ÁLTALÁNOSÍTOTT MONOTONITÁS ÉS ÁLTALÁNOSÍTOTT KONVEXITÁS[1]

KOMLÓSI SÁNDOR[2]
Janus Pannonius Tudományegyetem Közgazdaságtudományi Kar

Ma már nem nagyon kell bizonygatni hogy a konvexitás fogalma és különféle általánosításai milyen fontos szerepet játszanak a matematikai közgazdaságtan, gazdasági modellezés, operációkutatás legkülönfélébb területein [1, 2, 16, 21].

Ez a felismerés egyre jobban igényli az általánosított konvexitás minél sokrétűbb vizsgálatát. Hosszú időn keresztül az ezirányú vizsgálódások szinte kizárólag a differenciálható függvényekre korlátozódtak. Csak újabban, a nemdifferenciálható optimalizálás önálló diszciplínává válásával erősödtek fel a nemdifferenciálható (azaz nem szükségképpen differenciálható) függvényekre vonatkozó kutatások.

1. Bevezetés

A nemdifferenciálható esetben a gradiens vektort valamilyen célszerűen megválasztott *általánosított derivált* helyettesíti. A „legklasszikusabb" általánosított derivált az *iránymenti derivált*.

Jelöljön $f(\mathbf{x})$ egy n-változós valós függvényt, mely legyen értelmezve az $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ valamely környezetében. Ha $f(\mathbf{x})$ nem differenciálható az $\mathbf{a}$ helyen, akkor számos esetben még mindig elfogadhatóan szép és hasznos eredményekhez juthatunk az

$$f'(\mathbf{a};\mathbf{d}) := \lim_{t\to 0+} \frac{f(\mathbf{a}+t\mathbf{d}) - f(\mathbf{a})}{t}$$

iránymenti derivált létezésének megkövetelése révén, ahol $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges irány.

A konvex analízisből jól ismert a következő, a dolgozat témájának kiinduló pontjául szolgáló állítás.

1.1 Tétel *Legyen az $f(\mathbf{x})$ függvény konvex a $C \subset \mathbb{R}^n$ konvex halmazon. Ekkor igazak a következő állítások: bármely $\mathbf{x},\mathbf{y} \in C$ esetén $f'(\mathbf{y};\mathbf{x}-\mathbf{y})$*

[1] Beérkezett: 1993. január 23.
[2] Jelen tanulmány az OTKA 1313/1991 sz. pályázat támogatásával készült.

létezik,

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{y}) + f'(\mathbf{y};\mathbf{x}-\mathbf{y})$$

és

$$f'(\mathbf{y};\mathbf{x}-\mathbf{y}) + f'(\mathbf{x};\mathbf{y}-\mathbf{x}) \leq 0\,. \tag{1}$$

Ha $f(\mathbf{x})$ szigorúan konvex C-n, akkor $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ esetén (1) mindig szigorú egyenlőtlenség formájában teljesül.

Az $f'(\mathbf{x};\mathbf{d})$ iránymenti derivált (1) tulajdonságát *monotonitásnak* nevezzük. Sajnos az $f'(\mathbf{x};\mathbf{d})$ iránymenti derivált létezése nem konvex függvényekre egyáltalán nem biztosított. Sem a lokálisan Lipschitz, sem a kvázikonvex függvények[3] esetén nem garantált az iránymenti derivált létezése.

A monotonitás fogalmának általánosítása meglehetősen újkeletű. Differenciálható függvények gradiensére vonatkozóan S. Karamardian vezette be elsőként a pszeudomonotonitás fogalmát 1976-ban [7]. A. Hassouni pár évvel később, 1983-ban, lokálisan Lipschitz függvények kvázikonvexitásának jellemzésére vezette be halmazértékű függvények (szubdifferenciálok) kvázimonotonitásának fogalmát [6]. A monotonitás különböző általánosításainak jelentőségére valójában a [8] dolgozat hívta fel a figyelmet. Azóta számos cikk foglalkozott ezzel a témával. Az érdeklődő Olvasó számára hasznos lehet a következő művek tanulmányozása is [9, 10, 11, 12, 13, 14, 17, 19, 20].

Jelen dolgozat azt kívánja bemutatni, hogy a differenciálható függvények gradiens leképezéseire Karamardian és Schaible által bevezetett általánosított monotonitási fogalmakat nemdifferenciálható függvények esetére is értelmezni lehet általánosított deriváltak segítségével és ezek az általánosított monotonitási fogalmak általánosított konvexitási tulajdonságokat jellemeznek.

A következő részben a Diewert-féle középérték tételt ismertetjük, mely vizsgálódásainknak fontos segédeszköze lesz. A harmadik fejezet konvexitás és monotonitás, a negyedik fejezet kvázikonvexitás és kvázimonotonitás, az ötödik rész pedig (szigorú) pszeudokonvexitás és (szigorú) pszeudomonotonitás kapcsolatát vizsgálja.

