

M. KALECKI KONJUNKTÚRACIKLUS-MODELLJÉNEK MATEMATIKAI BÍRÁLATA¹

FÜLÖP PÉTER

egyetemi hallgató, Budapesti Közgazdaságtudományi Egyetem

Dolgozatomban Michal Kalecki „A Konjunktúraciklus” című tanulmányában (lásd Kalecki (1980) 184–200. o.) megfogalmazott konjunktúraciklus-moddellel foglalkozom. A probléma megközelítésénél, az alkalmazott vizsgálati módszer-nél irányadó volt számomra R. Frisch tanulmánya (Frisch (1935)), valamint G. Gandolfo könyve (Gandolfo (1980)). Ennek a megközelítésnek a lényege az, hogy a modell működésének a matematikai alapjait vizsgálja, és ebből von le bizonyos következtetéseket a modell egészére vonatkozólag. Így írásom is főleg a modell matematikai részével, ill. az eredményekből lesűrhető következtetésekkel foglalkozik. A modell közgazdasági részét ismertnek tételezem fel, és csak a vizsgálat szempontjából legszükségesebbet tárgyalom a bevezetés utáni részében. A modell közgazdaságtani alapjaival részletesen foglalkozik Kalecki (1980), Kalecki (1954) és Feiwel (1975). Annak ellenére, hogy elsősorban matematikai eszközöket használok, úgy gondolom, a vizsgálat messzemenően közgazdaságtani vonatkozású. Segít ugyanis valamelyest mélyebben feltárni egy közgazdaságtani modell belső összefüggéseit, és ezáltal talán segíthet megtalálni helyét a közgazdaságtani gondolkodásban.

Néhány szóval megelőlegezve a végkövetkeztetést, a dolgozat a következő álláspontot kívánja igazolni: a modell nemcsak, hogy nem stabil – függetlenül a paraméterektől és a kezdeti függvényről, hanem még a megoldás exponenciális korlátossága is nagyon nehezen érhető el. Más szavakkal: nem tudjuk úgy megadni a rendszer paramétereit, hogy a rendszer – minden külső hatástól függetlenül – mozgása csillapított legyen.

Itt szeretnék köszönetet mondani Elbert Árpádnak, aki vállalva a fáradságos és nagy türelmet igénylő tanításonkat lehetővé tette a dolgozat megszületését. Míg az esetleges eredmények az ő segítségének tudhatók be, addig a hiányosságok és hibák természetesen engem terhelnek. Meg szeretném köszönni csoporttársamnak, Fábian Attilának az eredmények ellenőrzésében vállalt közreműködését. Köszönettel tartozom a dolgozat ismeretlen bírálójának is. Véleményének figyelembe vétele több hibát, pontatlanságot és félreértési lehetőséget küszöbölt ki.

¹Beérkezett: 1993. január 23.

A modell alapjai

Mint ismeretes, Kalecki munkássága során három konjunktúraciklus-modellt dolgozott ki. (Mindhárom megtalálható Kalecki (1980)-ben.) Az elsőt 1933-ban, a másodikat 1943-ban, ill. 1954-ben, a harmadikat 1968-ban publikálta. Mindhárom modellben közös, hogy a gazdasági tevékenység szintjét – végső soron – a beruházásokra vezeti vissza. Míg az első két modell lényegében egy trendektől mentes gazdaságot vizsgál, a harmadikba be van építve a gazdaság hosszú távú növekedése is. (A trendet Kalecki már a „Konjunktúraciklus” című tanulmányában megemlíti, itt azonban – úgy vélem – az elemzés jellege alapvetően stacionárius.)

Ez a dolgozat Kalecki második – azaz a „Konjunktúraciklus” című tanulmányában megjelent – konjunktúraciklus modelljével foglalkozik. Természetesen a modell nem érthető meg egyedül ez alapján a tanulmány alapján, szükséges hozzá egyéb írások ismerete is (Kalecki (1980), Kalecki (1954)).

A kiinduló feltevés alapján a külkereskedelem és a költségvetés kiegyensúlyozott, valamint a munkásoknak nincsenek megtakarításaik. Ilyen feltételek mellett a gazdasági tevékenység szintjét meghatározó beruházásokra – Kalecki szerint – egy bizonyos időkéssedelemmel, az alábbiak hatnak:

- megtakarítások és ezen keresztül a beruházások (hisz a feltételek alapján a kettő megegyezik egymással);
- az adózás utáni profit, melyet a beruházások, a tőkések fogyasztása és a profit valamint a fogyasztás fennálló aránya határoz meg;
- a magánszektor bruttó terméke, melyet befolyásol az adók rendszere és az egyéb, a jövedelem elosztását befolyásoló tényező, valamint maga a jövedelem.

Mivel mindhárom tényező kifejezhető a beruházások segítségével, azt kapjuk, hogy a gazdasági tevékenység szintjét a beruházások határozzák meg. Bizonyos egyszerűsítő feltevéseket alkalmazva, valamint bevezetve a nettó beruházást (i), mely a beruházás és az értékcsökkenés különbségeként van értelmezve, a következő egyenlethez jutunk:

$$i(t + \theta) = \frac{a}{1 + c} i(t) + \mu i'(t - \omega),$$

ahol tehát i a nettó beruházás, a , c és μ a modell együtthatói, θ és ω az idő siettetési és késleltetési adatai, $'$ pedig az idő szerinti differenciálás operátora.

