzésemben abból indulok ki, hogy már rögzítettek, hogy a páros adatokban melyik válasz kerül az első ill. a második helyre, ezzel a megkülönböztethető és felcserélhető eseteket nem kell külön elemezni.

3 A homogenitásvizsgálat és kettős adatbevitel módszere

A kettős adatbevitel során a diád tagjai által adott összes választ egy diádok szerint rendezett vektorba töltjük fel; valamint egy új, másik vektort is konstruálunk, amiben az előbbi vektor szereplő diádelemeket felcseréljük. (Bővebben magyarul lásd (Gelei-Dobos-Sugár, 2014).) Ez azt is jelenti, hogy az eddig n elemű vektorokból $2n$ eleműekké transzformáltuk adatállományunkat.

Tételezzük most fel, hogy a diádokon belül a válaszadók sorrendjét rögzítettük, vagyis nem áll fenn az előbb vázolt felcserélhetőségi probléma. Jelölje most két változóra adott rendes adatfelvétel értékeit (x_1, x_2) és (y_1, y_2), valamint a kettős adatbevitel értékeit (X, X') és (Y, Y'). Mivel az (X, X') és (Y, Y') értékeket az eredeti adatainkból nyertük, ezért – az adatok átrendezhetőségét feltételezve – azt kapjuk, hogy

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad X' = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad \text{valamint} \quad Y' = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_1 \end{bmatrix},$$

ami azt mutatja, hogy az új változók a régiekből úgy származtathatóak, hogy a diád két megfigyelésvektorát egymás alá helyezzük, csak fordított sorrendben. Arra a kérdésre keresem a választ, hogy a kettős adatbevitel bevezetése az elemzésbe mennyire árnyalja a statisztikai vizsgálatokat, egyáltalán, információtöbbletet nyerhető-e vele.

Először a két módszer közötti összefüggéseket mutatom meg a klasszikus statisztika olyan mérőszámain keresztül, mint az átlag, a szórásnégyzet és a kovariancia. A torzítottság problémáját elkerülendő, tegyük fel, hogy most a vektorok az alapsokaságot képviselik, így – a számításokat megkönnyítendő – a vektorok elemszámával kell a variancia-kovariancia számításakor számolni. Természetesen mintát torzítatlanságot feltételezve is hasonló eredményeket kapnánk.

Először számítsuk ki az átlagot a két változóra mindkét esetben. Ekkor

$$E(X) = E(X') = \frac{E(x_1) + E(x_2)}{2} \qquad \text{és} \qquad E(Y) = E(Y') = \frac{E(y_1) + E(y_2)}{2},$$

ami egyszerű számolással belátható. Ez azt is jelenti, hogy a kettős adatbevitellel nyert új változók átlagai megegyeznek az eredeti elemek átlagának átlagával. Másként is megragadható ez, mégpedig azzal, hogy egy adott kérdésre adott összes válasz átlaga a kettős adatbevitellel nyert X és Y vektor átlaga.

A szórásnégyzetek kiszámítása sem nehéz, de türelmet igényel:

$$\operatorname{var}(X) = \operatorname{var}(X') = \frac{\operatorname{var}(x_1) + \operatorname{var}(x_2)}{2} + \left(\frac{E(x_1) - E(x_2)}{2}\right)^2$$

és

$$\operatorname{var}(Y) = \operatorname{var}(Y') = \frac{\operatorname{var}(y_1) + \operatorname{var}(y_2)}{2} + \left(\frac{E(y_1) - E(y_2)}{2}\right)^2.$$

Már csak a kovarianciák meghatározása maradt hátra

$$\operatorname{cov}(X, X') = \operatorname{cov}(x_1, x_2) - \left(\frac{E(x_1) - E(x_2)}{2}\right)^2$$

és

$$\operatorname{cov}(Y, Y') = \operatorname{cov}(y_1, y_2) - \left(\frac{E(y_1) - E(y_2)}{2}\right)^2,$$

valamint

$$\operatorname{cov}(X, Y) = \operatorname{cov}(X', Y') =$$
$$= \frac{\operatorname{cov}(x_1, y_1) + \operatorname{cov}(x_2, y_2)}{2} + \frac{[E(x_1) - E(x_2)] \cdot [E(y_1) - E(y_2)]}{4}$$

és

$$\operatorname{cov}(X, Y') = \operatorname{cov}(X', Y) =$$
$$= \frac{\operatorname{cov}(x_1, y_2) + \operatorname{cov}(x_2, y_1)}{2} - \frac{[E(x_1) - E(x_2)] \cdot [E(y_1) - E(y_2)]}{4}.$$

Azonnal meg kell jegyezni, hogy a kettős adatbevitel lényegesen csökkenti a rendelkezésre álló információmennyiséget azzal, hogy az új változók átlagai, szórásnégyzetei, de kovarianciái közül számos azonos. Az új (X, X') és (Y, Y')

változók sztochasztikus mérőszámaiból nem tudjuk az előbbi szimmetriák miatt a (x_1, x_2) és (y_1, y_2) valószínűségi változók megfelelő mutatóit kiszámítani. Ez azt jelenti, hogy a logikai kapcsolat a két adathalmaz között egyirányú, azaz (x_1, x_2) és (y_1, y_2) változók egyértelműen meghatározzák az (X, X') és (Y, Y') változókat, viszont megfordítva ez nem igaz. Az információvesztés tehát ebből az aszimmetriából származik.

A fentiekből az is következik, hogy csak néhány esetben tudunk a változókra az új és régi kovarianciák között relációt felállítani. Ezek az esetek pedig a következők:

$$\mathrm{cov}(X, X') \leq \mathrm{cov}(x_1, x_2) \quad \text{és} \quad \mathrm{cov}(Y, Y') \leq \mathrm{cov}(y_1, y_2) ,$$

valamint a szórásnégyzetekre, amely szintén a kovarianciának egy speciális esete

$$\mathrm{var}(X) \geq \frac{\mathrm{var}(x_1) + \mathrm{var}(x_2)}{2} \geq \sqrt{\mathrm{var}(x_1)} \cdot \sqrt{\mathrm{var}(x_2)}$$

és

$$\mathrm{var}(Y) \geq \frac{\mathrm{var}(y_1) + \mathrm{var}(y_2)}{2} \geq \sqrt{\mathrm{var}(y_1)} \cdot \sqrt{\mathrm{var}(y_2)} .$$

Ha feltételezzük, hogy a diád párjai közel azonosan válaszolnak, vagyis a szereplők válaszainak átlaga közel azonos, amit az alábbi módon írhatunk:

$$\max\{|E(x_1) - E(x_2)|; |E(y_1) - E(y_2)|\} \leq \varepsilon ,$$

ahol ε tetszőlegesen kicsi pozitív szám, akkor az alapadatok ismeretében az alábbi közelítések adhatók a kettős adatbevitellel nyert valószínűségi változókra:

$$\mathrm{var}(X) = \mathrm{var}(X') \sim \frac{\mathrm{var}(x_1) + \mathrm{var}(x_2)}{2} ,$$

$$\mathrm{var}(Y) = \mathrm{var}(Y') \sim \frac{\mathrm{var}(x_1) + \mathrm{var}(x_2)}{2} ,$$

$$\mathrm{cov}(X, X') \sim \mathrm{cov}(x_1, x_2) , \qquad \mathrm{cov}(Y, Y') \sim \mathrm{cov}(y_1, y_2) ,$$

$$\mathrm{cov}(X, Y) = \mathrm{cov}(X', Y') \sim \frac{\mathrm{cov}(x_1, y_1) + \mathrm{cov}(x_2, y_2)}{2}$$

valamint

$$\mathrm{cov}(X, Y') = \mathrm{cov}(X', Y) \sim \frac{\mathrm{cov}(x_1, y_2) + \mathrm{cov}(x_2, y_1)}{2} .$$

Az előbbi összefüggések elemi matematikai módszerekkel igazolhatóak, ettől itt eltekintek. A varianciákról azt lehet megállapítani, hogy az X változó szórásnégyzete nagyobb, mint az őt alkotó két vektor (változó) szórásának szorzata. Ez információvesztést jelenthet.

Mivel $\mathrm{cov}(X, Y)$ és $\mathrm{cov}(X, Y')$ kovarianciák esetén az átlagok szorzatai a jobb oldalon pozitívak és negatívak is lehetnek, ezért nagyságrendi becslés nem adható a régi és új változók kovarianciáinak nagyságrendi viszonyáról, viszont az könnyen megállapítható, hogy

$$\operatorname{cov}(X,Y)+\operatorname{cov}(X,Y')=\operatorname{cov}(X,Y+Y')=$$
$$\frac{\operatorname{cov}(x_1,y_1)+\operatorname{cov}(x_1,y_2)+\operatorname{cov}(x_2,y_1)+\operatorname{cov}(x_2,y_2)}{2}=\frac{\operatorname{cov}(x_1+x_2,y_1+y_2)}{2},$$

ami a variancia-kovariancia algebra alkalmazásával kapható meg.

A két korrelációt az alábbi képletekkel határozhatjuk meg:

$$r(X,X')=\frac{\operatorname{cov}(X,X')}{\operatorname{var}(X)}=\frac{\operatorname{cov}(x_1,x_2)-\left(\frac{E(x_1)-E(x_2)}{2}\right)^2}{\frac{\operatorname{var}(x_1)+\operatorname{var}(x_2)}{2}+\left(\frac{E(x_1)-E(x_2)}{2}\right)^2}=$$
$$=\frac{\sqrt{\operatorname{var}(x_1)}\cdot\sqrt{\operatorname{var}(x_2)}\cdot r(x_1,x_2)-\left(\frac{E(x_1)-E(x_2)}{2}\right)^2}{\frac{\operatorname{var}(x_1)+\operatorname{var}(x_2)}{2}+\left(\frac{E(x_1)-E(x_2)}{2}\right)^2}$$

és

$$r(Y,Y')=\frac{\operatorname{cov}(Y,Y')}{\operatorname{var}(Y)}=\frac{\operatorname{cov}(y_1,y_2)-\left(\frac{E(y_1)-E(y_2)}{2}\right)^2}{\frac{\operatorname{var}(y_1)+\operatorname{var}(y_2)}{2}+\left(\frac{E(y_1)-E(y_2)}{2}\right)^2}=$$
$$=\frac{\sqrt{\operatorname{var}(y_1)}\cdot\sqrt{\operatorname{var}(y_2)}\cdot r(y_1,y_2)-\left(\frac{E(y_1)-E(y_2)}{2}\right)^2}{\frac{\operatorname{var}(y_1)+\operatorname{var}(y_2)}{2}+\left(\frac{E(y_1)-E(y_2)}{2}\right)^2}.$$

Itt használható fel az, hogy a két pár új változó szórásnégyzete megegyezik. Ha feltételezzük újra, hogy a párok válaszainak átlaga közel azonos, akkor ezek a korrelációk a következő módon közelíthetők:

$$r(X,X')\sim\frac{\sqrt{\operatorname{var}(x_1)}\cdot\sqrt{\operatorname{var}(x_2)}}{\frac{\operatorname{var}(x_1)+\operatorname{var}(x_2)}{2}}\cdot r(x_1,x_2)\le r(x_1,x_2)$$

és

$$r(Y,Y')\sim\frac{\sqrt{\operatorname{var}(y_1)}\cdot\sqrt{\operatorname{var}(y_2)}}{\frac{\operatorname{var}(y_1)+\operatorname{var}(y_2)}{2}}\cdot r(y_1,y_2)\le r(y_1,y_2)\,.$$

Ez már sejtetni engedi, hogy a diadikus adatelemzés homogenitásvizsgálatát a szokásos ANOVA-táblákon kívül az eredeti, induló adatállományon is el lehet végezni, nem szükséges az új változók bevezetése. Nevezetesen $r(x_1,x_2)$ és $r(y_1,y_2)$ korrelációkon keresztül is mérhető, hogy a diádban szereplőknek, egy adott kérdésre adott válaszai egyeznek-e, vagy sem, azaz lineárisan összefüggnek-e.

Az elvégzett számítások a megkülönböztethető esetben is teljesülnek, így a javasolt módszer abban az esetben is alkalmazható. A következő rész a változók közötti lineáris kapcsolatokat elemzi a korrelációk segítségével.

4 Lineáris kapcsolat vizsgálata korrelációelemzéssel diadikus adatokra

A diadikus adatelemzés ötféle korrelációs együtthatót határoz meg. (Griffin-Gonzalez (1995), Gonzalez-Griffin (1999), Gonzalez-Griffin (2000)) Ezeket az előbb említett dolgozat alapján elemezem, és bemutatom az előbbi szerzők által javasolt korrelációknak a gyengeségét.

A válaszadó belső korrelációját ($R(X,Y)$) a diadikus adatelemzés a következő képlettel határozza meg, ami átírható az alapadatokra:

$$r(X,Y)=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{\operatorname{var}(X)}\cdot\sqrt{\operatorname{var}(Y)}}=$$

$$=\frac{\frac{\operatorname{cov}(x_1,y_1)+\operatorname{cov}(x_2,y_2)}{2}+\frac{[E(x_1)-E(x_2)][E(y_1)-E(y_2)]}{4}}{\sqrt{\frac{\operatorname{var}(x_1)+\operatorname{var}(x_2)}{2}+\left(\frac{E(x_1)-E(x_2)}{2}\right)^2}\cdot\sqrt{\frac{\operatorname{var}(y_1)+\operatorname{var}(y_2)}{2}+\left(\frac{E(y_1)-E(y_2)}{2}\right)^2}}=$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{\operatorname{var}(x_1)\operatorname{var}(y_1)}\cdot r(x_1,y_1)+\sqrt{\operatorname{var}(x_2)\operatorname{var}(y_2)}\cdot r(x_2,y_2)}{2}+\frac{[E(x_1)-E(x_2)]\cdot[E(y_1)-E(y_2)]}{4}}{\sqrt{\frac{\operatorname{var}(x_1)+\operatorname{var}(x_2)}{2}+\left(\frac{E(x_1)-E(x_2)}{2}\right)^2}\cdot\sqrt{\frac{\operatorname{var}(y_1)+\operatorname{var}(y_2)}{2}+\left(\frac{E(y_1)-E(y_2)}{2}\right)^2}}.$$

A kovarianciák a képlet számlálójában azt mérik, hogy milyen irányú sztochasztikus kapcsolat van a diádban szereplő párok saját válaszai között, tehát ennyiben ez valóban egy „belső”, de fogalmazhatunk úgy is, hogy individuális korrelációt mutat.

Ha újra feltételezzük a várható értékek közel azonos voltát, valamint a szórásnégyzetek is közel esnek egymáshoz

$$\max\{|\operatorname{var}(x_1)-\operatorname{var}(x_2)|;|\operatorname{var}(y_1)-\operatorname{var}(y_2)|\}\leq\eta\,,$$

ahol η tetszőlegesen kicsi pozitív szám, akkor erre a korrelációra is adható egy közelítés

$$r(X,Y)\sim\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{\operatorname{var}(x_1)\operatorname{var}(y_1)}\cdot r(x_1,y_1)+\sqrt{\operatorname{var}(x_2)\operatorname{var}(y_2)}\cdot r(x_2,y_2)}{\sqrt{\frac{\operatorname{var}(x_1)+\operatorname{var}(x_2)}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\operatorname{var}(y_1)+\operatorname{var}(y_2)}{2}}}\leq$$

$$\leq\frac{1}{2}\cdot\left[r(x_1,y_1)+r(x_2,y_2)\right].$$

A keresztkorrelációk a következő módon határozhatóak meg:

$$r(X,Y') = \frac{\operatorname{cov}(X,Y')}{\sqrt{\operatorname{var}(X)}\cdot\sqrt{\operatorname{var}(Y')}} =$$

$$= \frac{\frac{\operatorname{cov}(x_1,y_2)+\operatorname{cov}(x_2,y_1)}{2} - \frac{[E(x_1)-E(x_2)][E(y_1)-E(y_2)]}{4}}{\sqrt{\frac{\operatorname{var}(x_1)+\operatorname{var}(x_2)}{2}+\left(\frac{E(x_1)-E(x_2)}{2}\right)^2}\cdot\sqrt{\frac{\operatorname{var}(y_1)+\operatorname{var}(y_2)}{2}+\left(\frac{E(y_1)-E(y_2)}{2}\right)^2}} =$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{\operatorname{var}(x_1)\operatorname{var}(y_2)}\cdot r(x_1,y_2)+\sqrt{\operatorname{var}(x_2)\operatorname{var}(y_1)}\cdot r(x_2,y_1)}{2} - \frac{[E(x_1)-E(x_2)]\cdot[E(y_1)-E(y_2)]}{4}}{\sqrt{\frac{\operatorname{var}(x_1)+\operatorname{var}(x_2)}{2}+\left(\frac{E(x_1)-E(x_2)}{2}\right)^2}\cdot\sqrt{\frac{\operatorname{var}(y_1)+\operatorname{var}(y_2)}{2}+\left(\frac{E(y_1)-E(y_2)}{2}\right)^2}}\,.$$

Az alapadatok kovarianciája erre a korrelációra azt mutatja, hogy a diádban szereplők válaszai a pár másik kérdésre adott válaszaival milyen sztochasztikus kapcsolatban van. Adható erre is egy lokális közelítés, az előbbi gondolatmenetet követve:

$$r(X,Y') \sim \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{\operatorname{var}(x_1)\operatorname{var}(y_2)}\cdot r(x_1,y_2)+\sqrt{\operatorname{var}(x_2)\operatorname{var}(y_1)}\cdot r(x_2,y_1)}{\sqrt{\frac{\operatorname{var}(x_1)+\operatorname{var}(x_2)}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\operatorname{var}(y_1)+\operatorname{var}(y_2)}{2}}} \le$$

$$\le \frac{1}{2}\cdot\left[r(x_1,y_2)+r(x_2,y_1)\right]\,.$$

Vizsgáljuk most a diád szintű korrelációt! Ennek a képlete az

$$r_m(X,X',Y,Y') = \frac{r(X,Y)+r(X,Y')}{\sqrt{1+r(X,X')}\cdot\sqrt{1+r(Y,Y')}}$$

kifejezéssel írható le. (Giffin-Gonzalez, 1995) Átírható a fenti korreláció a varianciákkal és kovarianciákkal. Ekkor kisebb átalakításokkal

$$r_m(X,X',Y,Y') = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)+\operatorname{cov}(X,Y')}{\sqrt{\operatorname{var}(X)+\operatorname{cov}(X,X')}\cdot\sqrt{\operatorname{var}(Y)+\operatorname{cov}(Y,Y')}}$$

alakot kapjuk. Felhasználva, hogy $\operatorname{var}(X) = \operatorname{cov}(X,X)$, ami természetesen az Y vektorra is teljesül, valamint elemi kovariancia algebrával azt kapjuk, hogy

$$r_m(X,X',Y,Y') = \frac{\operatorname{cov}(X,Y+Y')}{\sqrt{\operatorname{cov}(X,X+X')}\cdot\sqrt{\operatorname{cov}(Y,Y+Y')}}\,.$$

Ez utóbbi kifejezés – a kovarianciák kiszámítása után – az alapadatokra írható át, ami

$$r_m(X,X',Y,Y') = \frac{\frac{1}{2}\operatorname{cov}(x_1+x_2,y_1+y_2)}{\sqrt{\frac{1}{2}\operatorname{var}(x_1+x_2)}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}\operatorname{var}(y_1+y_2)}} = r(x_1+x_2,y_1+y_2)\,.$$

Ez az utóbbi eredmény azt jelenti, hogy a diád szintű korreláció egy tényleges korreláció, amely két újonnan bevezetett változó közötti korrelációt úgy értelmez, hogy a diádok megfigyeléseinek összegével azonosítja azt. Érdekes módon az $r_m(X,X',Y,Y')$ kifejezés nem egyezik meg egy hagyományos Pearson-féle korrelációval az új adatokra nézve, mert a számlálóban szereplő kovariancia azt feltételezné, hogy a nevezőben lévő kovarianciák helyett a $\sqrt{\operatorname{var}(X)}\cdot\sqrt{\operatorname{var}(Y+Y')}$ kifejezés álljon. Ha valaki veszi a fáradtságot, és végigszámolja a valódi korrelációt, akkor az alábbiakat kapja:

$$r(X,Y+Y')=\frac{\operatorname{cov}(X,Y+Y')}{\sqrt{\operatorname{var}(X)}\cdot\sqrt{\operatorname{var}(Y+Y')}}=$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\operatorname{cov}(x_1+x_2,y_1+y_2)}{\sqrt{\frac{\operatorname{var}(x_1)+\operatorname{var}(x_2)}{2}+\left(\frac{E(x_1)-E(x_2)}{2}\right)^2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}\operatorname{var}(y_1+y_2)}},$$

ami nem egyezik a kapott $r(x_1+x_2,y_1+y_2)$ korrelációval, de nagyon jól közelíti azt.

Ezek után térjünk rá a Gelei-Dobos-Sugár (2014) dolgozatban is bemutatott legproblémásabb korrelációs definíciók vizsgálatára, azaz az egyéni és páros szintű korrelációk elemzésére. Az egyéni szintű korreláció javasolt képlete:

$$r_i(X,X',Y,Y')=\frac{r(X,Y)-r(X,Y')}{\sqrt{1-r(X,X')}\cdot\sqrt{1-r(Y,Y')}}$$

Átírható ez is a varianciák-kovarianciák segítségével:

$$r_i(X,X',Y,Y')=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)-\operatorname{cov}(X,Y')}{\sqrt{\operatorname{var}(X)-\operatorname{cov}(X,X')}\cdot\sqrt{\operatorname{var}(Y)-\operatorname{cov}(Y,Y')}}=$$

$$=\frac{\operatorname{cov}(X,Y-Y')}{\sqrt{\operatorname{cov}(X,X-X')}\cdot\sqrt{\operatorname{cov}(Y,Y-Y')}}.$$

Mielőtt tovább alakítanánk az előbbi kifejezést, itt is határozzuk meg a Pearson-i értelemben vett korrelációt, azaz számítsuk ki a tényleges korrelációt:

$$r(X,Y-Y')=\frac{\operatorname{cov}(X,Y-Y')}{\sqrt{\operatorname{var}(X)}\cdot\sqrt{\operatorname{var}(Y-Y')}}=$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\operatorname{cov}(x_1-x_2,y_1-y_2)+\frac{[E(x_1)-E(x_2)]\cdot[E(y_1)-E(y_2)]}{4}}{\sqrt{\frac{\operatorname{var}(x_1)+\operatorname{var}(x_2)}{2}+\left(\frac{E(x_1)-E(x_2)}{2}\right)^2}\cdot\sqrt{\operatorname{var}(y_1-y_2)+(E(y_1)-E(y_2))^2}},$$

ami nem más, mint amit az irodalom javasol.

Folytassuk a javasolt korreláció visszavezetését az alapadatokra. A kifejezés nagy hasonlóságot mutat a diád szintű korrelációval, a különbség az előjelek ellentétessége. A korreláció további vizsgálata során helyettesítsük a legutolsó képletbe az alapadatainkat:

$$r_i(X,X',Y,Y') = \frac{\operatorname{cov}(x_1-x_2,y_1-y_2)+[E(x_1)-E(x_2)]\cdot[E(y_1)-E(y_2)]}{\sqrt{\operatorname{var}(x_1-x_2)+[E(x_1)-E(x_2)]^2}\cdot\sqrt{\operatorname{var}(y_1-y_2)+[E(y_1)-E(y_2)]^2}} =$$
$$= \frac{\sqrt{\operatorname{var}(x_1-x_2)}\cdot\sqrt{\operatorname{var}(y_1-y_2)}\cdot r(x_1-x_2,y_1-y_2)+[E(x_1)-E(x_2)]\cdot[E(y_1)-E(y_2)]}{\sqrt{\operatorname{var}(x_1-x_2)+[E(x_1)-E(x_2)]^2}\cdot\sqrt{\operatorname{var}(y_1-y_2)+[E(y_1)-E(y_2)]^2}}\,.$$

Ez az összefüggés azt mutatja, hogy az egyéni szintű korreláció egy felső korlátja a változók közötti azon korreláció, amikor a párok válaszainak különbségei közötti korrelációt határozzuk meg, természetesen abszolút értékben vizsgálva.

Adjunk becslést erre a korrelációra, feltételezve, hogy a diádok párjai várható értéke közel esik egymáshoz a két kérdésre, vagyis változóra:

$$r_i(X,X',Y,Y') \sim r(x_1-x_2,y_1-y_2)\,,$$

ami azt jelenti, hogy ez a korreláció a diádok közötti individuális hatást mérheti valóban.

Tekintsük végül a páros szintű korrelációt. Ennek a képlete:

$$r_d(X,X',Y,Y') = \frac{r(X,Y')}{\sqrt{r(X,X')}\cdot\sqrt{r(Y,Y')}}\,.$$

Azonnal meg kell jegyezni, hogy ez a fajta korreláció nem szigorúan vett korreláció, mert a négyzetgyök alatti kifejezések negatív értéket is felvehetnek. Ez azt is jelentheti, hogy a diád párjai teljesen ellentétes választ adtak, amivel ez akár negatívvá válhat. Ettől most eltekintek, feltételezve a gyök alatti nemnegativitást. A formula a korreláció definícióját alkalmazva alakítható tovább:

$$r_d(X,X',Y,Y') = \frac{\operatorname{cov}(X,Y')}{\sqrt{\operatorname{cov}(X,X')}\cdot\sqrt{\operatorname{cov}(Y,Y')}} =$$
$$= \frac{\frac{\operatorname{cov}(x_1,y_2)+\operatorname{cov}(x_2,y_1)}{2}-\frac{[E(x_1)-E(x_2)][E(y_1)-E(y_2)]}{4}}{\sqrt{\operatorname{cov}(x_1,x_2)-\left(\frac{E(x_1)-E(x_2)}{2}\right)^2}\cdot\sqrt{\operatorname{cov}(y_1,y_2)-\left(\frac{E(y_1)-E(y_2)}{2}\right)^2}} =$$
$$= \frac{\frac{\sqrt{\operatorname{var}(x_1)\operatorname{var}(y_2)}\cdot r(x_1,y_2)+\sqrt{\operatorname{var}(x_2)\operatorname{var}(y_1)}\cdot r(x_2,y_1)}{2}-\frac{[E(x_1)-E(x_2)]\cdot[E(y_1)-E(y_2)]}{4}}{\sqrt{\operatorname{cov}(x_1,x_2)-\left(\frac{E(x_1)-E(x_2)}{2}\right)^2}\cdot\sqrt{\operatorname{cov}(y_1,y_2)-\left(\frac{E(y_1)-E(y_2)}{2}\right)^2}}\,.$$

Itt azonnal látható, hogy ha

$$\operatorname{cov}(x_1,x_2)-\left(\frac{E(x_1)-E(x_2)}{2}\right)^2 < 0$$

és/vagy

$$\operatorname{cov}(y_1,y_2)-\left(\frac{E(y_1)-E(y_2)}{2}\right)^2 < 0\,,$$

akkor ez a fajta korreláció nem állítható elő. Ez az eredmény arra utal, hogy a páros szintű korreláció inkább a párt alkotó személyek közötti keresztkorrelációval mutat hasonlóságot. A kifejezésünk számlálójában található kovarianciát elemezve azonnal látható, hogy a „helyes” korreláció ekkor – a már korábban meghatározott – keresztkorreláció $r(X, Y')$. A közelítés, azaz annak a feltételezése, hogy a diád tagjai hasonlóan válaszolnak, szintén erre utal, ugyanis ekkor a kovariancia közel varianciává válik a várható értékek és a szórások közel egyezése miatt.

Foglaljuk össze a javasolt korrelációs fogalmakat, és azoknak az alapadatainkkal való kapcsolatát. Ezt az *5. táblázat* mutatja be.

A korreláció neve	$(X, X'), (Y, Y')$ kettős adatbevitel $(x_1, x_2), (y_1, y_2)$ alapadatok
Csoporton belüli korreláció	$r(X, X') = \frac{\mathrm{cov}(X,X')}{\mathrm{var}(X)} = \frac{\mathrm{cov}(x_1,x_2) - \left(\frac{E(x_1)-E(x_2)}{2}\right)^2}{\frac{\mathrm{var}(x_1)+\mathrm{var}(x_2)}{2} + \left(\frac{E(x_1)-E(x_2)}{2}\right)^2}$
A válaszadó belső korrelációja	$r(X, Y) = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{var}(X)}\cdot\sqrt{\mathrm{var}(Y)}} = \frac{\frac{\mathrm{cov}(x_1,y_1)+\mathrm{cov}(x_2,y_2)}{2} + \frac{[E(x_1)-E(x_2)][E(y_1)-E(y_2)]}{4}}{\sqrt{\frac{\mathrm{var}(x_1)+\mathrm{var}(x_2)}{2} + \left(\frac{E(x_1)-E(x_2)}{2}\right)^2}\cdot\sqrt{\frac{\mathrm{var}(y_1)+\mathrm{var}(y_2)}{2} + \left(\frac{E(y_1)-E(y_2)}{2}\right)^2}}$
A párt alkotó személyek közötti keresztkorreláció	$r(X, Y') = \frac{\mathrm{cov}(X,Y')}{\sqrt{\mathrm{var}(X)}\cdot\sqrt{\mathrm{var}(Y)}} = \frac{\frac{\mathrm{cov}(x_1,y_2)+\mathrm{cov}(x_2,y_1)}{2} - \frac{[E(x_1)-E(x_2)][E(y_1)-E(y_2)]}{4}}{\sqrt{\frac{\mathrm{var}(x_1)+\mathrm{var}(x_2)}{2} + \left(\frac{E(x_1)-E(x_2)}{2}\right)^2}\cdot\sqrt{\frac{\mathrm{var}(y_1)+\mathrm{var}(y_2)}{2} + \left(\frac{E(y_1)-E(y_2)}{2}\right)^2}}$
Diád szintű korreláció	$r_m(X, X', Y, Y') = \frac{r(X,Y)+r(X,Y')}{\sqrt{1+r(X,X')}\cdot\sqrt{1+r(Y,Y')}} = r(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
Egyéni szintű korreláció	$r_i(X, X', Y, Y') = \frac{r(X,Y)-r(X,Y')}{\sqrt{1-r(X,X')}\cdot\sqrt{1-r(Y,Y')}} = \frac{\mathrm{cov}(x_1-x_2,y_1-y_2)+[E(x_1-E(x_2)]\cdot[E(y_1-E(y_2)]}{\sqrt{\mathrm{var}(x_1-x_2)+[E(x_1)-E(x_2)]^2}\cdot\sqrt{\mathrm{var}(y_1-y_2)+[E(y_1)-E(y_2)]^2}}$
Páros szintű korreláció	$r_d(X, X', Y, Y') = \frac{r(X,Y')}{\sqrt{r(X,X')}\cdot\sqrt{r(Y,Y')}} = \frac{\frac{\mathrm{cov}(x_1,y_2)+\mathrm{cov}(x_2,y_1)}{2} - \frac{[E(x_1)-E(x_2)][E(y_1)-E(y_2)]}{4}}{\sqrt{\mathrm{cov}(x_1,x_2) - \left(\frac{E(x_1)-E(x_2)}{2}\right)^2}\cdot\sqrt{\mathrm{cov}(y_1,y_2) - \left(\frac{E(y_1)-E(y_2)}{2}\right)^2}}$

5. táblázat. A korrelációk és meghatározásuk a páros adatbevitel és az alapadatok segítségével

Az előbbi korrelációkat lokálisan is közelítettük, foglaljuk most össze ezeket az eredményeinket is. Ezt a *6. táblázatban* mutatjuk be. Ezzel a korrelációs vizsgálatokat befejeztem.

A korreláció neve	Közelítések
Csoporton belüli korreláció	$r(X, X') \sim r(x_1, x_2)$
A válaszadó belső korrelációja	$r(X, Y) \sim \frac{1}{2}\left[r(x_1, y_1) + r(x_2, y_2)\right]$
A párt alkotó személyek közötti kereszt-korreláció	$r(X, Y') \sim \frac{1}{2}\left[r(x_1, y_2) + r(x_2, y_1)\right]$
Diád szintű korreláció	$r_m(X, X', Y, Y') = r(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
Egyéni szintű korreláció	$r_i(X, X', Y, Y') = r(x_1 - x_2, y_1 - y_2)$
Páros szintű korreláció	$r_d(X, X', Y, Y') \sim \frac{1}{2}\left[r(x_1, y_2) + r(x_2, y_1)\right]$

6. táblázat. A páros adatbevitelű korrelációk és közelítése az alapadatok segítségével

5 Regressziószámítás diadikus adatokkal: ICC és APIM modell

A lineáris kapcsolatok elemzése után áttérek az ok-okozati tényezők vizsgálatára. Ebben az esetben azt vizsgálom, hogy a függetlennek választott változók milyen hatással vannak a függőnek választott változókra. A klasszikus statisztikában a független változók megválasztása egyszerűbbnek tűnik a diadikus adatelemzéssel szemben. A diadikus adatelemzés során ugyanis figyelembe kell venni az egyéni és páros hatásokat is. A diadikus adatelemzés regresszió vizsgálata ezért már egy független és egy függő változó esetén is több tényező figyelembevételével történhet meg. Ezek a tényezők a következők:

- cselekvő hatás (actor effect),
- partner hatás (partner effect) és
- kölcsönös hatás (mutual effect).

