Szigma, XXIII. (1992) 3–4.

A LINEÁRIS TERMELÉSSIMÍTÁSI PROBLÉMA[1]

DOBOS IMRE
Budapesti Közgazdaságtudományi Egyetem

A következő bemutatásra kerülő probléma az 50-es évek elején keletkezett, és a mikrogazdasági problémák tárgykörébe tartozik. Az első problémafelvetések a feladatot diszkrét idő kezelésével oldották meg. A mostani tárgyalás az időt folytonos változóként kezeli. A két úton történő kezelés nem feltétlenül vezet azonos eredményre, azonban gondolatkísérletként a második út is érdekes lehet.

A kétféle megközelítés a megoldás létezésének tárgyalásánál válhat el. Amíg a diszkrét időkezelés esetén az optimális megoldás létezését a Weierstrass-tétel biztosítja, addig a folytonos időkezelés esetén nem biztos, hogy létezik a problémának megoldása. [7]

1. Bevezetés

Egy egytermékes vállalat viselkedését vizsgáljuk egy bizonyos $[0,T]$ időintervallumban. A vállalat terméke iránti kereslet a vizsgált időintervallumban ismert. Arra a kérdésre keressük a választ, hogy a vállalat az időszakban hogyan változtassa a termelési rátáját ahhoz, hogy a termelési, a készletezési és a termelési ráta megváltoztatásához tartozó költségek minimálisak legyenek (közgazdaságtudományi oldalról tehát a probléma a neoklasszikus gondolatkörhöz tartozik, tehát a profitmaximalizáláshoz). Esetünkben a termelési és készletezési költségek lineárisak, míg a termelési ráta változtatásához tartozó költségek szakaszonként lineárisak, de folytonosak és minimumuk a nullában van.

A fenti problémának több változata is van. Kiterjesztésként ismert az irodalomban, amikor a munkaerőt, illetve annak változtatását is figyelembe veszik. Ezekkel az esetekkel most nem foglalkozunk.

A modellben a következő jelölésekkel élünk:

- $V(t)$ a termelési ráta változása a t. időpontban,
- $P(t)$ a termelési ráta a t. időpontban,
- $I(t)$ a készletállomány a t. időpontban,
- $S(t)$ az eladási ráta a t. időpontban.

A modellben c jelöli az egységnyi termelés költségét, h az egységnyi készlet tartásának költsége, míg x a termelési ráta növelésének, y a csökkenésének fajlagos költsége. A paraméterek nemnegatív valós számok.

---

[1]Beérkezett: 1989. január 17.

A modell diszkrét változatát behatóan tanulmányozták [1], [6], [8]. A megoldás előállítására rengeteg algoritmus ismert, azonban ezek az optimális megoldást jellemző heurisztikákból indulnak ki.

A folytonos verzióval – ismereteim szerint – csak két tanulmány foglalkozott. Arrow és Karlin (1958b) megoldják a feladatot, és speciális esetekre algoritmust is adnak a megoldásra. Dolgozatukban azonban van egy kisebb pontatlanság, amikor felteszik, hogy a termelési rátának szakadása lehet. Ez a feltevés súlyosnak tekinthető, ha a bemutatásra kerülő modellt vizsgáljuk, ugyanis ekkor az ismertetett algoritmusok hatóköre is megkérdőjelezhető. A problémával ezen kívül még Bensousson–Crouhy–Proth (1983) foglalkozott. A modelljükben felteszik, hogy a termelési, készletezési és a termelési ráta változtatásának költségei konvex, nem csökkenő függvények, valamint a termelési ráta változtatásának költsége a nulla pontban veszi fel a minimumát. A szerzők könyvükben optimális irányítással oldják meg a feladatot, és a megoldás trajektóriájáról kvalitatív információval is szolgálnak, azonban algoritmust nem adnak az optimális trajektória előállítására.

A dolgozat célja az Arrow–Karlin-féle probléma tárgyalás, és – amennyiben lehetséges – az optimumot előállító algoritmus bemutatása.