2. A Diewert-féle középérték tétel

Jelöljön $f(\mathbf{x})$ egy n-változós valós függvényt, mely legyen értelmezve az $\mathbf{a} \in I\!R^n$ valamely környezetében. Ha $f(\mathbf{x})$ nem differenciálható irány szerint az $\mathbf{a}$ helyen, akkor sok esetben még mindig hasznos információkkal szolgálhatnak a Dini-féle felső, illetve alsó iránymenti deriváltak, melyeket a következő módon értelmezünk:

$$D^+ f(\mathbf{a};\mathbf{d}) := \limsup_{t\to 0+} \frac{f(\mathbf{a}+t\mathbf{d}) - f(\mathbf{a})}{t}$$

[3] Mindkét függvényosztály a konvex függvények általánosítása.

$$D_+f(\mathbf{a};\mathbf{d}) := \liminf_{t\to 0+} \frac{f(\mathbf{a}+t\mathbf{d}) - f(\mathbf{a})}{t}$$

A Dini-deriváltak nagy előnye, hogy mindig léteznek (abban az értelemben, hogy megengedjük értékük gyanánt a $+\infty$-t és $-\infty$-t is). A Dini deriváltak optimalizáláselméletben betöltött szerepéről széleskörű áttekintés található a [4, 5] cikkekben.

Számunkra ezek közül kiemelkedő fontossága van a következő, alulról félig folytonos függvényekre vonatkozó középérték tételnek.

A Diewert-féle középérték tétel [4, Theorem 1, Corollary 1]. *Legyen az $f(\mathbf{x})$ függvény értelmezett az $[\mathbf{y},\mathbf{z}]$ szakaszon. Legyen továbbá az $s(t) = f(\mathbf{y}+t(\mathbf{z}-\mathbf{y}))$ függvény alulról félig folytonos a $[0,1]$ intervallumon. Ekkor létezik olyan $t_0 \in [0,1)$ érték, amelyre*

$$D_+f(\mathbf{x}_0;\mathbf{z}-\mathbf{y}) \geq f(\mathbf{z}) - f(\mathbf{y})$$

teljesül, ahol $\mathbf{x}_0 = \mathbf{y} + t_0(\mathbf{z}-\mathbf{y})$.

3. Konvexitás és monotonitás

A Bevezetésben definiáltuk az iránymenti derivált monotonitásának fogalmát. Ezt a tulajdonságot és néhány általánosítását most általánosított deriváltak esetére fogalmazzuk meg.

Minden általánosított derivált egy olyan kétváltozós $h(\mathbf{x};\mathbf{d})$ függvénynek fogható fel, ahol az $\mathbf{x}$ változó egy $\mathbb{R}^n$-beli helyet, a $\mathbf{d}$ változó pedig egy $\mathbb{R}^n$-beli irányt jelent és $h(\mathbf{x};\mathbf{d})$ minden rögzített $\mathbf{x}$ esetén a $\mathbf{d}$ iránynak pozitív homogén függvénye. ($h(\mathbf{x};\mathbf{d})$ értékei gyanánt a végtelenek is megengedettek!) Jelöljön C egy tetszőleges $\mathbb{R}^n$-beli részhalmazt. A $h(\mathbf{x};\mathbf{d})$ általánosított deriváltat C-n értelmezettnek mondjuk, ha $h(\mathbf{x};\mathbf{d})$ értelmezett minden $\mathbf{x} \in C$ és $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ esetén.

3.1 Definíció *A $h(\mathbf{x};\mathbf{d})$ általánosított deriváltat monotonnak mondjuk a $C \subset \mathbb{R}^n$ halmazon, ha bármely két $\mathbf{y} \in C$, $\mathbf{z} \in C$, $\mathbf{y} \neq \mathbf{z}$ pontra*

$$h(\mathbf{y};\mathbf{z}-\mathbf{y}) + h(\mathbf{z};\mathbf{y}-\mathbf{z}) \leq 0 \tag{2}$$

teljesül. Ha bármely két $\mathbf{y} \in C$, $\mathbf{z} \in C$, $\mathbf{y} \neq \mathbf{z}$ pontra

$$h(\mathbf{y};\mathbf{z}-\mathbf{y}) + h(\mathbf{z};\mathbf{y}-\mathbf{z}) < 0 \tag{3}$$

teljesül, akkor $h(\mathbf{x};\mathbf{d})$-t C-n szigorúan monotonnak nevezzük.

A következő tétel azt mutatja, hogy bizonyos esetben a Dini-deriváltak monotonitása elegendő feltétele az adott függvény konvexitásának.

