

ÁRJEGYZŐI VISELKEDÉS BELSŐ KOCKÁZATELOSZTÁS MELLETT¹

HAVRAN DÁNIEL – SZŰCS BALÁZS ÁRPÁD

Budapesti Corvinus Egyetem

A pénzügyi piacok közvetítői (brókerségek, befektetési bankok) gyakran versenytársak és együttműködő partnerek is egyszerre. A közvetítők elsősorban a velük kapcsolatban álló befektetők (nyugdíj- és fedezeti alapok, stb.) kereskedési igényét szolgálják ki, valamint mindehhez árat jegyeznek nekik. Azonban ezek a szereplők igen gyakran egymással is kereskednek, amely során az ügyfeleiktől származó pozíciójuk kockázatát csökkenthetik. A közvetítők egymás közötti piacát három jellemző különbözteti meg a walrasi piacoktól: bilaterális cserék, a szereplők hálózatos elrendezése, és a játékosok eltérő alkuperje a cserék során. Egy ilyen piac jellemzésére egy egyperiódusos modellt építünk, amely alkalmas az ilyen közvetítői hálózatok elemzésére. A dolgozat második felében azt vizsgáljuk, hogy a közvetítők egymás közötti kereskedése mennyiben befolyásolja a befektetőkkel való piac működését. Elemzésünk ezen részében az árjegyzőket duopolista magatartás jellemzi (két árjegyző és sok befektető van) a befektetői piacon. Megmutatjuk, hogy különböző duopol piaci struktúrákban a belső piacnak az erőfölénybeli különbségeket mérséklő szerepe van. Ha az árjegyzők kockázatkerülőbbek lesznek, ez csökkenti az árjegyző-befektető piacon a gazdasági erőfölényt.²

Kulcsszavak: árjegyzői magatartás, árjegyzők közötti kereskedés, kockázatallokáció, pénzügyi piacok, mikrostruktúrák. *JEL:* G10, D43, D53.

1 Bevezető

A pénzügyi piacokon közvetítők bonyolítják a forgalom jelentős részét. Az amerikai gazdaságban kialakult árnyék-bankrendszer jó része ma a befektetési bankok közvetítői tevékenységét fedi (Pozsar, Adrian, Ashcraft és Boesky (2012)). A közvetítők gyakran árjegyzőként működnek közre a befektető ügyfeleikből alkotott piacon. Ezek a befektetési bankok, brókerségek azonban nem csak ügyfelekkel, hanem egymással is kapcsolatban állnak.

A közvetítők közötti kereskedés meglehetősen nagy figyelmet kapott a Lehman bankház csődje után, nem véletlenül, hiszen a bankház fontos szerep-

¹Beérkezett: 2016. június 2. Havran Dániel a Budapesti Corvinus Egyetem docense, az MTA-KRTK KTI vendégkutatója. A tanulmány megírását a Magyar Tudományos Akadémia Posztdoktori Program 2013-2015-ös kutatási ösztöndíjának támogatása tette lehetővé. E-mail: daniel.havran@uni-corvinus.hu. Szűcs Balázs Árpád a Budapesti Corvinus Egyetem tanársegédje. E-mail: balazsarpad.szucs@uni-corvinus.hu.

²A szerzők köszönik az anonim lektor előrevívó észrevételeit és megjegyzéseit, amelyek sokat segítettek a tanulmány végső formájának kialakításában. Minden fennmaradó hibáért és tévedésért kizárólag a szerzők a felelősek.

lője volt ennek a piacnak, bukása a pénzügyi rendszer stabilitását is veszélyeztette. Az elszámolóházakon keresztül történő kereskedés kötelezővé válásával mára a partnerkockázatból fakadó rendszerkockázat jelentősen csökkent, a piaci szereplők közötti csere viszont továbbra is fontos kérdés maradt.

A tanulmányban a közvetítők magatartását vizsgáljuk egy olyan helyzetben, ahol a szereplők az ügyfeleiken kívül egymással is kereskednek, hogy ezzel csökkentsék a befektetőkkel kötött ügyletekből származó pozícióik kockázatát. Közgazdasági értelemben kétféle piacot különböztetünk meg az elemzés során: az ügyfelek felé történő árjegyzői szolgáltatást (*külső piac*), valamint a kockázatkezelési céllal létrejött egymás közötti kereskedelmet (*belső piac*). Elsősorban a bankközi hitel-betét és kamatcsere-ügyletek, amerikai államkötvények, önkormányzati kötvények, valamint a hitelderivatívák (főként a CDS ügyletek) piaca ilyen, de néhány más területen is találhatunk hasonló szerkezetű piacot (pl. londoni részvénybrókeri hálózat). A pénzügyi közvetítők az ügyfélpiacon versenytársak, ezzel szemben a belső piacon kooperálnak egymással. Ha a külső piacon egyes szereplőknek piaci erőfölényük van, az hathat az ügyfelekkel szembeni pozíciójukra, és ezáltal a belső piaci cserékre is. Továbbá, ha az árjegyzők beépítik a külső piacról szóló döntéseikbe a belső piaci cserék lehetséges hatásait is, az árjegyzők külső piaci stratégiai magatartása jelentősen módosulhat.