Ezen tényezők számának ismeretében építhetőek fel a diadikus adatelemzés regressziós modelljei. Ezen modellekből kettőt ismertetek (Gonzalez, 2010, Gelei-Dobos-Sugár, 2014). Az első modell, amelyet az irodalom ICC (Intraclass Correlation Coefficient) modellként ismer, csak a cselekvő és partner hatást építi be a regressziós modellbe. A másik modell mindhárom, azaz cselekvő, partner és kölcsönös hatást is kezeli. E modelltípust az irodalom Actor-Partner Interdependence Model-nek, röviden APIM modellnek nevezi. Az alábbiakban röviden ismertetem a modelleket. Először az ICC modellt vizsgálom meg kritikusabban. Nem az a célom, hogy a regresszió paramétereit előállítsam, hanem annak az elemzése, hogy a javasolt lineáris modell valóban teljesen leírja-e a diadikus változók közötti kapcsolatokat.

Az ICC modell tehát csak a párok egymásra hatását képezi le. A modell matematikai formája:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 \cdot X + \beta_2 \cdot X' + \varepsilon \ ,$$

ahol az X és X' a kettős adatbevitel során nyert független változók, Y a függő változó, míg ε a hiba. A β_0, β_1 és β_2 értékek a regressziós együtthatók.

Átírható a modell az alapadatokra. Ennek a formája ekkor az alábbi módon alakul:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \beta_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta_1 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \beta_2 \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} ,$$

ahol az 1 az összegző vektor, azaz olyan n-elemű vektor, amelynek minden eleme egy, valamint ε_1 és ε_2 a becslés hibája. (Eltekintek most attól, hogy legkisebb négyzetek módszerével, vagy maximum likelihood stb. módszerrel végezzük a paramétereink becslését.) Bontsuk szét elemeire ezt a becslést:

$$y_1 = \beta_0 \cdot 1 + \beta_1 \cdot x_1 + \beta_2 \cdot x_2 + \varepsilon_1 ,$$
$$y_2 = \beta_0 \cdot 1 + \beta_1 \cdot x_2 + \beta_2 \cdot x_1 + \varepsilon_2 .$$

Már ebből a felírásból is világos, hogy a második egyenletben ugyanazok a regressziós együtthatók szerepelnek, mint az első egyenletben, ezért a kettős adatbevitellel nyert becslés csak pontatlanul becsli a pár második tagjának válaszait az y_2 adatainkra.

A fentiek miatt pontosabb becslést ad az alábbi javaslat:

$$y_1 = \beta_{01} \cdot 1 + \beta_{11} \cdot x_1 + \beta_{21} \cdot x_2 + \varepsilon_{11} ,$$
$$y_2 = \beta_{02} \cdot 1 + \beta_{12} \cdot x_1 + \beta_{22} \cdot x_2 + \varepsilon_{21} ,$$

vagyis a korábbi három együttható helyett most hatot kell becsülni, igaz, hogy ebben az esetben a két becslőfüggvény két független egyenletre esik szét, azokat nem köti össze a közös együttható. Az ε_{11} és ε_{21} értékek a becslés hibái.

Könnyen belátható, hogy a javasolt becslés kisebb hibát is ad és a paraméterek is pontosabban leírják a lineáris összefüggéseket; feltéve, hogy mindkét modellt azonos módszerrel becsüljük. Feltételezzük most, hogy a modellek együtthatói optimálisak, azaz $(\beta_0, \beta_1, \beta_2)$, $(\beta_{01}, \beta_{11}, \beta_{21})$ és $(\beta_{02}, \beta_{12}, \beta_{22})$ optimalizálják a becslőfüggvényeiket. Legyenek ugyanis a második modell becslőfüggvényei $f_1(\beta_{01}, \beta_{11}, \beta_{21})$ és $f_2(\beta_{02}, \beta_{12}, \beta_{22})$, ahonnan azonnal látjuk, hogy az első modell becslőfüggvénye ugyanazzal a módszerrel nem lesz más, mint

$$f_1(\beta_0, \beta_1, \beta_2) + f_2(\beta_0, \beta_2, \beta_1) .$$

Mivel $f_1(\beta_{01}, \beta_{11}, \beta_{21})$ és $f_2(\beta_{02}, \beta_{12}, \beta_{22})$ optimális együtthatókat adnak, ezért teljesül

$$f_1(\beta_{01}, \beta_{11}, \beta_{21}) \leq f_1(\beta_0, \beta_1, \beta_2) \quad \text{és} \quad f_2(\beta_{02}, \beta_{12}, \beta_{22}) \leq f_2(\beta_0, \beta_2, \beta_1) ,$$

vagyis

$$f_1(\beta_{01}, \beta_{11}, \beta_{21}) + f_2(\beta_{02}, \beta_{12}, \beta_{22}) \leq f_1(\beta_0, \beta_1, \beta_2) + f_2(\beta_0, \beta_2, \beta_1) = f(\beta_0, \beta_1, \beta_2) .$$

Ez azt is jelenti, hogy az alapadatokra átírt lineáris modellünk pontosabb becslést nyújt. Most áttérek az APIM modell vizsgálatára!

Az APIM modell csak kissé különbözik az ICC modelltől. Az APIM modell nem csak a párok egymásra hatását képezi le, de figyelembe veszi a párok kölcsönös egymásra hatását is. A modell matematikai formája tehát

$$Y = \beta_0 + \beta_1 \cdot X + \beta_2 \cdot X' + \beta_3 \cdot X \cdot X' + \varepsilon \ ,$$

ahol a β_0, β_1 és β_2 értékeket teljesen hasonlóan definiálható, mint az ICC modellben, és ε a becslés hibája. Az egyedüli eltérés az, hogy a kölcsönös hatást is beépítjük a modellbe a $\beta_3 \cdot X \cdot X'$ kifejezés szerepeltetésével. Az $X \cdot X'$ szorzat esetünkben új változó, a pár mindkét szereplőjének a kölcsönös, együttesen kifejtett hatását mutatja a cselekvő Y változójára.

Ekkor is átírhatjuk az alapadatokra a modellt:

$$y_1 = \beta_0 \cdot 1 + \beta_1 \cdot x_1 + \beta_2 \cdot x_2 + \beta_3 \cdot \langle x_1 \cdot x_2 \rangle + \varepsilon_1 \ ,$$

$$y_2 = \beta_0 \cdot 1 + \beta_1 \cdot x_2 + \beta_2 \cdot x_1 + \beta_3 \cdot \langle x_1 \cdot x_2 \rangle + \varepsilon_2 \ .$$

A $\langle x_1 \cdot x_2 \rangle$ kifejezés azt a vektort jelöli, amely az x_1 és x_2 vektorok egyes elemei szerint szorozza össze az elemeket.

Ekkor a javasolt új függvényeink a következők lehetnek:

$$y_1 = \beta_{01} \cdot 1 + \beta_{11} \cdot x_1 + \beta_{21} \cdot x_2 + \beta_3 \cdot \langle x_1 \cdot x_2 \rangle + \varepsilon_{11} \ ,$$

$$y_2 = \beta_{02} \cdot 1 + \beta_{12} \cdot x_1 + \beta_{22} \cdot x_2 + \beta_3 \cdot \langle x_1 \cdot x_2 \rangle + \varepsilon_{21} \ .$$

Az ICC modellre tett megfontolások itt is könnyen megtehetők, vagyis az utóbbi becslési javaslat pontosabb eredményre vezet, és ezzel jobban árnyalja az egyes (diadikus) változók közötti kapcsolatot.

6 Összegzés

Dolgozatban összefoglaltam a diadikus adatelemzésben eddig paradigmának tekintett kettős adatbevitelt és annak statisztikai következményeit. Beláttam, hogy felcserélhető esetben valamilyen konszenzust kell keresni az adatok kezelésében, mert a szerepek szimmetriája miatt a vizsgálható táblázatok száma a felvett adatok exponenciális függvénye. Javaslatom az, hogy olyan transzformációt hajtsunk végre az adatokon, ami ezt a szimmetriát megszünteti pl. az adatok összeadásával, és/vagy azok különbségének abszolút értékével, és a két adat aszimmetrikussá tételével, mint a megkülönböztethető esetben.

Rámutattam arra, hogy a diadikus adatelemzés homogénitásvizsgálata alapvetően az alapadatokból is végrehajtható, nincs szükség a kettős adatbevitelre.

Sikerült a diadikus adatelemzésben eddig alkalmazott korrelációs fogalmakat egyrészt tisztázni, másrészt azt valóban Pearson-féle korrelációs együtthatóra átalakítani. Azt is megmutattam, hogy a korrelációkat az alapadatokra is ki lehet számítani, nincs szükség azt a kettős adatbevitellel megnehezíteni.

Végül, beláttam azt is, hogy a javasolt ICC és APIM modellek is rontják a becslést a kettős adatbevitellel. Pontosabb becslést lehet elérni az alapadatokra elvégzett regressziókkal. További kutatásokkal azt kell tisztázni, hogy valós adatokon milyen eredményt adnak a javasolt változtatások.

Irodalom

1. Gelei, A. – Dobos, I. – Sugár, A. (2014): Bevezetés a diadikus adatelemzésbe – elmélet és alkalmazás, *Statisztikai Szemle*, 92. évf. 5. szám, 417–446.
2. Gelei, A. – Sugár, A. (2016): Diadikus jelenségek kutatási kihívása – a diadikus adatelemzés és a hagyományos statisztikai megoldások összehasonlítása, *Statisztikai Szemle*, 94. évf., 10. szám, 977–1003.
3. Gelei, A. – Dobos, I. (2016): Bizalom az üzleti kapcsolatokban, *Közgazdasági Szemle*, LXIII. évf., 3. szám, 330–349.
4. Gonzalez, R., – Griffin, D. (1999): The correlational analysis of dyad-level data in the distinguishable case. *Personal Relationships*, 6(4), 449–469.
5. Gonzalez, R. – Griffin, D. (2000): On the Statistics of Interdependence: Treating Dyadic Data with Respect; in: Ickes, W. – Duck, S. (2000) (ed.) *The Social Psychology of Personal Relationships;* John Wiley and Sons, Ltd., 181–213.
6. Griffin, D. – Gonzalez, R. (1995): Correlational Analysis of Dyad-Level Data in the Exchangeable Case, *Psychological Bulletin* 1995. Vol. 118, No. 3, 430-439.
7. Kenny, D. A. – Kashy, D. A. – Cook, W. L. (2006): *Dyadic data Analysis*; The Guilford Press, New York-London.
8. Vincze I. – Varbanova, M. (1993): *Nem paraméteres matematikai statisztika – Elmélet és alkalmazások*; Akadémiai Kiadó, Budapest.

A CRITICAL INVESTIGATION OF METHODS IN DYADIC DATA ANALYSIS: THE DOUBLE ENTRY AND EXCHANGEABLE CASES

The aim of the paper is to examine the mathematical statistics foundations of Dyadic Data Analysis. In a former paper it was investigated, whether the Dyadic Data Analysis significantly contributes to traditional statistical analysis and provides surplus in understanding statistical phenomenon, or not. Further, it is tried to correct some of the mathematical structure of Dyadic Data Analysis.

Keywords: Mathematical Statistics Correlational Analysis, Dyadic Data Analysis

CRM MINT ÜZLETI MEGOLDÁS A KKV SZÁMÁRA[1]

REICHER REGINA ZSUZSÁNNA
Óbudai Egyetem

A vállalatok között fokozódó verseny egyre fontosabbá teszi az ügyfelek megfelelő kezelését. Ennek a filozófiának támogatására először stratégiát alakítottak ki, hogy minél kevesebb ügyfelet veszítsenek, majd a megsokszorozódott információ tárolási igényének hatására megszületett a szoftveres megoldás. A CRM rendszer használatának célja, hogy a különböző csatornákon beérkező információkat rendszerezze, egységesen, ügyfelekre bontva megjelenítse. Azonban egy CRM informatikai megoldás bevezetési folyamata komplex lépéssorozat összessége, melynek eredményeképpen a vállalkozás működése eredményesebb lehet, vevői elégedettebbek lesznek, a cég versenyképessége nő. Azonban óriási pénzügyi és emberi erőforrás megmozgatására kényszeríti a bevezető vállalkozást. Épp ezért alapos megtervezést és körültekintő projektvezénylést igényel. Ha egy cég az ügyfélkezelés informatikai támogatása mellett dönt, tisztában kell lennie azzal, hogy egy hosszadalmas, költséges, de minden bizonnyal értékes beruházásba kezd. A rendszer bevezetésének több szakasza van, mely szakaszok különböző problémákat rejtenek magukban. Kutatásom célja, hogy szakértői interjúk segítségével feltérképezzem a szállítói oldal véleményét a bevezetési folyamat sikeres tényezőiről valamint buktatóiról, majd ennek eredményeképpen kialakítsak egy olyan folyamatmodellt, mely leírja az előkészítési és bevezetési folyamatot egymást követő lépésenként. Az így felépített folyamatmodellt kérdőíves megkérdezés segítségével, útmodell formájában validálom, hogy ellenőrizzem a vélt kapcsolatok meglétét.

Kulcsszavak: KKV eredményes működés, CRM rendszerek bevezetésének problémája, CRM bevezetési útmodell

1 Bevezetés

A vállalatok folyamataik belső bonyolultsága miatt elérték azt a szintet, amikor nélkülözhetetlenné vált egy informatikai megoldás alkalmazása. A vállalati informatika területe az utóbbi évtizedekben robbanásszerű fejlődésen ment keresztül. Ennek köszönhetően ma a piacon számos ügyviteli rendszer, ERP (*Enterprise Resource Planning* vagy magyar megfelelője *Integrált Vállalatirányítási Rendszer*) és CRM (*Customer Relationship Management*, magyarra fordítva *Ügyfélkapcsolati Menedzsment*) megoldás kapható. Vállalati mérettől és iparágtól függetlenül minden piaci szereplő megtalálhatja a számára legkedvezőbb megoldást.

[1]Beérkezett: 2016. október 2. E-mail: `reicher.regina@kgk.uni-obuda.hu`. A szerző köszöni az anonim lektor részletekbe menő segítő javaslatait és a jövőre vonatozó módszertani útmutatásait.

A magyar kisvállalkozások éles versenye megkívánja, hogy minden cég a termékét és a szolgáltatásait a lehető legmagasabb színvonalon bocsássa vevői, ügyfelei rendelkezésére. Épp ezért napjainkban már elengedhetetlenül fontos, hogy a vállalatok ne csak a termelésre vonatkozó adataikat rendezzék, hanem az ügyféladataikat is rendszerezve tartsák. Ezt segíti a CRM stratégia, melynek lényege, hogy a különböző csatornákon beérkező információkat rendszerezve, egységesítve, majd ügyfelekre bontva képes megjeleníteni, elemezni. Az így felhalmozott adatok megfelelő kiaknázásával javíthatja a cég a hatékonyságát a partnerkezelés, ügyfélkezelés, értékesítés, termékfejlesztés, innováció és a marketing területén, valamint komoly versenyelőnyre tehet szert konkurenciáival szemben.

A technológiai kialakítás, az informatikai megoldás a CRM stratégiának egyfajta modern eszközzel történő támogatása. A CRM filozófia vállalati meglétéhez és alkalmazásához, a vállalat ügyfélkezelésének magas színvonalú működéséhez nem szükséges feltétel. A CRM informatikai megoldás működése a cég ügyfélstratégiáján alapszik és azt hivatott támogatni.

Azonban a CRM stratégiát támogató informatikai megoldás bevezetésének folyamata komplex lépéssorozat összessége. A bevezető cég részéről komoly erőforrást igényel mind pénzügyi, idő és személyi feltételek terén. A beruházás csak abban az esetben térülhet meg, ha a bevezetés előkészített, mindkét fél (bevezető és informatikai szállító) részéről megfelelően támogatott.

Kutatásom eredményeinek segítségével csökkenteni lehetne a kockázatot az informatikai bevezetések, főként a CRM bevezetések területén.

2 IT beruházások különböző vállalati méret esetén

A 90-es években a fejlődő országok vállalatai nem fordítottak különösebb figyelmet az informatikai fejlesztések megtérülésére vagy a megtérülés vizsgálatára. Sokkal fontosabb volt számukra, hogy mekkora versenyhátrányt jelent a piacon annak hiánya. (Strassman, 2002/9)

Napjainkban főként a forráshiánnyal küzdő vállalatoknál kerül előtérbe a beruházás megtérülés, azonban ezeknél a vállalatoknál nem az IT technológia fejlesztése a prioritás. (Erdős, 2009) Sajnos a hazai KKV-k jelentős hányada alulfinanszírozott. (GKI Gazdaságkutató Rt., 2003)

Az intenzív vállalati beruházások, így az informatikai beruházások is a termékek, szolgáltatások nagyobb mennyiségű és jobb minőségű előállításához vezetnek. Azonban az informatikai megoldásokban rejlő potenciál adta lehetőséggel csak azok a vállalatok tudnak élni, akik képesek termékeik és szolgáltatásaik folyamatos frissítése mellett a belső folyamataik megváltoztatására is. (Organisation for Economic Co-operation and Development, 2003)

Ennek következtében azonban az informatikai fejlesztések hatása nagyon gyakran csak több évvel a bevezetés után érzékelhető, amikor már nehéz kimutatni, hogy pontosan mi is okozta az eredményesség növekedését. (Brynjolfsson & Hitt, 2002) Hiszen nagyon gyakran a szervezeti struktúra átalakítása, a folyamatok racionalizálása is komoly hatékonyságnövekedéssel járhat, ami természetesen vonja maga után az eredményesség javulását is.

Munkám során kizárólag a magyarországi KKV szektor szereplőire koncentráltam. Ennek egyik oka, hogy a nagyvállalatok tőkeerősebb, hitelképesebb környezete egészen más jellemzőket indukál, mint a gyakran komoly anyagi nehézségekkel és szakmailag képzetlen személyi feltételekkel működő KKV szereplők. Másik oka pedig, hogy 2012-ben a magyarországi regisztrált vállalkozások 99%-a kis- és középvállalkozás volt. Bár 2014-re számuk jelentősen csökkent, a működő vállalkozások döntő része továbbra is a legfeljebb 249 főt foglalkoztató kis- és középvállalkozások közé tartozik. A magyar vállalkozások tevékenységének működését javítani kell, különös tekintettel az innovációs lehetőségek területén. (Szabó & Herman, 2014/6) Az innováció a beruházásokat indukáló tényezők egyik igen fontos eleme.

A KKV-k árbevétele az összvállalati árbevétel 58%-át tette ki 2012-ben. Ez növekedni látszik, köszönhetően főként annak, hogy a nagyvállalatok az erősödő globális verseny hatására az alacsonyabb jövedelmezőségű tevékenységüket kiszervezték, serkentve ezzel a kis- és középvállalkozásokat, mégis a KKV szektor beruházásra fordított összegei csökkenést mutatnak. (KSH, 2014) Ennek egyik oka lehet a kockázatvállalás csökkentése.

Az IT beruházások legfőbb jellemzői között említhetjük, hogy számviteli szempontból az aktivált érték milyen amortizációs módszerrel rendelkezik. A gyors gazdasági és technológiai fejlődés ugyanis megkívánja a magas amortizációs leírási kulcsot. Hazánkban az IT eszközök 2 év alatt írhatóak le. Másik nagyon fontos jellemző, hogy ezen beruházások eredményeként megvalósított szoftveres megoldások nehezen mobilizálhatóak más beruházásokba egyediségük okán. Nagyon nehezen mérhető a fejlesztő vállalat teljesítménye és az IT rendszer megfelelőségének vizsgálata is komoly feladat. Igen komoly bizonytalansági foka van a folyamatnak, számos váratlan eseménnyel kell megküzdeni a bevezetés során, és az is bizonytalan, hogy beváltja a hozzá fűzött reményeket (1. táblázat).

Az IT beruházások gyakran együtt járnak szervezeti vagy intézményi változásokkal, üzleti folyamatok átalakításával, új szervezeti struktúra kialakításával.

	Konvencionális, termelői beruházások	IT-beruházások
Mobilitás	korlátozott mobilitás	irreverzibilis
Megrendelő közreműködése	esetleges	aktív
Teljesítés mérése	jól mérhető	nehezen mérhető
Beruházás bizonytalansága	többnyire alacsony	magas
Beruházással együttjáró változások	rendszerint csak a termelési folyamatokban	a szervezeti folyamatok tág körére, a munkakörökre és a szervezeti struktúrára is kiterjedhet
Hasznossági hatások	évente azonos mértékű	késleltetett

1. táblázat. A konvencionális, termelői beruházások és az IT-beruházások közötti alapvető különbségek. *Forrás:* (Erdős, 2009).

Természetesen az IT projektek nagysága, kivitelezése nem független a vállalati mérettől. Erdős szerint számtalan különbség jellemzi a nagyvállalati és KKV szektor IT projektjeit. Nagyvállalati környezetben jellemzőbb a tömegtermelés, a termékek nehezebben testre szabhatóak, így az ügyfélszolgálati munka is erőteljesen uniformizált. Precízen kialakított protokoll alapján működik, erősen szabályozott, pontos jogosultsági rendszer alapján. Az informatikai megoldások is ezt a precízséget követik.

A kisvállalkozások esetében gyakori, hogy az indulás korai szakaszában kialakult folyamatok rögzülnek, melyek megváltoztatását a vállalati növekedés ugyan indokolttá tenne, mégsem történik meg. A munkatársak egymáshoz való viszonya kötetlenebb, a kommunikáció gyakran szóban történik, az ügyfelek kiszolgálása és problémáik kezelése személyesebb jellegű. Ezen vállalkozások termékpalettája szűkebb, a termékek, szolgáltatások egyedivé tétele egyszerűbb lehet.

A nagyvállalatok mind sajátforrás, mind idegen tőke vonatkozásában kedvezőbb helyzetben vannak a KKV szektor szereplőinél. Minél kisebb egy vállalkozás, annál nagyobb kockázatot jelent a bankok számára hitelt vagy kölcsönt folyósítani. Ezt a kockázatot természetesen beszámítják a hitel díjába, így a kisvállalati szereplők jelentős mértékben fizetnek többet egy-egy hitelért.

Előny azonban a KKV-k számára, hogy szervezetük kisebb, így rugalmasabb. Ennek következtében könnyebben reagálhat az IT projektek kapcsán fellépő esetleges átszervezésekre.

A KKV-k IT projektjei kisebb volumenűek, rendszerint nem terjed ki a vállalat minden folyamatára. Így kevesebb szervezeti egységet érint, kevesebb tárolt adatot és tranzakciószámot jelent.

Jelentős különbség figyelhető meg a döntéshozatal szintjeiben és a döntésben résztvevők számban is. A nagyvállalati környezetben az informatikai részleg vezetője dönt, ahol a vállalatnak van saját IT stratégiája és költségvetésükben szerepel IT beruházás. A középméretű vállalatok esetében nincs külön IT részleg, itt néhány vezető együttes döntése alapján indul meg az informatikai fejlesztés, mely döntést esetleg egy rendszergazda segíti. A kisvállalatok esetében jellemzően egyszemélyű döntés születik, mely komoly kockázatot hordoz magában.

További komoly hátrányt jelent a KKV-k számára az informatikai ismeretek hiánya a munkavállalói és a vezetői szinten egyaránt. Ezek a vezetők gyakran kizárólag a hardver és szoftver elemek beszerzésében látják az IT fejlesztéseket. Az ilyen kisebb cégek gyakran ítélik felesleges költségnek a továbbképzéshez, tudásbázis építéshez kapcsolódó kiadásokat és az ehhez tartozó stratégia kidolgozását, pedig ennek hiánya ellenére bevezetett IT rendszerek vagy fejlesztések kudarchoz vezetnek. (Bőgel & Forgács, 2005)

Többek között a hazai KKV-k informatikai beruházásainak gátló tényezőit is vizsgálta a Cisco Systems 2005-ben. Jelentésükben 5 fontos tényezőt ismertetnek, melyre a hazai válaszadók, mint gátló tényezőre hivatkoztak. 64%-ban a beruházás magas költsége riasztó a válaszadók számára, 44%-ban pedig a bevezetés időigényességét érzik problémának. 40%-uk a hozzáértő alkalmazottak hiányáról számol be és 30%-ban említik az adat és rendszerbiztonság illetve az integrálási nehézségek kérdését. (Coleman Parkes, 2005)

2006-ban a BellResearch is hasonló eredményre jut az IT beruházásokat nehezítő körülmények vizsgálatakor. Ebben a fenti jellemzők mellett a vezetői támogatás hiánya is megjelenik, valamint a jogi szabályozás hiánya is indokként szerepel. (BellResearch, 2006)

3 CRM rendszerek hatása a vállalati működésre

Tízből kilenc magyar cég számára versenyelőnyt jelent a digitalizáció. A cégek hatékonyabban, a szervezeti folyamatok tekintetében is átláthatóbban tudnak működni. Ez derült ki a Siemens Zrt. megbízásából végzett reprezentatív kutatásból, amelyet a hazai közép- és nagyvállalatok körében végeztek. (HRPortal.hu hírszerkesztő, 2016)

A CRM informatikai rendszer tágabb lehetőségeket biztosít az adatok és az információk használatára annak érdekében, hogy megértsük az ügyfeleket és jobban meg tudjuk valósítani a kapcsolati marketing stratégiákat. Ehhez az emberek, a műveletek, a folyamatok és a marketinglehetőségek funkciókon átívelő integrációja szükséges, melyet az információk, a technológia és az alkalmazások tesznek lehetővé. (Payne, 2007)

Mester szerint két fontos trend játszott szerepet a CRM kialakulásában. Az egyik a termékek közötti különbözőségek csökkenése, amely arra kényszeríti a piaci szereplőket, hogy testre szabással próbálják megkülönböztetni magukat versenytársaiktól. A másik az információtechnológiai fejlődés, amely lehetővé tette, hogy az ügyfelekről keletkező adatokat különböző szoftveres támogatás segítségével gyűjtsék és elemezzék a vállalatok. (Mester, 2007)

Így tehát alapvetően megváltozott a cégek működési stratégiája és az értékesítés koncepciója. Amikor már nem a termék áll az értékesítés központjában, a cél nem egy konkrét termék értékesítése bármilyen mennyiségben, bárkinek, az elérhető maximális profit mellett, hanem a vásárló kerül az értékesítés célkeresztjébe. A marketingszakember és értékesítő valamint a vállalat közös célja, hogy az ügyfélnek a lehető legkülönfélébb terméket tudja eladni a lehető legnagyobb nyereséggel, az ügyfél megelégedettsége mellett. (Erdélyi, Kovács, Merényi, & Szémely, 2006/3)

Ez a szemléletváltás jellemzi ma a gazdasági válságban küzdő és talpon maradó cégek stratégiáját. Ez a szemlélet hatással van az üzleti tevékenységekre és a vállalat minden szervezeti egységére, a pénzügy, marketing, logisztika, minőségbiztosítás, informatika, értékesítés területeire és a dolgozók minden szintjére, felső vezetőktől a front office közvetlen ügyfélkapcsolattartójáig.

Ha egy cég vezetése CRM szoftver bevezetése mellett dönt, fontos, hogy a kiválasztási szempontok között a valódi igények jelenjenek meg. A döntéshozatalban szerepet játszhat a cégméret, iparági sajátosságok, anyagi lehetőségek és még sok egyéb tényező. Így nem feltétlenül tükröződik az elvárás a kiválasztási szempontokban.

A CRM bevezetésének kiindulópontja minden esetben a vállalat stratégiai céljainak leírása és a vevőorientált vállalati folyamatok rögzítése kell, hogy legyen. (Chikán & Wimmer, 2004)

Bohnné megfogalmazza azt a feltételt a bevezetéssel kapcsolatban, hogy ,,rendet kell rakni" a cég életében, amely a bevezetés mellett dönt. Szorgalmazza a belső folyamatok racionalizálását, az információáramlás átláthatóvá tételét, a párhuzamosságok és az esetleges érdekellentétek megszüntetését. Javasolja egy BPR megvalósítását, vagyis az üzleti folyamatok átszervezését. Véleménye szerint a cégkultúra szerves részét kell képeznie az ügyfélközpontúságnak és ehhez az informatikai hátteret nemcsak biztosítani kell, hanem a megfelelő használatára a munkatársakat meg is kell tanítani. Hangsúlyozza a cégvezetés elkötelezettségének fontosságát és a megfelelő munkatársi gárda jelenlétét. (Bohnné, 2005)

Payne rendkívül szofisztikált CRM megvalósításra vonatkozó ajánlást tesz. Javasolja, hogy a bevezetés megkezdése előtt minden vállalat ellenőrizze, felkészült-e a CRM tevékenységre. Ebben a szakaszban feltárásra kerül, hogy a vállalat milyen szinten áll az ügyfélkezelés területén, a CRM bevezetésének milyen alapvető szükségletei vannak. Feltérképezik, melyek azok a tényezők, melyek egy sikeres bevezetési projekt gátlói lehetnek. Ilyen lehet például a szakértelem hiánya, az elégtelen adatminőség vagy a vezetőség részvételének hiánya, de ide tartozik az üzleti előnyök megértésének hiánya vagy a teljesítménymérési rendszerek elégtelensége is. Erre CRM auditot ajánl, melynek feladata a stratégiai modellben szereplő öt CRM folyamat kialakítása, melyek a stratégiafejlesztési folyamat, az értékteremtési folyamat, az információmenedzsment folyamata, a többcsatornás értékesítést integráló folyamat és a teljesítményértékelési folyamat mindegyikének megvizsgálása és azoknak a kulcsterületeknek a kiválasztása, amelyeket a cégnek a bevezetés előtt fejlesztenie kell. Ezekről a folyamatokról a későbbiekben, a szervezeti változást eredményező fejlesztések keretében részletesen beszélek. Végeredményként meg kell határozni azokat a fő CRM tevékenységeket, amelyekkel a vállalatnak foglalkoznia kell. Kiemelkedően fontosnak tartja a szerző a felső vezetés támogatásának elnyerését, a támogató kultúra megteremtését. (Payne, 2007)

A CRM rendszer bevezetése tehát egyértelműen racionalizált alapon nyugvó folyamatokra épül. Hatása érezhető az egész szervezetben és a munkavállalók személyes tevékenységében is. Azonban a vállalkozásoknak tekintettel kell lenniük informatikai fejlettségük fokára, amikor CRM rendszer bevezetésén gondolkodnak. Hiszen az informatikai rendszer kialakításakor mindenre figyelni kell, mint a rendszer biztonsága, a jelszavak kezelése, ezek biztonságos kialakítása és a felhasználók tájékoztatása a biztonság betartásának követelményeiről, a jelszavak kialakításáról, stb. (Keszthelyi, 2013/6) Minden szervezet az idő előrehaladtával, méretének és piacának változásainak hatására alakulni kényszerül. A vállalatoknak nem csak informatikai érettségüket, hanem szervezeti érettségüket is vizsgálni kell egy esetleges CRM bevezetésének igénye esetén.

Egy vállalkozás az életciklus szakaszonkénti pénzügyi politikájának, és adatainak feldolgozásával, elemzésével hasznos információkhoz juthat arra vonatkozóan, hogy a vállalkozás hogyan tudja megtartani piaci helyzetét, munkaellátottságát, eredményességét. Az elvégzett elemzések rámutattak arra, hogy az életciklus szakaszok jellemzőinek, pénzügyi helyzetének feltárása során kapott információk, valamint az időben meghozott gazdasági döntések lehetővé tették a vállalkozás részére az éves árbevétel jelentős növelését. Jól látható, hogy a vállalkozás életében végbement változásokat és intézkedéseket a szakirodalomban rögzített módszerek tudatos alkalmazásával menedzselve, a vállalkozás még a bizonytalan, kaotikus és turbulens gazdasági környezetben is nyereségessé alakítható, vagy a piac nyertes szereplőjévé tehető. (Gyenge, Kozma & Bíró, 2014/2)

Alshawi és szerzőtársa azt kutatta, hogy a KKV szereplőit milyen tényezők befolyásolják a CRM elfogadásával kapcsolatban. A kutatásból kiderült, hogy az adatminőség, a szervezeti változások és a technikai kérdések alapvetően meghatározzák a rendszerhez való viszonyt. (Alshawi, Missi & Irani, 2011/3)

A CRM rendszerek előnyei a vállalat minden területén érezhetővé válnak, de talán legnagyobb eredményessége a marketing területén mutatható ki.