2. A modell

A bevezetésben leírt problémának a folytonos időkezelésű alakját adjuk meg. A modell leírásánál az időt nem szerepeltetjük. Az eladási rátáról feltesszük, hogy az az időnek folytonosan differenciálható függvénye. A termelési rátát és a készletállományt vektornak tekintve, optimális irányítási feladatként tárgyaljuk a problémát, ahol az irányítási változó a termelési ráta változása, amelyre nincs semmilyen korlát. A termelési ráta és a készletállomány nemnegatív változók, az induló készletállomány adott nemnegatív szám.

$$(F)\begin{cases} \begin{pmatrix} P \\ I \end{pmatrix} \geq 0 \qquad t \in [0,T] \\ I(0) = I_0 \\ \begin{pmatrix} \dot{P} \\ \dot{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \\ I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} V - \begin{pmatrix} 0 \\ S \end{pmatrix} \\ \int_0^T \left([c,h] \begin{pmatrix} P \\ I \end{pmatrix} + G(V) \right) \to \min \end{cases}$$

Célunk tehát az (F) feladat megoldása. Esetünkben a $P(0)$ kezdeti ráta nem ismert, tehát irányítási változónak tekinthető. A $G(V)$ függvény alakja a következő:

$$G(V) = \begin{cases} x \cdot V, & V \geq 0; \\ -y \cdot V, & V < 0. \end{cases}$$

Térjünk vissza röviden az Arrow–Karlin (1958b) pontatlanságához. Amint az (F)-ből is következik, a $\dot{P} = V$ pszeudodifferenciálegyenlet megoldása P-re csak folytonos lehet, tehát nem is lehet szakadása. A feladat tárgyalható lenne impulzusirányítással (impulse-control, Bensoussan–Hurst–Näslund (1974)), azonban ettől most eltekintünk.

3. A probléma megoldása

A probléma megoldását a Pontrjagin-féle maximumelvvel végezzük el. A megoldásnál Seierstad–Sydsaeter (1977) eredményeire támaszkodunk, amely egyben elégséges feltételt is szolgáltat az optimum meghatározására (az optimumot a probléma konvex volta garantálja, amennyiben létezik megoldás). A megoldás létezésének feltételeivel a továbbiakban nem foglalkozunk, habár – mint látni fogjuk – a megoldás csak bizonyos speciális esetekben létezik.

Feladatunk nehézségét az okozza, hogy az állapotváltozóinkra korlátozások vannak.

Legyenek $[\psi_1(t), \psi_2(t)]$ adjungált rendszer változói, és $[\lambda_1(t), \lambda_2(t)]$ egy vektorfüggvény. Az L Lagrange-függvényt definiálja a

$$L(P, I, V, \psi_1, \psi_2, \lambda_1, \lambda_2) =$$
$$-[c,h]\begin{pmatrix} P \\ I \end{pmatrix} - G(V) + [\psi_1, \psi_2]\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P \\ I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} V - \begin{pmatrix} 0 \\ S \end{pmatrix}\right\} + [\lambda_1, \lambda_2]\begin{pmatrix} P \\ I \end{pmatrix}$$

kifejezés. Ekkor igaz a következő

1. Állítás: Ahhoz, hogy (P^0, I^0, V^0) az (F) feladat optimális megoldása legyen, szükséges és elégséges, hogy létezzenek olyan $[\psi_1, \psi_2], [\lambda_1, \lambda_2]$ vektorok, hogy

$$[\dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2] = -[\psi_1, \psi_2]\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + [c, h] - [\lambda_1, \lambda_2] \tag{i}$$

$$-G(V) + \psi V \to \max, \quad V \in I\!R \tag{ii}$$

$$[\psi_1(\tau_i^-), \psi_2(\tau_i^-)] - [\psi_1(\tau_i^+), \psi_2(\tau_i^+)] = [\beta_1^i, \beta_2^i] \tag{iii}$$

ahol $0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < T$ a $[\psi_1, \psi_2]$ szakadási pontjai, és ahol