3.2 Tétel *Legyen $f(\mathbf{x})$ radiálisan alulról félig folytonos a konvex $C \subset \mathbb{R}^n$ halmazon. Ekkor igaz a következő két állítás:*

(i) Ha $D_+f(\mathbf{x};\mathbf{d})$ az alsó Dini-derivált (szigorúan) monoton C-n, akkor $f(\mathbf{x})$ (szigorúan) konvex C-n.

(ii) Ha $D^+f(\mathbf{x};\mathbf{d})$ a felső Dini-derivált (szigorúan) monoton C-n, akkor $f(\mathbf{x})$ (szigorúan) konvex C-n.

Bizonyítás: (i) Indirekt módon okoskodva tegyük fel, hogy $D_+f(\mathbf{x};\mathbf{d})$ monoton ugyan C-n, de $f(\mathbf{x})$ nem konvex a C halmazon. Ekkor létezik olyan $[\mathbf{a},\mathbf{b}] \subset C$ szakasz és azon egy olyan $\mathbf{w} \in (\mathbf{a},\mathbf{b})$ pont, hogy

$$f(\mathbf{w}) > rf(\mathbf{b}) + (1-r)f(\mathbf{a}) , \tag{4}$$

ahol

$$\mathbf{w} = \mathbf{a} + r(\mathbf{b}-\mathbf{a}), \quad 0 < r < 1 . \tag{5}$$

A (4) egyenlőtlenségből egyszerű átalakítással a következő két egyenlőtlenséghez jutunk:

$$\frac{f(\mathbf{w}) - f(\mathbf{a})}{r} > f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a})$$

és

$$\frac{f(\mathbf{w}) - f(\mathbf{b})}{1-r} > f(\mathbf{a}) - f(\mathbf{b}) .$$

A Diewert-féle középérték tételt az $[\mathbf{a},\mathbf{w}]$ és $[\mathbf{b},\mathbf{w}]$ szakaszokon az $f(\mathbf{x})$ függvényre alkalmazva azt kapjuk, hogy léteznek olyan $\mathbf{y} \in [\mathbf{a},\mathbf{w})$ és $\mathbf{z} \in [\mathbf{b},\mathbf{w})$ pontok, hogy

$$D_+f(\mathbf{y};\mathbf{w}-\mathbf{a}) \geq f(\mathbf{w}) - f(\mathbf{a}) , \tag{7}$$

$$D_+f(\mathbf{z};\mathbf{w}-\mathbf{b}) \geq f(\mathbf{w}) - f(\mathbf{b}) . \tag{8}$$

Tekintettel arra, hogy $D_+f(\mathbf{x};\mathbf{d})$ pozitív homogén a $\mathbf{d}$ változójában, továbbá, hogy

$$\mathbf{w}-\mathbf{a} = r(\mathbf{b}-\mathbf{a}) \quad \text{és} \quad \mathbf{w}-\mathbf{b} = (1-r)(\mathbf{a}-\mathbf{b}) ,$$

ezért (7) és (8) a következőképpen is írható:

$$D_+f(\mathbf{y};\mathbf{b}-\mathbf{a}) \geq \frac{f(\mathbf{w}) - f(\mathbf{a})}{r} ,$$

$$D_+f(\mathbf{z};\mathbf{a}-\mathbf{b}) \geq \frac{f(\mathbf{w}) - f(\mathbf{b})}{1-r} .$$

Felhasználva a (6) egyenlőtlenséget

$$D_+f(\mathbf{y};\mathbf{b}-\mathbf{a}) > f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) \quad \text{és} \quad D_+f(\mathbf{z};\mathbf{a}-\mathbf{b}) > f(\mathbf{a}) - f(\mathbf{b})$$

adódik. Ezen két egyenlőtlenség összeadásával a

$$D_+f(\mathbf{y};\mathbf{b}-\mathbf{a})+D_+f(\mathbf{z};\mathbf{a}-\mathbf{b})>0$$

összefüggésre jutunk, mely ekvivalens a $D_+f(\mathbf{x};\mathbf{d})$ monotonitásának ellentmondó

$$D_+f(\mathbf{y};\mathbf{z}-\mathbf{y})+D_+f(\mathbf{z};\mathbf{y}-\mathbf{z})>0$$

feltétellel. Ez az ellentmondás bizonyítja az (i) állítás helyességét. A szigorú monotonitás esete teljesen hasonlóan tárgyalható.

A (ii) állítás helyessége az imént bizonyított (i) állításból, valamint a következő lemmából közvetlenül adódik, tekintettel a $D_+f(\mathbf{a};\mathbf{d})\le D^+f(\mathbf{a};\mathbf{d})$ relációra.