A dolgozatban két kérdést válaszolunk meg ehhez kapcsolódóan. Elsőként azt, hogy miként írható le a közvetítők belső piaca és az ott zajló elosztási mechanizmus mikroökonómiai megközelítésben. A belső piac legfontosabb jellemzője, hogy nem minden játékos tud a másikkal egyforma eséllyel találkozni, a játékosok felkeresése költséges. Fontos megérteni, hogy az árjegyzők hogyan találhatnak ilyen piaci súrlódás mellett cserepartnerre, hogyan határozzák meg az egymás közötti cserék árát a kétoldalú alkuk során, valamint az így létrejövő tranzakciókkal eljuthat-e a piac a minden félnek legnagyobb hasznot hozó egyensúlyi állapotba. A második kérdés a külső piac és a belső piac kapcsolataira fókuszál. A belső piaci kereskedés és erőviszonyok egyértelműen kihatnak a külső piaci árjegyzési tevékenységre. Vajon csökken, vagy nő az árjegyzők közötti verseny, ha van belső piac? Mit várunk, vajon a külső piacon lévő verseny erőssége nő vagy inkább csökken, ha az árjegyzők kockázatkerülőbbekké válnak? Itt egy olyan piaci struktúrát jellemzünk elemi eszközökkel, amelyben két szereplő a külső piacon ugyanazokat a befektetőket éri el, tehát versenytársak, a belső piacon pedig egymással kereskedhetnek ezzel egy időben.

A tanulmány fő eredményei. Kockázatkerülő szereplőket feltételezve egy olyan belső piacot modellezünk, amelyben a kereskedők eltérő arányban keresik fel a többi játékos, majd bilaterális alkuk során bonyolítják le a tranzakciókat. A cserepartner-választási preferenciák exogének a modellben. Ezzel a módszerrel olyan kereskedési hálózatokat adhatunk meg, amelyeket a pénzügyi piacok hálózatait bemutató empirikus kutatások is leírnak. Teljes informáltság mellett megadjuk a piaci egyensúlyt az így definiált piacon. Megmutatjuk továbbá, hogy (1) a kockázatos pénzügyi eszköz egyensúlyi nettó elosztása nem függ az egyedi keresési preferenciáktól, és nem függ az egyedi alkuerőktől sem; (2) a bilaterális tranzakciók méretét a keresési preferencia

befolyásolja, de a tranzakciók nagysága nem függ az egyedi alkuerőtől; (3) az egyedi hasznosság növekménye (az eszköz elosztás és a szerzett pénz hasznai) annál nagyobb, minél népszerűbb és erősebb az alkukban egy szereplő; (4) a belső piaci egyensúly Pareto-optimalis.

A dolgozat második felében a két piac közötti összefüggések elemzésére duopólium szerkezetű külső piacokat vizsgálunk, ahol a szereplők a belső piacon eltérő alkuerővel rendelkeznek. Csak az egyik oldali (a vételi) kereskedést vizsgálva megmutatjuk, hogy miként hat a stratégiai magatartás az árjegyzők által felkínált árrés nagyságára és az aggregált kockázatra, valamint azt, hogy hogyan befolyásolja a kockázatvállalási hajlandóság az árrés nagyságát. A különböző külső piacszerkezetek vizsgálata során azt találjuk, hogy amennyiben az árjegyzők kockázatelutasítási mértéke csekély (egy konjunktúra-helyzet, amikor a belső piac alig funkcionál), akkor a külső piaci erőfölény jól alkalmazható a külső piacon. Amikor az árjegyzők kockázatelutasítása erősebb, akkor az intenzívebb belső csere következtében a külső piacokon eltűnik a piaci erőfölény. Ilyenkor az árjegyzők kockázatviselési hajlandósága határozza meg elsősorban a forgalmat. Ez utóbbi eredmény összecseng Reiss és Werner (1998) a Londoni Értéktőzsdén talált empirikus megállapításaival is, mely szerint az árjegyzők a külső piacon ritkán alkalmaznak monopolárazási technikákat, a kockázatelutasítás mértéke a meghatározó az árazásuk során.

A tanulmány szerkezeté a következő. A második szakaszban röviden ismertetjük a kapcsolódó szakirodalom jelentősebb eredményeit, kitérve az árjegyzői, a kereséses és a hálózatos pénzügyi piacokra is. A harmadik szakaszban a belső piac modelljét mutatjuk be. A negyedik szakaszban vizsgáljuk az olyan helyzeteket, amikor az árjegyzők a külső piacon duopóliumként tevékenykednek, a belső piacon pedig egymással is kereskednek. A dolgozatot a fő következtetéseink összefoglalásával zárjuk.