$$\begin{array}{lll} \beta_j^i \geq 0 & (i = 1, 2) & \\ \beta_j^1 = 0 & \text{ha} \quad P(\tau_j) > 0 & (j = 1, 2, \ldots, k) \\ \beta_j^2 = 0 & \text{ha} \quad I(\tau_j) > 0 & \end{array} \tag{iv}$$

$$\lambda_1 P^0 = \lambda_2 I^0 = 0 \tag{v}$$

Az elégséges feltétel (iii) és (iv) pontjaiból kiderül, hogy a $[\psi_1, \psi_2]$ adjungált változóknak lehetnek szakadásai, de csak olyan pontokban, amikor a P^0 vagy az I^0

változók a határon vannak, tehát ebben az esetben lazul az adjungált változókra tett abszolút folytonossági feltétel. A (v) pont a szokásos komplementaritási feltételnek felel meg. Végül az (ii) szerint a $\psi_1 V - G(V)$ függvénynek a V-ben csak akkor van maximuma, ha $-y \leq \psi_1(t) \leq x$, vagyis az adjungált rendszerünk egyik változójára korlátozás van. Ugyanakkor ez azt is jelenti, hogy az irányítási paraméterünk optimális értéke a $V = 0$ pontban van, ha az adjungált változóra a kétoldali szigorú egyenlőtlenség teljesül, míg a szigorú növekedés (csökkenés) akkor teljesülhet a termelési rátára, ha $\psi_1(t) = x$ ($\psi_1(t) = -y$) egy bizonyos intervallumban.

Ezek után a megoldás jellemzését adjuk.

4. A feltételek jellemzése

Az optimális trajektória jellemzését három területi részre bontással végezzük el. A jellemzésben nem szerepeltetjük azt az esetet, amikor a termelési ráta és a készletállomány is nulla, ugyanis ekkor megsérülhet a készletállomány nemnegativitásra tett feltétel, ha az eladási ráta pozitív.

$$P^0(t) > 0, \quad I^0(t) > 0 \tag{i}$$

Ha a termelési ráta és a készletállomány is pozitív, akkor a (v) feltétel miatt $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ teljesül ebben a régióban, valamint ekkor $t \in (\tau_{i-1}, \tau_i)$ teljesül. Így a következő feltételek lesznek

$$\dot{\psi}_1 = -\psi_2 + c$$
$$\dot{\psi}_2 = h$$

és

$$-y \leq \psi_1 \leq x.$$

Ha feltételezzük, hogy az eset egy $[t_1, t_2]$ intervallumban fordul elő és a kezdeti feltétel $[\psi_1^0, \psi_2^0]$, akkor a megoldás

$$\psi_1(t) = \frac{h}{2}(t - t_1)^2 + (c - \psi_2^0)(t - t_1) + \psi_1^0$$
$$\psi_2(t) = h(t - t_1) + \psi_2^0$$

Itt teljesülnie kell $\psi_1(t)$-re az egyenlőtlenségnek. Ez az egyenlőtlenség esetünkben szigorúan teljesül, mivel $\psi_1(t)$ folytonos, nem konstans függvény. Ebből pedig következik, hogy $V^0(t) = 0$ az egész $[t_1, t_2]$ intervallumon. Így igaz a következő

2. Állítás: Ha egy $[t_1, t_2] \subset [0, T]$ intervallumon a termelési ráta és a készletállomány pozitív, akkor az optimális termelési stratégia az, ha a termelési ráta időben állandó.

Természetesen ez a jellemzés csak lokális lehet.

$$P^0(t) > 0, \quad I^0(t) = 0 \tag{ii}$$

Ha a készletállomány a határon halad egy $[t_1, t_2]$ intervallumon, akkor ebből automatikusan adódik az optimális termelési ráta, és maga a termelési ráta változása is. Ekkor $P^0(t) = S(t)$, valamint $V^0(t) = \dot{S}(t)$, ugyanis feltevésünk szerint az eladási ráta az időnek folytonosan differenciálható függvénye.