„A klasszikus marketing a vállalat minden olyan tevékenységét felöleli, amely az ügyfelekkel való kommunikációra, kapcsolattartásra irányul – a piackutatástól kezdve a termékfejlesztésen és az ügyfélmenedzsmenten keresztül egészen az értékesítésig. A marketing tárja fel a fogyasztó szükségleteit; kezdeményezi olyan termékek előállítását, amelyek a fogyasztók igényeit kiszolgálják; és ideális esetben előnyös kapcsolatokat teremt.” (McGovern, Court, Quelch, & Crawford, 2005/3)

Azonban McGovern és társai kutatásukban arra az eredményre jutottak, hogy, amíg a marketing alapvető feladataival tisztában vannak a vállalatvezetők, addig a marketing helyével, lehetséges hatáskörével és felelősségével mit sem törődnek.

Az utóbbi években született tanulmányok közül viszont több is azt mutatja, hogy a CRM technológiát bevezető szervezeteknek csupán 30%-a ért el javulást a szervezeti teljesítményben. A Chang és társai kutatásai alapján felállított bizonyítékok arra utalnak, hogy a CRM technológia beszerzése csupán szükséges, de nem elégséges feltétele a sikeres CRM bevezetésnek. (Chang, Park, & Chaiy, 2010/63)

Moorman és szerzőtársai szerint a szervezet felépítését alapvetően meg kell változtatni. Középpontjába az ügyfelet kell helyezni. A cég figyelmét a termékjövedelmezőségről[2] az ügyfél jövedelmezőség[3] felé kell fordítani. Ebből következik, hogy a szervezeti felépítés nagymértékben eltér a hagyományos szervezeti struktúrától. A szerzők szerint a feladatköröket is újra kell értelmezni, hiszen fontos, hogy ebben az új felépítésben is mindenki pontosan

[2] A termékjövedelmezőség kifejezésére alkalmas mutatószám a fajlagos fedezet és a fajlagos fedezeti hányad. A termékjövedelmezőség mérése struktúraalakító tényezőként működik a vállalatoknál.

[3] Az ügyfélértéket szűken értelmezve az ügyfelek jövedelmezőségét jelenti, ami az ügyfelekből származó bevétel és a kiszolgálásukra fordított költségek különbsége. Tágabb értelemben további immateriális értéktényezőkkel bővíthető a számítás, melyeket a vállalati profil alapján határozhat meg a cég.

tisztában legyen avval, mi a feladata. (Moorman, Rust & Bhalla, 2010/5)

Payne is az informatikai bevezetés előtti stratégia kidolgozása mellett érvel. Vizsgálatai, kutatásai során arra következtetésre jutott, hogy öt olyan CRM folyamatot lehet meghatározni, amely átível a vállalati funkciókon is. Ezek a folyamatok teljes mértékben az ügyfelekre koncentrálnak. A folyamatok az alábbiak:

- *stratégiafejlesztési folyamat* a vállalati stratégia részletes áttekintésével kezdődik a CRM folyamata;
- *értékteremtési folyamat* alkalmazásával mind az ügyfélnek, mind pedig a vállalatnak értéket teremtünk;
- *információmenedzsment folyamata* a CRM tevékenység keretében összegyűjtik és használják az ügyfelekre vonatkozó minden adatot;
- *többcsatornás értékesítést integráló folyamat* a feldolgozott adatokból szerzett információk segítségével olyan ügyféltapasztalatra tesznek szert, melyet minden kapcsolódási ponton felhasználnak;
- *teljesítményértékelési folyamat* a folyamat eredménye az üzleti sikerekben mérhető.

Payne azonban azt is megjegyzi, hogy a vállalatok egyedi helyzetéből adódóan ezek a folyamatok, így az alapvető stratégiai modell is jelentősen eltérhetnek egymástól. Ha a CRM-et ilyen stratégiai folyamatok halmazaként tekintjük, akkor üzleti eredményeink is jobbak lehetnek.

Ez a modell nagyvállalatokra épülő tapasztalatok alapján épült fel, így a kis- és középvállalkozások területén csak kisebb-nagyobb módosításokkal alkalmazható.

„Nagyszabású és komplex CRM-kezdeményezés megvalósításához a vállalatnak rendszerint jelentős szervezeti és kulturális változáson kell átesnie, ezért minden nagyobb CRM-program kritikus eleme a szervezeten belüli hatékony változásmenedzsment program" (Payne, 2007)

Payne ajánlást tesz egy változásmenedzsment modell alkalmazására is, amely segítheti a CRM változásmenedzsment projektek tervezését. Ez a „7S" modell, melyet a McKinsey&Company stratégiai tanácsadó cég dolgozott ki. Lényege, hogy nem csak a stratégia és a struktúra vonatkozásában kell gondolkodnunk, amikor egy vállalati stratégia kidolgozására törekszünk. Átfogó módon, számos más elemmel is ki kell bővítenünk és együttes működésüket kell vizsgálnunk. A modell 7 eleme tehát (Rácz et al, 2003):

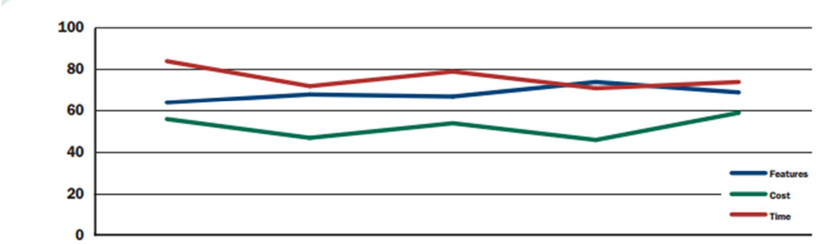
1. Struktúra (strukture)
2. Stratégia (strategy)
3. Rendszerek (systems)
4. Közös értékek (shared values)
5. Stílus (style)
6. Alkalmazottak (staff)
7. Készségek (skills)

A szerzők szerint a modell alapján eldönthető, hogy egy szervezet sikerre viheti-e a javasolt és vizsgált stratégiát.

Minden szervezet – legyen az bármekkora méretű – működése nagymértékben függ annak vezetőjétől. Így a CRM vezető megválasztása is kulcsfontosságú a sikeres projekt szempontjából. A vezető személyének olyan hitelesnek és lehetőség szerint mindenki által támogatottnak kell lennie, aki képes a felső vezetéssel folytatott kommunikációban hatékonyan képviselni a dolgozók és a CRM projekt érdekeit egyaránt és a beosztott munkatársaival szemben is képes a cég és a projekt érdekeit érvényesíteni. Tud gyors és határozott döntéseket hozni, szakértelme nem kérdőjelezhető meg.

Payne hangsúlyozza, a megfelelő vezető választása után rendkívül fontos a CRM küldetés megfogalmazása. Ennek tartalmaznia kell a közös értékeket, melyek alapvetően a szervezet összetartó erejét alkotják, a vállalat jövőképét, amellyel tudatja a cég a dolgozókkal és a vevőkkel, hogy merre is tart. (Payne, 2007)

Elmondható tehát, hogy a bevezetés mellett döntő vállalkozás szervezeti szempontból komoly kihívások elé néz. De legalább ilyen komoly kihívás számukra egy informatikai projekt menedzselése és annak időben és költségkereten belüli befejezése.



	2004	2006	2008	2010	2012
TIME	84%	72%	79%	71%	74%
COST	56%	47%	54%	46%	59%
FEATURES	64%	68%	67%	74%	69%

1. ábra. Informatikai projektek túllépésének tényezői.
Forrás: (The Standish Group International, 2015)

A Standish Group International Inc. 1985 óta méri az IT projektek sikerességét. A kutatásban 60%-ban amerikai és 25%-ban európai vállalkozások vettek részt. A fennmaradó 15% a világ többi részét képviseli.

Az 1. ábrából jól látható, hogy a sikerességi mutatók sem a költségek, sem az idő, sem a funkcionalitások területén 2004 óta számottevően nem változott. 2012-ben az IT projektek mindössze 39%-a volt sikeres, 43%-uknál meg kellett változtatni az eredeti projektfeltételeket, 18%-uk pedig egyáltalán nem valósult meg.

A kutatás a leggyakoribb okok között a gyenge projekttervezést, a rosszul meghatározott üzleti célokat és a csúcsvezetés támogatásának hiányát említi. A kutatás nem számol az elveszett lehetőségek okozta költséggel, ami gyakran sokkal nagyobb lehet, mint a tényleges pénzügyi vesztesége az adott vállalatnak. A vállalkozások bizonytalan gazdasági környezete, az európai és hazai jogi és politikai környezet és a pályázati rendszer feltételei egyaránt kedvezőtlenek a KKV-k számára az informatikai projektek vállalásában. Gyakran a pályázati kiírások olyan feltételeket tartalmaznak, melyek egy informatikai rendszer bevezetésével nem garantálhatóak, éppen ezért nem is vállalhatóak.

Mindezek szükségessé teszik, hogy az informatikai bevezetés mellett döntő vállalkozások megfelelő módszertani támogatást kapjanak ahhoz, hogy bevezetésük sikeres legyen, annak kockázata lehetőség szerint minimálisra csökkenjen.

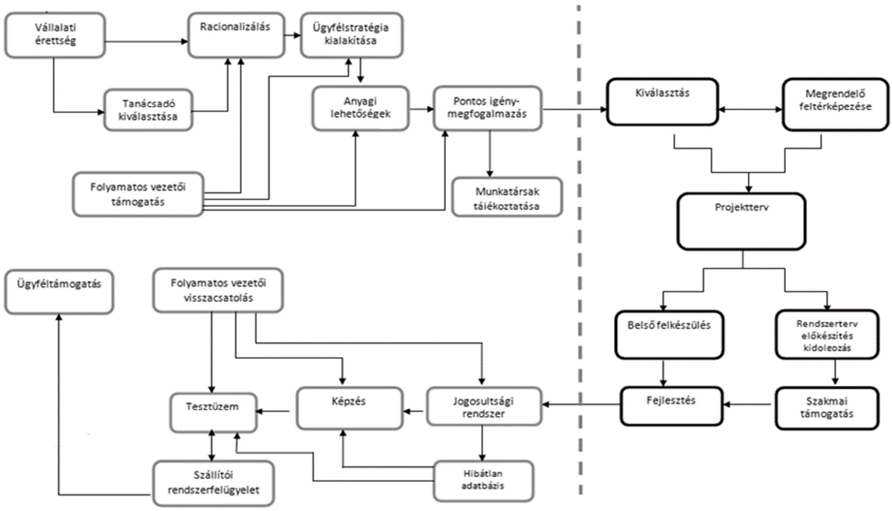
4 A modell kialakítása

Vizsgálatom célja az volt, hogy az interjúkban részt vevő vezetők által említett, főbb indikátorok alapján kialakítsak egy olyan modellt, ami tartalmazza azon tényezőket, melyek hatással vannak a CRM rendszer bevezetésére, és ezen tényezők egymásra hatását is kimutassam. Ennek eszközéül az útmodell módszere szolgált. Az útmodell nem más, mint egymásra épülő regressziós modellek sorozata. A modellben az egyes itemek egymásrahatását vizsgáljuk annak figyelembevételével, hogy a megelőző lépésekben a vizsgált itemet milyen hatások érték. Az útmodellben szereplő változókat nyilak kötik össze, ezzel jelölve a kapcsolat irányát, vagyis ok-okozati modellt építünk. Kezdő lépésnek ki kell választanunk egy ún. exogén változót, mely olyan speciális változó, amelyet a modellben szereplő többi változó nem befolyásol. Célunk, hogy az útmodell kialakításával feltárjuk a közbülső változók egymáshoz való viszonyát, majd igazoljuk az eredményváltozót. (Székely & Barna, 2008)

A modell kialakításához kvalitatív és kvantitatív módszeren alapuló vizsgálatot is végeztem. Kvalitatív kutatásomban 15, a bevezetési oldalon működő cég szakértő képviselőjével készítettem mélyinterjút annak érdekben, hogy feltárjam a bevezetői oldal által érzékelt problémákat, esetleges módszereiket, melyek segítségével megpróbálják megelőzni a sikertelenül lezáródó projekteket. Kvalitatív kutatásom interjúalanyait hólabda módszerrel kerestem meg. Ez egy nem valószínűségi kiválasztási módszer, mely alkalmas arra, hogy vizsgálatokat végezzünk egy olyan populáción, csoporton, melynek tagjai nehezen körülhatárolhatóak. (Babbie, 2003)

Az interjúk eredménye alapján sikerült feltárnom azokat az ismérveket, melyek a szakértők szerint a leggyakrabban és legerőteljesebben jelennek meg a bevezetési folyamatban, mint befolyásoló tényezők. Ez alapján képes voltam egy olyan folyamatmodell kialakítására, mely a feltárt ismérvek lehetséges kapcsolatát mutatják. Ezt követően az útmodellt arra használtam, hogy megvizsgáljam, az ily módon kialakított kapcsolatok a megkérdezettek válaszai is leképezik-e.

Feltevésem szerint a bevezetés folyamata a 2. ábrán látható módon épül fel.



2. ábra. Folyamatmodell kialakítása. *Forrás:* saját kutatás.

Az informatikai szállítókkal végzett interjúk alapján kialakított folyamatmodellem rendezettsége is idősoron alapszik. Az eredeti folyamatmodellben a projektmenedzsment részhez tartozó feladatokat leválasztottam, az útmodellben nem elemzem ezek összefüggéseit.

Ennek egyik oka, hogy a validáláshoz szükséges kérdőív hossza igen neuralgikus pontja a vállalati kutatások sikerességének. A vállalati menedzsment válaszadói hajlandósága rendkívül alacsony, idejük drága, így csak rövid kérdőív kitöltetésével lehet viszonylagosan jó válaszadási arányt elérni.

Másik oka, hogy a bevezetői oldal belső folyamatainak elemzése további kvalitatív kutatást igényel, hiszen a szakértők kevéssé látnak bele a vállalatok belső változásaiba. Így a vállalat belső folyamatainak vizsgálata, a projektmenedzselés önálló kvalitatív vizsgálata szükséges a modell teljes felépítéséhez.

Harmadik oka, hogy ebben a részben helyezkedik el az informatikai szállító fejlesztési szakasz, mely a bevezetési folyamathoz szorosan nem köthető, ennek metódusa nem befolyásolja a megrendelő feladatait.

Ezen okok következtében útmodellem két részből áll, külön eredményváltozókkal. Az egyik rész az előkészítés szakaszát tartalmazza, a másik pedig a bevezetési szakaszt.

Kvantitatív kutatásomat a szakértői mélyinterjúk tapasztalatai alapján építettem fel. Ennek érdekében az interjúk alapján elkészített bevezetés módszertani folyamatmodellem érvényességét, a benne feltételezett kapcsolatok meglétét és erősségét a kérdőívben kapott válaszok alapján állítottam össze és vizsgáltam meg.

Kérdőívemet 31 szakértő és 104 bevezetési tapasztalatokkal rendelkező CRM használó cég menedzsmenthez tartozó munkatársa töltötte ki. A 31 szakértő összesen 170 év tapasztalatával rendelkezik. Köztük a legrégebbi 13 éve dolgozik, mint szakértő és hatan 10 éve vannak a pályán. Átlagosan 5 és fél éve dolgoznak ezen a területen. 11 szakértő 3 vagy annál több különböző típusú rendszerbevezetésben vett már részt és 10 szakértő még csak egyetlen rendszer bevezetési folyamatában dolgozott.

A CRM rendszert használó cégek képviselői nehezen megtalálhatóak. Semmilyen statisztika vagy adatbázis nem érhető el arra vonatkozólag, hogy mely vállalatok használnak CRM rendszert. Így a vállalkozásokat a szállítókon keresztül érhettem csak el szintén hólabda módszer segítségével. Mivel ez a módszer nem produkál reprezentatív mintát, így kutatásom elsősorban feltáró jellegűnek tekinthető. Azonban eredményeim fontos kiindulási alapot jelenthetnek a bevezetésben résztvevők számára csakúgy, mint a jövőbeni kutatások felépítésében. A vizsgálat a KKV-k számára egy igen kritikus folyamatot igyekszik feltárni. A 2. táblázatban jól látható, hogy a KSH KKV megoszlására vonatkozó adataiban szereplő arányok nem felelnek meg a vizsgált minta arányainak. Azonban a terület alacsony szintű kutatottsága indokolttá teszi, hogy a minta általánosításra alkalmatlan volta ellenére is elemzésre kerüljön. Ez alapján képesek lehetünk egy látleletet adni a vizsgált területről.

	Mikro (0-9 fő)	Kis (10-49 fő)	Közép (50-249 fő)	Összesen
A regisztrált KKV-k száma	1 648 718	31 230	4 696	1 684 644
megoszlása (%)	97,87	1,85	0,28	100
Kutatásomban részt vevő vállalatok száma	56	38	9	103
megoszlása (%)	54	37	9	100

2. táblázat. A kutatásban résztvevő vállalkozások megoszlása az EU kategóriák szerint (kutatás éve). *Forrás:* Saját szerkesztés.

4.1 A folyamatmodell validálása

Az útelemzés a változóknak valamilyen szempontú rendezettségét tételezi fel. A rendezettségi kapcsolat a gyakorlatban legtöbbször az idő. Jelen kutatásban is ez képezte a modellépítés alapját.

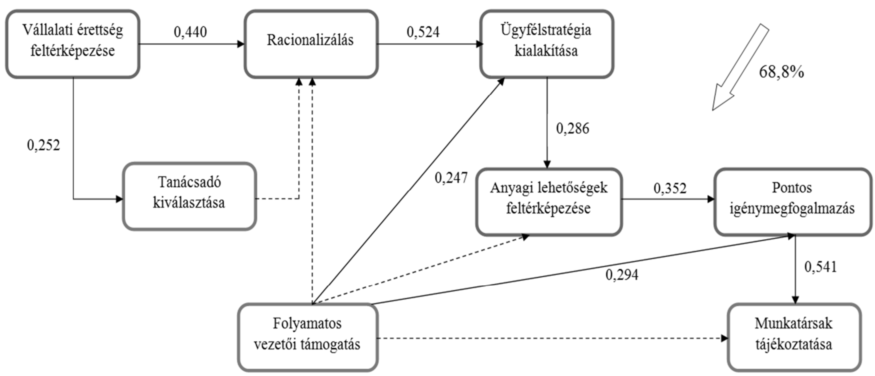
A válaszadók véleményét egy 10 fokozatú magas mérési szintű intervallumskálán mértem.[4] A kérdésben külön kellett értékelni a sikeres bevezetéshez szükséges előkészítés szakaszát és külön az eredményes működéshez szükséges bevezetési szakaszhoz kapcsolódó egyes elemeket.

Előkészítés szakasz	Bevezetés szakasz
vállalati érettség feltérképezése	megfelelő képzés a bevezetés alatt
folyamatok racionalizálása	megfelelő tesztüzem a bevezetés alatt
független tanácsadó cég bevonása	folyamatos vezetői visszacsatolás
ügyfélkezelési stratégia kidolgozása	folyamatos szállítói rendszerfelügyelet
folyamatos vezetői támogatás	jogosultsági rendszer meghatározása
pontos igénymegfogalmazás	hibátlan adatbázis használata
munkatársak tájékoztatása	szállító által szervezett ügyféltalálkozók, tapasztalatok megosztása
anyagi lehetőségek pontos feltérképezése	

3. táblázat. Az útmodellben szereplő változók

[4] Az egyes változókat standardizálva vontam be a vizsgálatba, hogy a változók eloszlása ne befolyásolja regressziós béta értékét.

Az útmodellekben a nyilakon feltüntetett értékek a szignifikáns kapcsolathoz tartozó regressziós béta értékei. Az a független változó gyakorolja a legnagyobb hatást a függő változóra, melyre ez az érték a legmagasabb, az előjelek pedig a kapcsolat irányára utalnak. Az útmodellben gyakorlatilag a függő és független változók közötti nulladrendű lineáris korreláció két részre bontása történik. Az egyik rész a közvetlen hatás, melyet a független változó gyakorol a függő változóra, a másik rész pedig a független változó hatása közbülső változókon keresztül a függő változóra. A közbülső változók olyan változók, amelyek maguk is magyarázzák más változók viselkedését, de rájuk is hatással vannak egyes változók.



3. ábra. Előkészítési szakasz útmodell vizsgálata. *Forrás:* saját szerkesztés.

Az előkészítésre vonatkozó útmodellben eredményváltozónak tekintettem a munkatársak tájékoztatását, mert ez a lépés akkor következik be, amikor a cég vezetője vagy a vezető által megbízott team meghozza a szakmai döntést a stratégiai kérdésekben. Így ez jelenti a függő változót, mely változóra a többi változó hat, de ő nem hat egyetlen más változóra sem.

A standardizált regressziós béta értékhez tartozó szignifikanciaszint a pontos igénymegfogalmazás esetében nem haladja meg a 0,005 küszöbértéket, így az igénymegfogalmazás és a munkatársak tájékoztatása között lévő közvetlen hatás béta értéke 0,541. Ez azt is jelenti, hogy aki fontosnak tartotta a pontos igénymegfogalmazást, az szignifikánsan fontosnak tartja a munkatársak tájékoztatását is.

Azokat az eseteket, amikor két tényező között nem találtam szignifikáns kapcsolatot, szaggatott nyilakkal jelöltem. (3. ábra)

A mintán kialakított útmodell összes magyarázó hányada 32,2%, tehát a modell 32,2%-ot magyaráz a bevezetés előkészítési szakaszában felmerülő feladatokat befolyásoló tényezők közül, 68,8% más tényezők függvénye.

Elméletem szerint a munkatársak tájékoztatása egy stratégiai fontosságú elem, mint a pontos igénymegfogalmazás, és egy emberi tényezőhöz kapcsolódó komponens, a vezetői támogatás van rá közvetlen hatással.

Azonban a lineáris regressziós vizsgálat a feltevésemet nem igazolta. A modell ábráján jól látható, hogy válaszadóim szerint a folyamatos vezetői támogatás nem mutat közvetlen szignifikáns kapcsolatot az eredményváltozóval, hanem követett módon érvényesül a hatása. Csak egyes stratégiai kérdések tekintetében mutatható ki szignifikáns lineáris hatás. Akik fontosnak ítélik a folyamatos vezetői támogatást, azok fontos stratégiai kérdésként kezelik az ügyfélstratégia kialakítását és a pontos igénymegfogalmazást, azonban az anyagi lehetőségek felmérésére vagy a folyamatok racionalizálására vonatkozóan nem alakítottak ki egységes, ily módon (ti. lineáris regresszióval) mérhető véleményt.

A közvetett hatás magába foglalja a kétszeres, háromszoros, stb. utak erősségét. Tehát a Pearson féle korrelációs együttható egyik része a közvetlen hatás, míg másik része a közvetett hatások összessége. Az utak erőssége a regressziós egyenletek rendezéséből adódóan az utakat reprezentáló nyilakhoz tartozó regressziós együtthatók szorzata. Amennyiben a közvetlen és a közvetett utakhoz tartozó értékeket összeadjuk, úgy a korrelációs együttható értékét kapjuk. Modellemben a pontos igénymegfogalmazás és a folyamatos vezetői támogatás korrelációs együtthatója 0,356. A közöttük lévő közvetlen kapcsolathoz tartozó béta érték 0,294. A háromszoros út erőssége 0,0248. Ezek összege 0,3188. A korrelációs együttható és a közvetlen valamint a közvetett hatások összességének különbsége abból adódik, hogy az anyagi lehetőségeken keresztül vezető kétszeres út nem volt szignifikáns, így azt a modellben nem szerepeltettem, és elvesztettem ennek az útnak az erősségét (0,082*0,352=0,0288). Ha ezt a nem szignifikáns utat is figyelembe vesszük, akkor az összes út erőssége 0,294+0,0248+0,0288=0,347, ami már a korrelációs együttható értékéhez közelít. Hibáját a kerekítések okozzák. (4. táblázat)

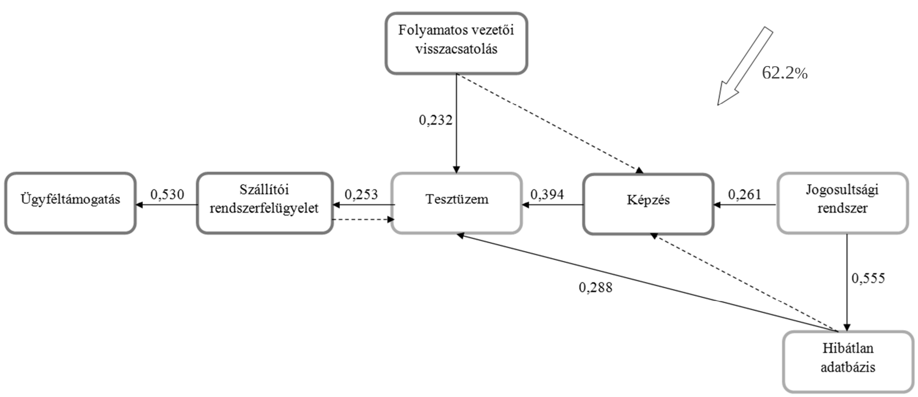
Függő változó	Független változó	Közvetlen hatás (Béta)	Közvetett hatás	Korrelációs együttható
Munkatársak tájékoztatása	Folyamatos vezetői támogatás	–	0,294*0,541=0,159 0,247*0,286*0,352*0,541=0,013	0,257
Munkatársak tájékoztatása	Vállalati érettség feltérképezése	–	0,44*0,524*0,286*0,352* *0,541=0,12	0,180
Pontos igénymeg-fogalmazás	Folyamatos vezetői támogatás	0,294	0,247*0,286*0,352=0,0248	0,356
Anyagi lehetőségek	Folyamatos vezetői támogatás	–	0,247*0,286=0,07	0,176

4. táblázat. A CRM bevezetés előkészítésére ható tényezők közvetett és közvetlen hatásai
Forrás: Saját kutatás.

Mivel az útmodellt az idő dimenziójában alakítottam ki, így a munkatársak tájékoztatására közvetetten számos elem hat. Ennek értékeit az *5. táblázat* mutatja. A táblázatból jól látható, hogy közvetlen hatást csak a folyamatos vezetői támogatás és a pontos igénymegfogalmazás között találtam. A fennmaradó három pár független változója kizárólag közvetett módon hat a függő változóra.

Látható, hogy az érettség feltérképezése nagyon erősen hat a racionalizálásra, az pedig az ügyfélstratégia kidolgozására. Ebből megállapítható, hogy azok a bevezetők – legyenek akár szállítók, akár megrendelők, akik megvizsgálják a bevezetést megrendelő vállalat képességeit, azok a bevezetés további szakaszaiban is fontosnak tartják a stratégiai kérdések szem előtt tartását. Azonban az is megfigyelhető, hogy a független tanácsadóval kapcsolatos attitűd elég zavaros. Aki fontosnak ítéli a vállalati feltérképezést, az érzi a tanácsadó, egy külső szakértő szem segítségének szükségességét. Azonban a felmérésen túl a szakmai tanácsadót nem veszik igénybe. A racionalizálás lépéseihez már nem tartják fontosnak a jelenlétét, illetve a megoldásban már nem érzik szükségét a jelenlétének. Modellem nem tartalmazta annak lehetőségét, hogy a tanácsadó lépéseket kihagyva kapcsolódik be a folyamatba, ezért azt az ábrán sem jelöltem. Azonban vizsgálataim során megnéztem, hogy vajon más lépések esetében fontosnak tartják-e a jelenlétét. A számítások eredménye azt igazolta, hogy a tanácsadó jelenléte a további lépéseknél sem lesz fontos.

Az eredmények alapján megállapítható, hogy a sikeres bevezetéshez szükséges előkészítésben a stratégiai lépések megfelelő megtervezése közvetetten komoly hatást gyakorolnak.



4. ábra. Bevezetés szakasz útmodell vizsgálata. *Forrás:* saját szerkesztés.

A mintán kialakított második útmodell a bevezetési szakaszt foglalja össze. Ennek összes magyarázó hányada 37,8%, tehát a modell 37,8%-ot magyaráz a bevezetés bevezetési szakaszában felmerülő feladatokat befolyásoló tényezők közül, 62,2% azt reprezentálja, hogy mekkora a modellen kívül lévő változók hatása az ügyféltámogatásra.

Az útmodellben (4. ábra) az ügyféltámogatás megjelenését tekintettem eredményváltozónak, mely feltételezhetően a bevezetés után, a működtetés során jelenik meg. Így ez jelenti a függő változót, mely változóra a többi változó hat, de ő lineárisan nem hat egyetlen más változóra sem. Kiinduló változónak a jogosultsági rendszer kialakítását tekintettem, mert a projekt leválasztott részéből a fejlesztés után ide tér vissza a folyamatmodell, hiszen a jogosultsági rendszer meghatározását követően van csak lehetőség tesztelésre, megfelelő adatbázis kialakítására stb. Feltételezésem szerint a szállítói rendszerfelügyelet és a szoftvertesztelés iterációs ciklusként hat egymásra, de ezt a regressziós analízis nem támasztotta alá. Így elmondható, hogy akinek fontos a szállítói rendszerfelügyelet, annak nagyon fontos, hogy a későbbiekben is tartsa a kapcsolatot a szállítóval, rendszeresen találkozzon más ügyfeleivel is, hogy tapasztalataikat megoszthassák, ugyanakkor fordított irányban ilyen jellegű lineáris kapcsolat nem mutatható ki.

A folyamatos vezetői visszacsatolás itt sem látszik folyamatosnak. Erőteljes hatást csupán a tesztüzemre gyakorol. Az ügyféltalálkozóra, mint végső, függő változóra közvetetten minden változó hatással van. Az alábbi táblázatban a három kezdőpont közvetett hatásának értékei olvashatók ki. (5. táblázat)

Függő változó	Független változó	Közvetlen hatás (Béta)	Közvetett hatás	Korrelációs együttható
Ügyfél-támogatás	Hibátlan adatbázis	–	0,288*0,253*0,530=0,038	0,165
Ügyfél-támogatás	Jogosultság	–	0,261*0,394*0,253*0,530=0,013	0,270
Ügyfél-támogatás	Folyamatos vezetői visszacsatolás	–	0,232*0,253*0,530=0,031	0,458

5. táblázat. A CRM bevezetés előkészítésére ható tényezők közvetett és közvetlen hatásai
Forrás: Saját kutatás.

Jól látható, hogy a technológiai elemek összefüggnek egymással. Akinek fontos a jogosultságok egyértelmű meghatározása, az kiemelkedően fontosnak tartja a hibátlan adatbázis meglétét. Ezek pedig fontosnak tartják a tesztelés folyamatát.

Összességében elmondható, hogy mindkét útmodell esetében az interjúk alapján fontosnak ítélt vezetői támogatás hatása közvetlenül nem volt kimutatható. A vezetői hatás sem az előkészítés, sem pedig a bevezetés során nem játszik domináns szerepet a válaszadók szerint. Kizárólag a munkatársak tájékoztatására mutatható ki erőteljes közvetett hatás. Ehhez hasonlóan nem igazolódott be a hipotézisem a tanácsadó szakember bevonására vonatkozóan. Vizsgálataim alapján elmondható, hogy a kezdeti lépéseknél megjelenő szakember véleménye sokszor nincs hatással a bevezetés későbbi folyamataira. Tanácsait, közvetlen jelenlétét nem tartja a bevezetői oldal szükségesnek. Bár azok számára, akik a vállalati érettsége feltérképezését fontos kezdeti lépésnek érzik hangsúlyosan fontos a tanácsadó megjelenése, magában a vállalati folyamatok racionalizálásába már nem vonják be a külső szakembert.

Ugyanakkor jól látható, hogy a szakértői interjúk alapján kialakított útmodell összefüggésrendszere alátámasztja a folyamatmodellben ismertetett feltevéseket, az egyes elemek egymásra épülve az idő dimenziójában tekintve hatással vannak a teljes bevezetési folyamatra és annak sikerességére.

5 Összefoglalás

A dinamikusan fejlődő és ezért gyorsan változó környezet kihívásaira szinte lehetetlen a vállalkozások számára előre felkészülni. Elengedhetetlenül szükséges, hogy a vállalkozások gyorsan tudjanak reagálni akár a versenytársak, akár a fogyasztó kihívásaira. A vállalatok egyik legnagyobb versenyelőnye az ügyfélkapcsolat kezelésében rejlik. A válságban a vállalkozások vagy tönkremennek, vagy képesek fejlődni, növekedni, és ezzel felkészülni a válság után többnyire bekövetkező robbanásszerű fejlődésre. Ebben a helyzetben a kisvállalkozások nagyon gyakran fékezik önmagukat és ezzel vásárlóikat is. Csökkentik a marketingre fordítható összeget és jelentősen megnehezítik a hitelezési feltételeket, csökkentik a különböző hűségakciókat és csökkentik a dolgozói létszámot azokon a területeken, melyeken nem látványos a haszon. Sajnos ezeknek az ügyfélszolgálati részleg gyakran áldozatul esik.