2 Árjegyzői magatartás és kockázatelosztás: rövid áttekintés

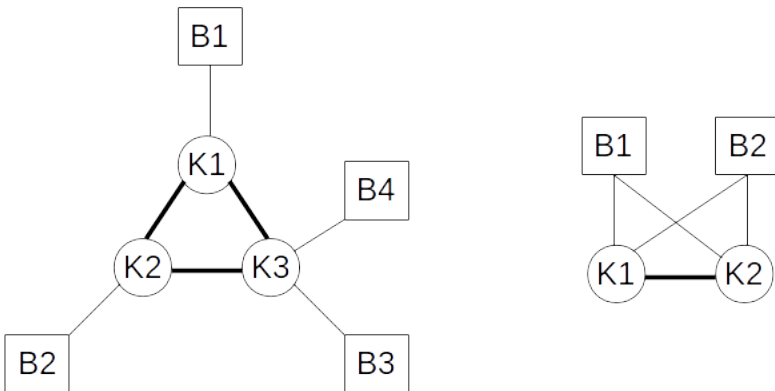
2.1 Árjegyzés és közvetítés

Árjegyzőknek nevezzük azokat a közvetítőket a pénzügyi piacokon, akik vételi és eladási árakat adnak meg más szereplőknek és cseréket bonyolítanak le velük. Az árjegyzők ára nyilvános és könnyen elérhető az ügyfelek számára, a közvetítési tevékenységükben felvállalt kockázat költségét pedig a vételi és eladási árak közötti árrésből fedezik. Ez a közvetítési költség egyrészt származhat információs hátrányukból (Glosten és Milgrom (1985), Kyle (1985), vagy az árjegyzés során tartott készleteik kockázatából (Garman (1976), Ho és Stoll (1981), Ho és Stoll (1983), Amihud és Mendelson (1980), Shen és Starr (2002)). Abból a célból, hogy az árrést tisztán az információs aszimmetriával, vagy a készletezés költségeivel magyarázzák, a felsorolt tanulmányok az árjegyzési tevékenységet általában tökéletesen versenyző (és így nulla profitot elérő) szereplőkkel modellezik. Azonban, az árjegyzőkre is jellemző lehet a

monopolista vagy oligopolista viselkedés, ebben az esetben az árjegyzők figyelembe veszik a befektetők vételi és eladási mennyiségre vonatkozó árrugalmasságát is az árazás során. A tökéletlen versenybeli árjegyzést Mildenstein és Schleef (1983), Kyle (1985), Pagano (1989), valamint Loertscher (2005) munkája mutatja be. A piaci mikrostruktúrák osztályozásáról magyar nyelven Erb és Havran (2015) ad áttekintést.

Az árjegyzői irodalomban korábban alig vizsgálták azt az esetet, amikor az árjegyzők ugyanazon eszköznek két, egymástól elkülönült, de egymással kapcsolatban álló piacon is egyszerre jelen vannak. Stoikov és Sağlam (2009) opciós árjegyzői modellje foglalkozik ilyen esettel. Tanulmányunk ez utóbbi esetet vizsgálja meg a készlettartási motívum alkalmazásával.

Az 1. ábra a kétféle piaci szereplőt helyezi el egy-egy szerkezetben. A közvetítőket $K1$, $K2$, $K3$ -al, ügyfeleiket a befektetőket $B1$, $B2$, $B3$, $B4$ -el jelöljük. A bal oldali ábrán a külső piacon szegmentált ügyfélpiacot látunk, egy befektető csak egy közvetítővel van kapcsolatban, a közvetítők ügyfélköre nem keveredik egymással. A jobb oldali ábrán mindkét közvetítő képes elérni mindkét befektetőt, az ügyfelekért is kialakul verseny. A közvetítők a külső és a belső piacon eltérő piaci mikrostruktúrával szembesülnek. A külső piacon a jegyzett ár az ügyfeleknek nyilvános, ezt ismerve a befektetők jelentkeznek vételi és eladási mennyiséggel. A belső piacon a közvetítők nem jegyeznek árat, hanem kétoldalú alkuk során kereskednek. Az alkuk során határozzák meg a páronkénti tranzakciók árfolyamát. A belső piacon nem koncentrált piac, általában valamilyen keresési súrlódás is van. A belső piacon lévő kapcsolatokat vastag vonallal jeleztük az ábrán. Tanulmányunkban elsőként a bal oldalon fennálló esetet és exogén külső piacot feltételezve a belső piacot vizsgáljuk részletesen. Ezt követően térünk át a jobb oldali esetre, ahol a külső piac a hangsúlyos. Mivel a nem tökéletes verseny hatása ott jelentős, ahol kevés számú játékos lép a piacra, így duopol helyzeteket elemzünk egymással is tranzakciókat folytató közvetítőkre.



1. ábra. A belső és a külső piacok kapcsolata: a) Szegmentált ügyfélpiac; b) Közös ügyfélpiac (duopol).

2.2 A közvetítők belső piacai: empirikus tanulmányok

Belső piacoknak tekinthetjük a tőzsdén kívüli (OTC) pénzügyi piacok zömét. Az ilyen piacok nem, vagy alig szervezettek, és bár a kereskedők általában ismerik egymást, de megkeresés előtt nem ismerik egymás aktuális pozícióját. A kereskedők rendszeres vagy eseti kapcsolatban állnak egymással, többnyire közös számítógépes platformon és telefonon keresztül. Ha valaki vásárolni vagy eladni akar, azt jellemzően (1) keresési folyamat előzi meg, vagy (2) a kereskedő a már létező ismeretségi hálózatán keresztül szerez partnert.