3.3 Lemma *Legyenek $h(\mathbf{x};\mathbf{d})$ és $g(\mathbf{x};\mathbf{d})$ a $C\subset\mathbb{R}^n$ halmazon értelmezett általánosított deriváltak. Tegyük fel, hogy $h(\mathbf{x};\mathbf{d})$ majorálja $g(\mathbf{x};\mathbf{d})$-t a C halmazon, vagyis minden $\mathbf{x}\in C$ és $\mathbf{d}\in\mathbb{R}^n$ esetén fennáll a következő egyenlőtlenség:*

$$g(\mathbf{x};\mathbf{d})\le h(\mathbf{x};\mathbf{d})\ .$$

Ekkor, ha $h(\mathbf{x};\mathbf{d})$ (szigorúan) monoton C-n, akkor $g(\mathbf{x};\mathbf{d})$ is (szigorúan) monoton C-n.

A bizonyítás nagyon egyszerű, végiggondolását a Tisztelt Olvasóra hagyom. A fenti lemma és az azt megelőző tétel további érdekes következményekkel jár.

Ismert dolog, hogy lokálisan Lipschitz függvényekre a Clarke-derivált számos jó tulajdonsággal rendelkezik (véges és az iránynak pozitív homogén konvex függvénye). A Clarke derivált definíciója a következő:

$$f^C(\mathbf{a},\mathbf{d})=\limsup_{\substack{z\to a\\ t\to 0^+}}\frac{f(\mathbf{z}+t\mathbf{d})-f(\mathbf{z})}{t}\ .$$

Könnyen ellenőrizhető a következő relációk helyessége:

$$D_+f(\mathbf{x},\mathbf{d})\le D^+f(\mathbf{x},\mathbf{d})\le f^C(\mathbf{x},\mathbf{d})\ . \tag{9}$$

A 3.3 Lemma, a 3.2 Tétel valamint (9) alapján könnyen igazolható a következő tétel, mely lokálisan Lipschitz függvények esetére F. Clarke-tól származik [3]. (F. Clarke-nál a lokálisan Lipschitz függvényekre vonatkozó Lebourg-féle középérték tétel játszotta a fő szerepet.)

3.4 Tétel *Legyen $f(\mathbf{x})$ radiálisan alulról félig folytonos a konvex K halmazon. Ha az $f^C(\mathbf{x},\mathbf{d})$ Clarke-derivált (szigorúan) monoton K-n, akkor maga az $f(\mathbf{x})$ függvény (szigorúan) konvex ugyanott.*

4. Kvázikonvexitás és kvázimonotonitás

Ebben a részben a kvázikonvexitást fogjuk jellemezni általánosított deriváltak kvázimonotonitásával.

Emlékeztetőül felidézzük a kvázikonvexitás fogalmát: az $f(\mathbf{x})$ függvényt a $C \subset I\!R^n$ konvex halmazon *kvázikonvexnek* nevezzük, ha rendelkezik a következő tulajdonsággal:

minden $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C$ *és* $t \in [0,1]$ *esetén*

$$\text{(QCX)} \qquad f(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}) \leq \max\{f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})\}\,.$$

A definíció közvetlen következményeként adódnak a következő állítások:

4.1 Tétel *Legyen $f(\mathbf{x})$ kvázikonvex a konvex C halmazon. Ekkor $f(\mathbf{x})$ C-n a következő két tulajdonság mindegyikével rendelkezik:*

$$\text{QCX(UDini)}: \qquad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in C, \quad f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{y}) \;\Rightarrow\; D^+ f(\mathbf{y}, \mathbf{x}-\mathbf{y}) \leq 0\,,$$

$$\text{QCX(LDini)}: \qquad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in C, \quad f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{y}) \;\Rightarrow\; D_+ f(\mathbf{y}, \mathbf{x}-\mathbf{y}) \leq 0\,,$$

Általában a QCX(UDini) és QCX(LDini) feltételek nem elegendő feltételei $f(\mathbf{x})$ kvázikonvexitásának. Igazolható azonban a következő állítás [4].

4.2 Tétel *Legyen $f(\mathbf{x})$ alulról félig folytonos a konvex C halmazon. Ekkor*

$$\text{(QCX)} \iff \text{QCX(UDini)} \iff \text{QCX(LDini)}.$$

Most bevezetjük a kvázimonotonitás fogalmát és rátérünk a kvázikonvexitással való kapcsolatának vizsgálatára.

4.3 Definíció *A $h(\mathbf{x}; \mathbf{d})$ általánosított deriváltat kvázimonotonnak mondjuk a $C \subset I\!R^n$ halmazon, ha bármely két $\mathbf{y} \in C$, $\mathbf{z} \in C$, $\mathbf{y} \neq \mathbf{z}$ pontra teljesül a következő implikáció:*

$$\text{(QM)}: \qquad h(\mathbf{z}; \mathbf{y}-\mathbf{z}) > 0 \;\Rightarrow\; h(\mathbf{y}; \mathbf{z}-\mathbf{y}) \leq 0\,.$$

A következő tételek mutatják, hogy kvázikonvex függvények bizonyos általánosított deriváltjai rendelkeznek a most bevezetett tulajdonsággal.