Ebben a modellben ez az egyenlet az, amely meghatározza a gazdasági tevékenység szintjét. Részletesebben lásd erről Kalecki (1980), Kalecki (1954) és Feiwel (1975).

Ennek az egyenletnek a vizsgálata során Kalecki a következő két következtetésre jut:

- ha μ nő - a többi paraméter változatlanságát feltételezve, az ingadozások robbanásszerűkké, ill. ha μ csökken, csillapítottakká válnak (Kalecki (1980) 195. o.);
- a rendszer alapmechanizmusától elválaszthatatlan a csillapodás (uo. 197. o.).

A dolgozat ennek a két állításnak a cáfolatával foglalkozik.

Az egyenlet megoldása

Tekintsük tehát az

$$i(t + \theta) = \eta i(t) + \mu'(t - \omega) \quad (1)$$

ún. „előresiető” (advanced) típusú differenciál-differencia egyenletet, ahol $\eta = a/(1 + c)$, valamint $0 < \eta < 1$ és $\mu > 0$. Az ilyen egyenletek megoldását általában az

$$y(t) = e^{\lambda t}$$

alakban szokás keresni. Ekkor (1) a következőképpen írható fel:

$$e^{\lambda(t+\theta)} = \eta e^{\lambda t} + \mu \lambda e^{\lambda(t-\omega)} \quad (2)$$

azaz:

$$e^{\lambda\theta} = \eta + \mu \lambda e^{-\lambda\omega} \quad (3)$$

A (3) egyenlet megoldását a komplex számsíkon az

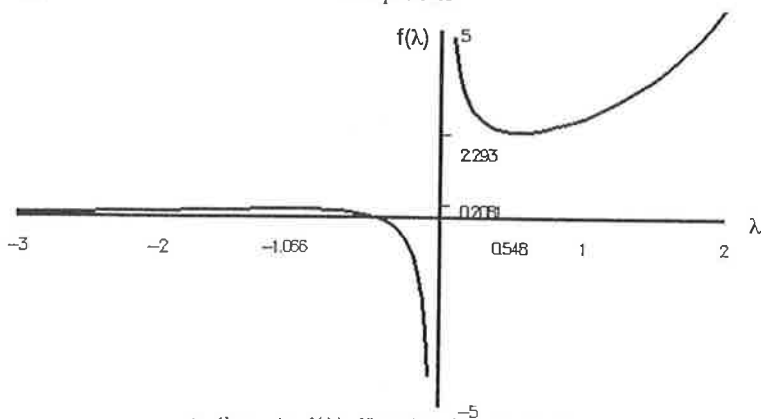
$$F(\lambda) = \eta + \mu \lambda e^{-\lambda\omega} - e^{\lambda\theta} \quad (4)$$

komplex változós valós együtthatós függvény gyökei adják, és attól függően, hogy (4)-nek véges vagy végtelen sok gyöke van, a

$$\sum_k c_k e^{\lambda_k t} \quad (5)$$

alakban felírt általános megoldás egy véges vagy végtelen tagú szumma. Ugyanakkor, mivel (4) valós együtthatós, bármely megoldásának konjugáltja is megoldás. Elég tehát csak a pozitív előjelű képzetes résszel rendelkező megoldásokat vizsgálnunk.

Az (1) egyenlet megoldása során külön figyelmet érdemel az, hogy milyen együtthatók mellett tudunk olyan kezdeti függvényt megadni, hogy a



1. ábra: Az $f(\lambda)$ függvény és szélsőértékei

megoldás ne ciklikus jellegű mozgást eredményezzen. Mivel az ilyen jellegű mozgások a (4) függvény valós gyökeihez kapcsolódnak, a valós és a komplex gyököket külön vizsgáljuk.

Még mielőtt ezt megtennénk, az (1) egyenlet bizonyos paramétereinek értékeit kell adnunk. Kalecki η , ω és θ értékeire becsléseket ad. Válasszuk ki az $\eta = 0,634$, $\omega = 0,25$ és a $\theta = 1$ értékeket. (Kalecki [1980] 57. o., ill. 111–112. o.)

A valós megoldások

A (3) egyenletből átrendezéssel kapjuk az

$$(e^{\lambda(\theta+\omega)} - \eta e^{\lambda\omega})/\lambda = \mu \quad (6)$$

egyenletet. Az egyenlet valós megoldásait nyilvánvalóan az

$$f(\lambda) = (e^{\lambda(\theta+\omega)} - \eta e^{\lambda\omega})/\lambda$$

valós függvény és a λ tengelytől μ távolságra lévő a λ tengellyel párhuzamos egyenes metszéspontjai adják. Az $f(\lambda)$ függvényt a fentebb megadott együtt-hatók mellett az 1. ábra szemlélteti.

Az ábrán jól látható, hogy $0 < \mu \leq 0,2081$ és $\mu \geq 2,293$ esetén választhatjuk meg úgy a kezdeti függvényt, hogy a rendszer mozgása ne legyen ciklikus. Az első esetben exponenciálisan csökkenő, a második esetben exponenciálisan növekvő megoldást állíthatunk elő a kezdeti függvény megfelelő megválasztásával. Ez a lehetőség azonban csak elvi, hisz a rendszer – a későbbiekben

igazolt – instabilitása lehetetlenné tesz bármilyen, a kezdeti függvényhez hasonló megoldást. A 7. és a 8. ábra két exponenciális kezdeti függvényvel indított futtatást szemléltet.