Az empirikus dolgozatok közül Reiss és Werner (1998) valamint Hansch, Naik és Viswanathan (1998) a Londoni Értéktőzsdén lévő brókerségek közötti forgalom adatbázisát elemezték. Mindkét kutatás megerősítette, hogy az árjegyzők a készletezési motívum miatt lépnek egymással kapcsolatba. Amikor az árjegyző brókerségek nem képesek saját ügyfélkörükön belül ki-egyenlíteni nettó pozícióikat, sokkal aktívabban keresik meg egymást fedezési céllal. Más piacon, az amerikai CDS-piacokat Shachar (2012) empirikus tanulmánya vizsgálja, aki szintén készletpozícióból fakadó kockázatkezelést találta a belső piacra lépés legfontosabb céljának. A CDS-piac méreténél fogva lehetővé tette azt is, hogy a forgalom alapján magát a kereskedési hálózatot is megfigyelhesse. A CDS-piacokon tipikusan nem képes minden közvetítő egymással kapcsolatba lépni, ezért általában több közvetítőn keresztül ér el egy eszköz az egyik ügyféltől a másikig. Shachar (2012) azt találja, hogy két befektető közé átlagosan legalább két-három közvetítő ékelődik, a több kapcsolattal rendelkező szereplők általában jóval több forgalmat bonyolítanak. Más eszközosztályra, de hasonló belső struktúrát ismertet az amerikai önkormányzati kötvények piacának hálózatát jellemző Li és Schuerhoff (2012). A szerzők szerint a közvetítők egymással való forgalmából kirajzolódó hálózat a központ-periféria alakzathoz hasonlított. A hálózat központjában elhelyezkedők erősebbek is, magasabb felárakat kérnek el a periférikusan elhelyezkedő társaiktól. Ugyanilyen hálózati formát talált a bankközi hitelbetét piacokon Craig és von Peter (2010) valamint Fricke és Lux (2012), a magyar bankközi piacon pedig Berlinger, Michaletzky és Szenes (2011).

Az empirikus elemzésekben vizsgált piacok mérete eltér a szereplők száma szerint. A kisebb piacok 20-50 közvetítőt jelentenek inkább, míg a nagyok több ezres nagyságrendűek lehetnek. Míg a nagyobb létszámú piacokon gyakran eltérő informáltsággal rendelkeznek a kereskedők (eltérő elemzői, informatikai háttér, eltérő beágyazottság), addig a kisebb belső piacokon az eszköz értékét köztudott tudásnak tekinthetjük (mindenki szakértő). Ezt támasztja alá Dodd (2008), majd Dodd (2012) írása, melyben kifejti, hogy a kisebb piacokon a szereplők telefonon vagy más elektronikus eszközön könnyen és gyakran kommunikálnak egymással. Kisebb létszámú piacokon így a kapcsolati hálózat teljesnek tekinthető, de ebből nem következik, hogy a forgalmi adatokból készített hálózat is teljes lenne. Jelen tanulmányban arra az esetre szorítkozunk, ahol az információ mindenki számára könnyen elérhető.

2.3 Egyensúlyi kockázatelosztás a belső piacokon

A kockázatkezelési motivációt bemutató első elméleti dolgozat Borch (1962) nevéhez köthető, aki a viszontbiztosítási piacok mechanizmusaira koncentrált. Dolgozatában kockázatkerülő szereplők lépnek be a piacra és adják el kockázatos pozícióikat másoknak. Borch levezeti a piaci egyensúlyt valamint a piaci árat is, de modelljében nem foglalkozik a hálózatisággal. A hálózaton belüli cserék során eltérhetnek a tranzakciós árak. A kérdés az, hogy hogyan határozzák meg a tranzakciós árat a szereplők. A Borch által definiált piaci mechanizmus csak egy lehetőség a kockázat allokációjára, más lehetőség is adódhat stabil kockázati elosztás megadására (pl. Csóka, Herings és Kóczy (2009), Ágoston (2010)).

Az elmúlt években több nívós elméleti modell született a pénzügyi hálózatokon történő kereskedés magyarázatára. Atkeson, Eisfeldt és Weill (2013) a CDS-piacokat modellezi ebben a keretben. Modelljükben a közvetítő bankok piacra lépése fix költséggel jár, és a bankok partnerkockázati limitekkel rendelkeznek. A bankok kitettségeiket csökkentik a belső piaci ügyletek kötésével. Ha találkozik két játékos, alkudnak a mennyiségen és az áron. Ehhez szorosan kapcsolódik Zawadowski (2013) cikke is, aki az OTC piacok rendszerkockázatára helyezi a hangsúlyt. Malamud és Rostek (2012) általánosabb modelljében kockázatkerülő játékosok egy rögzített hálózaton kereskednek. Ők a keresés és alku megközelítés helyett a kapcsolati hálózaton történő egyidejű kereskedés koncepcióját használják. A modellben a játékosok adott eltérő áreltérítő hatással (likviditással) rendelkeznek, amelyet figyelembe vesznek az egymással történő cserék során. Az egyes játékosok áreltérítő hatásai függetlenek az induló készleteiktől. Az egyensúlyban a játékosok hasznosságukat maximalizálják a hálón történő cserékkel. Babus és Kondor (2013) piaci modelljében különböző információval rendelkező kockázatmentes játékosok alkudoznak egy rögzített hálózaton. Ők az információ hálózaton való közvetítését és diszperzióját mutatják be és megadják a piaci egyensúlyt is. A pénzügyi hálózatokon való kereskedésről (például a sztochasztikus hálózatokról, vagy a hálózaton való kockázatelosztásról) magyar nyelven Balog, Bátyi, Csóka és Pintér (2012) tanulmányában olvashatunk.