4.4 Tétel *Legyen $f(\mathbf{x})$ kvázikonvex a $C \subset I\!R^n$ konvex halmazon. Ekkor igaz a következő két állítás mindegyike:*

(i) a $D^+f(\mathbf{x};\mathbf{d})$ *Dini-derivált kvázimonoton* C*-n,*

(ii) a $D_+f(\mathbf{x};\mathbf{d})$ *Dini-derivált kvázimonoton* C*-n.*

Bizonyítás: (i): A 4.1 Tétel szerint $f(\mathbf{x})$ rendelkezik C-n a QCX(UDini) tulajdonsággal. Tegyük fel, hogy $\mathbf{x},\mathbf{y} \in C$-re $D^+f(\mathbf{y};\mathbf{x}-\mathbf{y}) > 0$ teljesül. A QCX(UDini) tulajdonság szerint $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{y})$ nem lehetséges, következésképpen $f(\mathbf{y}) < f(\mathbf{x})$. A QCX(UDini) tulajdonság szerint azonban ez csak úgy lehet, ha $D^+f(\mathbf{x};\mathbf{y}-\mathbf{x}) \leq 0$.

(ii): Mivel $D_+f(\mathbf{x};\mathbf{d}) \leq D^+f(\mathbf{x};\mathbf{d})$ minden $\mathbf{x} \in C$ és $\mathbf{d} \in I\!R^n$ esetén, ezért a (ii) állítás helyessége közvetlenül következik (i)-ből és a következő lemmából.

4.5 Lemma *Legyenek* $h(\mathbf{x};\mathbf{d})$ *és* $g(\mathbf{x};\mathbf{d})$ *a* $C \subset I\!R^n$ *halmazon értelmezett általánosított deriváltak. Tegyük fel, hogy* $h(\mathbf{x};\mathbf{d})$ *majorálja* $g(\mathbf{x};\mathbf{d})$*-t a* C *halmazon, vagyis minden* $\mathbf{x} \in C$ *és* $\mathbf{d} \in I\!R^n$ *esetén fennáll a következő egyenlőtlenség:*

$$g(\mathbf{x};\mathbf{d}) \leq h(\mathbf{x};\mathbf{d}) \,.$$

Ekkor, ha $h(\mathbf{x};\mathbf{d})$ *kvázimonoton* C*-n, akkor* $g(\mathbf{x};\mathbf{d})$ *is kvázimonoton* C*-n.*

A bizonyítás nagyon egyszerű, végiggondolását a Tisztelt Olvasóra hagyom. A 4.4 Tétel állítása bizonyos esetben megfordítható.

4.6 Tétel *Legyen* $f(\mathbf{x})$ *radiálisan alulról félig folytonos a* $C \subset I\!R^n$ *konvex halmazon. A következő feltételek bármelyike biztosítja* $f(\mathbf{x})$ *kvázikonvexitását* C*-n.*

(i) $D_+f(\mathbf{x};\mathbf{d})$ *kvázimonoton* C*-n,*

(ii) $D^+f(\mathbf{x};\mathbf{d})$ *kvázimonoton* C*-n,*

(iii) $f^C(\mathbf{x};\mathbf{d})$ *kvázimonoton* C*-n.*

Bizonyítás: (i) Legyen $D_+f(\mathbf{x};\mathbf{d})$ kvázimonoton C-n. Indirekt módon okoskodva tegyük fel, hogy $f(\mathbf{x})$ nem kvázikonvex C-n. Ez azt jelenti, hogy létezik három olyan különböző pont C-ben, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$, hogy $\mathbf{c}$ belső pontja az $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ szakasznak és

$$f(\mathbf{c}) > \max\{f(\mathbf{a}), f(\mathbf{b})\} \,. \tag{10}$$

A Diewert-féle középértéktétel szerint létezik az $[\mathbf{a},\mathbf{c})$ szakaszon egy olyan $\mathbf{u}$ pont és a $[\mathbf{b},\mathbf{c})$ szakaszon egy olyan $\mathbf{w}$ pont, hogy

$$D_+f(\mathbf{u};\mathbf{c}-\mathbf{a}) \geq f(\mathbf{c}) - f(\mathbf{a}) > 0 \,,$$

$$D_+f(\mathbf{w};\mathbf{c}-\mathbf{b}) \geq f(\mathbf{c}) - f(\mathbf{b}) > 0 \,.$$

Tekintettel arra, hogy a Dini-derivált az irány változójában pozitív homogén, ezért a fenti egyenlőtlenségekből közvetlenül kapjuk, hogy

$$D_+f(\mathbf{u};\mathbf{w}-\mathbf{u}) > 0 \quad \text{és} \quad D_+f(\mathbf{w};\mathbf{u}-\mathbf{w}) > 0 \,.$$

Ez azonban ellentmond a kvázimonotonitásnak. Ez az ellentmondás az (i) állítás helyességét igazolja.