Az innováció a gazdasági növekedés motorja. Különösen nagy jelentősége van gazdasági válság idején, ilyenkor hangsúlyozottabbá válik, hogy megújuljanak a cégek, hogy az erőforrásaikat frissítsék annak érdekében, hogy versenyképesebbé tudjanak válni. A KKV-k esetében különösen létfontosságú, hogy képesek-e az innovációra. A hazai innovációs tevékenység lényegesen elmarad az európai unió átlagától (Horváth, 2015)

Az Európai Unió a romló versenyképessége miatt többször megkísérelte már az innováció-menedzsment célszerű módszereinek feltérképezését. 2004-ben fogalmazták meg a tíz módszer-csoportját és főbb technikáit, melyben kiemelt szerepet kapott a CRM, mint a piac intelligens technikája. (European Commission, 2004) A magyar vállalkozások sikerességének egyik alapvető feltétele, hogy a magyar KKV-k esetében is beszélhessünk egységes CRM értelmezésről, megjelenjenek a szakterületnek képviselői és főként, hogy a vállalatok megfelelően átgondolt ügyfélkapcsolati stratégiával rendelkezzenek.

A szakértői interjúk során az informatikai szállítók a válság előtti növekedésről számoltak be. A nemzetközi trendekkel ellentétben, a gazdasági válság hatására hazánkban nem növekedett a CRM bevezetések száma. Igaz, nem is csökkent, annak ellenére, hogy az informatikai eszközökre szánt összeg jelentős csökkenést mutat.

A hazai cégek és intézmények IT költéseinek alakulását vizsgálva a Bell-Research kutatói (2012. évi adat) rámutatnak, hogy a legnagyobb mértékben a mikrovállalatok költései redukálódtak az elmúlt években, míg a legjobban a kis- és középvállalati szegmens tartja magát, ebben a körben enyhe bővülés is detektálható. A kiadások összetételét tekintve csökkent a hardverre és a szoftverre fordított összeg, a szolgáltatások igénybevételéhez tartozó összeg pedig várhatóan növekedni fog a jövőben. (Schopp, 2013)

Ebből következik, hogy az IT szállítóknak is egyre nagyobb érdeke fűződik a vállalati vezetők szoftvervásárlásra való buzdítására ezért fontos, hogy az IT szállító és szolgáltató cégek is megfelelő marketing stratégiával, a piac teljes körű ismeretével és jó ügyfélkapcsolati menedzsment stratégiával rendelkezzenek.

Az útmodell vizsgálat eredménye egy letisztul lépéssorozat, melyen nyomon követhető az előkészítés, bevezetés szakaszainak lépéssorozata. Elemzéséből megállapítható, hogy a vezetői támogatás nem jelenik meg megfelelően az informatikai előkészítés és bevezetés folyamatában. Tehát a KKV szektor vezető szereplői még nem ismerték fel, hogy milyen fontos szerepet játszanak a vállalat informatikai bevezetéseinek sikerességében. A vezetői támogatás hatása csak egy-egy neuralgikus ponton volt értékelhető. Ez azt is jelentheti, hogy a támogatás nem folyamatos, a vezetők vélhetően csak akkor lépnek be a folyamatba, ha valami probléma van. Ezt az interjún szerzett tapasztalatok is alátámasztják. Így gyakorlatilag a bevezetés során folyamatosan krízist kezelnek, operatív feladatokat látnak el és a stratégiai lépésekre nem tudnak koncentrálni.

Az is látható, hogy a tanácsadó igénybevételének lehetősége meglehetősen ellentmondásos eredményt hozott. Az igény felmerülése után a tanácsadó jelenlétére a vállalati érettség kapcsán van igény, azonban a későbbiekben a tanácsadó semmilyen befolyással nem bír a folyamatra, a megkérdezettek szerint jelenléte nem szükséges, a stratégiai kérdésekben nem veszik igénybe szakmai tapasztalatait. Mindezt úgy, hogy a KKV vezetői többnyire tájékozatlanok a CRM iparágat illetően és nincsenek megfelelő vezetői képzettséggel felruházva. (Kövesdi, 2014)

A kutatás rávilágított arra, hogy a megrendelői oldalon nagy az igény a támogatásra, a későbbi nyomon követésre az informatikai szállítóval szemben. Azonban az is láthatóvá vált, hogy vagy a folyamat teljes egészében igényli a megrendelő a szállító aktív közreműködését, vagy egyáltalán nem tartja ezt fontosnak. Nincsenek olyan kulcsterületek, ahol kiemelkedően jelenne meg ez az igény a megrendelő részéről. Láthatóvá vált, hogy az informatikai jellegű feladatok a megrendelő számára összefüggnek, azok szorosan kapcsolódnak egymáshoz.

Több, az informatikai szállítók interjúi alapján fontosnak ítélt kapcsolat fontosságát nem igazolta vissza a kvantitatív kutatás eredménye. Így például a vizsgálat nem támasztotta alá azt a feltevésemet, hogy akinek hosszú távon a hibátlan adatbázis működése fontos, annak hasonlóan fontos a képzés. Holott a képzésnek óriási szerepe van a későbbi működtetés eredményességében, aminek alapja a tisztított, jól működő adatbázis.

Ezen eredmények fényében még inkább elmondható, hogy a vezetők képzettségének hiánya alapvetően gyengíti az informatikai projektek sikerességét.

Irodalom

1. Alshawi, S., Missi, F., & Irani, Z. (2011/3): Organisational, technical and data quality factors in CRM adoption – SMEs perspective. *Industrial Marketing Management*, 376-383.
2. Babbie, E. (2003): *A társadalomtudományi kutatás gyakorlata.* Budapest: Balassi Kiadó .
3. BellResearch (2006): Magyar Infokommunikációs Jelentés – Üzleti szegmens. Magyarország: BellResearch.
4. Bohnné, K. K. (2005): *Elégedett az ügyfél?* Budapest: Public Press Kft.

5. Bőgel, G., & Forgács, A. (2005): *Informatikai beruházás – üzleti megtérülés.* Budapest: Műszaki Könyvkiadó.
6. Brynjolfsson, E., & Hitt, L. (2002): Computing Productivity: Firm-Level Evidence MIT Working Paper 4210-01. University of Pennsylvania: University of Pennsylvania, Wharton School.
7. Chang, W., Park, J., & Chaiy, S. (2010/63): How does CRM technology transform into organizational performance? A mediating role of marketing capability. *Journal of Business Research*, 849–855.
8. Chikán, A., & Wimmer, Á. (2004): *Üzleti fogalomtár.* Budapest: Alinea Kiadó.
9. Coleman Parkes Research (2005): SMB Growing Pains – A Study into Key Business Challenges and Technology Adoption in Small and Medium-Sized Businesses Across Europe. Kalifornia: Cisco Systems.
10. Erdélyi, E., Kovács, B., Merényi, A., & Számely, É. (2006/3): A legjobb ipari gyakorlatnak tartott CRM-megvalósítás tapasztalatai a T-Mobile-nál. *Magyar Távközlés*, 16-23.
11. Erdős, F. (2009): A Kis- és Középvállalkozások informatikai beruházásai és azok megtérülési lehetőségei Magyarországon, PhD. értekezés. Győr: Széchenyi István Egyetem.
12. European Commission (2004): Innovation management and the knowledge-driven economy. Brussels-Luxembourg: European Commission Directorate-general for Enterprise.
13. Gazdaságfejlesztési Operatív Program – Európai strukturális és beruházási alapok. (2007): GOP-2007-2.1.1/B - komplex vállalati technológia fejlesztés kis- és középvállalkozások számára. Budapest: Európai Unió.
14. GKI Gazdaságkutató Rt. (2003): *GKI Évkönyv 2002.* Budapest: GKI.
15. Gyenge, B., Kozma, T., & Bíró, T. (2014/2): Pénzügyi helyzet elemzés a vállalati életciklus szakaszaiban. *CONTROLLER INFO*, 27-31.
16. Horváth, Á. (2015. március 14): Portfólió – A gazdasági hírforrás. Forrás: portfolio.hu: http://www.portfolio.hu/vallalatok/egeszsegugy/valsag_idejen_no_meg_igazan_az_innovacio_szerepe.184953.html
17. HRPortal.hu hírszerkesztő (2016. június 2): HRportal – Minden a munka világából. Forrás: hrportal.hu: http://www.hrportal.hu/hr/versenyelonyt-jelentenek-a-cegeknek-a-digitalis-fejlesztesek-20160511.html
18. Keszthelyi, A. (2013/6): About Passwords. *Acta Polytechnica Hungarica*, 99-118.
19. Kövesdi, Z. (2014.01.19): Az e-gazdaság helyzete Magyarországon – az Európai Bizottság elemzése. Forrás: infoter.eu: http://infoter.eu/cikk/az_e-gazdasag_helyzete_magyarorszagon_-_az_europai_bizottsag_elemzese
20. Központi Statisztikai Hivatal (2014): *A kis- és középvállalkozások jellemzői.* Budapest: KSH.
21. McGovern, J. G., Court, D., Quelch, J., & Crawford, B. (2005/3): Hozzuk be a fogyasztókat az igazgatósági tanácsterembe. *Harward Business Review*, 44-54.
22. Mester, C. (2007): A CRM hatalma, avagy ügyfélkezelés a magyar általános vállalati gyakorlatban, PhD. értekezés. Miskolc: Miskolci Egyetem.
23. Moorman, C., Rust, R., & Bhalla, G. (2010/5): A marketing újragondolása. *Harward Business Review*, 42-50.

24. Organisation for Economic Co-operation and Development. (2003): ICT and Economic Growth – Evidence from OECD contries, industries and firms. Párizs: OECD.
25. Payne, A. (2007): *CRM kézikönyv, ügyfélkapcsolat felsőfokon.* Budapest: HVG Kiadó Zrt.
26. Rácz, J., Stevens, F., Have, S., Have, W., & Van Der Elst, M. (2003): *Legsikeresebb vezetési modellek.* Budapest: Manager Könyvkiadó.
27. Schopp, A. (2013. december 17): ITBusiness – Üzleti lap döntéshozóknak. Forrás: itbusiness.hu: http://www.itbusiness.hu/Fooldal/rss_3/Bovulo_it-szolgaltatasi_piac.html
28. Strassman, P. A. (2002/9): Why ROI ratios are now crucial to IT investment. Butler Group Review, 5-7.
29. Szabó, Z., & Herman, E. (2014/6): Productive Entrepreneurship in the EU and Its Barriers in Transition Economies: A Cluster Analysis. *Acta Polytechnica Hungarica*, 73-94.
30. Székely, M., & Barna, I. (2008): *Túlélőkészlet az SPSS-hez.* Budapest: Typotex Elektronikus Kiadó Kft.
31. The Standish Group International (2015. május 12): Enterprise Agile Lifecycle Management. Forrás: versionone.com: http://www.versionone.com/assets/img/files/CHAOSManifesto2013.pdf
32. The Standish Group International (2015.4.15): Goals Are the Fuel in the Furnace of Achievement. Forrás: projectsmart.co.uk: http://www.projectsmart.co.uk/docs/chaos-report.pdf

CRM AS BUSINESS SOLUTION FOR SME'S

The intensified competition among companies makes the proper handling of customers increasingly important. As a conclusion from this philosophy, first a strategy had been implemented in order to avoid losing customers, then a software solution has been developed in order to store and manage multiplied information. The aim of CRM system is to organize the information arriving through different channels in a unified way and present it clearly divided for each client. The implementation process of a CRM information technology solution is complex and comprehensive series of steps, as the result of which the company can be operated more efficiently; the clients are more satisfied and the company becomes more competitive. The implementation, however, requires huge financial and human resources from the company; therefore the project planning and management should be very thorough and prudent. When a company decides to use IT support for client management, it should be aware that it is a very long, expensive, but nonetheless valuable investment. There are several stages of implementing the system and each of these phases may hide some problems. The aim of my research is to explore the views of suppliers with the help of expert interviews regarding the successful factors and pitfalls of implementation process and, as a result of this, a process model is constructed which describes the preparation and implementation process step by step. The constructed process model is validated with the help of a questionnaire survey, in the form of a road model in order to check the existence of presumed relations.

Keywords: Efficient SME operation, Problems of implementing CRM systems, Road model of CRM implementation

EGY HEURISZTIKUS ÚTVONALTERVEZŐ ALGORITMUS TÖBBNAPOS TÚRÁK TERVEZÉSÉRE[1]

APÁTHY M. SÁNDOR
Budapesti Corvinus Egyetem

Az útvonaltervező algoritmusok megalkotói az utazó ügynök probléma óta hagyományosan a csúcsokban gyűjthető profitok összegét tekintik az optimalizálandó célfüggvénynek, ezzel azonban figyelmen kívül hagynak jó pár gyakorlati megfontolást, éppen ezért ritkán vezetnek jó eredményre. Ennek fényében olyan hasznossági függvény és célfüggvény kerül jelen dolgozatban bemutatásra, mely a korábbi pontösszeg-maximalizálás egy kiterjesztéseként értelmezhető, hiszen a paraméterek bizonyos értékei mellett visszakapjuk azt, mégis képesek figyelembe venni a felhasználók igényeit is. Többnapos túraútvonalak tervezéséhez olyan heurisztikus algoritmust alkottunk, melynek célja, hogy egyszerűségével, és ebből adódóan rövid futási idejével lehetőséget adjon annak későbbi gyakorlati alkalmazhatóságára. A 3-napos útvonalak esetén is átlagosan 4 másodperc alatti eredmény, valamint a célfüggvénynek köszönhető attraktív útvonaltervek megfelelő alapját képezik egy személyre szabott túrautakat tervező alkalmazás megalkotásának, mely a felhasználói elégedettség optimalizálását tartja legfőbb céljának.

Kulcsszavak: Team Orienteering Problem, Route Planning, Heuristic Algorithm, Tourism. *JEL kód:* C60, C61, Z32

1 Bevezetés

Az utazó ügynök probléma óta az útvonaltervező algoritmusok megalkotói hagyományosan a csúcsokban gyűjthető profitok összegét tekintik az optimalizálandó célfüggvénynek, ezzel azonban figyelmen kívül hagynak jó pár gyakorlati megfontolást, éppen ezért ritkán vezetnek jó eredményre. Ilyen gyakorlati megfontolás például, hogy a felhasználó által alacsony értékelést kapott pontokat akkor se vegyük be az útvonaltervbe, ha azok igen kis költséggel megtehetőek, vagy éppen az, hogy igyekezzünk fajlagosan a lehető legtöbb időt a helyszínek meglátogatásával tölteni (a gráf élein történő séták helyett). Ennek fényében olyan hasznossági függvényt és célfüggvényt javasolunk, mely a korábbi pontösszeg-maximalizálás egy kiterjesztéseként értelmezhető, hiszen a paraméterek bizonyos értékei mellett visszakapjuk azt, mégis figyelembe veszik a felhasználók igényeit is.

A kutatásainkhoz kapcsolódó korábbi eredményeket a 2. szakaszban foglaljuk össze, melyet követően a 3. szakaszban megfogalmazásra kerül a Team Orienteering Problem (TOP) egy módosított változata, mely mind a korlátok

[1]Beérkezett: 2016. szeptember 16. E-mail: `sandor.m.apathy@gmail.com`.

kezelését tekintve, mind a célfüggvény megalkotását illetően a gyakorlati probléma minél életszerűbb leképezésére koncentrál. A feladatra adott heurisztikus algoritmus célja az volt, hogy egyszerűségével, és ebből adódóan rövid futási idejével lehetőséget adjon annak későbbi gyakorlati alkalmazhatóságára. Eredményeinket a 4. szakaszban ismertetjük: a 3-napos útvonalak esetén is átlagosan 4 másodperc alatti eredmény, valamint a célfüggvénynek köszönhető attraktív útvonaltervek megfelelő alapját képezik egy személyre szabott túrautakat tervező alkalmazás megalkotásának, mely a felhasználói elégedettség optimalizálását tartja legfőbb céljának. A tanulmány záró szakaszában megállapítjuk következtetéseinket, valamint kijelöljük a kutatása lehetséges jövőbeli irányait.

2 Kapcsolódó kutatások

Az egyik első útvonaltervező alkalmazás az utazó ügynök probléma (*Traveling Salesman Problem*, röviden *TSP*), melyet először az 1930-as években Karl Menger formalizált, és adott rá megoldást [1], de az elnevezés Hassler Whitney-től származik [2]. Lényege, hogy az ügynöknek adott telephelyeket kell felkeresnie, és dönteni csak arról tud (az élköltségek ismeretében), milyen sorrendben teszi ezt, hogy a lehető legkisebb költséggel járja körbe a telephelyeket. Tehát minimális összköltségű Hamilton-kört keresünk a gráfon. Birkhoff [3] munkájának köszönhetően lehetővé vált a hozzárendelési feladatok megoldása lineáris programozási feladatként, melyet Dantzig, Fulkerson és Johnson alkalmazott elsőként a TSP megoldására [4].

Az utazó ügynök problémából fejlődött ki az *Orienteering Problem (OP)*, vagy más néven a *Selective Traveling Salesman Problem (STSP)*, ahol az egyes ügyfelekhez már profitot rendelnek, és az ügynököt szorító időkorláton belül a legnagyobb összprofitot kell begyűjtenie az útja során az ügyfelek meglátogatásával. Az elnevezés 1996-ban Chao et al. [5] cikkében szerepel, de már 1984- ben megjelent Tsiligirides-nél [6], ahol a TSP-ben az ügynöknek nincs elég ideje, hogy az összes várost meglátogassa egyedül. Cikkében olyan sztochasztikus algoritmust alkalmaz az optimális útvonal közelítő megoldására, melyben minden iterációban *Monte-Carlo-módszerrel* keresi a következő csúcsot, a távolság és a begyűjthető profit függvényében. A problémát már formalizálta Kataoka és Morito 1988-ban [7], ám ők még *Maximum Collection Problem* néven hivatkoztak rá. A témáról bővebben Feillet et al. összefoglaló cikkében olvashatunk [10].

Már a kezdetektől ismert volt ennek a technikának a természetjárásban és általában a turizmusban való alkalmazhatósága, hiszen az OP elnevezés is a tájfutásból ered, ahol a versenyzőknek egy térkép és egy iránytű segítségével kell felkeresniük az előre kijelölt pontokat a lehető legrövidebb időn belül. Innen datálható a tudományág sport és turizmus területén történő hasznosítása, és terjedt ki nem csak a természetjárásra, de a városnézésre is. Ennek jó példája Wang et al. [8], ahol a turista a legérdekesebb látványosságokat látogatja végig a szállodából indulva, és a nap végén oda tér vissza. Golden, Levy és Vohra megmutatták, hogy az OP NP-nehéz [11], így az erre adott egzakt megoldás csak viszonylag kis számú csúcs esetén lehetséges. Ramesh et al. [13] branch-and-bound algoritmust használ, mellyel egzakt megoldást ad akár 150 csúcsot tartalmazó gráfra is, míg Fischetti et al. [14] cikkükben *brach-and-bound* eljárással akár 500 csúcsra is egzakt megoldást tudnak adni. Ramesh és Brown [15] 4 fázisból álló heurisztikus megoldást adnak az OP-re, melyben az *2-opt* és *3-opt* eljárásokat alkalmazzák, melyek a *local search* algoritmusok családjába tartoznak, melyekről Lin cikkében olvashatunk bővebben [33]. Ennél jobb eredményeket ad Chao et al. [22] 5 lépésből álló megoldása, mely mohó algoritmust, sztochasztikus eljárást és *2-opt* algoritmust ötvözve építi fel az útvonalat. A fenti heurisztikus megoldások egy komoly hátránya, hogy könnyen be tudnak ragadni egy lokális optimumba, melyet Gandreau et al. [16] *tabu search* megoldása hatékonyan hidal át. Mivel az eredmények turisztikában történő felhasználása igen nagy figyelmet kap, így cikkek sora foglalkozik azok térinformatikai beágyazásával is (mobil applikációk formájában), erre jó példát találunk az OP esetére Souffriau et al. 2008-as cikkében [9].

Az OP egy természetes kiterjesztése a *Team Orienteering Problem (TOP)*, ahol a turista „feladata”, hogy P nap alatt a rendelkezésére álló időben a lehető legtöbb (számára érdekes) látványosságot meglátogasson, és minden nap végén visszatérjen a szállodájába, ez igen hasonlít a *Vehicle Routing Problem with Time Windows-ban (VRPTW)* megfogalmazott feladathoz. Ezt először Butt és Cavalier formalizálta 1994-ben [12], ahol egy toborzási feladat megoldására alkalmazták. A TOP megfogalmazását a *3. mellékletben* találjuk. Az egzakt megoldások közül igen hatékonyan működnek az oszlop generáló algoritmuson [19] alapuló eljárások. Ekkor LP feladatként oldjuk meg a problémát, de redukáljuk a dimenziók számát a gyorsabb futási idő érdekében, melyre jó példa Butt és Ryan 1999-es cikke [20], ahol akár 100 csúcsra is egzakt megoldást kaphatunk viszonylag rövid idő alatt. Később Boussier et al. [21] alkalmazta az oszlopgeneráló algoritmust, de már kombinálva a *branch-and-bound* eljárással, hogy javítsanak az algoritmus teljesítményén. A heurisztikus megoldások közül a legkorábbi a már az OP kapcsán ismertetett Chao et al. [22] cikkében szereplő 5 lépcsős eljárás kis átalakítással: itt az első P legjobb utat listázzuk ki eredményül. Tang és Miller-Hooks [23], valamint Archetti et al. [24] is *tabu search* eljárást alkalmaz az TOP megoldására, míg Ke et al. [25] *hangya kolóniák* módszerét javasolja cikkében. Az első lépésben 4 eljárást is teszteltek, amivel egy megvalósítható eljáráshoz lehet jutni. Közülük az utakat szekvenciálisan felépítő algoritmus bizonyult a leghatékonyabbnak. Az egyes iterációkban elkészült megoldást *2-opt* algoritmussal javítják, majd kiegészítik annyi csúccsal, amennyi az időkorlátba belefér. Vansteenwegen et al. két heurisztikus eljárást is kifejlesztettek. Mind a *Guided Local Search (GLS)* [26], mind a *Skewed Variable Neighborhood Search (SVNS)* [27] eljárások ugyanazokon a lépéseken alapulnak: egy kezdeti eljárásbók kiindulva „gyengébb” útszakaszokat törlünk, illetve kisebb útszakaszokat illesztünk össze, majd az így kapott út összprofitját igyekszik javítani cserékkel, illetve a menetidőket csökkenteni, és új pontokat beilleszteni a megtakarított idő terhére. Az SVNS más sorrendben variálja ezeket a lépéseket, és így jóval megelőzi a GLS-t. Az útvonaltervező algoritmusokról bővebb összefoglalót Vansteenwegen et al. [17] cikkében olvashatunk, ahol külön kitérnek az egyes eljárások számítási igényére is.

3 Az útvonaltervező algoritmus

Az alábbiakban bemutatásra kerül a tanulmány magját képező útvonaltervező algoritmus. Elsőként bemutatjuk a tervezéshez felhasznált adatokat, majd egy saját, merőben új célfüggvényt, végül a probléma megfogalmazása után egy heurisztikus eljárást adunk annak megoldására.

3.1 A felhasznált adatok

Az útvonaltervező algoritmus teszteléséhez létrehoztunk egy adatbázist, mely 150 budapesti turisztikai látványosságot tartalmaz az alábbi adatokkal:

- Helyzeti adatok: a látványosságok szélességi és hosszúsági koordinátái, 3 méter pontossággal.
- Az adott hely látogatásához szükséges idő percben
- Az egyes helyszínek költségei (belépő díjak), euróban
- A felhasználó által az egyes helyszínekre adott értékeléseket az útvonaltervezés során adottságnak tekintjük, és feltételezzük, hogy a 3. fejezetben adott eljárás alapján kalkuláltuk, így leírják az adott turista preferenciáit.
- A szálloda (pontosabban annak koordinátái), melyből a turista a nap elején elindul, és a nap végén oda érkezik vissza.

A fentieken túl az OpenStreetMap alkalmazás segítségével, mely tartalmazza a város teljes útvonalhálózatát, kiszámoltuk az összes pont többitől vett távolságát, melyet egy távolság mátrixban foglaltunk össze. Ennek a_{ij} eleme az i pontból a j pontba való leggyorsabb eljutásához szükséges időt jelenti (másodpercben). A két pont közötti legrövidebb utat Dijkstra-algoritmussal számoltuk. Így tehát a várost egy olyan gráffal modellezzük, melynek csúcsai a meglátogatható látványosságok (ide értve a fix szállodát is), valamint az azokat összekötő, időben legrövidebb utak, mint a gráf élei. Az élek költségei az él kezdő- és végpontja közötti menetidők, a csúcsokban pedig a látogatások során gyűjthető profitok (a turista adott csúcsra vonatkozó értékelései), valamint a csúcsnál eltöltendő idők és belépődíjak jelentik a költségeket.

Fontos tisztázni e ponton, hogy az élköltségek számításakor mindvégig gyalogos menetidőkkel kalkuláltunk, így maguk a tervezett útvonalak is végig gyalogos túrákat hivatottak modellezni. Autós vagy tömegközlekedési eszközt is figyelembe vevő algoritmus esetén a távolságmátrixot kalkulálhatjuk az

OpenStreetMap vagy a GoogleMaps által becsült menetidőkkel, ám ezek nagyban függnek az aktuális forgalomtól, illetve tömegközlekedés esetén a menetrendtől is. Gavalas et al. [34] athéni helyszíneket és tömegközlekedést modellező kutatásukban klasztereken alapuló heurisztikus eljárásukat tovább fejlesztve 3 algoritmust is adnak a *Time dependent Team Orienteering Problem with Time Windows (TDTOPTW)* közelítő megoldására, melyek az időablakok mellett kezelni tudják az időben változó útiköltségeket és a tömegközlekedési menetrendet is. Az eljárásaik hátránya, hogy nem veszik figyelembe az újabb csúcsok útvonalba történő beillesztésénél a következő helyszín várakozási idejében okozott változást, mikor a beillesztésről döntenek.

3.2 A turista célfüggvénye

A turisták maximalizálandó célfüggvényéről azért érdemes szót ejteni, mert még a legfrissebb és igen haladó megközelítésekben is, lásd Gavalas et al. [19], vagy Vansteenwegen et al. [27], a feladat nem más, mint a TSP-ben is meghatározott csúcsoknál gyűjthető profitok összegének maximalizálása. Ennek megértése érdekében egy pillanatra tegyük fel, hogy a csúcsoknál begyűjthető profitok lehetséges értékei legyenek az $[1, 10]$ intervallumba eső egész számok. Ekkor, ha egy meglátogatott ponthoz igen közel eső, de kis profitú pont meglátogatása mégis jó ötletnek tűnik, hiszen annak az útvonalba történő beillesztése nagy fajlagos profittal kecsegtet. Azonban a gyakorlati problémára koncentrálva ez mégsem jó ötlet, hiszen egy 10-es skálán 2-esre értékelt látnivaló általában nem nevezhető a turista ízlésvilágával összeegyeztethetőnek. Ez a megközelítés még a TSP megfogalmazása óta része az útvonaltervező algoritmusoknak, ahol pénzben mérhető profitról lévén szó, összeadható volt, és reális elvárás, hogy az összprofitot maximalizáljuk. Helyszínekre adott értékelések esetén azonban ez már nem igaz. Javasoljuk tehát, hogy ne „pontgyűjtő akcióként" kezeljük a feladatot, és ennek érdekében egy olyan célfüggvényt alakítsunk ki, mely igyekszik garantálni a felhasználót leginkább kielégítő útvonal megtervezését. Az alábbi megfontolásokat tesszük a célfüggvény megalkotása során:

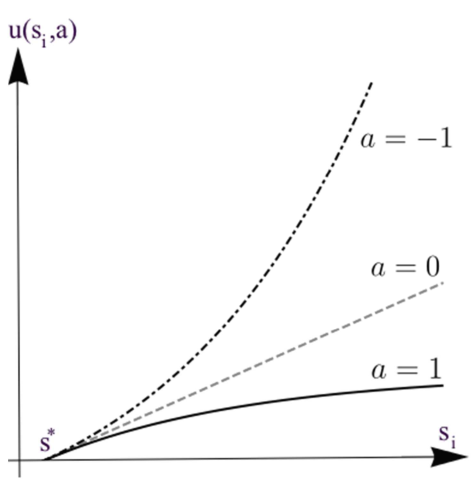
- A turistát a kialakult pontok alapján kevésbé érdeklő nevezetességeket töröljük a listából. Ez egyrészt csökkenti a feladat számítási igényét, másrészt garantálja, hogy csak valóban személyre szabottan kurrens helyszíneket veszünk számításba. A továbbiakban jelöljük s^*-gal azt a minimális értékelést, amit el kell érnie egy csúcsnak a bent maradáshoz, ellenkező esetben töröljük a gráfból.

- A lehető legtöbb időt töltse a turista a helyszíneken, tehát igyekezzünk minimalizálni a csúcsok közötti közlekedésre fordított időt. Ezt egy α paraméterrel építjük be a célfüggvénybe: minél érzékenyebb erre a turista, annál nagyobb büntetést számol fel a látványosságok közötti távolságok megtételéért.

- A turisták különbözhetnek egymástól sétára vonatkozó hajlandóságukban is. Céltalanul hosszú utakat (két pont között) az egyéni preferenciáktól függően sújtsuk külön büntetéssel. Úgy vélem, kevés turista örülne egy két órás sétának két helyszín között. Amennyiben lehetséges, vegyünk fel egy látogatható pontot a hosszabb utakat megtörve. Ennek érdekében a célfüggvényben ne az utazással töltött idők összegét szerepeltessük, hanem azoknak egy 1-nél nagyobb hatványát (β ,,lustasági" paraméter), és azokat adjuk össze. Ezzel büntetjük az útvonaltervezésben indokolatlanul hosszú utak felvételét.

- Ne hagyatkozzunk pusztán az egységnyi összköltségre (menetidő + látogatási idő) eső profitra a döntésnél, hiszen így sok időintenzív látnivalót hagyunk ki az útvonaltervezésből: például Párizsban nem javasolnánk meglátogatni az Eiffel-tornyot, mert annak látogatási ideje hozzávetőlegesen 2 óra, míg profitja bár igen magas lehet, de egy kicsivel alacsonyabb profitú pont meglátogatása fél óra alatt nagyobb fajlagos haszonnal kecsegtet. Itt javasoljuk olyan kategória létrehozását, amely az úgynevezett kötelező látnivalókat tartalmazza, melyeket fel kell venni a meglátogatandó helyszínek listájába függetlenül attól, mennyire időintenzívek. Ezek személyre szabottan kerülnek meghatározásra, például az egyén értékelése alapján maximális pontszámot kapott látnivalók lehetnek ezek.

- Legyen az értékelések figyelembevételekor személyre szabható, menynyivel értékel többre az adott felhasználó például egy 9-es értékelésű helyszínt egy 8-ashoz képest. Az általunk javasolt $u(s_i, a)$ hasznosság függvényt úgy alkottuk meg, hogy $a = 0$ mellett az adott látványosság eredeti s_i értékeléseit adja vissza (illetve azok s^* küszöbértékkel csökkentett értékét), míg $a < 0$ esetén progresszíven nő az értékelések hasznossága. Az $a > 0$ esetben csökkenő határhasznossággal bír az értékelés egységnyi növekedése (*1. ábra*).



1. ábra. Hasznosság függvény

$$u(s_i, a) = \begin{cases} \frac{1-e^{-a(s_i-s^*)}}{a} & \text{, ha } a \neq 0 \\ s_i - s^* & \text{, ha } a = 0\,. \end{cases}$$

Az a elméletben $(-\infty;\infty)$ intervallumon bármilyen értéket felvehet, gyakorlati megfontolások alapján $[-2, 2]$ intervallumban vizsgáljuk majd az útvonaltervre gyakorolt hatását. Mivel $u(s^*, a) = 0$, így tehát azok a helyszínek, melyek értékelése küszöbértéken van, 0 profitot hoznak, és csak az ennél jobb értékelés helyszínek jelentenek pozitív profitot, melyek növelik a célfüggvény értékét. Ez függvényforma természetesen csak javaslat, ám a kutatás jelen fázisának eredményei alapján reményt keltő annak alkalmazása.