Dolgozatunkban kockázatkerülő játékosokat és keresés és alku jellegű megközelítést alkalmazunk, Atkeson et al. (2013) munkájához hasonlóan. A belső piacot leíró modellünk logikája más tekintetben viszont Malamud és Rostek (2012) elméletével rokon. Mindkét dolgozathoz képest alapvető különbség, hogy a piaci súrlódást egy speciális (időkorlátos) keresési súrlódásként adjuk meg, s ebből vezetjük le a belső piac fő jegyeit.

3 Kereskedés a belső piacon

Ebben a részben ismertetjük a belső piac működését leíró modellünket. A modellben egyperiódusú döntésként ragadjuk meg a közvetítők tevékenységét. Két egymástól jelentősen eltérő mechanizmusokkal jellemezhető piac létezik egymás mellett, amelyen ugyanazt az eszközt cserélik. Ezek: a befektetők

és az árjegyzők közötti piac (1), valamint az árjegyző kereskedők egymás közötti piaca (2). Az első típusú piacon a befektetők az árjegyzők ügyfelei, árelfogadók és csak egy árjegyzővel vannak kapcsolatban. A második típusú piacon az árjegyzők egyenrangú kereskedők, ahová a befektetők nem tudnak belépni. Az első típusú piacot adottnak véve, a második piacon történő cserét modellezzük ebben a részben.

Tegyük fel, hogy egy kockázatos eszköz van, amelynek értéke nem, csak eloszlása ismert és köztudott tudás a játékosok számára: $v \sim N(\mu, \sigma^2)$. A játékosok tarthatnak kockázatmentes eszközt is, ami fizetőeszközként is szolgál a kereskedés során (pénz). A szereplők által tartott vagyon $w = v(x + y) + c$, ahol $x \in \mathbb{R}$ az ügyfelektől szerzett kockázatos eszköz mennyisége, az $y \in \mathbb{R}$ a többi játékoskal kereskedett mennyiség, $c \in \mathbb{R}$ pedig a cserék során kifizetett/megkapott pénzösszeg. A játékosok racionálisak és kockázatkerülők. A játékosok egyperiódusú várható érték-variancia hasznosságfüggvénnyel rendelkeznek:

$$U(w) = E(w) - \frac{1}{2}\lambda \cdot \text{var}(w) ,$$

amelyet a következőkben az y mennyiségek függvényében írunk fel:

$$U(y) = E(w(y)) - \frac{1}{2}\lambda \cdot \text{var}(w(y)) . \tag{1}$$

A hasznosságban a λ kockázatkerülési együttható eltérhet az egyes szereplőknél. Legyen a játékosok száma K .

3.1 Kereskedés valószínűségi hálón

A tőzsdén kívüli piacok napi rutinját a következő feltevésrendszerrel ragadjuk meg. Egy periódus alatt zajlik le minden kereskedés a játékosok között. Ez alatt az egy periódus alatt nem lehet szekvenciálisan reagálni, vagyis a játékosoknak előre el kell dönteniük, hogy kit és hányszor keressenek meg, és így azt is, hogy mennyi tranzakciót bonyolítsanak le. A periódus hossza egy időegység, ebből a játékosok kontinuum sok infinitezimálisan kicsi időszelvet tudnak felhasználni a kijelölt partner felkeresésére és a vele való tárgyalásra. Egy ilyen időszelvetben arányosan kicsi mennyiséget tudnak kereskedni. A tranzakciókban az ár a kereskedéssel egyidejűleg alakul ki, kétoldalú alku során. Ez az ár természetesen a tranzakciós mennyiség függvénye lesz. Összegezve, ha sok időt tölt is el egymással a két játékos, minden köztük lévő tranzakcióra ugyanaz az ár érvényes ugyanabban a periódusban.

Minden szereplő elérhető elvileg a másik számára. A szereplők keresése azonban költséges. Ez azt jelenti, hogy azokkal a más szereplőkkel lépnek inkább kapcsolatba, akiket valamiért jobban preferálnak (pl. olcsóbb a felkeresésük – Duffie, Gârleanu és Pedersen (2005), gyorsabban érik el őket vagy gyorsabban kötnek velük tranzakciót – Neklyudov (2012), korábban jobban ismerik őket – bizalom, vagy éppen jobbnak tekintik őket partnerkockázat szempontjából). E dolgozatban külső adottságként tekintünk erre a költségre, és a játékosok exogén preferenciájaként értelmezzük.