Komplex megoldások

A minket igazán érdeklő ciklikus mozgásokat a (4) komplex változós, valós együtthatós függvény komplex gyökei adják. Először a $0,2081 < \mu < 2,293$ értékekre egy-egy komplex megoldást (lásd a pont), majd egy konkrét μ -höz kiszámítjuk az összes megoldást (lásd b pont).

(a)

Legyen tehát $\lambda = \beta + i\alpha$. Ekkor felhasználva Euler képletét

$$e^{(\beta+i\alpha)t} = e^{\beta t}(\cos(\alpha t) + i \sin(\alpha t)),$$

és elvégezve a szükséges átalakításokat, (4) függvényre a következőt kapjuk:

$$F(\beta + i\alpha) = \eta + \mu\beta e^{-\beta\omega} \cos(\alpha\omega) + \mu\alpha e^{-\beta\omega} \sin(\alpha\omega) - e^{\theta\beta} \cos(\theta\alpha) + i(\mu\alpha e^{-\beta\omega} \cos(\alpha\omega) - \mu\beta e^{-\beta\omega} \sin(\alpha\omega) - e^{\theta\beta} \sin(\theta\alpha)) \quad (7)$$

Legyen $\theta = \xi\omega$, $u = \beta\omega$, $v = \alpha\omega$. Ekkor a $\Phi(u + iv) = p + ir$ valós és képzetes részét előállító $p = f_{\pi}(u, v)$ és $r = f_r(u, v)$ valós függvények a következők:

$$f_{\pi}(u, v) = \eta + \frac{1}{\omega} \mu u e^{-u} \cos v + \frac{1}{\omega} \mu e^{-u} v \sin v - e^{\xi u} \cos(\xi v) \quad (8)$$

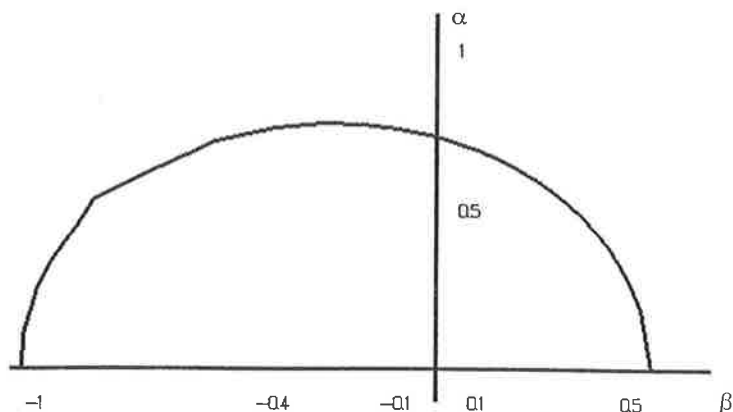
$$f_r(u, v) = \frac{1}{\omega} \mu e^{-u} v \cos v - \frac{1}{\omega} \mu u e^{-u} \sin v - e^{\xi u} \sin(\xi v) \quad (9)$$

A különböző μ értékekhez tartozó gyököket iterációs eljárással keressük meg. Tudjuk, hogy $\mu_1 = 2,293$ és $\mu_2 = 0,2081$ esetén a $\beta_1 = 0,548$ és a $\beta_2 = -1,0665$ felfogható olyan komplex számnak, amelynek képzetes része nullával egyenlő. Ebből indul ki az iterációs eljárás. A μ értékét a μ_1 értékénél egy tizeddel kisebbre választottuk és a β_1 -hez tartozó u_1 -gyel kiszámítottuk – az $f_{\pi}(u, v) = 0$ alapján – a v_1 -et. Ezt a v_1 -et helyettesítettük be (9)-be és az $f_r(u, v) = 0$ egyenlőség alapján határozzuk meg az u_1 egy pontosabb értékét. Ezt az iterációt alkalmazva határoztuk meg a különböző μ értékekhez tartozó u, v , ill. β, α értékeket. Az eredményeket az 1. táblázatban foglaltuk össze.

A módszer elég gyorsan konvergált, általában a harmadik iterációs lépésnél már 4 tizedesjegyre megegyeztek az eredmények. Ez várható is, hisz mindkét függvény differenciálható és mivel μ -t mindig csak kis mértékben változtattuk

μ	u	v	β	α
2,293	0,1317	0,0000	0,5480	0,0000
2,2	0,1305	0,0458	0,5220	0,1832
2,1	0,1237	0,0662	0,4948	0,2648
2,0	0,1166	0,0820	0,4664	0,3280
1,9	0,1091	0,0953	0,4367	0,3812
1,8	0,1011	0,1071	0,4044	0,4284
1,7	0,0929	0,1179	0,3716	0,4716
1,6	0,0835	0,1279	0,3340	0,5116
1,5	0,0738	0,1372	0,2952	0,5481
1,4	0,0634	0,1459	0,2536	0,5836
1,3	0,0521	0,1541	0,2084	0,6164
1,2	0,0397	0,1618	0,1588	0,6472
1,1	0,0262	0,1689	0,1048	0,6756
1,0	0,0112	0,7016	0,0448	0,7016
0,9	-0,0054	0,1811	-0,0216	0,7244
0,8	-0,0244	0,1857	-0,0976	0,7428
0,7	-0,0463	0,1889	-0,1852	0,7556
0,6	-0,0721	0,1897	-0,2884	0,7588
0,5	-0,1033	0,1865	-0,4132	0,7460
0,4	-0,1427	0,1755	-0,5708	0,7020
0,3	-0,1955	0,1452	-0,7820	0,5808
0,2081	-0,2665	0,0009	-1,0660	0,0036

1. tábla: A különböző μ értékekhez tartozó gyökök



2. ábra

meg, nem kerültünk túl messze a gyököktől sem. Ha az eredményeket a (β, α) számsíkon ábrázoljuk, a 2. ábrát kapjuk. Úgy tűnik tehát, hogy – mivel μ különböző értékeihez más-más β -t és α -t kaptunk – μ változtatásával és megfelelő kezdeti függvényt választva – elvileg – meg tudjuk határozni a rendszer mozgásának a jellegét. Mielőtt azonban erre a kérdésre végleges választ adnánk, nézzük a megoldáshoz tartozó többi komplex gyököt.