Ezeket figyelembe véve a célfüggvényünk, mely alapján az újabb pontokat vesszük fel az útvonalba:

$$C(\alpha, \beta, a, R) = \Big(\frac{\sum_{p=1}^{P}\sum_{i=1}^{N}\theta_{ip}v_i}{\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=2}^{N}\tau_{ijp}t_{ij}^{\beta}}\Big)^{\alpha} \times \Big(\sum_{p=1}^{P}\sum_{i=1}^{N}\theta_{ip}u(s_i, a)\Big)^{1-\alpha},$$

ahol P a rendelkezésre álló napok száma, N a gráf csúcsainak száma, s_i, v_i, t_i rendre a következő pont értékelése, látogatási ideje és az odaút menetideje, $s*$ a felhasználó értékeléseinek azon küszöbértéke, amely alatt nem került be látványosság a potenciálisan látogatható helyszínek közé, α a célfüggvényben szereplő két szempont (a hasznosság és az egységnyi menetidőre eső látogatási idő) súlyozására szolgál, β a „lustasági" paraméter. A τ_{ijp} értéke legyen 1, ha a p-edik útnál az i-edik csúcs után a j-edik következik az úton, és 0 különben. Legyen θ_{ip} értéke 1, ha a p-edik úton az i-edik csúcsot meglátogatják, és 0 különben. A P napra tervezett útvonalak összességét R jelöli. Az a paraméter hivatott tükrözni, mennyivel értékel többre a felhasználó egy s-re értékelt látványosságot egy $(s-1)$-re értékelthez képest.

A választott célfüggvény forma tehát alapvetően két törekvést szolgál: egyrészt az egységnyi megtett útra jutó fajlagos látogatási időt igyekszik növelni, másrészt a legnagyobb hasznossággal bíró csúcsok meglátogatását szorgalmazza. Az α paraméterrel ezek súlyát szabályozhatjuk. Fontos látni, hogy a célfüggvény a mások által széles körben használt profitösszeg-maximalizálás egy kiterjesztése, hiszen $\alpha = a = 0$ választással éppen ezt kapjuk vissza.

3.3 A feladat formalizálása

Legyen adott egy $G(V, E)$ gráf, amelynek minden c_i csúcsához egy s_i nemnegatív értékelés van rendelve, mely a turista számára $u(s_i, a)$ hasznossággal bír, ha meglátogatja a c_i csúcsot. A c_i és c_j csúcsok közötti e_{ij} élhez t_{ij} élköltséget rendelünk, ami a turista számára a távolság megtételéhez szükséges idő gyalogosan. Az c_i csúcs meglátogatása v_i időt vesz igénybe (látogatási idő). Jelölje továbbá h_{ip}, hogy a p-edik útnál az i-edik csúcs hányadik lépésben kerül sorra az úton, valamint τ_{ijp} értéke legyen 1, ha a p-edik útnál az i-edik csúcs után a j-edik következik az úton, és 0 különben. Legyen θ_{ip} értéke 1, ha a p-edik úton az i-edik csúcsot meglátogatják, és 0 különben. A turistának P napja van a látványosságok megtekintésére, és naponta $T_{\max}$ perc ideje.

Az i-edik látványosság megtekintése b_i költséggel jár (belépődíj), melyet a napi B költségkeretéből fedezhet. Fontos, hogy a költségvetési korlát tetszés szerint átcsoportosítható a napok között, így összességében a P napra BP költségkerettel rendelkezik. Ez nem vonatkozik az időkorlátra, mely minden napon betartandó. Minden nap elején a szállodából indul, és a nap végén oda érkezik vissza. A modellben ezt az általánosság jegyében külön kezeljük (az 1-es és N-nel jelölt csúcs), de ezek megegyezhetnek egymással. A feladat: P nap alatt olyan P darab utat bejárni a $G(V, E)$ gráfon, hogy maximalizáljuk a célfüggvény értékét, miközben betartjuk az idő- és költségkorlátokat, és minden csúcs legfeljebb egyszer látogatható meg. Ekkor a feladat megfogalmazható a következőképpen:

$$\max_{\tau_{ijp}} \Big(\frac{\sum_{p=1}^{P} \sum_{i=1}^{N} \theta_{ip} v_i}{\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=2}^{N} \tau_{ijp} t_{ij}^{\beta}} \Big)^{\alpha} \times \Big(\sum_{p=1}^{P} \sum_{i=1}^{N} \theta_{ip} u(s_i, a) \Big)^{1-\alpha} \tag{1}$$

$$\sum_{p=1}^{P} \sum_{j=2}^{N} \tau_{1jp} = \sum_{p=1}^{P} \sum_{i=1}^{N-1} \tau_{iNp} = P \tag{2}$$

$$\sum_{p=1}^{P} \theta_{kp} \le 1\,, \quad k = 2, \ldots, N-1 \tag{3}$$

$$\sum_{j=2}^{N} \tau_{kjp} = \sum_{i=1}^{N-1} \tau_{ikp} = \theta_{kp}\,, \qquad k = 2, \ldots, N-1, \quad p = 1, \ldots, P \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=2}^{N} \tau_{ijp} t_{ij} + \sum_{i=1}^{N} \theta_{ip} v_i \le T_{\max}\,, \quad p = 1, \ldots, P \tag{5}$$

$$\sum_{p=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} \theta_{ip} b_i \le PB \tag{6}$$

$$h_{ip} - h_{jp} + 1 \le (N-1)(1 - \tau_{ijp})\,, \quad i, j = 2, \ldots, N,\ p = 1, \ldots, P \tag{7}$$

$$2 \le h_{ip} \le N\,, \quad i = 2, \ldots, N,\ p = 1, \ldots, P \tag{8}$$

$$\tau_{ijp}, \theta_{ip} \in \{0, 1\}\,, \quad i, j = 1, \ldots, N,\ p = 1, \ldots, P \tag{9}$$

Az egyes kifejezések jelentése a következő: (1) a maximalizálandó célfüggvény; (2) minden út az 1-es csúcsnál kezdődik, és az N-ediknél ér véget, (ezek a korábbiak alapján megegyezhetnek); (3) minden csúcsot csak legfeljebb egyszer látogatunk meg; (4) minden út egyenként összefüggő; (5) betartjuk az időkorlátot: a napi látogatási és menetidők összege nem lehet több, mint $T_{\max}$; (6) betartjuk a költségkorlátot: a belépődíjak összege a P napra együttesen nem lehet több BP-nél; (7) és (8) együtt garantálja, hogy ne legyenek körök az útban, Miller–Tucker–Zemlin javaslata alapján [18]; (9) a τ_{ijp} és θ_{ip} értékkészlete 0 vagy 1.

A kitűzött feladatra adott heurisztikus megoldásunkat a következőkben ismertetjük.

3.4 Az útvonaltervezés

Mivel a megoldandó feladatunk megfeleltethető a TOP egy speciális esetének, így az NP-nehéz feladat, vagyis csak igen kis méretű gráf esetén van reményünk egzakt eljárással optimális megoldásra jutni, éppen ezért egy heurisztikus eljárást javasolunk. Célunk gyakorlati megfontolásokon alapszik: egyrészt szeretnénk egy valóságos problémákon alkalmazható eljárást adni, így az eljárás futási idejét szeretnénk alacsonyan tartani, másrészt olyan eljárást keresünk, mely a felhasználók számára kielégítő megoldással szolgál. Ennek köszönhető a rendhagyónak számító hasznosságfüggvényünk is.

Először két olyan eljárást ismertetünk, melyet több ponton használunk majd az algoritmus során:

Lexikografikus rendezés: ennek során mindig egy csúcsokból álló halmazt rendezünk egy másik csúcsokból álló halmaz és az erőforrás keretek (pénz és idő) szűkössége alapján (mely meghatározásának menetét később pontosan ismertetjük). Szükségünk van továbbá arra az s^* küszöbértékre, melynél alacsonyabb értékelésű csúcsokat törölni fogunk a releváns pontok halmazából (lásd az algoritmus első lépése). Formálisan tehát $L(C_1, C_2, sc, s^*)$, aholC_1 a csúcsok azon halmaza, melyet rendezni szeretnénk, C_2 amely halmazhoz rendezzük, sc az erőforrások szűkösségének mértékét állítja sorrendbe (idő vagy pénz), és s^* az értékelések küszöbértéke. Képezzük az alábbi értékeket:

$$\frac{\frac{u(s_i,a)}{u(s^*+1,a)}}{d^*(c_i, C_2) + v_i}, \qquad \frac{\frac{u(s_i,a)}{u(s^*+1,a)}}{b_i}$$

ahol $d^*(c_i, C_2)$ a c_i csúcs és a C_2 halmaz közötti átlagos távolságot jelöli. A számláló tehát azt fejezi ki, hogy az adott s_i értékelésű pont hány $(s^* + 1)$ értékelésű pont hasznosságával egyenértékű (a releváns pontok között ugyanis $(s^* + 1)$ értékelésű a minimális, hiszen az s^* értékelésűeket és az annál kisebbeket töröljük a gráfból). Ezt osztjuk a nevezőben a pont felvételének várható költségével, ami az odaút menetideje és a látogatási idő összege. A pénzben kifejezett költségek rendezésekor ugyanezen elv alapján a nevezőben a belépődíj szerepel. A következő lépésben rendezzük a C_1 halmaz csúcsait, először aszerint, amelyik korlát szűkösebb. Ha ez például az idő, akkor a fenti hasznosság/időköltség mutató alapján rendezzük csökkenő sorrendbe, majd az így kapott listát nagyjából 6 egyenlő részre osztjuk kvantilisek segítségével (csak az utolsó csoport elemszáma különbözhet a többitől). A második korláthoz tartozó mutató alapján is sorba rendezzük a csúcsokat a 6 csoporton belül. A csoportosításra azért van szükség, mert az első mutatószám értékei alapján már egyértelműen sorba rendezhetjük általában a csúcsokat, így azok kis eltérése esetén sem lenne lehetőségünk a lexikografikus rendezésnél a második mutató alapján felülvizsgálni a sorrendet.

Outlier számítás: Az outlier kereső eljárásunk $O(H, cr)$ egy adott H Hamilton-kör outlier értékeit adja meg egy cr kritikus időérték mellett. Meghatározzuk H minden csúcsára a ki- és bemenő élek összidejét, majd azok átlagát és szórását. Azon i elemeket tartjuk outliernek, melyek esetén

$$t_{i,be} + t_{i,ki} > t^*_H + cr\sigma_H \ ,$$

ahol t^*_H az átlagos be- és kimenő élköltség és σ_H a szórás. A cr értéke az algoritmus egyes lépéseinél változhat. Ezt külön jelezzük majd.

Heurisztikus algoritmusunk az alábbi lépésekből áll:

1. *A probléma egyszerűsítése:* Töröljük a gráf minden csúcsát (az azokba bemenő és azokból kimenő élekkel együtt), melynek értékelése kisebb vagy egyenlő s^* küszöbértéknél, melyet a gyakorlatban választhatunk úgy, hogy a megmaradó csúcsok összes látogatási ideje ne haladja meg a $PT_{\max}$ rendelkezésre álló összidőkeret kétszeresét. Gyakorlati tapasztalatunk alapján az ennél több pont szerepeltetése nem javít az optimumon, ellenben az algoritmus számítási igényét fölöslegesen növeli. Ennél általában konzervatívabb megoldás, ha s^* értékét úgy választjuk, hogy megegyezzen az értékelések átlagával, hiszen ha $s_i < s^*$, akkor $u(s_i, a) < 0$, tehát nem javíthat a célfüggvény értéken. (Az általunk vizsgált esetekben mindig volt annyi átlagon felüli értékelésű csúcs, hogy azok összes látogatási ideje meghaladja a $PT_{\max}$ rendelkezésre álló összidőkeret kétszeresét.) Az így kapott halmazt a továbbiakban a releváns csúcsok halmazának nevezzük.

2. *Fix csúcsok:* Rögzítsük a kötelezően meglátogatandó csúcsokat. Ezek az eljárás során soha nem kerülhetnek az útvonalból törlésre. A korábbi megegyezés alapján azokat tekintjük kötelezőnek, melyekre vonatkozóan a turista értékelése maximális volt.

3. *Csoportosítás:* A releváns csúcsok alapján megbecsüljük, mely erőforrás korlátunk szűkösebb. Ennek érdekében összevetjük az alábbi két hányadost:

- a releváns csúcsok látogatási idejéhez hozzáadjuk a releváns csúcsok közötti átlagos távolságot, és ezt az összeget szorozzuk a releváns csúcsok számával, majd elosztjuk a rendelkezésre álló $PT_{\max}$ időkerettel,
- a releváns csúcsok látogatási költségének összegét osztjuk a BP költségvetési kerettel,

Amelyik érték nagyobb, azt tekintjük szűkösebb korlátnak, és a lexikografikus rendezések alkalmával a pontszámok után rögtön azt a korlátot vesszük előre. Ha tehát a szűkös korlát az idő, akkor a rendezésnél az alábbi sorrendet vesszük figyelembe a változók körében: értékelés, idő, pénz. A maximális pontszámú (tehát kötelező) csúcsok mellé a maradék releváns csúcsra lexikografikus rendezés után választjuk az első $5P$ darab csúcsot. Ez az egyetlen olyan lépés, ahol a fent ismertetett lexikografikus rendezéstől eltértünk annyiban, hogy első rendező elvként a pontszámot használtuk. A releváns pontok halmazának outlier csúcsait rendhagyó módon egy a teljes halmazra meghatározott legrövidebb Hamilton-kör meghatározásával kezdjük (melynek kezdő- és végpontja a szálloda). Ebből $cr = 1$ értékválasztás mellett használjuk az $O(H, cr)$ függvényt az outlierek kiszűrésére (természetesen csak a nem maximális értékelésű csúcsok lehetnek outlierek). Azért ezt az eljárást választottuk, mert bár eshet távol néhány csúcs a „központtól”, ám ha oda egy viszonylag rövid élköltségekből felépíthető út vezet, akkor tapasztalataink alapján nem érdemes rögtön eldobni. Jó példa erre a Városliget, míg tipikus outliernek nevezhető a Nagytétényi Kastély.

4. *Napi utak építése:* A megmaradó csúcsokat P darab (napok száma) klaszterre bontjuk *Hartigan-Wong klaszterező eljárással* [28], melyet relatív hatékonysága miatt választottunk. Minden klaszterre kiszámoljuk a szállodával alkotott legrövidebb Hamilton-kört a TSP megoldására adott algoritmussal. Ennek hátterében az a megfontolás áll, hogy amennyiben csak egy fix csúcsokból álló halmazon szeretnénk a célfüggvényünket maximalizálni, az ekvivalens a csúcsokat összekötő élek élköltségeinek β-adik hatványaival vett gráfon történő legrövidebb Hamilton-kör meghatározásával, hiszen a csúcsok változatlansága miatt mind a hasznosságok, mind a látogatási idők értéke állandó az adott halmazra. Ezt kihasználva az R szoftverben beépített TSP optimalizáló *Repetitive Nearest Neighbor Algorithm* eljárást alkalmaztuk (bővebben lást [29]). Ezt a klaszterező eljárást 10-szer ismételjük meg, hiszen a klaszterezés gyakran vezet különböző eredményre. Az 10 eredmény közül azt választjuk, ahol P darab Hamilton-körre számolt célfüggvény értékünk maximális.

5. *Feltöltés:* Az előző lépésben P darab utat kaptunk, mely a szállodánál kezdődik és ott ér véget. Amennyiben még nem értük el a napi idő- és pénzkeret 1,2-szeresét, akkor az $L(C_r, C_i, sc, s^*)$ eljárással rendezzük az i-edik napra a releváns csúcsok halmazát, melyeket még egy útba sem illesztettünk be (jelölje ezt C_r). Itt fontos megemlíteni két elvet:

- Azokat a csúcsokat, melyeket egy adott napra beillesztünk, automatikusan kivesszük a még megmaradt releváns csúcsok C_r halmazából.
- Ha egy csúcsot kiveszünk egy napból, azt automatikusan visszarakjuk a C_r halmazba. Így minden napra rendeztük C_r elemeit, és a lista elejéről kezdve elkezdjük feltölteni a csúcsokkal a napokat, amíg el nem érjük az idő- és pénzkorlát 1,2-szeresét. Amennyiben egy csúcs két nap szerinti rendezésben is bekerülne az útba, oda helyezzük, ahol magasabb marginális célfüggvény javulást eredményez. Az i-edik napra való felvétel kritériuma, hogy az így keletkező Hamilton-körben az adott pont ne legyen outlier, ahol az $O(H, cr)$ függvényt $cr = 1{,}5$ mellett értékeljük ki.

6. *Csere:* Minden nap csúcsaira meghatározzuk a többi nap pontjaitól vett 3 legkisebb érték átlagát, ezt a csúcs saját napjára is kiszámítjuk (ahol a másodiktól a negyedik legkisebb értékig vesszük az átlagot, hiszen a legkisebb érték, az önmagával vett távolság, ami 0). Ezután minden csúcsot arra a napra helyezünk át, hol ez az érték minimális. Ezt az iterációt 10-szer ismételjük meg egymás után.

7. *Levágás:* Ha van olyan nap, ahol meghaladtuk a napi időkeretet több mint 5%-kal (ennyit engedélyezünk legfeljebb), akkor az $L(C_i, C_i, sc, s^*)$ alapján (vagyis saját magával) rendezve a naphoz tartozó csúcsok halmazát az utolsó elemeket addig távolítjuk el a napi útból, míg az időkihasználása a keret 105%-ánál nem lesz kevesebb. A pénzkorlát túllépése esetén az(oka)t a ponto(ka)t távolítjuk el, ahol az egységnyi pénzköltségre eső marginális célfüggvény növekedés minimális.

8. *Feltöltés:* Amennyiben van olyan nap, ahol még van szabad időkapacitás, a C_r elemeit $L(C_r, C_i, sc, s^*)$ eljárással rendezzük az i-edik napra, és az első elemtől kezdve elkezdjük a napot feltölteni, míg az időkorlátot és a P napra szánt költségvetési korlátot át nem lépjük. Itt ismét a felvétel kritériumaként az $O(H, 1, 5)$ függvényt alkalmazzuk, mint korábban.

3.5 Az eredmények kiértékelése

A fenti algoritmust a 150 budapesti turisztikai látványosságot tartalmazó adathalmazon tesztelve az alábbi megállapításokat tehetjük:

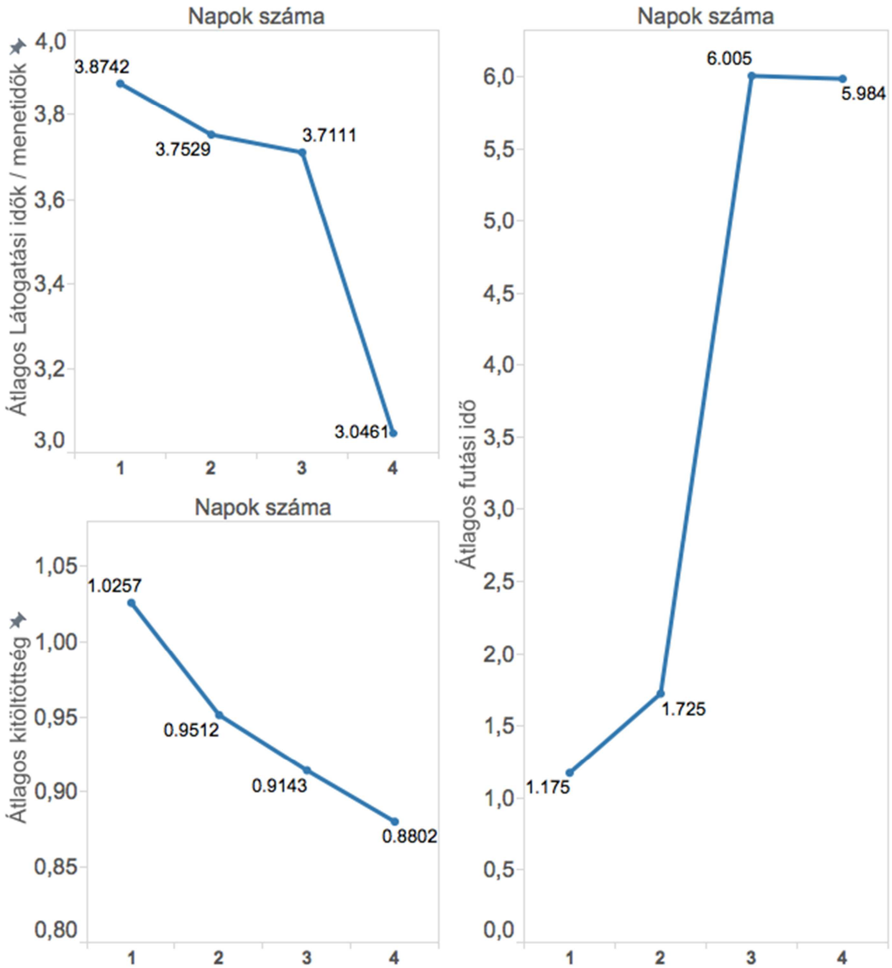
Pozitív a értékek (konkáv hasznossági görbe) jellemzően nagy kitérőket eredményeznek. Amennyiben ezek alacsony α és β értékekkel párosulnak, úgy az utak ,,szétesőek", tehát viszonylag kevés pontot, és nagy élköltségeket tartalmaznak. Viszonylag kis α érték (0,5 alatt) csak magas β ($>$ 1,5) és alacsony a ($< -0{,}5$) értékek mellett ad ,,jó" megoldást.

Általában elmondható, hogy $a < -0{,}5$; $\alpha > 0{,}5$ és $\beta > 1{,}5$ esetén kaptunk jó megoldásokat.

Az $\alpha = 0{,}75$; $a = -1$ és $\beta = 2$ választása mellett adja összességében 1-2-3 és 4 napos túrákra a legjobb megoldást (hosszabb túrákat nem vizsgáltunk), ahol a napok feltöltöttsége is igen jó, és a teljes túrákra kalkulált látogatási idő – menetidő hányados is kiemelkedően magas. Ezzel a paraméter kombinációval tervezett 4 napos túrát mutatunk be az 1. mellékletben, ahol összehasonlításként szerepeltetjük $\alpha = a = 0$ esetet, mely a szakirodalomban széles körben elterjedt profitösszeg-maximalizálást jelenti. Ennek tanulsága alapján a profitösszeg maximalizálás jóval alacsonyabb látogatási idő – menetidő arányt eredményez (átlagosan 1,43, szemben az általunk kiemelt eset átlagosan 3,8-es eredményével), a napok kitöltöttsége mindkét esetben átlagosan 95% körüli, és a futási idő érthető módon átlagosan nagyjából 1 másodperccel hosszabb az általunk választott paraméterek esetében.

Az algoritmus 3 napos útvonal megtervezését 100-szor futtatva átlagosan 3,73 másodperc alatt végezte el. Sajnos ezt nem tudjuk összevetni Vansteenwegen et al. [31] vagy Gavalas et al. [30] eredményeivel, hiszen merőben más feladatot oldottunk meg, sőt azok optimális megoldása számolható LP feladatként, míg célfüggvényünk miatt a miénk egy NLP feladat. Az összevetés kedvéért egy másik mobil applikációhoz tervezett heurisztikus eljárást említve Sylejmani és Dika 2011-es cikkében [32] 40 látványosságra tervezett 3 napos túrájuk számítási ideje átlagosan 81,7 másodperc volt *tabu search* algoritmussal.

A futási időről általában elmondhatjuk, hogy egy 4 napos túra megtervezése is átlagosan 6 másodpercen belül tartható. Mivel már az első lépésben csökkentjük a gráf méretét, kijelölve a releváns csúcsok részhalmazát, ezért a napok számától (P) és a napi időkeretektől ($T_{\max}$) függ a probléma mérete. Amennyiben egy olyan furcsa városban végeznénk a kísérletet, ahol minden csúcs meglátogatása költséggel jár, ez esetben a pénzügyi korlátunk is ugyanúgy lehet effektív, mint esetünkben az időkorlát. A túrák megtervezésének átlagos számítási idejét a *2. ábrán* foglaljuk össze. A teszteket az alábbi paraméterekkel rendelkező laptopon futtattuk: 3,8 GB RAM, Intel Core i3-3217U CPU, 1.80GHz 4 processzor. Minden paraméter kombinációra 20 alkalommal végeztük el a tesztet, és az eredményeket (outlier értékektől való tisztítás nélkül) átlagoltuk. A futási idők érdekessége a 2 és 3 napos útvonalak tervezése közötti nagy eltérés az átlagos futási időben, míg ez nem növekszik 4 nap megtervezése esetén. A *2. mellékletben* összefoglaltuk az a, α és β paraméterek függvényében is a futási időket a napok száma szerinti bontásban. Az *a* értékének változása látszólag nincs hatással a futási időre és a β paraméter is csak 3 és 4 napos túrák esetén növeli kis mértékben azt. Az α növekedése azonban 3 és 4 napos túrák esetén drasztikusan növeli a futási időt, mintegy 3-szorosára. Itt vélhetően az áll a háttérben, hogy ilyenkor egyre nehezebb olyan pontokat találnia az algoritmusnak, mely növelni tudná a célfüggvény értékét.



2. ábra. Az útvonaltervező algoritmus eredményei

A napok kitöltöttsége csökkenő tendenciát mutat a napok számának növelésével (2. ábra). Az összes általunk vizsgált esetre átlagosan 94,3%-os értéket mértünk. A paraméterek közül csak az α paraméter növekedése van negatív hatással a napok kitöltöttségére (2. melléklet), hiszen itt a célfüggvény hasznosság tényezője egyre kevésbé számít, így nehezebb olyan csúcsokat találni, melynek hasznossága ellensúlyozni tudja a látogatási idő – menetidő hányadosban bekövetkező romlást.

A látogatási idő – menetidő hányados (mely a P napra együtt értendő) a napok számának növekedésével csökkenő tendenciát mutat, hiszen egyre nagyobb távolságra találjuk a következő csúcsokat, amelyeket még felvehetünk az utakba. Az a és β paraméter változása csekély hatással van a hányadosra, az α paraméter növelésével azonban drasztikusan növelhető a hányados értéke.

4 Következtetések és lehetséges kutatási irányok kijelölése

Az előző alfejezetben bemutatásra került a TOP megoldására adott heurisztikus algoritmus, mely bár az alkalmazott módszerekben is sok ponton eltér a szakirodalomban található megoldásoktól, mégis legnagyobb vívmánya az a hasznossági- és célfüggvény, mely gyakorlatias megközelítésben a felhasználó preferenciáit tartja szem előtt a ,,pontgyűjtéssel" szemben. Az eredmények értékelése igen nehéz, hiszen célunk olyan útvonaltervező algoritmus megalkotása volt, mely a felhasználók személyre szabott igényei (helyszínek értékelése) alapján képes másodpercek alatt, számukra megfelelő útvonalat tervezni. Bár esetünkben is értelmezhető az optimális megoldástól való eltérés mértéke, ennek kiszámítása mégis nehezen vethető össze más kutatások eredményeivel, hiszen eltérő célfüggvénnyel dolgoztunk. Az útvonaltervezés értékelésének egy lehetséges módja, ha az algoritmusunk által készített útvonalakat és egy a szakirodalomban szereplő másik eljárás eredményeit értékeltetjük tesztalanyokkal, hiszen az ő értékeléseikre tekintünk a útvonalterv jóságának végső fokmérőjeként. Az algoritmus által generált útvonalak jóságának mérésén túl néhány további tervünk is van a kutatás folytatását illetően.

A kezdeti útvonalak klaszterezésen alapuló kialakítása helyett jó megoldás lehet P darab egymástól kellő távolságra található csúcs kijelölése: ezek egyrészt a kötelező pontok lehetnek, másrészt egyéb, magas értékelésű csúcsok. Az egyes napokra ezekből kiindulva építhetünk fákat, melyeket úttá rendezhetünk át Lin-Kernighan-algoritmussal. A klaszterező eljárás ugyanis nem mindig vezet ugyanarra az eredményre, ezért is van szükségünk az algoritmus kezdeti lépésében 10 ilyen iterációra. Az iterációk számát növelve ugyan biztosíthatjuk a jó klaszterezést, ám jelentősen növeljük vele a futási időt (20 klaszterezéssel már átlagosan további 2,5 másodperccel).

A jelenlegi kutatási szakaszban egyetlen α, β, a kombinációt emeltünk ki, mint optimálisnak tűnő megoldást. Ezzel magasan tudjuk tartani a napok kitöltöttségét, jellemzően a legmagasabb értékelésű csúcsokon rendre áthalad az útvonal, és alacsony élköltségeivel a célfüggvény értékét magasan tartja. Amennyiben a napok kitöltöttségét és az egységnyi megtett útra eső látogatási időt (vagy hasznosságot) elfogadjuk az útvonaltervezés jóságának fokmérőjeként, akkor lehetőség nyílna rögzített a érték mellett az optimális α és β kombinációk meghatározására, sőt akár megadható lenne β az α függvényében, és ezzel csökkenthetjük a paraméterek számát.

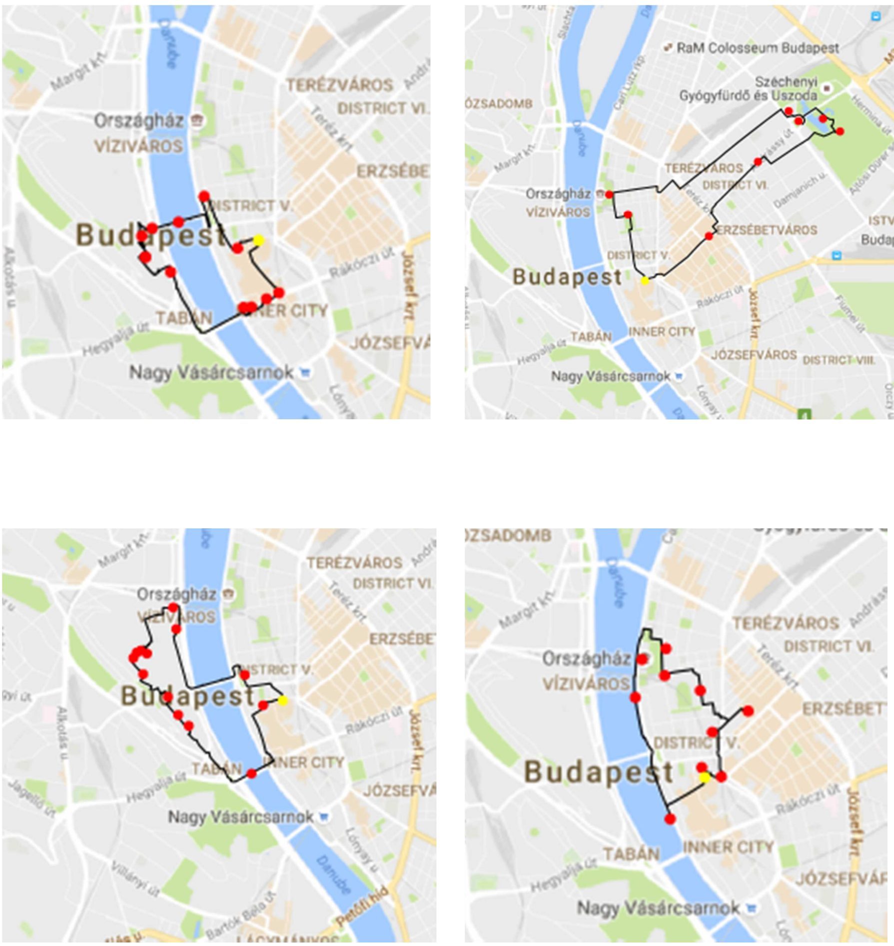
Az előbbi gondolatmeneten tovább haladva, legalább két ilyen függvény definiálása is szükséges lenne, hiszen β eredendően „lustasági" paraméter, így annak különböző értékei mellett más-más felhasználói igényeket tudunk kiszolgálni (továbbra is szem előtt tartva az útvonalak optimalitására tett törekvéseket).

Fontos megemlíteni, hogy a célfüggvény konstrukciójából adódóan az utolsó, feltöltő lépésben könnyen lehet, hogy már nem tudunk olyan pontot illeszteni bármelyik nap útvonalába, mely ugyan még a korlátok szerint elférne, de rontana a célfüggvény értékén. Ez akkor következhet be, ha a marginális hasznosságnövelésével nem tudja kompenzálni az addigi átlagos látogatási idő – menetidő arányban okozott romlást. Mivel célfüggvényünk maximalizálása mellett az időkorlát kitöltését is fontos szempontnak tartottuk, így egy valós gyakorlati megoldás esetén akár a célfüggvény rovására is feltölthetjük a napokat további pontokkal. Mi most ettől eltekintettünk.