Keresési preferencia-vektorok

Minden egyes i szereplő egy $\gamma_i \in \mathbb{R}^K$ keresési preferencia-vektorral rendelkezik. Ez a preferencia-vektor azt mutatja meg, hogy milyen arányban nyilvánít kapcsolatteremtési szándékot az adott másik játékos irányába (mekkora a keresési súrlódás reciproka). A kapcsolatteremtés nem jelent automatikusan tranzakciót. A preferencia-vektorra igaz, hogy a súlyok összege egységnyi: $\sum_{j=1}^K \gamma_{ij} = 1$, és saját magával nem kereskedik a játékos: $\gamma_{ii} = 0$. Az összes szereplőre vonatkozó keresési mátrixot az alábbiak szerint adjuk meg:

$$\Gamma \equiv \begin{bmatrix} \gamma'_1 \\ \gamma'_2 \\ \vdots \\ \gamma'_K \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1K} \\ \gamma_{21} & 0 & \dots & \gamma_{2K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{K1} & \gamma_{K2} & \dots & 0 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

A keresési mátrix elemei értelmezhetők úgy is, mint egy valószínűségi hálózatban annak az esélye, hogy az i játékos megtalálja a j -t. Mivel feltevésünk szerint az egy periódus alatt kontinuum sokszor kereskednek, így a megtalálás esélye azt is jelenti, hogy a kereső idejének mekkora arányát tölti a megtalált féllel, ha ő a kezdeményező. Ezzel egy egyirányú keresést definiálunk, vagyis annak a valószínűsége, hogy a „ j játékos megtalálja i -t”, ettől eltérő is lehet. Összegezve tehát, a Γ mátrix általában nem tekinthető szimmetrikus mátrixnak.

Szándékolt tranzakciós mennyiség

Tegyük fel, hogy a kereskedés során minden egyes i játékos $y_i \in \mathbb{R}$ mennyiséget kíván összességében venni vagy (negatív előjelű mennyiség esetén) eladni. Ezt az y_i mennyiséget cserélik el partnereikkel. Azzal a feltevéssel élünk, hogy a tranzakciókat úgy osztják fel, hogy amennyiben az y_i pozitív, akkor minden egyes általuk indított tranzakció is pozitív lesz, vagyis egy játékos csak egy irányban kereskedik: vagy kizárólag vesz, vagy kizárólag elad. Azonban, más árjegyzők is megtalálhatják az adott szereplőt, akik kérését szimultán fogadniuk kell. A kérések fogadása esetén el kell fogadniuk a kereskedés irányát is: akkor is venniük kell, ha ők éppenséggel eladnak az indított tranzakcióik során. (Ez utóbbi esetben viszont előnyösebb árat alkudhatnak ki, és újra is értékesíthetik azt az indított tranzakcióikban.)

A kereskedést megadó egyenlet a következő. Jelölje $\tau \in \mathbb{R}^K$ az egyes árjegyzőktől indított tranzakciók vektorát. Az indított tranzakciók mennyiségének és a beérkező tranzakciók nettó mennyiségének meg kell egyeznie a megcélzott végső kereskedési volumennel:

$$\tau - \Gamma' \tau = y. \quad (3)$$

Az egyenletet tekintve az $(I - \Gamma') \tau = y$ kifejezésben a bal oldalon álló szorzat első tényezője nem invertálható. Mivel az $I - \Gamma'$ mátrix sorösszegei nullával egyenlők, ezért a sajátértékek között a nulla is ott van. A lehetséges

megoldások halmaza azonban tovább szűkíthető. Ugyanis, ha például több szándékolt eladás van, mint vétel, és az átvétel kötelező (az átvett mennyiséget a τ nem tartalmazza), akkor többszörösen „utaztatják” az árut (pénzügyi eszközöket).

A kereskedésnek adjuk meg további feltételként, hogy összesen pontosan ugyanannyi vételi, mint eladási szándékolt mennyiség van a piacon. Másképpen, a τ_i indított tranzakciók összege nulla:

$$\underline{1}'\tau = 0. \tag{4}$$

Ez a feltevés nem zárja ki azt, hogy bizonyos szereplők közvetítsenek, vagyis továbbadják az átvett eszközt, abban az esetben, ha másként az nem juthatna el egy eladótól egy vevőhöz.

Egy elemi példával élve, két egymást tökéletesen elérő szereplőből álló piacon, ha $y = [1 \ -1]'$, akkor a $\tau = [2 \ 1]'$ megoldása lenne ugyan a (3) egyenletnek, de mindkét szereplő ugyanolyan irányú kereskedést indítana, és redundánssá válna a csere. A $\tau = [1/2 \ -1/2]'$ mennyiség-pár viszont a (4) feltételnek is eleget tesz: az első játékos így fél mennyiséget „megvesz” (szándékolt mennyiség), és fél mennyiséget „átvesz” (a partner szándékolt mennyiségének elfogadása), így összesen egy egységet vásárol.