Állítsuk most elő erre az esetre is az adjungált rendszerünket:

$$\dot{\psi}_1 = -\psi_2 + c$$
$$\dot{\psi}_2 = h - \lambda_2$$

Ha most visszatérünk ahhoz a fejtegetésünkhöz, hogy $V^0(t) = \dot{S}(t)$ teljesül, valamint tudjuk azt, hogy a $\psi_1(t)$ adjungált változónk folytonos a $[t_1, t_2]$ intervallumon, és feltételezzük, hogy az $S(t)$ függvény egyetlen szakaszon sem konstans, akkor ebből következik, hogy $\dot{S}(t)$ vagy pozitív vagy negatív, tehát $\dot{\psi}_1(t) = x$ vagy $\dot{\psi}_1(t) = -y$. Ebből már következik, hogy $\psi_2(t) = c$ a $[t_1, t_2]$ intervallumon, és $\lambda_2(t) = h$. Tehát ebben az esetben a megoldás:

$$\psi_1(t) = \begin{cases} x, & \dot{S}(t) \geq 0 \\ -y, & \dot{S}(t) < 0 \end{cases}$$
$$\psi_2(t) = c$$
$$\lambda_2(t) = h.$$

Így teljesül a következő,

3. Állítás: Ha a készletállomány egy $[t_1, t_2] \subset [0, T]$ intervallumon nulla, akkor az eladási ráta vagy monoton növekvő vagy monoton csökkenő ezen az intervallumon.

Ez az állítás így még eléggé tág, de a későbbiekben pontosítjuk.

$$P^0(t) = 0, \quad I^0(t) \geq 0 \tag{iii}$$

Az utolsó esetben $\lambda_2 = 0$, amivel az adjungált rendszer a

$$\psi_1 = -\psi_2 + c - \lambda_1$$
$$\psi_2 = h$$

alakban áll elő. Ezt a differenciálegyenlet-rendszert nem oldjuk meg explicit formában, hanem csak az eset diszkusszióját adjuk meg.

Az előbbiekből következik, hogy az (iii) esetet nem követheti és nem is előzheti meg az (i) eset, mivel a $P^0(t)$ függvény folytonos (különben szakadása lenne). Ez azt jelenti, hogy csak az (ii) eset előzheti meg vagy követheti az (iii)-t. Ha azzal a feltevéssel élünk, hogy az eladási ráta pozitív, akkor ez azt jelenti, hogy ez az eset nem fordulhat elő. Ha az $S(t) = 0$ esetet nem zárjuk ki, akkor is csak egy lehetőségünk van, mégpedig az, ha az (iii) eset megelőzi az (ii) esetet, mivel nulla termelési ráta mellett nem lehetséges nemnegatív eladási ráta esetén pozitív készletállománnyal folytatni a rendszer pályáját. Így igaz a következő

4. Állítás: Pozitív készletállományú és nulla termelési rátájú régió csak a $[0, T]$ tervezési horizont elején fordulhat elő.

Az állítás csak egzisztenciát mond ki. Valójában csak akkor teljesülhet, ha létezik olyan $\tau \in [0, T]$ időpont, amelyre

$$S(\tau) = 0, \qquad I_0 - \int_0^t S \geq 0 \quad \forall t \in [0, \tau], \qquad I_0 - \int_0^T S = 0$$

összefüggések teljesülnek. Az adjungált rendszert a $\lambda_1(t)$ függvény szabad volta miatt választhatjuk olyanra, hogy a $\psi_1(t) \in [-y, x]$ tartalmazás teljesüljön.

Ezzel a megoldást befejeztük. A következő részben algoritmust állítunk elő az optimális trajektória meghatározásához.

5. Egy algoritmus az optimális trajektória meghatározására

Mielőtt az optimális trajektóriát előállítanánk, két kisebb állítást mondunk ki és látunk be, amely megkönnyíti jellemzésünket.

5. Állítás: Az a maximális $\bar{t}$ időperiódus, amelyben a termelési ráta és a készletállomány pozitív

$$\bar{t} = 2\sqrt{2\frac{x+y}{h}}.$$

Az állítás bizonyítása triviális. Csupán azt kell észrevennünk, hogy az adjungált rendszer $\psi_1(t)$ változója az időnek másodfokú függvénye.