(b)

A módszer a következő: Válasszunk ki egy μ értéket. Legyen $\mu = 2$. Először numerikusan meghatározunk néhány további gyököt, majd az eredmények alapján levezetjük az u és v közötti aszimptotikus kapcsolatot. Mivel β és α ezeknek csak konstansszorososa, ezzel meghatároztuk a (4) függvény gyökeinek a számát és a gyökök valós (β) és képzetes (α) része közötti aszimptotikus függvénykapcsolatot is. A gyökök megkeresésénél az ún. argumentum-elvet és a kétismeretlenes egyenletrendszerekre vonatkozó Newton-módszert alkalmazzuk. Néhány szót a módszerek alkalmazhatóságáról. Mivel (4) a komplex számsíkon differenciálható függvények összegeként állítható elő, maga is differenciálható (analitikus) a komplex számsíkon. Ez azt jelenti, hogy nincs pólusa, következésképp az $F(\lambda)$ argumentumának a változásával kifejezhető egy zárt görbén belüli gyökök száma. Részletesebben lásd Duncan (1974) 207. o. 8.41 tétel. A Newton-módszer alkalmazhatósága (8) és (9) függvényre

következik abból, hogy egyrészt a parciális deriváltak, tehát az

$$f_{\pi u}(u, v) = (1/\omega)\mu e^{-u}(\cos v - u \cos v - v \sin v) - \xi e^{\xi u} \cos(\xi v)$$

$$f_{\pi v}(u, v) = (1/\omega)\mu e^{-u}(\sin v + v \cos v - u \sin v) + \xi e^{\xi u} \sin(\xi v)$$

$$f_{ru}(u, v) = (1/\omega)\mu e^{-u}(u \sin v - \sin v - v \cos v) - \xi e^{\xi u} \sin(\xi v)$$

$$f_{rv}(u, v) = (1/\omega)\mu e^{-u}(\cos v - v \sin v - u \cos v) - \xi e^{\xi u} \cos(\xi v)$$

függvények folytonosak, másrészt az argumentum-elv segítségével kiválasztott tartományon belül (8) és (9) függvénynek van gyöke, tehát az

$$f_{\pi}(u, v) = 0$$

$$f_r(u, v) = 0$$

kétismeretlenes egyenletrendszer Jacobi-mátrixához az adott tartományon belül találunk olyan (u, v) -t, hogy a determináns ne legyen egyenlő nullával. Részletesebben lásd Henrici (1985) 104. o. 2.5 tétel.

A gyökkeresés konkrét módszere tehát a következő: az $F(\lambda)$ függvény tárgysíkján kijelölünk egy zárt görbét (esetünkben egy négyzetet), és megnézzük, hogy a megfelelő képsíkbeli görbe körbejárja-e az origót. Ha igen, akkor a tárgysíkon kijelölt zárt görbén belül $F(\lambda)$ -nak van gyöke. Ekkor egy, a görbén belüli pontból kiindulva alkalmazzuk a Newton-módszert. Mivel kellően közel vagyunk a gyökhöz, a módszer gyorsan konvergál. Általában a harmadik iterációs lépésnél már megegyeztek a gyökök. A 3/a ill. a 3/b ábra egy-egy ilyen vizsgálatot szemléltet. Az első esetben a vizsgált tartományon belül van gyök, a második esetben nincs.

Az így megkapott numerikus eredményeket a 2. táblázat mutatja be.

A numerikus eredményekből már sejthető, hogy végtelen sok pozitív valószínű megoldás van. Próbáljuk ezt elméletileg is belátni! Nézzük meg, hogy (8) és (9) milyen tagok összegeként írható fel. Legyen:

$$f_{\pi 1}(u, v) = \eta + (1/\omega)\mu u e^{-u} \cos v \quad (10.1)$$

$$f_{\pi 2}(u, v) = (1/\omega)\mu e^{-u} v \sin v \quad (10.2)$$

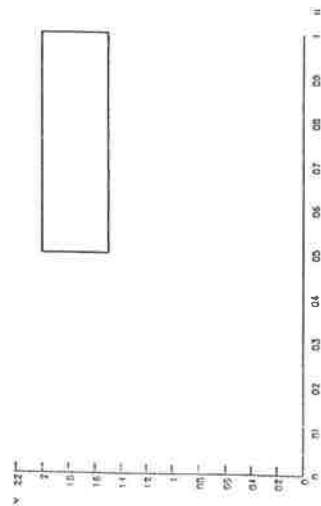
$$f_{\pi 3}(u, v) = -e^{\xi u} \cos(\xi v) \quad (10.3)$$