A keresési hálón indított tranzakciók mennyisége alatt így azokat a τ mennyiségeket értjük, amely kielégítik az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{pmatrix} I - \Gamma' \\ \underline{1}' \end{pmatrix} \tau = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Ahol a bal oldali mátrixban I a K -ad rendű egységmátrixot, míg $\underline{1}$ a csupa egyesből álló K -elemű oszlopvektort, a 0 a skalár nullát jelöli. Vegyük észre, hogy az egyenletrendszerből következik az $\underline{1}'y = 0$ összefüggést is. Ez összességében annyit jelent, hogy a piacon pontosan ugyanannyi a vételi, mint az eladási mennyiség.

Tényleges tranzakciós forgalom

A τ vektor ismeretében a következő alakban adható meg az i és j játékos közötti tényleges tranzakció mennyisége:

$$t_{ij} = \gamma_{ij}\tau_i - \gamma_{ji}\tau_j. \tag{6}$$

Az így definiált t_{ij} elemek egy $T \in \mathbb{R}^{K \times K}$ kereskedési mátrixba rendezhetők. Látható, hogy a két játékos közötti tranzakció ebben az esetben a játékosok kereskedési preferenciájából és a megcélzott cseremennyiségéből adódik. A kifejezés első része az i játékos által j felé indított mennyiséget, míg a második kifejezés az érkező, megkapott mennyiséget mutatja.

1. Lemma (Egy játékos tranzakcióinak volumene). *A (Γ, y) -al definiált τ szándékolt tranzakciós mennyiségekre az i játékos tranzakciós mennyiségeinek összege: $\sum_j t_{ij} = y_i$.*

Bizonyítás. Fejtsük ki a t_{ij} tényleges tranzakciós mennyiséget, és alakítsuk át azt:

$$\sum_{k=1}^K t_{ik} = \sum_{k=1}^K \gamma_{ik} \tau_i - \sum_{k=1}^K \gamma_{ki} \tau_k = \tau_i - \sum_{k=1}^K \gamma_{ki} \tau_k = [(I - \Gamma') \tau]_i = y_i ,$$

ahol $[\cdot]_i$ jelölés egy oszlopvektor i -edik elemét jelenti. \square

Kereskedésre fordított idő

A keresési preferencia mellett a kereskedésre fordított idő fogalmát is fontos tisztázni. Egy szereplő fejenként 1 időegységet tud „eltölteni” a többiek keresésére. Ez összesen K időegységet jelent. A többi játékos fogadására is értelemszerűen így összesen K időegység telik el, amely minden szereplőnél különböző lehet (0 és K között). Összesen párhuzamosan $2K$ időegységet használnak fel.

Amennyiben a játékosok kontinuum sokszor kereskednek, valamint mindenki egymástól függetlenül $1/K$ eséllyel lép keresőként a piacra, akkor egy-egy játékos tranzakció indítására az összes idő $1/K$ arányát használja el. Az i játékos helyzetét tekintve, az i játékos összes kereskedési idejének

$$h_{ij} \doteq \frac{\gamma_{ij} + \gamma_{ji}}{\sum_{k=1}^K (\gamma_{ik} + \gamma_{ki})} \quad (7)$$

arányát használja a j játékosal való kereskedéshez. Az i szereplő összesen $\sum_{k=1}^K h_{ik} = 1$ időegységet használ el.

Osztzkodási alku

Egy-egy tranzakció során az i és j játékosok többlethasznót érhetnek el. A közösen elért többlethasznót Nash-alku során osztják ketté. Az alku alapja a piacon az a teljes $\sum_j t_{ij} = y_i$ összesen elcserélt és $\sum_i t_{ji} = y_j$ mennyiségekkel elérhető összes haszonnövekménynek azon része, amit ebből a szereplők a t_{ij} tranzakciónak tulajdonítanak. Mivel a tranzakcióban csak t_{ij} összeget cserélnek, ezért figyelembe vesszük, hogy a t_{ij} tranzakció a kereskedési idővel arányos mértékben járul hozzá az egyes felek haszonnövekményeihez. Az együttes többlethaszonból a két fél alkuerejétől függően i kap j -től d_{ij} összeget, amelyet a következő osztzkodási szabály szerint határoznak meg:

$$d_{ij} \doteq \theta_{ij} \left\{ \frac{\gamma_{ij} + \gamma_{ji}}{\sum_{k=1}^K (\gamma_{kj} + \gamma_{jk})} [U_j(y_j) - U_j(0)] \right\} - (1 - \theta_{ij}) \left\{ \frac{\gamma_{ij} + \gamma_{ji}}{\sum_{k=1}^K (\gamma_{ik} + \gamma_{ki})} [U_i(y_i) - U_i(0)] \right\} . \quad (8)$$

A két játékos közötti alkuerőt $\theta_{ij} \in (0, 1)$ jelöli. Ha θ_{ij} nagyobb, akkor nagyobb összeget kap az i nemnegatív haszonnövekmények mellett. A d_{ij} előjeles mennyiség, ezért i fizethet is j -nek.