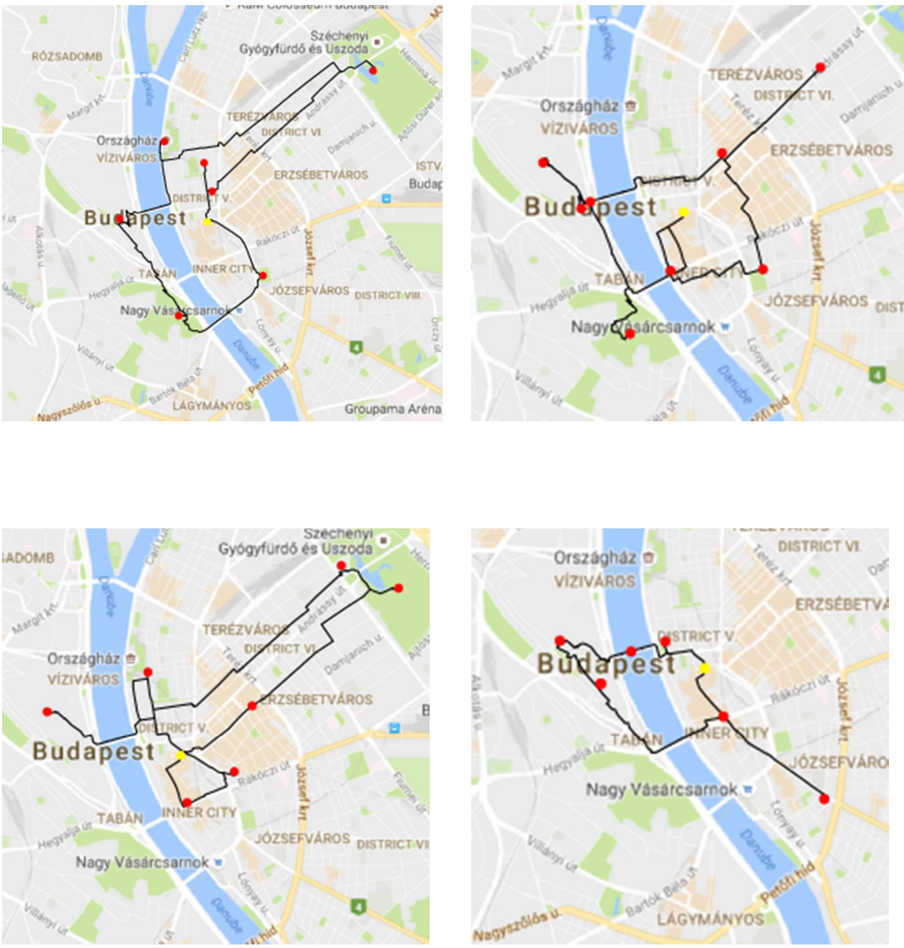
A jelenlegi algoritmus egy kézenfekvő és a gyakorlatban szükséges kiterjesztése lenne az időablakok kezelése, vagyis alkalmassá tenni az eljárást a TOPTW megoldására. A jövőbeli kutatás egyik fő mérföldkövének tekinthető ennek megvalósítása.

További gyakorlati fontossága lenne az algoritmus kiegészítésének, hogy adott árkategóriában választani tudjunk a rendelkezésre álló szállodák közül, és az algoritmus által köréjük szervezett P napos túrák közül a számára legkedvezőbbet választhatja ki, vagy megteheti ezt helyette az algoritmus is.

1. melléklet. Útvonaltervek

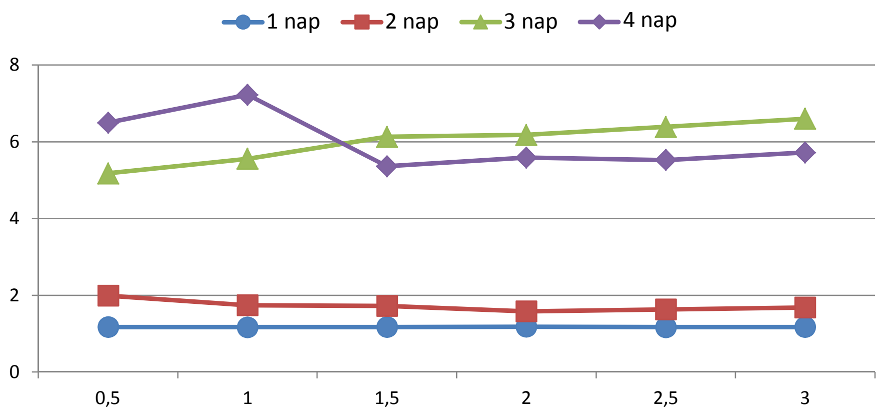


3. ábra. Az $\alpha = 0{,}75$; $a = -1$ és $\beta = 2$ eset útvonalterve

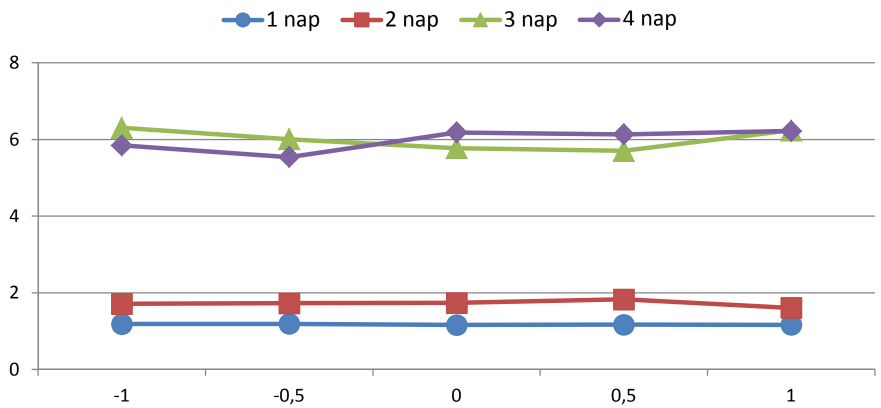


4. ábra. Az $\alpha = 0$ és $a = 0$ eset útvonalterve

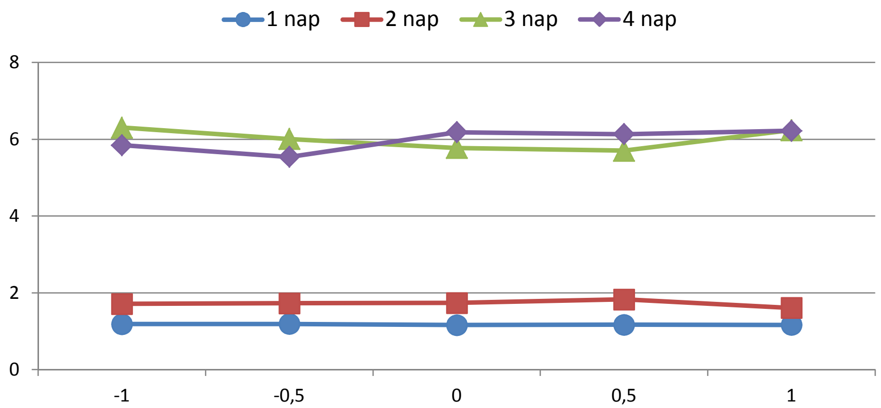
2. melléklet. Az útvonaltervező algoritmus eredményei



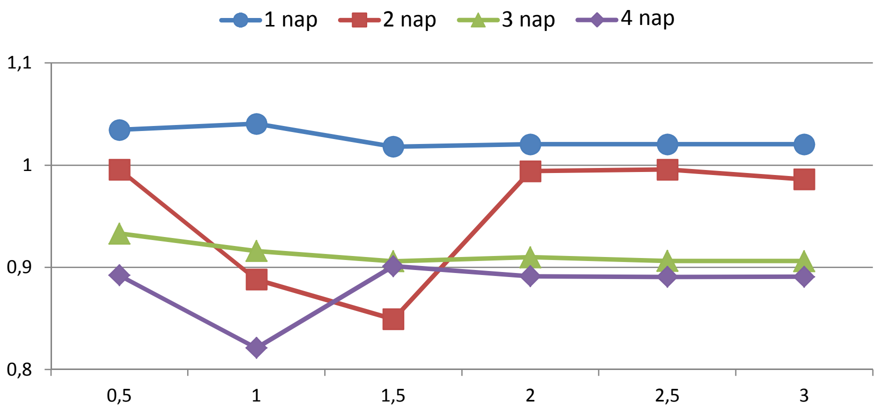
5. ábra. Átlagos futási idő (sec) a béta paraméter függvényében



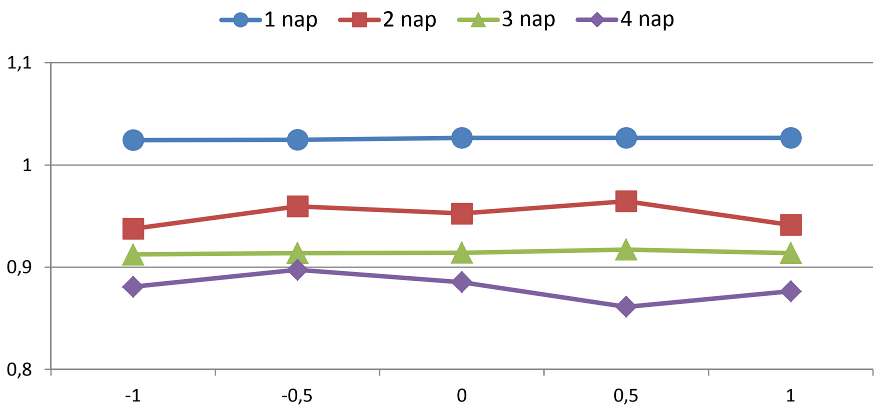
6. ábra. Átlagos futási idő (sec) az *a* paraméter függvényében



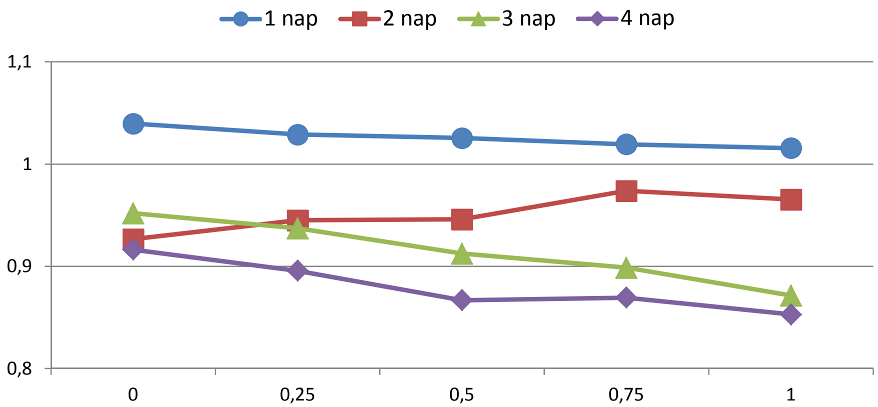
7. ábra. Átlagos futási idő (sec) az alfa paraméter függvényében



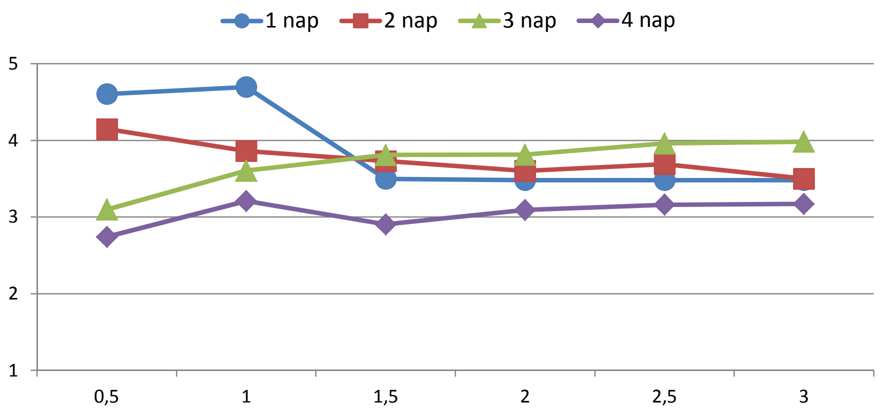
8. ábra. Átlagos kitöltöttség (%) a béta paraméter függvényében



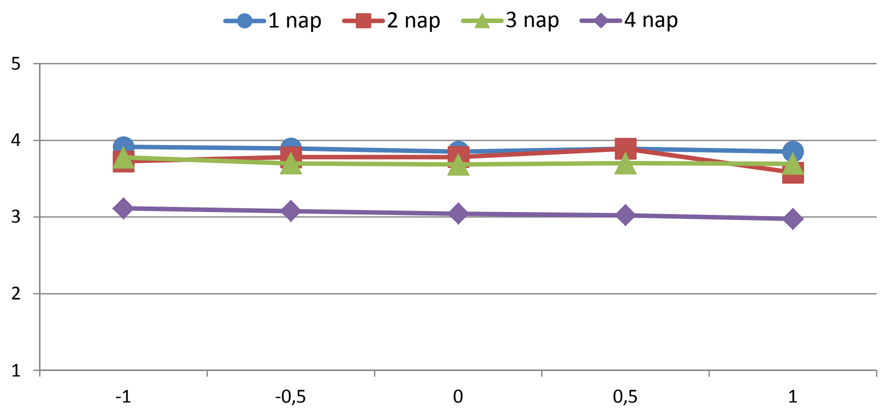
9. ábra. Átlagos kitöltöttség (%) az *a* paraméter függvényében



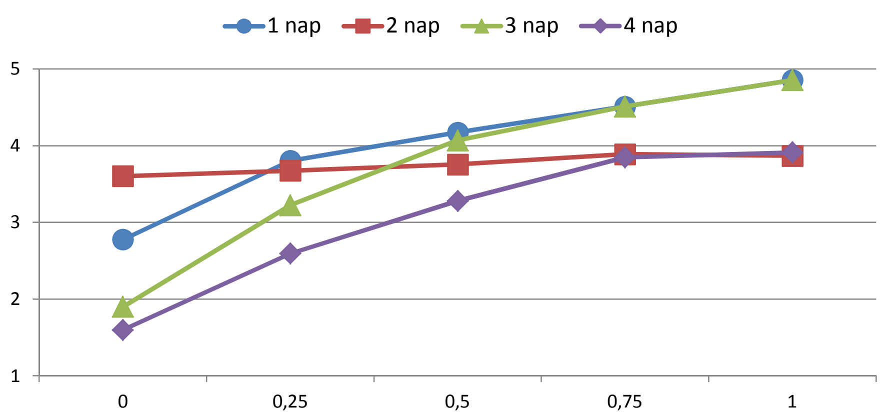
10. ábra. Átlagos kitöltöttség (%) az alfa paraméter függvényében



11. ábra. Átlagos látogatási idők/menetidők a béta paraméter függvényében



12. ábra. Átlagos látogatási idők/menetidők az a paraméter függvényében



13. ábra. Átlagos látogatási idők/menetidők az alfa paraméter függvényében

3. melléklet. Team Orienteering Problem formalizálása

Legyen adott egy $G(V,E)$ gráf, amelynek minden v_i csúcsához egy i nemnegatív profitérték van rendelve, melyet az ügynök megkap, ha meglátogatja a v_i csúcsot, valamint vi és vj csúcsok közötti e_{ij} élhez t_{ij} élköltséget rendelünk, ami a távolság megtételéhez szükséges idő. A feladat $T_{\max}$ idő alatt P darab ügynök számára maximális pontot összegyűjteni úgy, hogy minden csúcs legfeljebb egyszer látogatható meg. A kezdő- és a végpont fix, és gyakran meg is egyeznek egymással. Jelölje továbbá h_{ip}, hogy a p-edik útnál az i-edik csúcs hányadik lépésben kerül sorra az úton, valamint τ_{ijp} értéke legyen 1, ha a p-edik útnál az i-edik csúcs után a j-edik következik az úton, és 0 különben. Legyen θ_{ip} értéke 1, ha a p-edik úton az i-edik csúcsot meglátogatják, és 0 különben. Ekkor a TOP megfogalmazható a következőképpen:

$$\max \sum_{p=1}^{P} \sum_{i=2}^{N-1} \pi_i \theta_{ip} \tag{M1}$$

$$\sum_{p=1}^{P} \sum_{j=2}^{N} \tau_{1jp} = \sum_{p=1}^{P} \sum_{i=1}^{N-1} \tau_{iNp} = P \tag{M2}$$

$$\sum_{p=1}^{P} \theta_{kp} \leq 1\,, \quad k = 2, \ldots, N-1 \tag{M3}$$

$$\sum_{j=2}^{N} \tau_{kjp} = \sum_{i=1}^{N-1} \tau_{ikp} = \theta_{kp}\,, \qquad k = 2, \ldots, N-1, \quad p = 1, \ldots, P \tag{M4}$$

$$\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=2}^{N} \tau_{ijp} t_{ij} \leq T_{\max}\,, \quad p = 1, \ldots, P \tag{M5}$$

$$h_{ip} - h_{jp} + 1 \leq (N-1)(1 - \tau_{ijp})\,, \quad i,j = 2, \ldots, N, \;\; p = 1, \ldots, P \tag{M6}$$

$$2 \leq h_{ip} \leq N\,, \quad i = 2, \ldots, N, \quad p = 1, \ldots, P \tag{M7}$$

$$\tau_{ijp}, \theta_{ip} \in \{0,1\}\,, \quad i,j = 1, \ldots, N, \quad p = 1, \ldots, P \tag{M8}$$

Az egyes kifejezések jelentése a következő: (M1) a célfüggvény: a csúcsoknál begyűjtött profitok összege legyen maximális az összes utat figyelembe véve; (M2) minden út az 1-es csúcsnál kezdődik, és az N-ediknél ér véget; (M3) minden csúcsot csak legfeljebb egyszer látogatunk meg; (M4) minden út egyenként összefüggő; (M5) betartjuk az időkorlátot; (M6) és (M7) együtt garantálja, hogy ne legyenek körök az útban, Miller–Tucker–Zemlin javaslata alapján [18]; (M8) a τ_{ijp} és θ_{ip} értékkészlete 0 vagy 1.

Irodalom

1. K. Menger (1928): Ein Theorem über die Bogenlange, Anzeiger – Akademie der Wissenschaften in Wien – Mathematisch-naturwissenschaftliche, Klasse 65, pp. 264–266.
2. A. Schrijver (2005): On the history of combinatorial optimization (till 1960), *Handbook of Discrete Optimization* (K. Aardal, G. L. Nemhauser, R. Weismantel, eds.), Elsevier, Amsterdam, pp. 1–68. doi: 10.1016/S0927-0507(05) 12001-5
3. G. Birkhoff (1946): Tres observaciones sobre el algebra lineal, Revista Facultad de Ciencias Exactas, Puras y Aplicadas Universidad Nacional de Tucuman, Serie A (Matematicas y Fisica Teorica), Vol. 5, pp. 147–151.
4. G. Dantzig, R. Fulkerson, S. Johnson (1954): Solution of a Large Scale Traveling Salesman Problem, *Journal of the Operations Research Society of America*, Vol. 2, pp. 393–410. doi: 10.1287/opre.2.4.393
5. I. Chao – B. Golden – E. Wasil (1996): Theory and methodology – a fast and effective heuristic for the orienteering problem, *European Journal of Operational Research*, Vol. 88, pp. 475–489. doi: 10.1016/0377-2217(95)00035-6
6. T. Tsiligirides (1984): Heuristic methods applied to orienteering, *Journal of the Operational Research Society*, Vol. 35, No. 9, pp. 797–809. doi:10.1057/jors. 1984.162
7. S. Kataoka – S. Morito (1988): An algorithm for the single constraint maximum collection problem, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol. 31, No. 4, pp. 515–530.
8. X. Wang – B. Golden – E. Wasil (2008): Using a genetic algorithm to solve the generalized orienteering problem, In: B. Golden – S. Raghavan – E. Wasil (Eds.): *The Vehicle Routing Problem: Latest Advances and New Challenges*, pp. 263-274. doi:10.1007/978-0-387-77778-8_12
9. W. Souffriau – P. Vansteenwegen – J. Vertommen – G. Vanden Berghe - D. Van Oudheusden (2008): A personalised tourist trip design algorithm for mobile tourist guides, *Applied Artificial Intelligence*, Vol. 22, No. 10, pp. 964–985. doi: 10.1080/08839510802379626
10. D. Feillet – P. Dejax – M. Gandreau (2004): Traveling Salesman Problems with Profits, *Journal of Transportation Science*, Vol. 39, No. 2, pp. 188–205. doi: 10.1287/trsc.1030.0079
11. B. Golden – L. Levy – R. Vohra (1984): The Team Orienteering Problem, *Naval Research Logistics Quarterly*, Vol. 34, pp. 307–318. doi: 10.1002/1520-6750(198706)34:3<307::AIDNAV3220340302>3.0.CO;2-D
12. S. E. Butt – T. M. Cavalier (1994): A heuristic for the multiple tour maximum collection problem, *Computers and Operations Research*, Vol. 21, pp. 101–111.
13. R. Ramesh – Y. Yoon – M. Karwan (1992): An optimal algorithm for the orienteering tour problem, *ORSA Journal on Computing*, Vol. 4, pp. 155–165. doi:10.1016/0305-0548(91)90086-7
14. M. Fischetti – J. Salazar – P. Toth (1998): Solving the orienteering problem through branch and cut, *INFORMS Journal on Computing*, Vol. 10, pp. 133–148. doi: 10.1007/978-3-319-18161-5_17
15. R. Ramesh – K. Brown (1991): An efficient four-phase heuristic for the generalized orienteering problem, *Computers and Operations Research*, Vol. 18, pp. 151–165. doi: 10.1016/0305-0548(91)90086-7

16. M. Gendreau – G. Laporte – F. Semet (1998): A tabu search heuristic for the undirected selective travelling salesman problem, *European Journal of Operational Research*, Vol. 106, pp. 539–545. doi:10.1016/S0377-2217(97)00289-0
17. P. Vansteenwegen – W. Souffriau – D. Van Oudheusden (2011): The orienteering problem: a survey, *European Journal of Operational Research*, Vol. 209, No. 1, pp. 1–10. doi:10.1016/j.ejor.2010.03.045
18. C. Miller – A. Tucker – R. Zemlin (1960): Integer programming formulations and travelling salesman problems, *Journal of the ACM*, Vol. 7, pp. 326–329. doi:10.1145/321043.321046
19. D. Gavalas – C. Konstantopoulos – K. Mastakas – G. Pantziou – N. Vathis (2015): Heuristics for the Time Dependent Team Orienteering Problem: Application to Tourist Route Planning, *Computers and Operations Research*, Vol. 62, pp. 36–50. doi:10.1016/j.cor.2015.03.016
20. S. Butt – D. Ryan (1999): An optimal solution procedure for the multiple tour maximum collection problem using column generation, *Computers and Operations Research*, Vol. 26, pp. 427–441. doi: 10.1016/S0305-0548(98) 00071-9
21. S. Boussier – D. Feillet – M. Gendreau (2007): An exact algorithm for the team orienteering problem, *4OR*, Vol. 5, pp. 211–230. doi:10.1007/s10288-006-0009-1
22. I. Chao – B. Golden – E. Wasil (1996): Theory and methodology – the team orienteering problem, *European Journal of Operational Research*, Vol. 88, pp. 464–474. doi:10.1016/0377-2217(94)00289-4
23. H. Tang – E. Miller-Hooks (2005): A tabu search heuristic for the team orienteering problem, *Computer and Operations Research*, Vol. 32, pp. 1379–1407. doi:10.1016/j.cor.2003.11.008
24. C. Archetti – A. Hertz – M. Speranza (2007): Metaheuristics for the team orienteering problem, *Journal of Heuristics*, Vol. 13, pp. 49–76. doi: 10.1007/s10732-006-9004-0
25. L. Ke – C. Archetti – Z. Feng (2008): Ants can solve the team orienteering problem, *Computers and Industrial Engineering*, Vol. 54, pp. 648–665. doi:10.1016/j.cie.2007.10.001
26. P. Vansteenwegen – W. Souffriau – G. Vanden Berghe – D. Van Oudheusden (2009): A guided local search metaheuristic for the team orienteering problem, *European Journal of Operational Research*, Vol. 196, No. 1, pp. 118–127. doi:10.1016/j.ejor.2008.02.037
27. P. Vansteenwegen – W. Souffriau – G. Vanden Berghe – D. Van Oudheusden (2009): Metaheuristics for tourist trip planning, In: M. Geiger – W. Habenicht – M. Sevaux – K. Sörensen (eds.): *Metaheuristics in the Service Industry*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Vol. 624, pp. 15–31. doi:10.1016/j.cor.2015.03.016
28. J. A. Hartigan – M. A. Wong (1979): Algorithm AS 136: A K-Means Clustering Algorithm, *Journal of the Royal Statistical Society*, Series C, Vol. 28, No. 1, pp. 100–108. doi: 10.2307/2346830
29. G. Gutin – A. Yeo – A. Zverovich (2002): Traveling salesman should not be greedy: domination analysis of greedy-type heuristics for the TSP, *Discrete Applied Mathematics*, Vol. 117, pp. 81–86. doi: 10.1016/S0166-218X(01) 00195-0
30. D. Gavalas – M. Kenteris (2011): A pervasive web-based recommendation system for mobile tourist guides, *Personal and Ubiquitous Computing*, Vol. 15, No. 7, pp. 759–770. doi:10.1007/s00779-011-0389-x

31. P. Vansteenwegen – W. Souffriau – G. Vanden Berghe – D.D. Van Oudheusden (2011): The city trip planner: an expert system for tourists, *Expert Systems with Applications*, Vol. 38. No. 6, pp. 6540–6546. doi:10.1016/j.eswa.2010.11.085

32. K. Sylejmani – A. Dika (2011): Solving touristic trip planning problem by using taboo search approach, *International Journal of Computer Science Issues*, Vol. 8, Issue 5, No. 3, pp. 139–149. doi:10.1109/HIS.2012.6421351

33. S. Lin (1965): Computer solutions of the traveling salesman problem, *Bell Systems Technology Journal*, Vol. 44, pp. 2245–2269. doi:10.1002/j.1538-7305.1965.tb04146.x

34. D. Gavalas – C. Konstantopoulos – K. Mastakas – G. Pantziou – N. Vathis (2015): Heuristics for the Time Dependent Team Orienteering Problem: Application to Tourist Route Planning, *Computers and Operations Research*, Vol. 62, pp. 36–50. doi:10.1016/j.cor.2015.03.016

A HEURISTIC ROUTING ALGORITHM FOR PLANNING MULTI-DAY TOURS

Routing algorithms are traditionally considered to apply the sum of profits gathered at visited locations as an objective function since the Traveling Salesman Problem. This heritage disregards many practical considerations, hence the result of these models meet with user's needs rarely. Thus a novel objective function will be presented in this paper as an extension of the one inherited from the TSP, that is more aligned with user preferences and aims to maximise the tourist's satisfaction. We also propose a heuristic algorithm to solve the Team Orienteering Problem with relatively low computation time in case of high number of vertices on the graph and multiple tour days. Based on the observations the algorithm is suitable to be implemented in a GIS application considering that even a 3-day tour is designed less than 4 seconds.

Keywords: Team Orienteering Problem, Route Planning, Heuristic Algorithm, Tourism. *JEL code:* C60, C61, Z32

A VALUE AT RISK ÉS AZ EXPECTED SHORTFALL ÖSSZEHASONLÍTÁSA TÖRTÉNETI SZIMULÁCIÓ SEGÍTSÉGÉVEL[1]

MISKOLCZI PANNA
Debreceni Egyetem Gazdaságtudományi Kar

Jelen tanulmányban a pénzügyi kockázat mérésével, valamint a különböző kockázati mértékek összehasonlításával foglalkozom. Öt kockázati mértéket ismertetek, ezek a szórás, a variancia, a szemivariancia, a kockáztatott érték (VaR) és az expected shortfall (ES). Belátható, hogy ezen kockázati mértékek közül csak az ES elégíti ki az un. koherens kockázati mértékekre vonatkozó tulajdonságokat, így az ES az egyetlen mérték, amely alkalmas a kockázat mérésre. Ennek ellenére a VaR a ma legtöbbet használt kockázati mérték, így gyakorlati szempontból ezt a két mértéket hasonlítom össze. Az összehasonlításhoz a történeti utótesztelés (backtesting) módszerét választottam, melyet részletesen ismertetek mind a VaR, mind pedig az ES esetében. Az elemzést több alfa szinten, hét részvény ár adatait felhasználva végeztem el. Az elméleti és a gyakorlati vizsgálatok alapján is arra a megállapításra jutottam, hogy az ES pontosabb képet ad a kockázatról, mint a VaR.

1 Bevezetés

A mai modern pénzügyi világ egyik fontos kérdése, hogy hogyan tudjuk mérni, illetve összehasonlítani különböző pénzügyi eszközök, például részvények, portfóliók kockázatát.

A dolgozatomban mind elméleti, mind pedig gyakorlati szinten, arra keresem a választ, hogy már ismert kockázati mértékek közül, melyikkel tudjuk megbecsülni pontosabban a pénzügyi kockázatot. Öt, sokat használt kockázati mértéket vetek górcső alá, ezek: a variancia, a szórás, a szemivariancia, a kockáztatott érték (Value at Risk) és az expected shortfall (ES). A gyakorlati számításokhoz a történeti utótesztelés módszerét használom.

Az első fejezetben tárgyalom a kockázat, valamint a kockázati mérték, a szakirodalomban leginkább elfogadott matematikai megfogalmazását. Összefoglalom továbbá a fent említett kockázati mértékek definícióit és legfontosabb tulajdonságait. Belátható, hogy elméleti szinten ezen kockázati mértékek közül csak az expected shortfall segítségével tudjuk megfelelően mérni a kockázatot, hiszen ez az egyetlen koherens kockázati mérték.

Annak ellenére viszont, hogy a kockáztatott értéket nagyon sok kritika érte, a mai napig is a legtöbbet alkalmazott kockázati mértékről van szó.

[1]Beérkezett: 2017. április 24. Miskolczi Panna PhD hallgató, Debreceni Egyetem Gazdaságtudományi Kar. E-mail: `miskolczipanna@gmail.com`.

Ezért gyakorlati szempontból a VaR-et és az ES-t hasonlítom össze az ún. történeti utótesztelés módszerével. A módszerről a harmadik fejezetben írok részletesebben. Az elemzéshez a Budapesti Értéktőzsde honlapjáról letöltött részvényárakat, illetve az azokból képzett logaritmikus hozamokat használom. Az adatok alapvető statisztikái, valamint a normalitásvizsgálat megtalálhatóak a második fejezetben.

A negyedik fejezet tartalmazza a történeti szimuláció futtatásával kapott eredményeket és következtetéseket. A gyakorlati számítások is igazolni látszanak azt az elméleti tényt, hogy az ES segítségével pontosabb képet kaphatunk a kockázatról.

2 Kockázat és kockázati mértékek

A közelmúlt pénzügyi válságai és a pénzügyi piac egyre komplexebb volta miatt egyre nagyobb szükség van a kockázat minél pontosabb mérésére és számszerűsítésére. Tulajdonképpen mi is a kockázat? Egy lehetséges megfogalmazás szerint a kockázat annak a lehetőségnek a mérlegelése, hogy valami értékkel bírót elvesztünk vagy megnyerünk („Risk is the potential of losing something of value, weighted against the potential to gain something of value.” (Hubbard, 2014)). Ezt, a kockázatnak egy nagyon általános megfogalmazását természetesen sokféleképpen értelmezhetjük. Általában, ha kockázatról beszélünk, akkor a legtöbben negatív eseményekre, veszteségre gondolnak. Ezzel szemben a kockázatot úgy is lehet értelmezni, hogy annak a valószínűsége, hogy a befektetés hozama különbözik az elvárt hozamtól. Tehát a kockázat magában foglalja a downside kockázat mellett (vagyis, amikor a tényleges hozam kisebb, mint az elvárt hozam) az upside kockázatot is (amikor a tényleges hozam nagyobb, mint az elvárt) (Damodaran, 2003).

Annak ellenére, hogy a kockázat megfogalmazása nem teljesen egységes és pontos, matematikai szempontból az a cél, hogy minél egyszerűbb mutatókkal, egyetlen mérőszámmal jellemezzük, fejezzük ki azt. A pénzügyi eszközökhöz és portfóliókhoz rendelt, a kockázatot jellemző mutatószámokat kockázati mértékeknek nevezzük (Gáll, 2010). Ahogy azt a következő definíció is mutatja, matematikai szempontból a kockázat mérése tulajdonképpen kapcsolatot létesít a véletlen változók és a valós számok között (Szegö, 2002).