A (ii) és (iii) állítások a $D_+f(\mathbf{x};\mathbf{d}) \leq D^+f(\mathbf{x};\mathbf{d}) \leq f^C(\mathbf{x};\mathbf{d})$ relációk, a 4.5 Lemma és az imént bizonyított (i) rész közvetlen következményei.

5. Pszeudokonvexitás és pszeudomonotonitás

A kvázikonvexitás függvénytulajdonság szerencsés módon őrzi a konvex függvények azon nevezetes tulajdonságát, mely szerint ha az $f(\mathbf{x})$ függvény konvex a $C \subset I\!R^n$ konvex halmazon, akkor az

$$\{\,\mathbf{x} \in C, f(\mathbf{x}) \leq \alpha\,\}$$

alsó nívóhalmaz bármely $\alpha \in I\!R$ esetén konvex. A kvázikonvexitás azonban sajnálatos módon nem őrzi azt a differenciálható konvex függvényekre jellemző jó tulajdonságot, mely szerint a stacionaritás a globális minimum létezésének elegendő feltétele. Ennek a hiányosságnak a korrigálására vezette be O. L. Mangasarian a pszeudokonvexitás fogalmát differenciálható függvényekre [15]. Több próbálkozás is történt, hogy ezt a fogalmat tetszőleges függvényekre is kiterjesszék. A legkevésbbé restriktív definíció W. E. Diewerttől ered [4].

5.1 Definíció *Legyen az $f(\mathbf{x})$ függvény értelmezett a $C \subset I\!R^n$ konvex halmazon. $f(\mathbf{x})$-et C-n (szigorúan) pszeudokonvexnek nevezzük, ha rendelkezik a következő tulajdonsággal:*

$$\text{(PCX)}: \qquad \mathbf{x},\mathbf{a} \in C,\ f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{a}) \Rightarrow D_+f(\mathbf{a};\mathbf{x}-\mathbf{a}) < 0 \,.$$

$$\text{(SPCX)}: \qquad \mathbf{x},\mathbf{a} \in C,\ \mathbf{x} \neq \mathbf{a},\ f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a}) \Rightarrow D_+f(\mathbf{a};\mathbf{x}-\mathbf{a}) < 0 \,.$$

Ellentétben a differenciálható függvények esetével, tetszőleges függvényekre a pszeudokonvexitás nem feltétlenül biztosítja a kvázikonvexitást. Az alulról félig folytonos függvények osztályában azonban sokkal kedvezőbb a kép [4].

5.2 Tétel *Legyen $f(\mathbf{x})$ radiálisan alulról félig folytonos a $C \subset I\!R^n$ konvex halmazon. Ekkor teljesülnek a következő implikációk:*

$$\text{(SPCX)} \Rightarrow \text{(PCX)} \Rightarrow \text{(QCX)} \,.$$

A továbbiakban azt vizsgáljuk, hogy (szigorúan) pszeudokonvex függvények bizonyos általánosított deriváltjai milyen monotonitási tulajdonságokkal jellemezhetők. Ehhez szükségünk van a következő fogalmakra.

5.3 Definíció *A $h(\mathbf{x};\mathbf{d})$ általánosított deriváltat (szigorúan) pszeudomonotonnak mondjuk a $C \subset \mathbb{R}^n$ halmazon, ha bármely két $\mathbf{y} \in C$, $\mathbf{z} \in C$, $\mathbf{y} \neq \mathbf{z}$ pontra teljesül a következő implikáció:*

$$(\mathrm{PM}): \qquad h(\mathbf{z};\mathbf{y}-\mathbf{z}) \geq 0 \;\Rightarrow\; h(\mathbf{y};\mathbf{z}-\mathbf{y}) \leq 0\,,$$

illetve

$$(\mathrm{SPM}): \qquad h(\mathbf{z};\mathbf{y}-\mathbf{z}) \geq 0 \;\Rightarrow\; h(\mathbf{y};\mathbf{z}-\mathbf{y}) < 0\,.$$

A következő tételek mutatják, hogy pszeudokonvex függvények bizonyos általánosított deriváltjai rendelkeznek a most bevezetett tulajdonságokkal.