$$f_{r 1}(u, v) = (1/\omega)\mu e^{-u} v \cos v \quad (10.4)$$

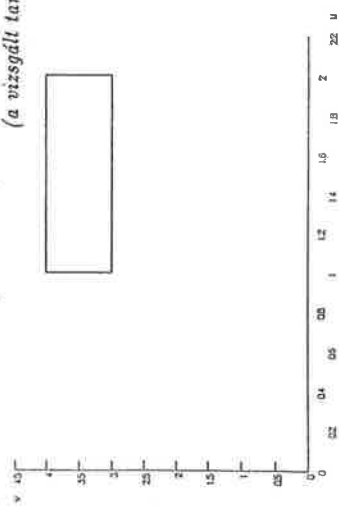
$$f_{r 2}(u, v) = -(1/\omega)\mu u e^{-u} \sin v \quad (10.5)$$

$$f_{r 3}(u, v) = -e^{\xi u} \sin(\xi v) \quad (10.6)$$

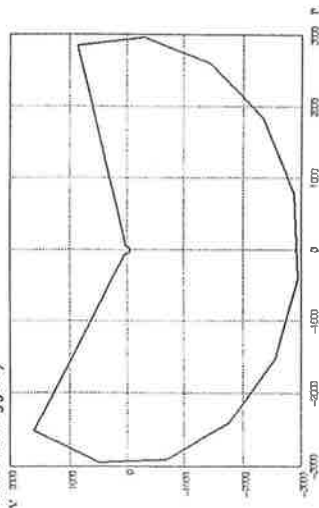
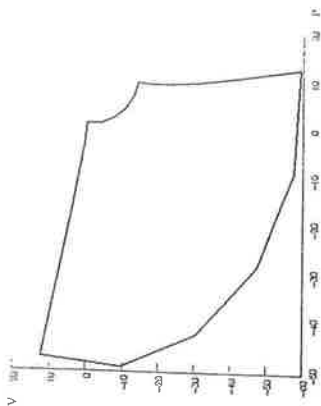
Mivel a megoldások konjugáltja is megoldás, az aszimptotikus viselkedést két esetre elegendő megnéznünk.



3/a ábra: Gyökkeresés az argumentum-élv és a Newton-módszer segítségével
(a vizsgált tartományon belül van gyök)



3/b ábra: Gyökkeresés az argumentum-élv és a Newton-módszer segítségével
(a vizsgált tartományon belül nincs gyök)



u	v
0,1166	0,0820
0,5207	1,5080
0,6278	2,7930
0,6918	4,0540
0,7470	5,3085
0,7959	6,5684
0,8335	7,8332
0,8593	9,0957
0,8809	10,3520
0,9042	11,6060
0,9284	12,8630
0,9487	14,1240
0,9636	15,3840
0,9764	16,6400
0,9912	17,8950
1,0319	21,5090
1,0639	25,4370

2. tábla: A $\Phi(\lambda)$ néhány gyöke $\mu = 2$ mellett(a) $u \rightarrow -\infty, v \rightarrow \infty$

Ekkor (10.3) és (10.6) a nullához tart. Ahhoz, hogy $F(\lambda)$ -nak legyen gyöke, a következő egyenlőségeknek kell aszimptotikusan fennállnia:

$$f_{\pi_1}(u, v) \approx -f_{\pi_2}(u, v)$$

$$f_{r_1}(u, v) \approx f_{r_2}(u, v)$$

Az egyszerűsítéseket elvégezve, kizárva a $\sin v = 0$ és a $\cos v = 0$ eseteket, (ezt megtehetjük hisz ezek egyrészt egyszerre nem állhatnak fenn, másrészt bármelyik fennállása esetén a fenti egyenlőségek aszimptotikusan nem teljesülnek) a következőt kapjuk:

$$\operatorname{tg}^2 v = -1$$

Erre pedig nincs valós megoldás.

(b) $u \rightarrow \infty, v \rightarrow \infty$

Ekkor (10.1) és (10.5) nullához tart. Ahhoz, hogy $F(\lambda)$ függvénynek legyen

gyöke, a következő egyenlőtlenségeknek kell aszimptotikusan fennállnia:

$$f_{\pi 2}(u, v) \approx -f_{\pi 3}(u, v)$$

$$f_{r 1}(u, v) \approx f_{r 3}(u, v)$$

Ezt rendezve:

$$(1/\omega)\mu e^{-u(\xi+1)}v \sin v = \cos(\xi v) \quad (11)$$

$$(1/\omega)\mu e^{-u(\xi+1)}v \cos v = \sin(\xi v) \quad (12)$$

Négyzetre emelve és összeadva a két egyenletet:

$$v = (\omega/\mu)e^{u(\xi+1)}$$

Helyettesítsünk be (11)-be és (12)-be:

$$\sin v = \cos(\xi v) \quad (13)$$

$$\cos v = \sin(\xi v) \quad (14)$$

(13) egyenletet $\cos v$ -vel, (14) egyenletet $\sin v$ -vel beszorozva, (13)-ból (14)-t kivonva:

$$\cos(\xi v) \cos v - \sin(\xi v) \sin v = 0,$$

tehát

$$\cos(v(\xi + 1)) = 0.$$

Ebből

$$v_k = (2k + 1) \frac{\pi}{2(\xi + 1)} \quad (15)$$

Másrészt (13) alapján teljesülnie kell a

$$\sin v = \cos(\xi v)$$

egyenlőségnek. Tehát:

$$v + \xi v = v(\xi + 1) = \pi/2 + 2k\pi$$

amiből

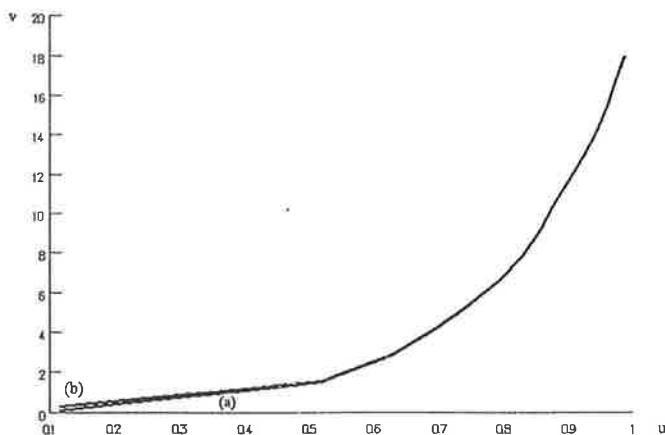
$$v_k = (4k + 1) \frac{\pi}{2(\xi + 1)} \quad (16)$$

(15) és (16) alapján

$$v_k = (4k + 1) \frac{\pi}{2(\xi + 1)} \quad (17)$$

és így

$$u_k = \frac{\ln(\mu/\omega)v_k}{\xi + 1} \quad (18)$$



4. ábra: Az $F(\lambda)$ gyökeinek valós (u) és képzetes (v) része közötti (a) valódi, (b) aszimptotikus kapcsolat

Az eredményekből egyrészt az szűrhető le, hogy $F(\lambda)$ -nak végtelen sok gyöke van, másrészt ezek közül legfeljebb csak véges sok rendelkezik negatív valós résszel. A numerikus módszerrel kiszámított és (17) és (18) alapján kiszámolt gyökök között meglévő konvergenciát jól mutatja a 4. ábra.

A megoldás korlátossága

Eddigi eredményeink tehát a következőképpen foglalhatók össze:

- $F(\lambda)$ -nak végtelen sok pozitív valós részű gyöke van;
- $F(\lambda)$ -nak csak véges sok nempozitív valós részű gyöke van;
- a pozitív valós részű gyököknek nincs felső korlátja.

Az eredmények közül ez utóbbi tehát azt jelenti, hogy nincs olyan $c > 0$, amelynél nagyobb valós részű megoldás ne lenne. Milyen következménnyel jár ez az (1) egyenlet $y(t)$ megoldására nézve?

Tudjuk, hogy ha $y(t)$ legalább szakaszonként folytonos $t > 0$ tartomány minden véges szakaszában, és teljesül rá az

$$|y(t)| \leq c_1 e^{ct} \quad c_1, c > 0 \quad (19)$$

elendő nagy t -re, akkor az $y(t)$ Laplace-transzformáltja létezik, és konvergens. (Lásd például Bronstejn (1980) 565–566. o.) Vegyük (1) mindkét oldalának a Laplace-transzformáltját. Ha elvégezzük a szükséges átalakításokat, és helyettesítéssel integrálunk, a következőt kapjuk:

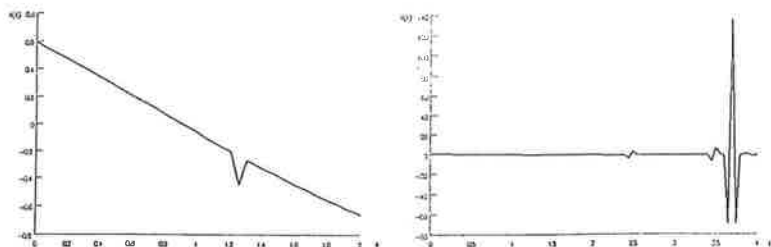
$$e^{\lambda\theta} - \eta - \mu\lambda e^{-\lambda\omega} \int_0^{+\infty} y(t)e^{-\lambda t} dt = e^{\lambda\theta} \int_0^{\theta} y(t)e^{-\lambda t} dt + \mu\lambda e^{-\lambda\omega} \int_{-\omega}^0 y(t)e^{-\lambda t} dt - \mu y(-\omega) \quad (20)$$

Jól látható, hogy az egyenlet bal oldalán $y(t)$ Laplace-transzformáltja van megszorozva (1) karakterisztikus függvényével, $F(\lambda)$ -val. Mivel $F(\lambda)$ pozitív valós részű gyökeinek nincs felső korlátja bármekkora c_0 esetén az $1/F(\lambda)$ -nak végtelen sok szinguláris pontja lesz. Ahhoz, hogy (20)-on el lehessen végezni az inverz Laplace-transzformációt, az kell, hogy (20) jobb oldalán lévő függvény és az $F(\lambda)$ hányadosaként felírható függvény analitikus legyen. Ez csak akkor fordulhat elő, ha a számlálót alkotó függvénynek az $F(\lambda)$ függvény gyökei szintén gyökei. Ha ez nem teljesül, $y(t)$ Laplace-transzformáltja sem írható fel, következésképp $y(t)$ exponenciálisan nem korlátos, azaz (19) nem teljesül. Hasonló gondolatmenet részletesebben Bellman (1963) 65–67. o. található.