2.1 Definíció (Kockázati mérték). *Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ egy valószínűségi mező, és legyen $\mathcal{X}$ valószínűségi változóknak (portfóliók, pénzügyi eszközök profitjának) egy halmaza Ω-n. Kockázati mértéknek nevezünk minden $\mathcal{X}$ halmazon értelmezett valós értékeket felvevő funkcionált: $\rho : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$.*

Látható, hogy a 2.1 definíció egy nagyon tág fogalom. Ahhoz, hogy a kockázat „értelmes” definíciójához jussunk, bizonyos korlátozásokat, tulajdonságokat meg kell fogalmazni a kockázati mértékekkel kapcsolatban.

Az irodalomban (Artzner et al., 1999) leggyakrabban előforduló, legtöbbet használt tulajdonságok a monotonitás, szubadditivitás, pozitív homogenitás és az eltolás invariancia.

Monotonitás

Ha egy befektetés hozama sosem kisebb mint egy másiké, akkor ez a befektetés ne legyen kockázatosabb mint a másik, azaz

$$X \leq Y \Rightarrow \rho(X) \geq \rho(Y), \qquad \forall X, Y \in \mathcal{X} \; . \tag{1}$$

Szubadditivitás

A szubadditivitást más néven diverzifikációs hatásnak is nevezik. Ez azt jelenti, hogy két befektetés eredő kockázata nem lehet nagyobb, mint az egyedi kockázataik összege, azaz

$$\rho(X+Y) \leq \rho(X) + \rho(Y), \qquad \forall X, Y, X+Y \in \mathcal{X} \; . \tag{2}$$

Pozitív homogenitás

Ha megtöbbszörözünk egy portfóliót, de megtartjuk annak összetételét, akkor elvárjuk, hogy a kockázat a nagysággal arányosan változzon, azaz

$$\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X), \qquad \forall X, \lambda X \in \mathcal{X}, \; \forall \lambda \geq 0 \; . \tag{3}$$

Eltolás invariancia

Ha pozíciónkhoz adott hozamú kockázatmentes eszközt adunk, akkor a kockázat ennek a pénzáramnak a nagyságával csökkenjen, azaz

$$\rho(X+a) = \rho(X) - a \qquad \forall X, X+a \in \mathcal{X}, \; \forall a \in \mathbb{R} \; . \tag{4}$$

2.2 Definíció (Koherens kockázati mérték). *Egy kockázati mértéket koherens kockázati mértéknek nevezünk, ha teljesíti a fent említett mind a négy tulajdonságot, azaz monoton, szubadditív, pozitív homogén és eltolás invariáns.*

Megjegyzendő, hogy a pozitív homogén tulajdonság estében, ha λ helyére nullát helyettesítünk, akkor $\rho(0) = 0$, azaz, ha nem birtoklunk semmilyen pénzügyi eszközt, portfóliót, akkor a kockázatunk nulla. Ezt a tulajdonságot és az eltolás invarianciát felhasználva látható, hogy ha $a \in \mathbb{R}$, akkor $\rho(a) = \rho(0+a) = \rho(0) - a = -a$. Ez azt jelenti, hogy a biztos pénzáramlás kockázati mértéke (-1)-szerese önmagának, vagyis a biztos veszteség kockázata pozitív és a biztos nyereség kockázata negatív (Gáll, 2010).

Az optimalizáció szempontjából fontos továbbá kiemelni a konvexitási tulajdonságot. Egy $\rho : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ kockázati mértéket konvexnek nevezünk, ha minden $\lambda \in [0,1]$ és $X,\; Y,\; \lambda X + (1-\lambda)Y \in \mathcal{X}$ esetén:

$$\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda \rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y). \tag{5}$$

A pozitív homogenitásból és a szubadditivitásból következik a konvexitás:

$$\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \rho(\lambda X) + \rho((1-\lambda)Y) = \lambda \rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y). \tag{6}$$

Tehát ahhoz, hogy a kockázatot minél pontosabban és ésszerűbben mérni tudjuk, olyan kockázati mértékre van szükség, amely kielégíti a négy alaptulajdonságot, azaz koherens kockázati mérték.

A továbbiakban az irodalomban és a gyakorlatban legtöbbet használt kockázati mértékeket mutatom be, valamint megvizsgálom, hogy a négy tulajdonság közül melyeket teljesítik.

2.1 Variancia és szórás

A variancia, illetve a szórás kockázati mértékként való bevezetése Markowitz (Markowitz, 1952) nevéhez fűződik és így az egyik legrégebben használt kockázati mérték.

2.3 Definíció (Variancia). *Az X valószínűségi változó varianciáját az átlagtól való átlagos eltéréssel mérhetjük:*

$$\sigma^2(X) = \mathbf{E}(X - \mathbf{E}(X))^2 \ ,$$

ahol $\mathbf{E}(X)$ jelöli az X valószínűségi változó várható értékét.

2.4 Definíció (Szórás). *Az X valószínűségi változó szórása a variancia négyzetgyöke:*

$$\sigma(X) = \sqrt{\sigma^2(X)} \ .$$

A gyakorlatban a hozamnak mint valószínűségi változónak a mintarealizációja áll rendelkezésre, azaz egy folytonos valószínűségi változó adott, konkrét értékei. Jelölje ezt a mintarealizációt r_i, $i = 1, \ldots, n$ és legyen $r = (r_1, \ldots, r_n)$. Ebben az esetben a varianciát a következő módon közelíthetjük:

$$\widehat{\sigma^2}(r) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(r_i - \overline{r})^2}{n-1}, \tag{7}$$

ahol tehát r_i az i-edik ($i = 1, \ldots, n$) hozam-érték, míg $\overline{r}$ ezen hozamoknak az átlaga.

Természetesen a szórás a variancia négyzetgyökével közelíthető:

$$\widehat{\sigma}(r) = \sqrt{\widehat{\sigma^2}(r)} \tag{8}$$

Mivel a kockázat mérésére koherens kockázati mértékre van szükség, érdemes megvizsgálni, hogy a variancia illetve a szórás kielégíti-e a koherencia négy tulajdonságát. Elmondható, hogy annak ellenére, hogy a variancia az egyik legrégebben és legszélesebb körben használt kockázati mérték, a négy tulajdonság egyikét sem elégíti ki, azaz nem monoton, nem szubadditív, nem pozitív homogén és nem eltolás invariáns (Joshi, 2013).

További probléma, hogy a variancia nem tesz különbséget a veszteségek és nyereségek között (Bugár, 2006), hiszen $\sigma^2(-X) = (-1)^2\sigma^2(X) = \sigma^2(X)$. Tehát a variancia csak abban az esetben használható a kockázat mérésére, ha a valószínűségi változó (profit, hozam, stb.) eloszlása elliptikus (Eftekhari, 2000).

A szórás a varianciától eltérően kielégíti ugyan a szubadditivitási és a pozitív homogenitási tulajdonságokat, de a varianciához hasonlóan nem monoton, nem eltolás invariáns, és továbbra sem tesz különbséget a nyereségek és veszteségek között (Joshi, 2013).

Az előzőeket figyelembe véve, sem a variancia, sem pedig a szórás nem alkalmas a kockázat mérésére, hiszen a variancia például (egyebek mellett) megsérti a szubadditivitási tulajdonságot, azaz az egyik minimum követelményt, hogy a diverzifikáció nem növelheti a portfólió kockázatát. Továbbá a variancia és a szórás is szimmetrikus, azaz ugyanúgy „bünteti" a magas hozamot, mint a nagy veszteségeket.

2.2 Szemivariancia

A variancia és a szórás szimmetrikus tulajdonságát tudjuk kiküszöbölni a szemivarianciával. Ez a kockázati mérték az ún. downside kockázat mérésére szolgál, azaz a várható értéknél (várható hozamnál) kisebb értékeket veszi figyelembe (Alexander, 2009).

2.5 Definíció (Szemivariancia). *Az X valószínűségi változó szemivarianciáját a következőképpen határozhatjuk meg:*

$$\mathrm{SV}(X) = \mathbf{E}((\min\{X - \mathbf{E}(X), 0\})^2).$$

Hasonlóan a varianciához, a gyakorlatban természetesen a hozamnak, mint valószínűségi változónak a mintarealizációja áll rendelkezésre, azaz egy folytonos valószínűségi változó adott, konkrét értékei. Ebben az esetben a szemivariancia a következő módon közelíthető:

$$\widehat{\mathrm{SV}}(r) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\min\{r_i - \overline{r}, 0\})^2}{n}, \tag{9}$$

ahol $r = (r_1, \ldots, r_n)$, r_i az i-edik ($i = 1, \ldots, n$) hozam értéke, míg $\overline{r}$ ezeknek az átlaga.

Bebizonyítható, hogy a szemivariancia ugyan eltolás invariáns, de se nem monoton, se nem pozitív homogén és a szubadditivitási tulajdonságot sem teljesíti, és ezzel a Markowitz elmélet minimum követelményének a diverzifikációs elvnek sem tesz eleget (Joshi, 2013). Igaz ugyan, hogy a szemivariancia nem egy szimmetrikus kockázati mérték, azaz ebből a szempontból pontosabb képet ad a kockázatról, mint a variancia, illetve a szórás, viszont a négy legfontosabb tulajdonságból csak egyet teljesít, tehát a szemivariancia sem koherens, így nem alkalmas a kockázat pontos mérésére.

2.3 A kockáztatott érték (VaR)

A kockáztatott érték az utóbbi évek leggyakrabban használt mértéke a kockázat mérésére. Használata az 1980-as évek végén, az 1987-es részvénypiaci összeomlás után vált egyre elterjedtebbé (Jorion, 2006).

A fejezet megírásánál legnagyobbrészt Gáll (Gáll, 2010) könyvére támaszkodtam, ahol további részletek és bizonyítások találhatóak a VaR-ra vonatkozóan. A VaR definiálásához szükség van a p-kvantilis fogalmára.

2.6 Definíció (p-kvantilis). *Legyen X egy valós értékű valószínűségi változó F_X eloszlásfüggvénnyel és $p \in (0,1)$. Ekkor azt a q értéket amelyre:*

$$P(X \leq q) \geq p$$

és

$$P(X < q) \leq p$$

teljesül, az eloszlás p-kvantilisének nevezzük.

A p-ed rendű kvantilis tehát azt a számot jelenti, amelynél az összes előforduló ismérvértékek p-ed része nem nagyobb és $(1-p)$-ed része nem kisebb. Másképpen kifejezve, a p-ed rendű kvantilis az az érték, ahol az eloszlásfüggvény keresztezi vagy átugorja a p értéket.

Előfordulhat, hogy a kvantilis nem egyértelmű, illetve egy szám több értéknek is a p-kvantilise. Mivel több különböző érték is lehet p-kvantilis, ezért eltérő jelölést vezetek be az ún. alsó, vagy más néven legkisebb és a felső, vagy más néven legnagyobb kvantilis fogalmára.

2.7 Definíció (Legkisebb és legnagyobb p-kvantilis). *Az X valószínűségi változó legkisebb p-kvantilise:*

$$q_p(X) = \inf\{x \in \mathbb{R} | F_X(x) \geq p\} .$$

Az X valószínűségi változó legnagyobb p-kvantilise:

$$q^p(X) = \inf\{x \in \mathbb{R} | F_X(x) > p\} .$$

Mivel $\{x \in \mathbb{R} | F_X(x) > p\} \subset \{x \in \mathbb{R} | F_X(x) \geq p\}$, így

$$\inf\{x \in \mathbb{R} | F_X(x) > p\} \geq \inf\{x \in \mathbb{R} | F_X(x) \geq p\},$$

vagyis $q_p(X) \leq q^p(X)$. Azaz $p \in (0,1)$ esetén a p-kvantilisek halmaza egy zárt, korlátos intervallum: $[q_p(X), q^p(X)]$. Az alsó és felső kvantilisek akkor és csak akkor egyenlőek, ha az

$$\{x \in \mathbb{R} | F_X(x) = p\} = \begin{cases} [q_p(X), q^p(X)), & \text{ha } P(X = q^p(X)) > 0 \\ [q_p(X), q^p(X)], & \text{ha } P(X = q^p(X)) = 0 \end{cases} \tag{10}$$

halmaz legfeljebb egyelemű.

Összefoglalva, ez azt jelenti, hogy a p-hez tartozó alsó és felső kvantilisek abban az esetben nem azonosak, ha az eloszlásfüggvény egy szakaszon konstans és ezen a szakaszon az értéke éppen p.

Az alsó és a felső kvantilis fogalmának felhasználásával az egyik legszélesebb körben alkalmazott kockázati mérték, a kockáztatott érték (VaR), a következőképpen definiálható:

2.8 Definíció (Kockáztatott érték, Value at Risk). *Legyen X egy valószínűségi változó az $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mezőn, és $\alpha \in (0,1)$. Ekkor X felső α-ad rendű kockáztatott értéke:*

$$\mathrm{VaR}^{\alpha}(X) = -q^{\alpha}(X)\,.$$

Hasonlóan, X alsó α-ad rendű kockáztatott értéke:

$$\mathrm{VaR}_{\alpha}(X) = -q_{\alpha}(X)\,.$$

A továbbiakban az angol elnevezés után az esetek legnagyobb részében a VaR rövidítést fogom használni a kockáztatott érték jelölésére.

A kvantilishez analóg módon az alsó és felső kockáztatott értékek csak abban az esetben nem azonosak, ha az eloszlásfüggvény egy szakaszon konstans, és ezen a szakaszon az értéke éppen α.

A gyakorlatban a hozamoknak, mint folytonos valószínűségi változóknak a mintarealizációját tudjuk felhasználni a számolásokhoz. Jelölje r_i az i-edik hozam $(i = 1, \ldots, n)$ mintarealizációját, $r = (r_1, \ldots, r_n)$ és r_i^* az r_i elemek növekvő sorrendbeli permutációjának az i-edik elemét: $r_1^* \leq r_2^* \leq \ldots \leq r_n^*$. Ekkor az α-kvantilis a k-adik elem, ahol $k = [n\alpha] = \max\{m | m \leq n\alpha, m \in \mathbb{N}\}$. Az alsó VaR-et ennek az elemnek a (-1)-szeresével közelíthetjük. Máshogy megfogalmazva a VaR értékét az empirikus eloszlásfüggvény általánosított inverzének (-1)-szeresével becsülhetjük:

$$\widehat{\mathrm{VaR}}_{\alpha}(r) = -r_k^* = -\widehat{F}^{\leftarrow}_{\{r_1,\ldots,r_n\}}(\alpha), \tag{11}$$

ahol $\widehat{F}^{\leftarrow}_{\{r_1,\ldots,r_n\}}(x) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{r_i \leq x\}}$ és $\mathbf{1}_A$ az A halmaz indikátorfüggvénye.

Ezek alapján a felső VaR mintabeli becslése pedig:

$$\widehat{\mathrm{VaR}}^{\alpha}(r) = -r_l^*, \tag{12}$$

ahol $l = \min\{m | m > n\alpha, m \in \mathbb{N}\}$. A továbbiakban és a számítások elvégzéséhez az alsó VaR-t fogom használni.

Tehát a kockáztatott érték az a szám, amelynél nagyobb veszteség α-nál kisebb vagy egyenlő valószínűséggel fordul elő.

Belátható, hogy a VaR (mind az alsó, mind a felső) monoton, pozitív homogén és eltolás invariáns kockázati mérték (Gáll, 2010). A VaR pozitív tulajdonsága, hogy a kockázatot egyetlen számban és pénznemben méri, így könnyen értelmezhető és a különböző értékek könnyen összehasonlíthatóak (Acerbi et al., 2001). A VaR a szemivarianciához hasonlóan downside kockázati mérték. Viszont nagy probléma a VaR-ral, hogy nem támogatja a diverzifikációt, azaz nem szubadditív. Továbbá, annak ellenére, hogy a VaR megmutatja, hogy mely értéknél nem fogunk többet veszíteni és mekkora valószínűséggel, de az ezen az értéken túli veszteségekkel nem foglalkozik, pedig a súlyos, extrém események ismerete fontos lenne. Tehát a VaR csak elliptikus eloszlások esetén alkalmas a kockázat mérésére, nem elliptikus eloszlások esetén – ami a gyakorlatban nem ritka jelenség – a kockázat téves megítéléséhez vezethet (Embrechts, 2000). Mindezeken felül, mivel a VaR nem szubadditív, így nem is konvex, amely lehetetlenné teszi a használatát optimalizációs problémák esetén (Szegö, 2002).

2.4 Expected Shortfall (ES)

Látható, hogy a VaR sem elégítette ki a koherens kockázati mértékek alapvető tulajdonságait. Felmerül tehát a kérdés, hogy létezik-e koherens kockázati mérték. A válasz igen, például az expected shortfall (ES), ami magyarul várható veszteséget jelent, de mivel a magyar irodalomban is angolul honosult meg a kifejezés, ezt fogom használni a továbbiakban. A fejezet megírásában Acerbi (Acerbi et al. (2001), Acerbi and Tasche (2002), Acerbi and Szekely (2014)) és Gáll (Gáll, 2010) munkáit vettem alapul.

A VaR arra a kérdésre ad választ, hogy mi az a minimális veszteség, ami az esetek legrosszabb $\alpha * 100$ százalékában bekövetkezhet. Tegyük fel most a kérdést egy kicsit másképpen: Mi az a várható veszteség, ami az esetek legrosszabb $\alpha * 100$ százalékában bekövetkezhet (Acerbi et al., 2001)? A választ az ES adja meg, amely tehát az esetek legrosszabb $\alpha * 100$ százalékában mutatja a veszteség (profit) várható értékét.

2.9 Definíció (Expected Shortfall, ES). *Legyen X egy valószínűségi változó, valamint $\alpha \in (0,1)$ és tegyük fel, hogy $\mathbf{E}((X)^-) < \infty$, ahol $(X)^-$ az X negatív része. Ekkor X Expected Shortfall-ja α szinten:*

$$\mathrm{ES}_\alpha(X) = -\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha q_u(X)\,du = -\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha F_X^{\leftarrow}(u)\,du = \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha \mathrm{VaR}_u(X)\,du\,.$$

Mivel az alsó és a felső kvantilisek csak egy nulla valószínűségi halmazon különböznek egymástól, és így $\int_0^\alpha q_u(X)du = \int_0^\alpha q^u(X)du$, a definícióban az alsó és a felső kvantilisek kicserélhetőek, azaz

$$\mathrm{ES}_\alpha(X) = -\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha q_u(X)\,du = -\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha q^u(X)\,du\,. \tag{13}$$

A gyakorlatban a hozamoknak, mint folytonos valószínűségi változóknak a mintarealizációjával számolunk. Legyen r_i az i-edik ($i = 1, \dots, n$) hozam értéke és $r = (r_1, \dots, r_n)$. Ekkor az ES kiszámításához először növekvő sorrendbe kell rendezni az elemeket: $r_1^* \le r_2^* \le \dots \le r_n^*$, ahol r_i^* jelöli az r_i mintarealizáció növekvő sorrendbeli permutációjának i-edik elemét. Ekkor az α-kvantilis a k-adik elem, ahol $k = [n\alpha] = \max\{m | m \le n\alpha, m \in \mathbb{N}\}$, azaz $r_1^*, r_2^*, \dots, r_k^*$ a legrosszabb α százaléknyi eset. Az ES-t ennek a k elemnek az átlagával közelíthetjük (Acerbi et al., 2001):

$$\widehat{\mathrm{ES}}_\alpha(r) = -\frac{\sum_{i=1}^k r_i^*}{k}. \tag{14}$$

A (14) kifejezést átalakítva:

$$\begin{aligned}\widehat{\mathrm{ES}}_\alpha(r) &= -\frac{\sum_{i=1}^{k} r_i^*}{k} = -\frac{\sum_{i=1}^{n} r_i^* \mathbf{1}_{\{i\leq k\}}}{k}\\ &= -\frac{1}{k}\Big(\sum_{i=1}^{n} r_i^* \mathbf{1}_{\{r_i^*\leq r_k^*\}} - \sum_{i=1}^{n} r_i^* \mathbf{1}_{\{r_i^*\leq r_k^*\}} + \sum_{i=1}^{n} r_i^* \mathbf{1}_{\{i\leq k\}}\Big) \\ &= -\frac{1}{k}\Big(\sum_{i=1}^{n} r_i^* \mathbf{1}_{\{r_i^*\leq r_k^*\}} - \sum_{i=1}^{n} r_i^* \big(\mathbf{1}_{\{r_i^*\leq r_k^*\}} - \mathbf{1}_{\{i\leq k\}}\big)\Big)\,.\end{aligned} \tag{15}$$

Az $\mathbf{1}_{\{r_i^*\leq r_k^*\}} - \mathbf{1}_{\{i\leq k\}}$ különbség értéke az esetek legnagyobb részében nulla, hiszen az $\{r_i^* \leq r_k^*\}$ és $\{i \leq k\}$ halmazok megegyeznek. Ezen halmazok csak akkor különböznek egymástól, ha $i > k$ esetén létezik r_k^*-gal megegyező elem. Ezekben az esetekben $\mathbf{1}_{\{r_i^*\leq r_k^*\}} = 1$ és $\mathbf{1}_{\{i\leq k\}} = 0$, azaz a különbség értéke 1-gyel egyenlő. Így a (15) egyenlet átalakítása a következőképpen folytatható:

$$\begin{aligned}\widehat{\mathrm{ES}}_\alpha(r) &= -\frac{1}{k}\Big(\sum_{i=1}^{n} r_i \mathbf{1}_{\{r_i\leq r_k^*\}} - r_k^* \sum_{i=1}^{n}\big(\mathbf{1}_{\{r_i\leq r_k^*\}} - \mathbf{1}_{\{i\leq k\}}\big)\Big)\\ &= -\frac{n}{k}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r_i \mathbf{1}_{\{r_i\leq r_k^*\}} - r_k^*\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{r_i\leq r_k^*\}} - \frac{k}{n}\Big)\right).\end{aligned} \tag{16}$$

Mivel α-t $\frac{k}{n}$-nel, a várható értéket az átlaggal, míg a valószínűséget a kedvező/összes kifejezésekkel közelíthetjük, illetve számolhatjuk ki, ezért a (16) képletből látható, hogy az ES a következőképpen is definiálható:

2.10 Definíció. *Legyen X egy valószínűségi változó, melyre $\mathbf{E}((X)^-) < \infty$, és legyen $\alpha \in (0,1)$, ahol $(X)^-$ az X negatív része. Ekkor X expected shortfall-ja α-szinten:*

$$\mathrm{ES}_\alpha(X) = -\frac{1}{\alpha}\Big(\mathbf{E}(X\mathbf{1}_{\{X\leq q_\alpha(X)\}}) + q_\alpha(X)\big(\alpha - P(X\leq q_\alpha(X))\big)\Big)\,.$$

Elmondható, hogy – ellentétben az eddig vizsgált, és igen gyakran használt kockázati mértékekkel – az ES monoton, szubadditív, pozitív homogén és eltolás invariáns, azaz koherens kockázati mérték (Gáll, 2010). Viszont annak ellenére, hogy az ES több pozitív tulajdonsággal rendelkezik, ez sem bizonyult tökéletesnek, hiszen például míg a VaR mindig létezik, addig az ES létezéséhez az $\mathbf{E}((X)^-) < \infty$ feltételezéssel kell élni.

Az előzőekben bemutatott kockázati mértékek tulajdonságait az *1. táblázatban* foglaltam össze. A kockázat pontos mérésére egy olyan kockázati mértékre lenne szükség, amely kielégíti a monotonitás, szubadditivitás, pozitív homogenitás és eltolás invariancia tulajdonságait, azaz koherens. Látható, hogy a legtöbbet használt kockázati mértékek közül csak az ES koherens, azaz elméleti szinten a vizsgált öt kockázati mérték (variancia, szórás, szemivariancia, VaR és ES) közül egyedül az ES alkalmas a kockázat mérésére.

	Monotonitás	Szubadditivitás	Pozitív homogenitás	Eltolás invariancia
variancia	–	–	–	–
szórás	–	$\surd$	$\surd$	–
szemivariancia	–	–	–	$\surd$
VaR	$\surd$	–	$\surd$	$\surd$
ES	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$

1. táblázat. Néhány ismert kockázati mérték tulajdonsága

3 Az adatok

A számításokhoz az adatokat a Budapesti Értéktőzsde honlapjáról (bet.hu) töltöttem le. Hét részvény, nevezetesen az FHB, MOL, MTELEKOM, OTP, Pannergy, Raba és Richter napi árfolyam adataival dolgoztam 2005.07.01-2015.06.29 között, azaz 10 évre vonatkozóan.

Ezen adatok megvizsgálásához, elemzéséhez és a számításokhoz az R/ Rmetrics programot használtam.

A tanulmányban nem a konkrét részvény árakkal, hanem a hozamokkal, pontosabban a logaritmikus hozamokkal számoltam. Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban, ha hozamot említek, akkor mindig logaritmikus hozamra gondolok.

A mellékletben, a *2. és 3. ábrákon* látható a hét részvény napi logaritmikus hozama és azok eloszlása. A hisztogramba rajzolt függőleges vonal az átlagot, míg a piros görbe az adatokból számolt átlaggal és szórással megegyező átlagú és szórású normális eloszlást jelenti.

A legtöbb elmélet normalitást feltételez az adatok eloszlására vonatkozóan. Természetesen a gyakorlatban ez ritkábban valósul meg, ami téves következtetésekhez vezethet. Így először az alapvető statisztikákat és a normalitást vizsgálom meg. Alapvető statisztikák alatt értem a minimumot, az első kvartilist, a mediánt, az átlagot, a harmadik kvartilist, a maximumot, a szórást és a ferdeséget, valamint a csúcsosságot. A százalékban kifejezett logaritmikus hozamokból számolt alapvető statisztikákat a *2. táblázatban* foglaltam össze. Látható, hogy az FHB részvény hozama rendelkezik a legnagyobb minimummal, a Raba részvény hozama pedig a legnagyobb maximummal. Leolvasható továbbá, hogy a hét részvény közül csak a Raba és a Richter rendelkezik pozitív átlaggal, valamint, hogy a szórás az OTP esetében a legnagyobb.

	FHB	MOL	MTELEKOM	OTP	Pannergy	Raba	Richter
Minimum, %	-19,720	-16,223	-12,573	-16,235	-16,138	-16,229	-12,189
1. kvartilis, %	-1,140	-1,184	-0,905	-1,314	-0,786	-0,900	-0,954
Medián, %	0	0	0	0	0	0	0
Átlag, %	-0,025	-0,008	-0,031	-0,009	0,000	0,021	0,012
3. kvartilis, %	0,970	1,176	0,860	1,351	0,645	0,852	0,961
Maximum, %	20,891	14,027	11,680	20,916	13,961	24,701	9,074
Szórás, %	2,385	2,268	1,701	2,686	1,931	2,131	1,821
Ferdeség	0,248	0,153	-0,535	-0,059	0,294	0,689	-0,105
Lapultság	8,860	5,966	6,379	6,128	12,359	15,446	3,533

2. táblázat. A hét részvény százalékban kifejezett logaritmikus hozamaira vonatkozó alapvető statisztikák

A normalitás vizsgálatának egyik módja a ferdeség és a csúcsosság megvizsgálása. A ferdeséggel tulajdonképpen a szimmetriától való eltérés mérhető. A normális eloszlás ferdesége például nulla, hiszen a Gauss-görbe szimmetrikus, és bármely egyéb szimmetrikus eloszlás ferdesége szintén nulla. Negatív ferdeség azt jelenti, hogy az eloszlás bal széle hosszabb, vastagabb, míg a pozitív ferdeség hosszabb, illetve vastagabb jobb farkat jelent. A vizsgált részvények közül az OTP és a Richter állnak a legközelebb a szimmetrikus eloszláshoz.

A lapultság tulajdonképpen azt mutatja meg, hogy az eloszlásfüggvény hogyan viszonyul a normális eloszláséhoz. A normális eloszlás lapultsága nulla, míg az ennél csúcsosabb sűrűségfüggvények pozitív, a kevésbé csúcsos sűrűségfüggvények negatív lapultsági mutatóval rendelkeznek. Az általam elemezni kívánt hét részvény mind csúcsosabb a normális eloszlásnál. A mérőszám a Raba illetve a Pannergy esetén a legmagasabb: a Raba esetében 15,446, míg a Pannergy esetében 12,359.

Az előbbiekben a hozamok eloszlására tett megállapítások a 2. és a 3. ábrák hisztogramjain is megfigyelhetőek. Mind a hét részvény esetében viszonylag szimmetrikus eloszlásról van szó, és látható, hogy mindegyik hozam eloszlásfüggvénye sokkal csúcsosabb, mint a normális eloszlásé. Tehát az első vizsgálatok alapján egyik eloszlásról sem feltételezek normalitást.

Egy másik lehetőség a normalitás megvizsgálására a hipotézisvizsgálat. Többek között a Shapiro-Wilk és a Kolmogorov-Szmirnov teszt alkalmas annak a nullhipotézisnek a tesztelésére, hogy az adatok normális eloszlásból származnak-e. Mindkét tesztet lefuttattam a hét részvény hozamainak tesztelésére, és minden esetben a p-érték jóval kisebb volt, mint a választott küszöbérték (0,05). Ez azt jelenti, hogy mindkét teszt és mind a hét részvény esetén elvetjük a nullhipotézist, vagyis a hozamok nem normális eloszlásból származnak.

Ezt támasztja alá az ún. Q-Q plot (kvantilis-kvantilis ábra) is (Melléklet *4. ábra*), amely a minta tapasztalati kvantiliseit veti össze az illesztett eloszlás kvantiliseivel. Amennyiben a két eloszlás azonos, a pontok egy egyenesen – a 45°-os egyenesen – helyezkednek el. Minél jobban rásimulnak a pontok az egyenesre, annál jobbnak mondható az illeszkedés a két eloszlás között. A vizsgált hét részvény egyikének esetében sem illeszkednek a pontok az egyenesre annyira, hogy normalitást feltételezhetnénk az eloszlásukról.

4 Utótesztelés

Az ún. utótesztelés (backtesting) módszerét használom annak megvizsgálására, hogy melyik kockázati mérték bizonyul jobbnak a gyakorlatban. Jobbnak akkor nevezek egy kockázati mértéket a másiknál, ha azzal pontosabban meg lehet becsülni a kockázatot, azaz, ha a tényleges és a becsült értékek között kisebb eltérés tapasztalható.

A piaci kockázat kiszámításának három főbb módszere ismert: a variancia-kovariancia módszer, a Monte Carlo szimuláció és a történeti szimuláció

(Embrechts et al., 2005). Ezen módszerek tulajdonképpen a hozam/veszteség (P&L) eloszlásfüggvény becslésének módszerében különböznek egymástól (Bugár, 2006). A tanulmányban célom a VaR és ES összehasonlítása történeti szimuláció segítségével, így a másik két módszerről csak említést teszek.

A variancia-kovariancia módszer lényege – ahogy a neve is mutatja – a portfólióban szereplő eszközök varianciájának, valamint ezen eszközök páronkénti kovarianciájának a kiszámítása. A variancia-kovariancia mátrixot (a portfólióban szereplő eszközöknek megfelelően) súlyozva kapjuk meg a portfólió varianciáját. Ahhoz, hogy a variancia segítségével kiszámítsuk a kockázatot, valamilyen feltételezéssel kell élni a hozamok eloszlására vonatkozóan. Legkézenfekvőbb (főleg számolási szempontból) a normalitás feltételezése (Damodaran, 2008). A hozamok normalitása a legtöbb esetben, főleg napi illetve rövid időintervallumra vonatkozó hozamok esetén, nem teljesül a gyakorlatban, mint ahogy az általam bemutatott adatok esetén sem (4. fejezet). Napi adatok esetén sokkal csúcsosabb eloszlás tapasztalható, mint a normális eloszlásé: a napi hozamokra jellemző eloszlás ,,középső" része sokkal vékonyabb, valamint jóval hosszabb és vastagabb farokkal rendelkezik, mint a normális eloszlás. Ez azt is jelenti, hogy több extrém érték jellemző ezen hozamokra, mint amit a normális eloszlás feltételez, ami a kockázat alul becsléséhez vezethet (Embrechts et al., 2005). Ezen probléma orvoslására az irodalomban több javaslatot is találhatunk, de a nem-normális modellek alapján, a paraméterek becslése, valamint a kockázat kiszámítása igen bonyolulttá válhat. További pontatlanságot okozhat az az általános feltevés, hogy a varianciák és a kovarianciák időben állandóak. Ezzel szemben a különböző GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) modellek segítségével, az időbeli változást figyelembe véve becsülhetjük meg a varianciát, ezzel egy pontosabb képet alkotva arról, valamint a kockázatról (Damodaran, 2008). Egy további kritikája a variancia-kovariancia módszernek, hogy nemcsak a kockázati faktorok többdimenziós normális eloszlását, hanem azt is feltételezi, hogy az eloszlásfüggvény a kockázati faktorok lineáris függvénye. Ezen feltevések általában a valóságban nem teljesülnek (Embrechts et al., 2005).