5.4 Tétel *Legyen $f(\mathbf{x})$ radiálisan alulról félig folytonos és (szigorúan) pszeudokonvex a $C \subset \mathbb{R}^n$ konvex halmazon. Ekkor igaz a következő állítás: a $D_+f(\mathbf{x};\mathbf{d})$ Dini-derivált (szigorúan) pszeudomonoton C-n.*

Bizonyítás: (i): Tegyük fel, hogy $f(\mathbf{x})$ rendelkezik C-n a (PCX) tulajdonsággal, továbbá, hogy $\mathbf{x},\mathbf{y} \in C$-re $D_+f(\mathbf{y};\mathbf{x}-\mathbf{y}) \geq 0$ teljesül. A (PCX) tulajdonság szerint $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{y})$ nem lehetséges, következésképpen $f(\mathbf{y}) \leq f(\mathbf{x})$. Az 5.2 Tétel szerint esetünkben $f(\mathbf{x})$ rendelkezik C-n a (QCX) tulajdonsággal is, mely szerint az $f(\mathbf{y}) \leq f(\mathbf{x})$ relációból $D_+f(\mathbf{x};\mathbf{y}-\mathbf{x}) \leq 0$ következik. A szigorú pszeudokonvexitás esete teljesen hasonlóan tárgyalható.

A (szigorú) pszeudomonotonitás esetében is egyszerűen igazolható a következő „összehasonlító kritérium".

5.5 Lemma *Legyenek $h(\mathbf{x};\mathbf{d})$ és $g(\mathbf{x};\mathbf{d})$ a $C \subset \mathbb{R}^n$ halmazon értelmezett általánosított deriváltak. Tegyük fel, hogy $h(\mathbf{x};\mathbf{d})$ majorálja $g(\mathbf{x};\mathbf{d})$-t a C halmazon, vagyis minden $\mathbf{x} \in C$ és $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ esetén fennáll a következő egyenlőtlenség:*

$$g(\mathbf{x};\mathbf{d}) \leq h(\mathbf{x};\mathbf{d})\,.$$

Ekkor, ha $h(\mathbf{x};\mathbf{d})$ (szigorúan) pszeudomonoton C-n, akkor $g(\mathbf{x};\mathbf{d})$ is (szigorúan) pszeudomonoton C-n.

A következőkben az előző tétel állításának megfordíthatóságát mutatjuk meg.

5.6 Tétel *Legyen $f(\mathbf{x})$ radiálisan alulról félig folytonos a $C \subset \mathbb{R}^n$ konvex halmazon. A következő feltételek bármelyike biztosítja $f(\mathbf{x})$ (szigorú) pszeudokonvexitását C-n.*

(i) $D_+f(\mathbf{x};\mathbf{d})$ *(szigorúan) pszeudomonoton C-n,*

(ii) $D^+f(\mathbf{x};\mathbf{d})$ *(szigorúan) pszeudomonoton C-n,*

(iii) $f^C(\mathbf{x};\mathbf{d})$ *(szigorúan) pszeudomonoton C-n.*

Bizonyítás: (i) Legyen $D_+f(\mathbf{x};\mathbf{d})$ pszeudomonoton C-n. Indirekt módon okoskodva tegyük fel, hogy $f(\mathbf{x})$ nem pszeudokonvex C-n. Ez azt jelenti, hogy létezik két olyan különböző pont C-ben, $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$, hogy

$$f(\mathbf{a}) < f(\mathbf{b}) \quad \text{és} \quad D_+f(\mathbf{b};\mathbf{a}-\mathbf{b}) \geq 0 . \tag{11}$$

A Diewert-féle középértéktétel szerint létezik az $[\mathbf{a},\mathbf{b})$ szakaszon egy olyan $\mathbf{c}$ pont, hogy

$$D_+f(\mathbf{c};\mathbf{b}-\mathbf{a}) \geq f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) > 0 . \tag{12}$$

Tekintettel arra, hogy a Dini-derivált az irány változójában pozitív homogén, ezért a (11) és (12) egyenlőtlenségekből közvetlenül kapjuk, hogy $\mathbf{c} \neq \mathbf{b}$ és

$$D_+f(\mathbf{b};\mathbf{c}-\mathbf{b}) \geq 0 \quad \text{és} \quad D_+f(\mathbf{c};\mathbf{b}-\mathbf{c}) > 0 .$$

Ez azonban ellentmond a pszeudomonotonitásnak. Ez az ellentmondás az (i) állítás helyességét igazolja. A szigorú változat bizonyítása teljesen hasonlóan történik.

A (ii) és (iii) állítások a $D_+f(\mathbf{x};\mathbf{d}) \leq D^+f(\mathbf{x};\mathbf{d}) \leq f^C(\mathbf{x};\mathbf{d})$ relációk, az 5.5 Lemma és az imént bizonyított (i) rész közvetlen következményei.

Záró megjegyzések

Ebben a dolgozatban kizárólag csak általánosított deriváltak általánosított monotonitási tulajdonságaival foglalkoztam. A Hassouni által szubdifferenciál leképezésekre (halmazértékű függvényekre) bevezetett kvázimonotonitás mellett értelmezni lehet szubdifferenciál leképezések pszeudomonotonitását és szigorú pszeudomonotonitását is. [10, 13, 14].