Az állítás tehát azt mondja ki, hogy csak egy korlátos intervallumon lehet a termelési ráta állandó. A másik állításunk azzal foglalkozik, hogy állandó termelési ráta esetén az őt követő eladási ráta monoton növekvő vagy csökkenő-e. Ez a kérdés azért érdekes, mert az optimális trajektóriában az állandó termelési rátájú régiót nulla készletállományú, eladási rátával azonos termelési ráta követhet.

6. Állítás: Állandó, pozitív termelési rátát csak egy csökkenő eladási rátával egyenlő termelési ráta követhet.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy egy t_1 pont az a töréspont, ahol az állandó termelési rátáról az eladási rátára térünk át. Ekkor tekintsük az $I(t)$ készletállományt az idő függvényeként. Ennek a függvénynek a t_1 pontbeli lokális viselkedését az $\dot{I} = P - S$ derivált függvény jellemzi. Mivel feltételeink szerint a termelési ráta függvény és az eladási függvény is folytonos, ezért az $\dot{I}$ függvény is folytonos. Az $\dot{I}$ függvény a t_1 pont kivételével egy tetszőlegesen kicsiny, t_1 pontot is tartalmazó környezetben differenciálható. A feltételek szerint a t_1 pontban az I függvénynek minimuma van, így az $\ddot{I}$ függvénynek t_1-től jobbra és balra is nemnegatívnak kell lennie.

Az $\ddot{I}$ függvény t_1-től jobbra 0 értéket vesz fel, mivel egy nulla függvénynek a differenciálhányadosa 0. A t_1-től balra azonban

$$\ddot{I} = \dot{P} - \dot{S} = -\dot{S} \geq 0,$$

mivel itt P egy konstans függvény. Tehát a $[t_1 - \epsilon, t_1]$ intervallumon az S függvény monoton csökkenő, ahol ϵ tetszőlegesen kicsiny. Mivel az S függvény a t_1 pontban és annak környezetében is folytonosan differenciálható, ezért ott $\dot{S} \leq 0$, amivel állításunkat bebizonyítottuk.

Az előbbi állítást analóg módon kiterjeszthetjük arra az esetre is, amikor egy eladási rátával azonos termelési rátáról akarunk átlépni egy állandó termelési rátájú tartományba. Ekkor igaz a

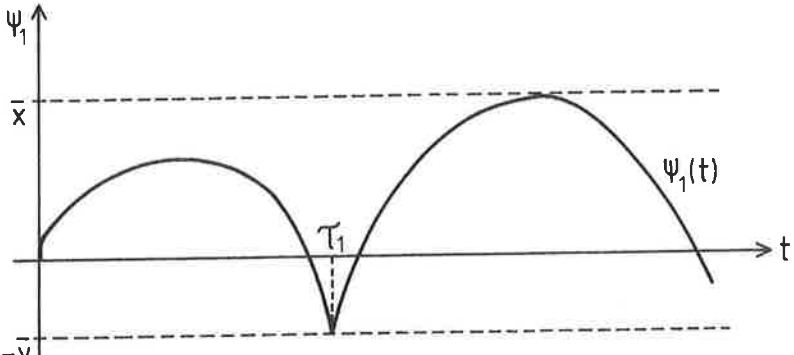
7. Állítás: Egy állandó termelési rátájú régiót csak csökkenő eladási rátával azonos termelési ráta előzhet meg.

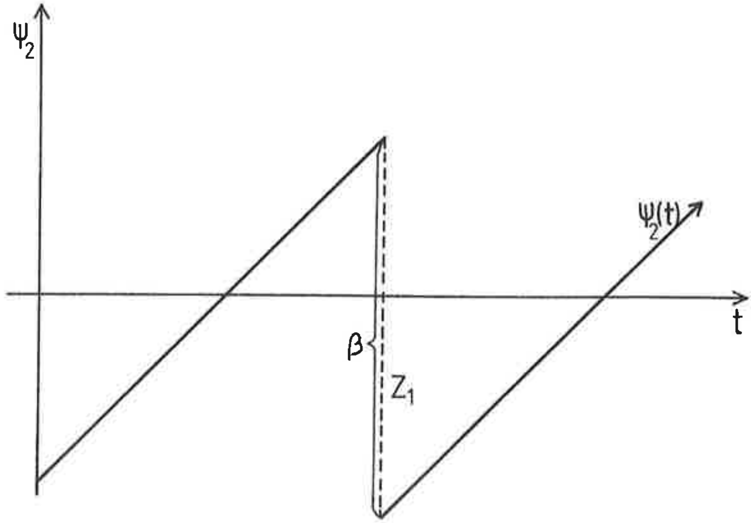
Ezt nem bizonyítjuk, a bizonyítás megegyezik az előző állítás bizonyításával. Az utóbbi két állításunk arra is rámutat az (ii) esetben $\psi_1(t) = -y$.