Következtetések

Milyen következtetések vonhatók le ezekből az eredményekből? A megoldások ismeretében most meg kellene tudnunk határozni olyan μ értéket és kezdeti függvényt, melyre a rendszer mozgása csillapodó lenne. A megoldás korlátosságával kapcsolatos vizsgálódásunk azonban arra enged következtetni, hogy a belső struktúrából adódóan ilyen értékeket nem tudunk megadni. Hiába választunk ugyanis ki egy csak negatív valós résszel rendelkező megoldást; gyakorlatilag lehetetlen lesz biztosítani az ehhez a megoldáshoz tartozó Laplace-transzformált konvergenciáját és így a megoldás exponenciális korlátosságát. Ami más szavakkal azt jelenti, hogy nem tudunk megadni egy olyan exponenciális függvényt, mely minden t -re felső korlátja lenne a megoldásnak. Ha még sikerülne is elvileg biztosítani a Laplace-transzformálnak a konvergenciáját a kezdeti függvény nagyon kis megváltoztatása már felborítaná ezt. A különböző kerekítési és ábrázolási hibák miatt az ilyen helyzeteket jól tudjuk a rendszer szimulációs futtatásaival szemléltetni.

Szemléltetésül kiválasztottunk három, elvileg csillapodó mozgást eredményező partikuláris megoldást. Ennek alapján megadtuk a kezdeti függvényt és megnéztük azt, hogy a rendszer mennyiben követi a partikuláris megoldást. Nézzük az eredményeket.



5. ábra

(a) $\mu = 0,9$, és válasszuk úgy a kezdeti feltételeket, hogy

$$y(t) = e^{-0,0216t} \cos(0,7244t).$$

A rendszer mozgását mutatja az 5. ábra. Az ábra a $t = 2$, ill. $t = 4$ időpontig mutatja e rendszer mozgását.

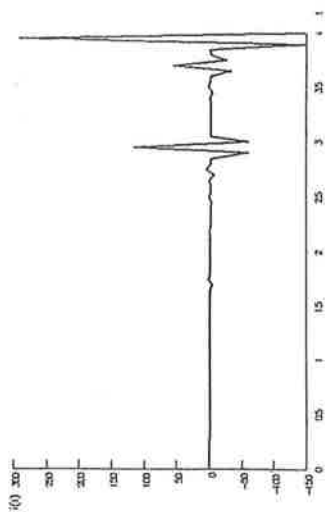
Az ábrából jól látható, hogy a rendszer egy bizonyos idő után mennyire nem követi $y(t)$ -t, ami egyrészt a számítási pontatlanságok, másrészt a rendszer „instabilitásának” a következménye. Azt a tényt, hogy a rendszer mennyire érzékeny a kezdeti értékekre, jól mutatja a 6. ábra. Itt $0,01$ -el megnöveltem a kezdeti értékek $t = -1,25$ és $t = -0,75$ közötti értékeit. Jól látható, hogy már az eredeti futtatáshoz képest is milyen zavarok lépnek fel.

A következő ábrák hasonló futtatások eredményeit mutatják

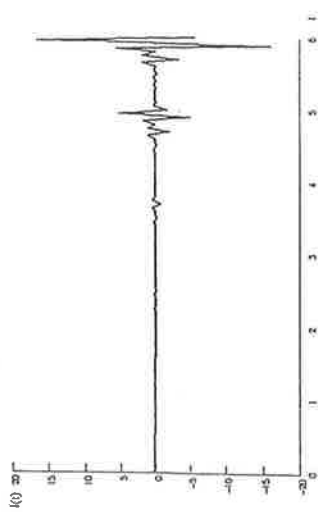
(b) $\mu = 0,2081$ és $y(t) = e^{-1,0666t} \cos(0t)$ -re, valamint

(c) $\mu = 0,25$ és $y(t) = e^{-0,9216t} \cos(0,4364t)$ -re.

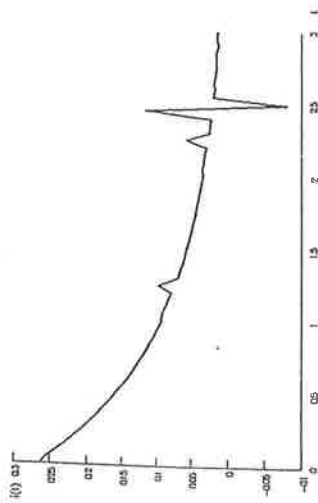
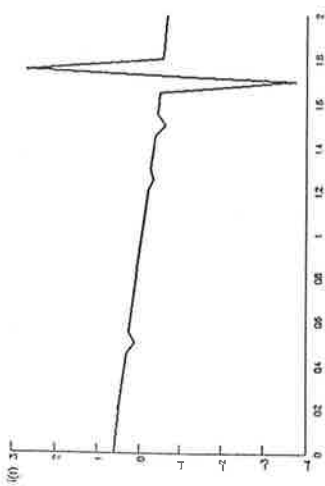
Különösen érdekes a 7. és 8. ábra. Látható, hogy annak ellenére kaptuk a fenti mozgást, hogy $y(t)$ egy exponenciálisan csökkenő függvény volt. Az is jól látható, hogy a kezdeti értékek kis megváltozása rövid időn belül milyen nagy kilengéseket okoz. Természetesen a számítási pontosság növelésével egy ideig lehetne csökkenteni a kilengéseket. Esetünkben a kiértékelés $0,05$ -ként történt. Ennek finomításával javíthatnánk némileg a helyzetet, de a rendszer aszimptotikus viselkedését ez nem változtatná meg.