Ezek az új fogalmak hasznosak lehetnek egyensúlyi modellek, komplementaritási-modellek és variációs egyenlőtlenségek egzisztencia problémáinak vizsgálatában. Ezt a kérdéskört egy későbbi dolgozatomban szándékozom bemutatni.

Irodalom

1. AVRIEL, M., DIEWERT, W. E., SCHAIBLE, S., ZIEMBA, W. T., Generalized Concavity, Plenum Press, New York, 1988.
2. CAMBINI, A., CASTAGNOLI, E., MARTEIN, L., MAZZOLENI, P., SCHAIBLE, S., Generalized Convexity and Fractional Programming with Economic Applications, Springer Verlag, Heidelberg, 1990.
3. CLARKE, F. H., Optimization and Nonsmooth Analysis, Wiley and Sons, New York, 1983.
4. DIEWERT, W. E. „Alternative characterizations of six kinds of quasiconcavity in the nondifferentiable case with applications to nonsmooth programming" in: S. Schaible, W. T. Ziemba (eds.) Generalized Concavity in Optimization and Economics, Academic Press, New York, 1981.
5. GIORGI, G. - KOMLÓSI, S., "Dini derivatives in Optimization", University of Torino, Serie III, N.60 (1991) pp. 44. To be published in two parts in the Rivista A.M.A.S.E.S.
6. HASSOUNI, A., „Sous-differentiels des fonctions quasi-convexes", Thése de 3^0 cycle de l'Universitè Paul Sabatier, 1983.
7. KARAMARDIAN, S., „Complementarity Over Cones with Monotone and Pseudomonoton Maps", JOTA 18 (1976) 445–454.
8. KARAMARDIAN, S. – SCHAIBLE, S., „Seven kinds of monotone maps", JOTA 66 (1990) 37–46.
9. KARAMARDIAN, S., SCHAIBLE, S., CROUZEIX, J. P., „Characterizations of Generalized Monotone Maps", JOTA, 76 (1993) 399–413.
10. KOMLÓSI, S., „Generalized monotonicity of generalized derivatives" Working Paper, Janus Pannonius University, Pécs; 1991, pp. 8.
11. KOMLÓSI, S., „On generalized upper quasidifferentiability" in: F. Giannessi (ed.) Nonsmooth Optimization: Methods and Applications, Gordon and Breach, London, 1992, pp. 189–201.
12. KOMLÓSI, S., „Generalized monotonicity of generalized derivatives" in: P. Mazzoleni (ed.) Proceedings of the Workshop on Generalized Concavity for Economic Applications held in Pisa April 2, 1992, (Verona, 1992), pp. 1–7.
13. KOMLÓSI, S., „Generalized Monotonicity in Nonsmooth Analysis", in: S. Komlósi, T. Rapcsák, S. Schaible (eds.) Proceedings of the IVth International Workshop on Generalized Convexity, Springer Verlag, Heidelberg, 1993 (to appear).
14. KOMLÓSI, S., „Generalized monotonicity and generalized convexity" WP 1992., MTA SZTAKI, to appear in JOTA.
15. MANGASARIAN, O. L., „Pseudoconvex Functions", SIAM Journal on Control 3 (1965), 281–290.
16. MARTOS, B., Nonlinear programming: theory and methods, North Holland (Amsterdam, 1975).

17. PINI, R.-SCHAIBLE, S., ,,Some invariance properties of generalized monotone maps", in: P. Mazzoleni (ed.) Proceedings of the Workshop on Generalized Concavity for Economic Applications held in Pisa April 2, 1992, (Verona, 1992), pp. 87–89.
18. ROCKAFELLAR, R. T., The Theory of Subgradients and its Applications to Problems of Optimization: Convex and Nonconvex Functions, Heldermann Verlag, Berlin, 1981.
19. SCHAIBLE, S., ,,Generalized monotone maps" in: F.Giannessi (ed.) Nonsmooth Optimization: Methods and Applications, Gordon and Breach, London, 1992, pp. 392–408.
20. SCHAIBLE, S., ,,Generalized monotone maps – a survey", in: S. Komlósi, T. Rapcsák, S. Schaible (eds.) Proceedings of the IVth International Workshop on Generalized Convexity, Springer Verlag, Heidelberg, 1993 (to appear).
21. SCHAIBLE, S., ZIEMBA, W. T., (eds.) Generalized Concavity in Optimization and Economics, Academic Press, New York, 1981.

GENERALIZED MONOTONICITY AND GENERALIZED CONVEXITY

Generalized monotonicity of generalized derivatives is a rather new concept in optimization and nonlinear analysis. It is shown in the present paper how convexity, quasiconvexity, pseudoconvexity and strict pseudoconvexity can be characterized via the monotonicity, quasimonotonicity, pseudomonotonicity and strict pseudomonotonicity of the lower and upper Dini derivatives and the Clarke derivative.