Egy másik, igen gyakran használt módszer a piaci kockázat becslésére a Monte Carlo szimuláció. A Monte Carlo szimuláció összefoglaló neve minden olyan módszernek, amelyben az eloszlásfüggvényt szimuláció segítségével becsüljük. A szimuláció első lépése egy modell illesztése és kalibrálása a történeti adatokra. Második lépés a modell segítségével, az adatokkal megegyező eloszlású, m (nagy számú) realizáció generálása. Ezen m szcenárió segítségével meghatározható az eloszlásfüggvény, melyből a kockázat már kiszámolható. Vegyük észre, hogy a módszer nem oldja meg a modell-illesztési problémát, és a szimuláció eredménye az illesztett modell pontosságától függ (Embrechts et al., 2005). A gyakorlatban sokat előforduló példa a Monte Carlo szimulációra, amikor a részvény árak változását az ún. geometriai Brown-mozgással (GBM) szimulálják. A GBM azzal a feltételezéssel él, hogy a logaritmikus hozamok normális eloszlást követnek (Hull, 2006). Mint azt már többször megemlítettem, az általam elemezni kívánt adatok hozamai nem követnek normális eloszlást, így a GBM alkalmazása téves eredményre vezetne.

A fentieket figyelembe véve a következőekben csak a történeti szimulációval fogok foglalkozni. Ennek a módszernek előnye az előzőekkel szemben, hogy semmilyen előzetes feltételezéssel nem kell élni az eloszlásfüggvényekre vonatkozóan.

4.1 Utótesztelés történeti szimuláció segítségével

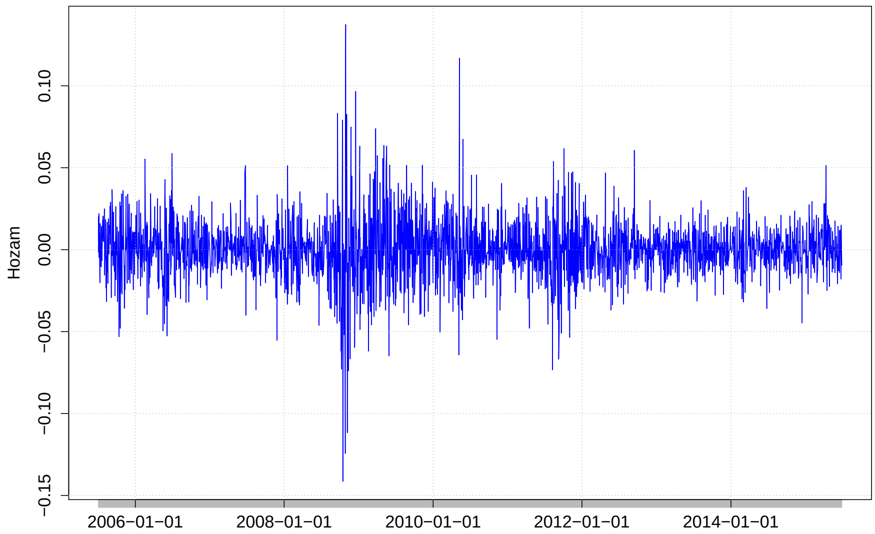
Az utótesztelés végrehajtásához létre kell hozni az ún. idő-ablakokat (time window). Az irodalomban és a gyakorlatban is ennek értéke leggyakrabban egy év, azaz 250 kereskedési nap ($T = 250$). Az első ablak így az 1. naptól a 250. napig tart. A második ablak a 2. naptól a 251. napig, és így tovább. Az első idő-ablak adatait felhasználva ki lehet számolni a szükséges kockázati mérték értékét az első 250 napra vonatkozóan, amely egyben egy előrejelzés a 251. napra. Ha rendelkezésre áll a 251. napi hozam is, akkor az első idő-ablak alapján számított becsült érték összehasonlítható a valódi hozam értékével. Ekkor már kiszámolható a második idő-ablakra vonatkozó kockázati mérték, amely egy becsült érték lesz a következő napra, azaz a 252. napra vonatkozóan. Ha rendelkezésre áll a 252. napi hozam, akkor a becsült kockázat összehasonlítható a tényleges értékkel. És így tovább, az összes adaton végiglépkedve (*3. táblázat*). Ezt a módszert történeti módszernek (historical simulation) nevezzük, hiszen azzal a feltételezéssel él, hogy a múltban történt eseményekkel le tudjuk írni, meg tudjuk becsülni a jövőbeli eseményeket.

idő-ablak	első nap	utolsó nap	becslés
1.	1.	250.	251.
2.	2.	251.	252.
3.	3.	252.	253.
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(N-249)$.	$(N-249)$.	N.	$(N+1)$.

3. táblázat. A számításokhoz használt idő-ablakok

A fent bemutatott módszert fogom tehát alkalmazni a két leggyakrabban használt kockázati mérték, a VaR és az ES összehasonlítására. Elméleti szinten már láthattuk, hogy csak az ES alkalmas a kockázat mérésére, hiszen ez az egy kockázati mérték koherens. Ezért a továbbiakban azt vizsgálom, hogy a VaR vagy az ES bizonyul jobbnak a gyakorlatban.

A 3. fejezetben említett hét részvény logaritmikus hozamait használom tíz évre vonatkozóan. Egy olyan portfóliót hozok létre, amely mind a hét részvényből pontosan egyet tartalmaz. Ennek a portfóliónak a logaritmikus hozama a portfólió árakból számolt logaritmikus hozammal egyezik meg (Petters and Dong, 2016), azaz $r_t := \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$, ahol r_t a portfólió logaritmikus hozamát, míg P_t a portfólió árát jelenti a t-edik időpillanatban. Így a portfólió hozamok egy $N = 2606$ elemből álló adatsort képeznek (*1. ábra*).



1. ábra. A portfólió napi logaritmikus hozamai 2005.07.01 és 2015.06.29 között

A számításokhoz – a könnyebb áttekinthetőség végett – először táblázatba rendezem a hozamokat, azaz az adatokat: az első oszlopba kerül az első 250 elem, a másodikba a második 250 elem és így tovább (*4. táblázat*). Így minden oszlop tulajdonképpen egy idő-ablak, ami az adott esetben megegyezik az ún. szcenárióval. Jelölje r_t^m az m-edik szcenárióhoz és t-edik időpillanathoz tartozó hozam értékét, ahol $m = 1, \ldots, M$ és $t = 1, \ldots, T$. Az elemezni kívánt adatok esetében $N = 2606$, $T = 250$ és így $M = 2357$. Vegyük észre, hogy a konstrukció miatt például $r_2^1 = r_1^2$ vagy $r_3^1 = r_2^2 = r_1^3$. A VaR_α^m és az ES_α^m jelölik az m-edik szcenárió adataiból számolt VaR és ES értékeket. Természetesen, mivel mintarealizációról van szó, a kockázati mérték kiszámításához a (11) és (14) képleteket használom, azaz ha $r^m = (r_1^m, \ldots, r_{250}^m)$, akkor

$$\mathrm{VaR}_\alpha^m := -r_k^{m^*} = -\widehat{F}^{\leftarrow}_{\{r_1^m,\ldots,r_{250}^m\}}, \tag{17}$$

illetve

$$\mathrm{ES}_\alpha^m := -\frac{\sum_{t=1}^k r_t^{m^*}}{k}, \tag{18}$$

ahol $r_i^{m^*}$ jelöli az r_i^m mintarealizáció növekvő sorrendbeli permutációjának i-edik elemét ($i = 1, \ldots, 250$) az adott m-edik szcenárióra vonatkozóan.

	Szcenárió (m)					
	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$\cdots$	$m = 2356$	$m = 2357$
$t = 1$	r_1^1	r_1^2	r_1^3	$\cdots$	r_1^{2356}	r_1^{2357}
$t = 2$	r_2^1	r_2^2	r_2^3	$\cdots$	r_2^{2356}	r_2^{2357}
$t = 3$	r_3^1	r_3^2	r_3^3	$\cdots$	r_3^{2356}	r_3^{2357}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$t = 250$	r_{250}^1	r_{250}^2	r_{250}^3	$\cdots$	r_{250}^{2356}	r_{250}^{2357}
	VaR_α^1	VaR_α^2	VaR_α^3	$\cdots$	$\mathrm{VaR}_\alpha^{2356}$	VaR_α^{2357}
	ES_α^1	ES_α^2	ES_α^3	$\cdots$	ES_α^{2356}	$\mathrm{ES}_\alpha^{2357}$

4. táblázat. Portfólió hozamok

4.2 A VaR utótesztelése

Ahogy már fentebb említettem, a VaR tesztelésére idő-ablakokat használok. Ezen idő-ablakok adatait felhasználva ki lehet számolni a VaR értékét és ezt az értéket össze lehet hasonlítani a következő napi valódi hozam értékével. Az összehasonlítás azt jelenti, hogy minden egyes esetben megvizsgálom, hogy az adott hozam értéke kisebb-e, mint az arra a napra becsült VaR érték (-1)-szerese, majd összeszámolom, hogy hány esetben volt ez tapasztalható, azaz hogy hány esetben becsülte alá a VaR a tényleges kockázat értékét. Ennek a valószínűsége – a VaR definíciója alapján – meg kell, hogy egyezzen a konfidenciaszinttel, azaz α-val (Danielsson, 2011).

Jelölje R^m az m-edik szcenárióhoz tartozó valószínűségi változót és r_t^m az R^m egy mintarealizációját, $t = 1, \ldots, 250$. A VaR definíciója alapján:

$$P(R^{m+1} < -\,\mathrm{VaR}_\alpha(R^{m+1})) = \alpha \tag{19}$$

és így

$$\begin{aligned}\alpha &= P(R^{m+1} < -\,\mathrm{VaR}_\alpha(R^{m+1})) \\ &= \mathbf{E}\left(\mathbf{1}_{\{R^{m+1} < -\,\mathrm{VaR}_\alpha(R^{m+1})\}}\right) ,\end{aligned} \tag{20}$$

ahol $\mathbf{1}_{\{R^{m+1} < -\,\mathrm{VaR}_\alpha(R^{m+1})\}}$ az $\{R^{m+1} < -\,\mathrm{VaR}_\alpha(R^{m+1})\}$ halmaz indikátorfüggvénye.

A mintarealizáció segítségével a várható érték a relatív gyakorisággal míg az $(m+1)$-edik szcenárióhoz tartozó VaR az m-edik szcenárióhoz tartozó empirikus eloszlásfüggvény segítségével közelíthető, és így:

$$\widehat{\alpha} = \frac{1}{M-1} \sum_{m=1}^{M-1} \mathbf{1}_{\{r_T^{m+1} < -\,\mathrm{VaR}_\alpha^m\}} \,. \tag{21}$$

Minél közelebb van a becsült kockázat a ténylegeshez, azaz minél pontosabban becsülhető meg a VaR-ral a kockázat, annál közelebb lesz ez az érték α-hoz.

4.3 Az ES utótesztelése

A Bázeli Bizottság 2012-ben – az 1996 óta használt VaR kockázati mérték helyett – az ES, mint új szabályozói kockázati mérték bevezetését javasolta.

A probléma csak az volt, hogy ellentétben a VaR-ral, úgy gondolták, hogy bizonyos matematikai tulajdonsága (elicitability) miatt az ES nem utótesztelhető. (A definíció és részletes leírás a témával kapcsolatban megtalálható például Emmer et al. (2015) és Acerbi and Szekely (2014) cikkében.) Így a Bázeli Bizottság azt javasolta, hogy adaptálják az ES-t mint kockázati mértéket és folytassák az utótesztelést a VaR használatával. A legújabb kutatások megoldani látszanak ezt a problémát is, hiszen kimutatták, hogy az ES is utótesztelhető.

Az ES utótesztelését Acerbi és Székely cikke (Acerbi and Szekely, 2014) alapján végzem el. Belátható (Acerbi and Tashe, 2002), hogy az ES folytonos esetben a következőképpen írható:

$$\mathrm{ES}_\alpha(X) = -\frac{1}{\alpha}\mathbf{E}(X\mathbf{1}_{\{X<q_\alpha\}})\,. \tag{22}$$

Továbbra is jelölje R^m az m-edik szcenárióhoz tartozó valószínűségi változót és r_t^m az R^m egy mintarealizációját, $t = 1, \dots, 250$, valamint VaR_α^m, illetve ES_α^m az m-edik szcenárióhoz tartozó mintarealizációból számolt VaR és ES értékeket α-szinten. Az $I^m := \mathbf{1}_{\{R^m<-\mathrm{VaR}_\alpha(R^m)\}}$ jelöléssel, valamint az $X = R^m$ helyettesítéssel élve

$$\mathrm{ES}_\alpha(R^m) = -\frac{1}{\alpha}\mathbf{E}(R^m I^m)\,. \tag{23}$$

A (23) egyenletet, valamint a várható érték tulajdonságait felhasználva látható, hogy:

$$0 = \mathbf{E}\left(\frac{R^m I^m}{\alpha\,\mathrm{ES}_\alpha(R^m)} + 1\right). \tag{24}$$

Mindkét oldal M-szerinti átlagát véve:

$$\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} 0 = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\mathbf{E}\left(\frac{R^m I^m}{\alpha\,\mathrm{ES}_\alpha(R^m)} + 1\right). \tag{25}$$

A (25) egyenlet átrendezésével kapjuk, hogy

$$0 = \mathbf{E}\left(\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\frac{R^m I^m}{\mathrm{ES}_\alpha(R^m)}\right) + \alpha, \tag{26}$$

azaz

$$\alpha = -\mathbf{E}\left(\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\frac{R^m I^m}{\mathrm{ES}_\alpha(R^m)}\right). \tag{27}$$

Hasonlóan a VaR-hez a várható érték a relatív gyakorisággal közelíthető, és így a mintarealizációból számolt α becsült értéke:

$$\widehat{\alpha} = -\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\frac{r_t^m\mathbf{1}_{\{r_t^m<-\mathrm{VaR}_\alpha^m\}}}{\mathrm{ES}_\alpha^m}. \tag{28}$$

Minél közelebb van a becsült kockázat a ténylegeshez, azaz minél pontosabban becsülhetjük meg az ES-sel a kockázatot, annál közelebb lesz ez az érték α-hoz.

5 Eredmények és következtetések

A számításokat a már bemutatott adatokon az R statisztikai program segítségével végeztem el. Az *5. táblázatban* láthatóak az utótesztelés eredményei, $0,5\%$, 1%, 2%, $2,5\%$ és 5%-os szinteken, a VaR, valamint az ES esetében. Az $\widehat{\alpha}$ oszlopokban tüntettem fel a történeti szimulációval kapott alfa értékeket. Az $|\widehat{\alpha}-\alpha|$ oszlopokban lévő számok azt mutatják, hogy a tényleges alfa érték mennyire tér el az előrejelzések alapján számított alfa értéktől.

	VaR		ES	
α	$\widehat{\alpha}$	$\lvert\widehat{\alpha}-\alpha\rvert$	$\widehat{\alpha}$	$\lvert\widehat{\alpha}-\alpha\rvert$
0,5	0,89	0,39	0,41	0,09
1	1,27	0,27	0,83	0,17
2	1,99	0,01	1,68	0,32
2,5	2,72	0,22	2,42	0,08
5	5,17	0,17	4,85	0,15

5. táblázat. Az utótesztelés eredménye, %

A számításokhoz használt adatok alapján, az utótesztelés eredményeiből látható, hogy $\alpha = 2\%$-os szinten a VaR sokkal jobbnak bizonyul az ES-nél. Közeli eredmények születtek $\alpha = 5\%$-os szinten: a VaR esetében az eltérés $0,17\%$, míg az ES esetében $0,15\%$, azaz ezen a szinten az ES bizonyult jobbnak. Hasonlóan az összes többi alfa esetéhez. Ez azt jelenti, hogy $\alpha = 2\%$ kivételével minden vizsgált alfa szinten az ES segítségével számított alfa érték közelebb volt az elméleti értékhez, mint a VaR segítségével számított alfák.

A két kockázati mérték a különböző alfa szinteken számolt abszolút hibák vizsgálata mellett összehasonlítható a relatív hiba segítségével is. Vektorok relatív hibájának kiszámítása a következő összefüggéssel történik (Pryce, 1984):

$$\mathcal{E}_{re} = \frac{\| \widehat{\alpha} - \alpha \|}{\| \alpha \|}, \tag{29}$$

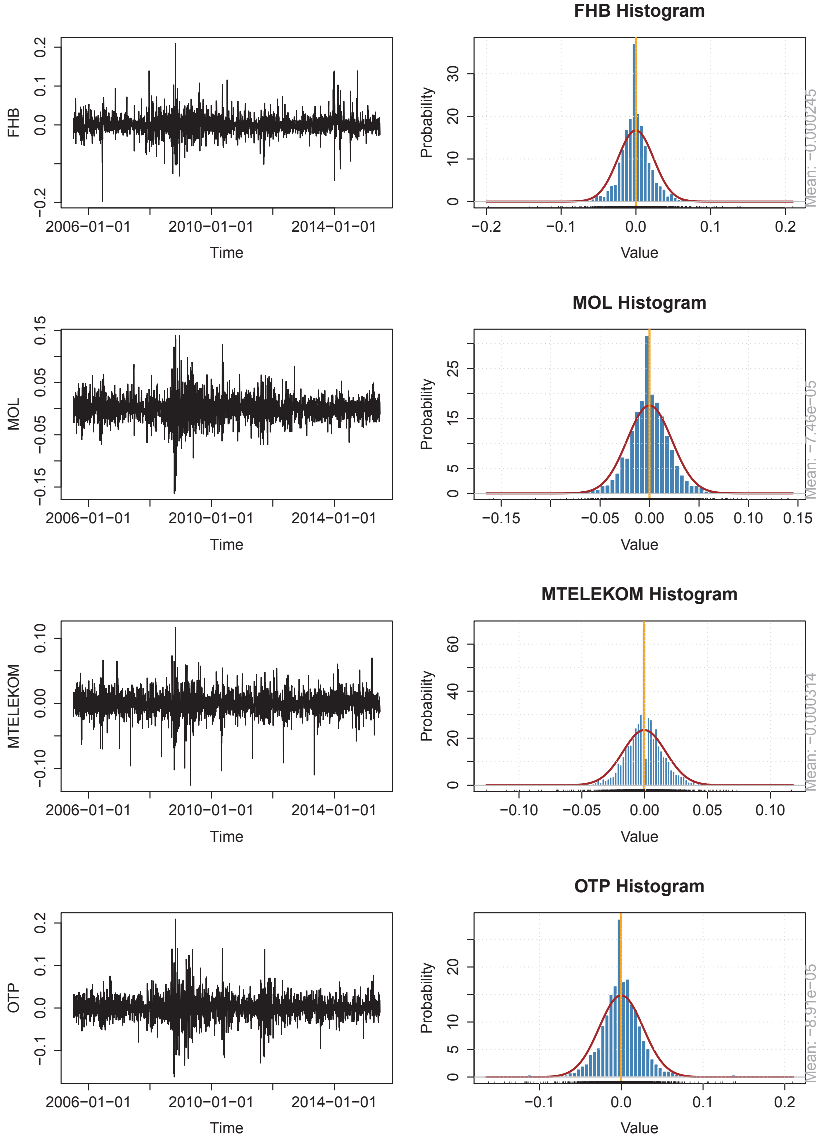
ahol $\widehat{\alpha} = (\widehat{\alpha}_1, \widehat{\alpha}_2, \ldots, \widehat{\alpha}_n)$ jelöli az elméleti értékekből, míg $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $n \in I\!N$ a számított, mért értékekből képzett vektort. A VaR és az ES relatív hibáinak összehasonlításához a leggyakrabban használt normát, az euklideszi normált használom:

$$\mathcal{E}_{re} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{5} (\widehat{\alpha}_i - \alpha_i)^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{5} \alpha_i^2}}. \tag{30}$$

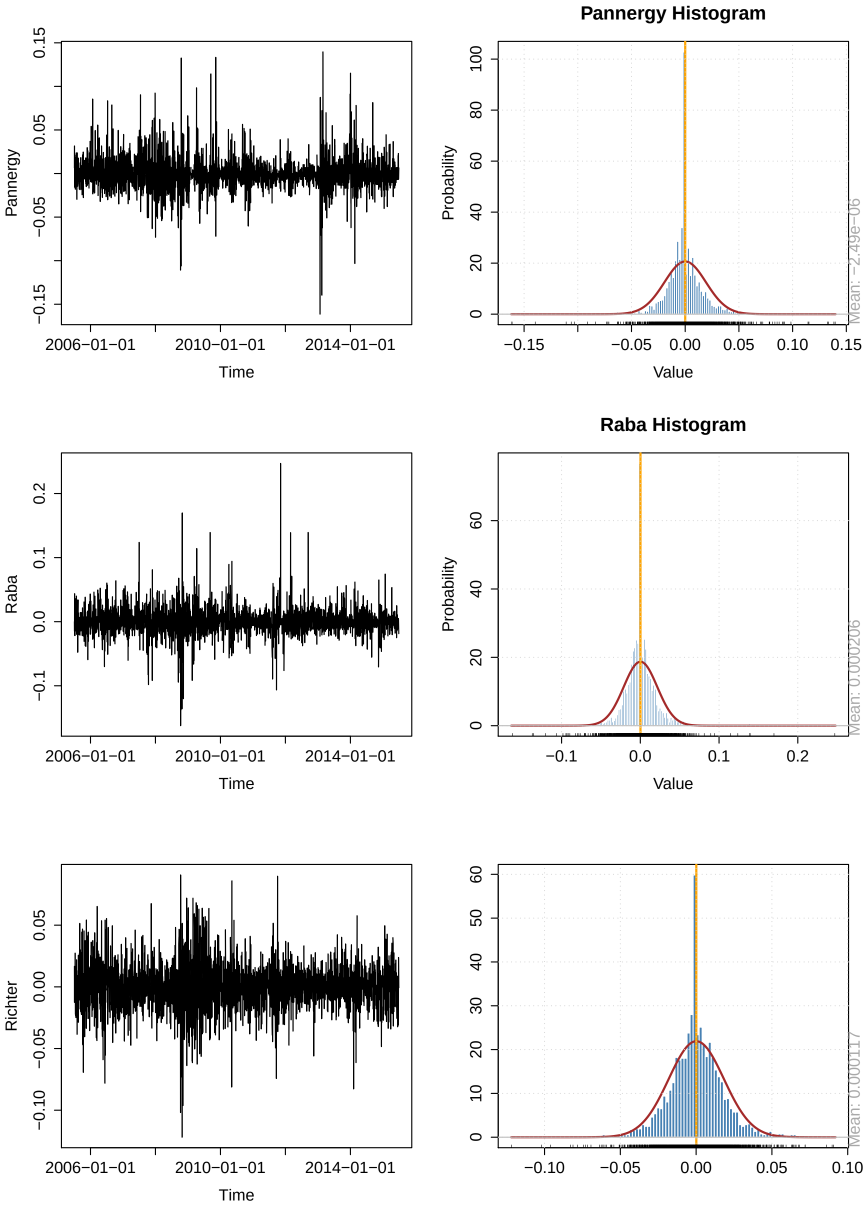
A (30) egyenlet alapján a VaR relatív hibája az 5. táblázatban bemutatott alfa szinteket figyelembe véve $\mathcal{E}_{re}^{\mathrm{VaR}} = 0,091$, míg az ES relatív hibája $\mathcal{E}_{re}^{\mathrm{ES}} = 0,068$. Vagyis a többdimenziós relatív hibákat összehasonlítva elmondható, hogy az ES-nek kisebb a relatív hibája, így összességében jobb kockázati mértéknek bizonyul.

A fentebb bemutatott számításokat, valamint az elméleti tényeket is figyelembe véve úgy gondolom, hogy az expected shortfall-lal pontosabb képet kaphatunk a kockázatról, mint a VaR kockázati mértéket használva.

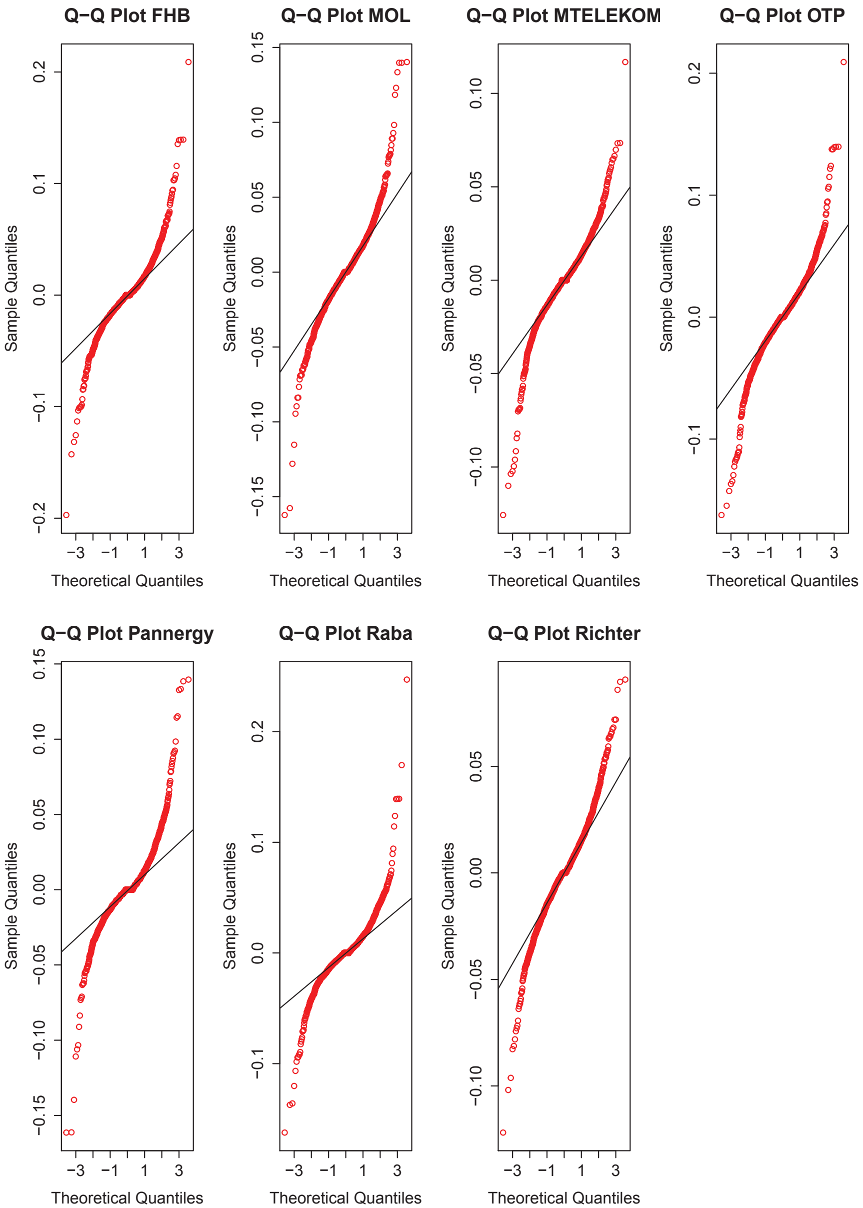
Melléklet



2. ábra. Az FHB, MOL, MTELEKOM és OTP részvények napi logaritmikus hozamai és azok eloszlásai 2005.07.01 és 2015.06.29 között



3. ábra. A Pannergy, Raba és Richter részvények napi logaritmikus hozamai és azok eloszlásai 2005.07.01 és 2015.06.29 között



4. ábra. A hét részvény logaritmikus hozamainak kvantilis-kvantilis ábrája

Irodalom

1. Acerbi, C., Nordio, C., and Sirtori, C. (2001). Expected shortfall as a tool for financial risk management. arXiv preprint cond-mat/0102304.
2. Acerbi, C. and Szekely, B. (2014). Backtesting expected shortfall. *Risk,* 27(11).
3. Acerbi, C. and Tasche, D. (2002). On the coherence of expected shortfall. *Journal of Banking & Finance,* 26(7):1487–1503.
4. Alexander, C. (2009). *Market Risk Analysis, Value at Risk Models*, volume 4. John Wiley & Sons.
5. Arratia, A. (2014). *Computational Finance.* Springer.
6. Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M., and Heath, D. (1999). Coherent measures of risk. *Mathematical Finance,* 9(3):203–228.
7. Bugár, Gyöngyi és Uzsoki, M. (2006). Befektetések kockázatának mérése. *Statisztikai Szemle*, 84(9).
8. Damodaran, A. (2003). *Investment philosophies: successful strategies and the investors who made them work,* volume 185. John Wiley & Sons.
9. Damodaran, A. (2003-2008). (Unpublished paper) Value at Risk (VaR). http://people.stern.nyu.edu/adamodar/pdfiles/papers/VAR.pdf . Accessed: 2017-04-25.
10. Danielsson, J. (2011). *Financial risk forecasting: The theory and practice of forecasting market risk with implementation in R and Matlab*, volume 588. John Wiley & Sons.
11. Eftekhari, B., Pedersen, C. S., and Satchell, S. E. (2000). On the volatility of measures of financial risk: an investigation using returns from European markets. *The European Journal of Finance,* 6(1):18–38.
12. Embrechts, P. (2000). Extreme value theory: Potential and limitations as an integrated risk management tool. Derivatives Use, Trading & Regulation, 6.
13. Embrechts, P., Frey, R., and McNeil, A. (2005). Quantitative risk management. *Princeton Series in Finance,* Princeton, 10.
14. Emmer, S., Kratz, M., and Tasche, D. (2015). What is the best risk measure in practice? a comparison of standard measures. *Journal of Risk,* 18:31–60.
15. Gáll, József és Pap, G. (2010). *Bevezetés a pénzügyi matematikába.* Szegedi Egyetemi Kiadó.
16. Hubbard, D. W. (2014). *How to measure anything: Finding the value of intangibles in business.* John Wiley & Sons.
17. Hull, J. C. (2006). *Options, futures, and other derivatives.* Pearson Education India.
18. Jorion, P. (1999). *A kockáztatott érték.* Panem.
19. Jorion, P. (2006). *Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk.* McGraw-Hill.
20. Joshi, M. S. and Paterson, J. M. (2013). *Introduction to Mathematical Portfolio Theory.* Cambridge University Press.
21. Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *The Journal of Finance,* 7(1):77–91.
22. Petters, A. O. and Dong, X. (2016). *An introduction to mathematical finance with applications.*

23. Pryce, J. (1984). A new measure of relative error for vectors. *SIAM Journal on Numerical Analysis,* 21(1):202–215.
24. Szegö, G. (2002). Measures of risk. *Journal of Banking & Finance,* 26(7):1253–1272.

COMPARING VALUE AT RISK AND EXPECTED SHORTFALL USING HISTORICAL BACKTESTING

In this paper I deal with financial risk measures and their comparison. I describe five risk measures: variance, standard deviation, semivariance, Value at Risk (VaR) and Expected Shortfall (ES). It can be proven that from these risk measures only ES satisfies the natural properties of so called coherence and according to this it is the only 'useable' risk measure. However, despite this fact, Value at Risk is nevertheless the most often used risk measure in industry. Therefore in my empirical study I compare VaR and ES. For the comparison I chose the method of historical backtesting, which is described in detail individually for VaR and for ES. The analysis has been carried out at several alpha levels, using price data of seven stocks. Considering both the theoretical and the empirical results, I came to the conclusion that ES provides a more precise picture of the risk than VaR.

CONTENTS

TARTALOM

SZIGMA
Matematikai-közgazdasági folyóirat

A Gazdaságmodellezési Társaság lapja

Főszerkesztő:

BESSENYEI ISTVÁN

PTE Közgazdaságtudományi Kar, H-7622 Pécs, Rákóczi út 80.

Tel.: 72/501–599, Fax: 72/501–553

e-mail: essenyei@ktk.pte.hu

Társszerkesztők:

FÜLÖP JÁNOS

e-mail: fulop@oplab.sztaki.hu

HUNYADI LÁSZLÓ

e-mail: laszlo.hunyadi@office.ksh.hu

KOMLÓSI SÁNDOR

e-mail: komlosi@ktk.pte.hu

KOVÁCS ERZSÉBET

e-mail: erzsebet.kovacs@uni-corvinus.hu

VÍZVÁRI BÉLA

e-mail: vizvari@cs.elte.hu

Terjeszti a Gazdaságmodellezési Társaság. A kiadvány megjelenését az MTA Könyv- és Folyóiratkiadó Bizottsága támogatta.

ISSN 0039-8128

www.szigma.ktk.pte.hu