Mielőtt az optimális trajektóriát előállítanánk, már amikor létezik, vizsgáljuk meg, hogy az 1. Állítás (iii)–(iv) pontjait mikor alkalmazhatjuk. Az 5. Állítás egy intervallumot ad arra, hogy maximálisan mennyi ideig lehet pozitív a termelési ráta és a készletállomány. Ez erős korlátnak tűnik akkor, ha a

$$T \gg 2\sqrt{2\frac{x+y}{h}}$$

összefüggés teljesül, vagyis a tervezési időhorizont sokkal nagyobb a számított értékünknél. Azonban előfordulhat olyan τ_1 időpont, amikor t előtt és utána $P^0(t) > 0$ és $I^0(\tau_1) = 0$. Ekkor τ_1-ben teljesülhet a $\psi_2(\tau_1^-) - \psi_2(\tau_1^+) = \beta > 0$ összefüggés, mivel a fenti korlát „újraszámolódik". Erre egy példát mutat a





Ennyi előkészület után megadjuk a feladatot megoldó algoritmust, és felhívjuk a figyelmet arra, hogy mikor nem létezik optimális trajektória.

Az optimális trajektóriát előállító algoritmus Arrow–Karlin (1958a) dolgozatában szerepel. Az algoritmusnál abból indulunk ki, hogy optimális esetben a termelési ráta konstans. Így elsősorban válasszunk egy termelési rátát, amelyre

$$I(t) = I_0 + P_1 t - \int_0^t S \geq 0 \qquad \forall t \in [0, T].$$

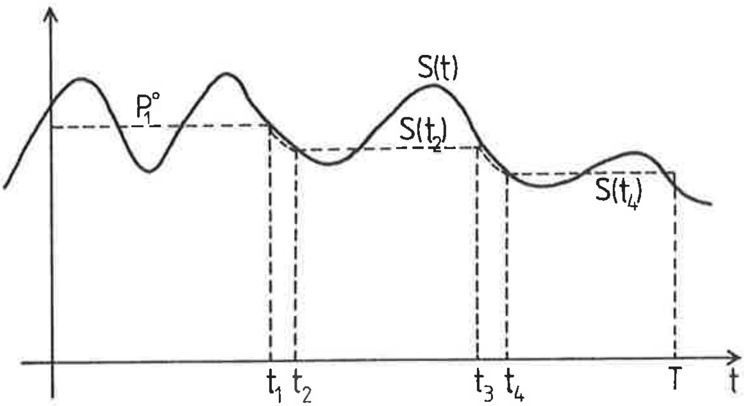
Az ezt kielégítő P_1 ráták közül vegyük a minimálisat, ami legyen P_1^0. Legyen ezután t_1 a legnagyobb olyan érték, amelyre $I(t_1) = 0$. Ekkor a $[0, t_1]$ intervallumon a termelési ráta P_1^0. A 6. Állítás szerint a t_1 pontban az eladási ráta negatív, tehát a $[t_1, T]$ intervallumon választhatunk egy olyan maximális t_2 értéket, amelyre $S(t) \leq 0$, $t \in [t_1, t_2]$ és

$$I^0(t) = S(t_2) \cdot (t - t_2) - \int_{t_2}^t S \geq 0, \qquad \forall t \in [t_2, T].$$