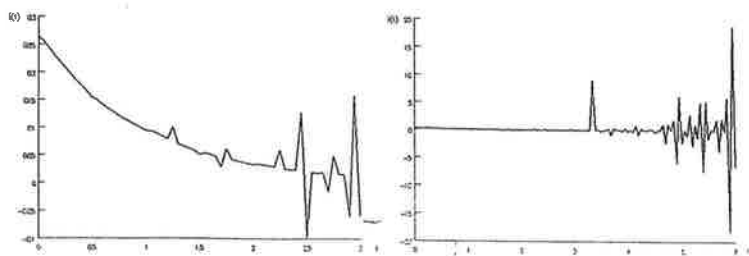


6. ábra



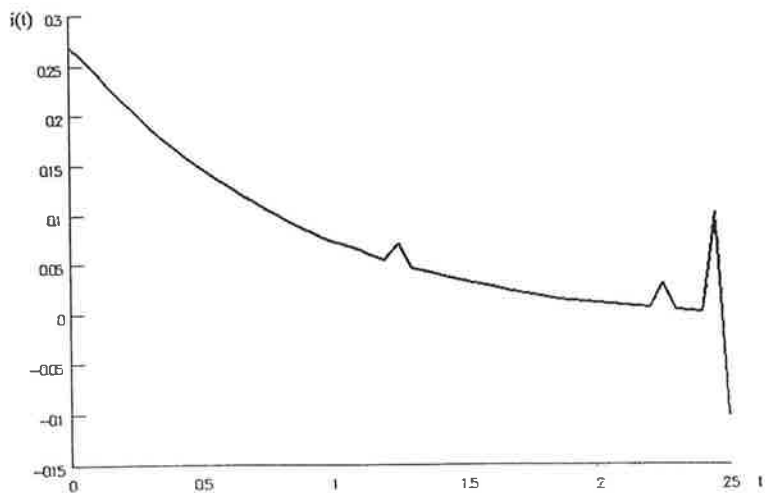
7. ábra: Futtatások (b) alapján.



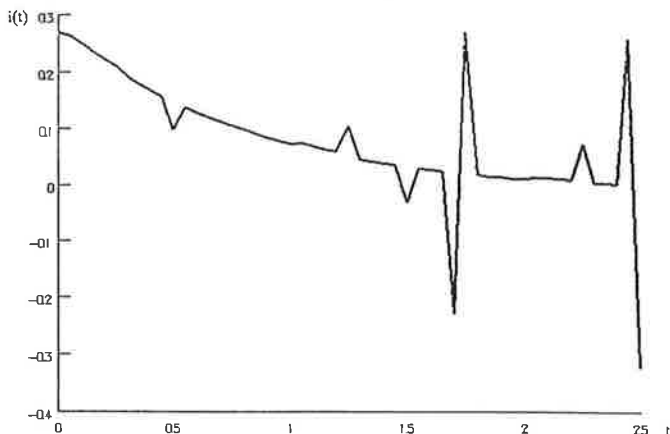


8. ábra: Futtatások (b) alapján.

A kezdeti értékek $t = -1,52$ és $t = -0,75$ között 0,01-el nagyobbak.



9. ábra: Futtatás (c) alapján.



10. ábra: Futtatás (c) alapján.

A kezdeti értékek $t = -1,25$ és $t = -0,75$ között 0,001-el megnöveltek.

Összefoglalva eredményeinket: az (1) által leírt modelltől csak nagyon ritka esetben, és akkor is a kezdeti értékekre nagyon érzékenyen várhatunk el korlátos mozgást.

Ez nyilvánvalóan annak köszönhető, hogy a megfelelő karakterisztikus függvénynek végtelen sok és nem korlátos pozitív valós részű gyöke van. Minthogy az ún. „előresiető” (advanced) típusú differenciál-differenciaegyenleteknél általában ez a helyzet, az ilyen egyenletek segítségével felírt konjunktúraciklus-modellektől nem sok „jót” várhatunk. Érdemesebb másfajta (pl. retardált vagy neutrális) egyenletekkel próbálkoznunk.

Irodalom

1. Bellman, R. – Cooke, K. (1963): Differential-Difference Equations. Academic Press, London.
2. Bronstejn, I. N – Szemengyajev, K. A. (1980): Matematikai zsebkönyv. Műszaki Kiadó, Budapest.
3. Duncan, J. (1974): Bevezetés a komplex függvénytanba. Műszaki Kiadó, Budapest.
4. Ferwel, R. G. (1975): The Intellectual Capital of Michal Kalecki. The University of Tennessee Press, Knoxville.
5. Frisch, R. – Holme, H. (1935): The Characteristic Solution of a Mixed Difference and Differential Equation Occuring in Economic Dynamics. Econometrica, 1935/3, 225–239. o.

6. Gandolfo, G. (1980): *Economic Dynamics: Methods and Models*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam.
7. Henrici, P. (1985): *Numerikus analízis*. Műszaki Kiadó, Budapest.
8. Kalecki, M. (1954): *Theory of Economic Dynamics*. George Allen and Unwin Ltd, London.
9. Kalecki, M. (1980): *A tőkés gazdaság működéséről*. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.

THE MATHEMATICAL CRITICISM OF KALECKI'S BUSINESS CYCLE MODEL

The paper discusses Kalecki's second business cycle model. This model is founded on a mixed differential-difference equation of advanced type. It is elucidated that this model does not dispose of property expected by Kalecki. The solution of this model is bounded only in a special case.