Ekkor a $[t_1, t_2]$ intervallumon $P^0(t) = S(t)$. Itt két lehetőség van. Vagy $I^0(T) = 0$, vagy létezik olyan t_3 pont, ahol $I^0(t_3) = 0$. Újra a 6. Állításra hivatkozással, a t_3 után választhatunk egy t_4 pontot, hogy $\dot{S}(t) \leq 0$, $t \in [t_3, t_4]$ és

$$I^0(t) = S(t_4) \cdot (t - t_4) - \int_{t_4}^{t} S \geq 0, \qquad \forall t \in [t_4, T],$$

és vizsgáljuk, hogy $I^0(t) = 0$ vagy sem. Ezzel az algoritmus folytatható, amíg $I^0(T) = 0$ eredményünk nem lesz. Az optimumot tehát előállíthatjuk, ha létezik. Az optimum előállítását a következő ábra mutatja:



Ez az algoritmus akkor nem használható, ha a $[t_0, t_1], [t_2, t_3], \cdots [t_{2i}, t_{2i+1}]$ intervallumok bármelyike nagyobb, mint a küszöbszámunk és/vagy nem léteznek az intervallumokban olyan τ_i pontok, ahol $I(\tau_i) = 0$ és a τ_i pont nem osztja a küszöbérték alá az intervallumokat.

Tehát nem létezik olyan optimális megoldása az olyan feladatnak sem, ahol

$$I_0 > 0 \quad \text{és} \quad T \gg 2\sqrt{2\frac{x+y}{h}} \quad \text{és} \quad \dot{S}(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0, T].$$

Az ilyen feladatokat csak akkor tehetjük megoldhatóvá, ha a kezdeti I_0 feltételt, akár a P_0-ra feloldjuk.

6. Konklúzió

A termeléssimítási probléma az esetek többségében nem oldható meg. Azonban amikor megoldható, akkor alkalmazható rá a jól ismert Arrow–Karlin-féle algoritmus (2). Ez azt is jelenti, hogy ez az algoritmus bizonyos fokig maximális megoldási módszert ad a termelési-készletezési rendszerek széles osztályára.

IRODALOM

1. ANTOSIEWITZ, H.–HOFFMAN, A.: A Remark on the Smoothing Problem, Management Science, Vol. 1., No. 1., pp. 92–95.
2. ARROW, K. J.–KARLIN, S. (1958a): Production over Time with Increasing Marginal Costs, In: Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production, Stanford University Press, pp. 61–69.
3. ARROW, K. J.–KARLIN, S. (1958b): Smoothed Production Plans, In: K. J. Arrow, S. Karlin and H. Scarf (eds.) Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production, Stanford University Press, pp. 70–85.
4. BENSOUSSAN, A.–CROUHY, M.–PROTH, J. M. (1983): Mathematical Theory of Production Planning, North-Holland, pp. 231–238.
5. BENSOUSSAN, A.–HURST, E. G.–NÅSLUND, B. (1973): Management Applications of Modern Control Theory, North-Holland.
6. HOFFMAN, A.–JACOBS, W. (1954): Smooth Patterns of Production, Management Science, Vol. 1., No. 1., pp. 86–91.
7. IOFFE, A. D.–TYIHOMIROV, V. M. (1974): Tyeorija eksztremalnih zadacs, Moszkva. Nauka.
8. KUNTREUTHER, H. C.–MORTON, T. E. (1973): Planning Horizons for Production Smoothing with Determistic Demands, I. All Demand Met from Regular Production, Management Science, Vol. 20., No. 1., pp. 110–125.
9. SEIERSTAD, A.–SYDSAETER, K. (1977): Sufficient Conditions in Optimal Control Theory, International Economic Review, Vol. 18., No. 2., pp. 367–391.

THE LINEAR PRODUCTION SMOOTHING PROBLEM

The aim of the paper is to investigate the linear production smoothing problem, in the case of continuous time. The author uses the well-known maximum principle for solving the problem. An algorithm can be constructed with the help of the necessary and sufficient conditions. The algorithm is a forward algorithm. The solution is monotone decreasing in the production rate, if there exists. If a solution exists, there are cycles. A cycle consists of a constant and a demand rate regions.