Tranzakciós pénzáram

Az i és j játékos közötti tranzakcióban a fizetendő összeg két komponensből tevődik össze. Egyrészt, qt_{ij} mennyiséget fizet az i játékos a j játékosnak, ahol a q a játékosok által ismert belső piaci elszámolóár. Másrészt, alkuerejüktől függően i kap j -től d_{ij} előjeles összeget. Az i és j közötti pénzáramot tehát

$$c_{ij} \doteq -qt_{ij} + d_{ij} \quad (9)$$

összegként adhatjuk meg.

A (9) képlet értelmezése a következő. Tegyük fel, hogy i vesz j -től egy egység eszközt, vagyis $t_{ij} = 1$. Legyen az i és a j hasznosságnövekménye is 2-2 egység, a belső piaci elszámolóár $q = 0.8$, a találkozásuk időarányos mértéke pedig $(\gamma_{ij} + \gamma_{ji})/2 = 0.5$. Egenlő alkuerők esetén ($\theta = 0.5$) a pénztranszfer $c_{ij} = -0.8 \cdot 1 + 0.5 \cdot (0.5 \cdot 2 - 0.5 \cdot 2) = -0.8$, vagyis az i pontosan 0.8 egység pénzt fizet j -nek. Ha az i alkuereje nő ($\theta = 0.75$), akkor a pénztranszfer $c_{ij} = -0.8 \cdot 1 + 0.5 \cdot (0.75 \cdot 2 - 0.25 \cdot 2) = -0.3$, vagyis ebben az esetben kevesebb összeget utal át i a j -nek ugyanazért a cseréért.

3.2 Az árjegyző nettó kereslete

Az egyedi árjegyzői feladat során tegyük fel, hogy érkezik x_i nettó mennyiségű kockázatos eszköz az i -edik játékos ügyfeleitől a külső piacról. A kereskedők ezt a mennyiséget szeretnék csökkenteni vagy növelni, attól függően, hogy a belső piacon a többiekkel milyen feltételek mellett tudnak kereskedni. Az i -edik kereskedő összesen y_i nettó mennyiséget cserélne el, amiért összesen nettó $\sum_{k=1}^K c_{ik}$ előjeles mennyiségű pénzüsszeget kapna. Az i -edik játékos hasznosságfüggvénye a tranzakciókat is figyelembe véve:

$$U_i(y_i) \doteq \mu(x_i + y_i) - \frac{1}{2}\lambda_i\sigma^2(x_i + y_i)^2 + \sum_{k=1}^K c_{ik}(y_i), \quad (10)$$

ahol jelöljük, hogy a $c_{ij}(y_i)$ a kereskedett mennyiség függvénye. A tranzakciós pénzáramot kifejtve, és az 1. lemmát alkalmazva kapjuk az

$$\begin{aligned} U_i(y_i) \doteq & \mu(x_i + y_i) - qy_i - \frac{1}{2}\lambda_i\sigma^2(x_i + y_i)^2 + \\ & + \sum_{k=1}^K \left\{ \theta_{ik} h_{ij} [U_k(y_k) - U_k(0)] - (1 - \theta_{ik}) h_{ji} [U_i(y_i) - U_i(0)] \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

alakot. Jól látszik, hogy az egyenlet jobb oldalán is megjelenik a hasznosság.

1. Definíció (Hasznosságok vektora). Legyen $u(y) : \mathbb{R}^K \rightarrow \mathbb{R}^K$ vektor értékű függvény, amelyre

$$u(y) \doteq a(y) + Bu(y), \quad (12)$$

ahol $a(y) : \mathbb{R}^K \rightarrow \mathbb{R}^K$ vektor értékű függvény i -edik eleme

$$a_i(y_i) \doteq \mu(x_i + y_i) - qy_i - \frac{1}{2}\lambda_i\sigma^2(x_i + y_i)^2 + \\ + \sum_{k=1}^K \left[(1 - \theta_{ik}) h_{ki} U_i(0) - \theta_{ik} h_{ik} U_k(0) \right],$$

és $B \in \mathbb{R}^K$ mátrixra igaz, hogy főátlójának elemei

$$b_{ii} \doteq - \sum_{k=1}^K (1 - \theta_{ik}) h_{ki},$$

valamint nem főátlóbeli elemei

$$b_{ij} \doteq \theta_{ij} h_{ij}.$$

Ekkor az $u(y)$ függvényt a hasznosságfüggvények vektorának nevezzük.

Ezen vektoriális forma explicit alakra is átrendezhető, amelyben az $u(y)$ képlete nem rekurzív.

1. Állítás (Explicit hasznosságok vektora). *A hasznosságok vektora az alábbi formában is kifejezhető:*

$$u(y) = (I - B)^{-1} a(y). \quad (13)$$

Bizonyítás. Be kell látnunk, hogy létezik az $I - B$ inverze. Könnyű megmutatni, hogy az $M \doteq (I - B)'$ mátrix egy szigorúan diagonálisan domináns mátrix, vagyis igaz minden i -re, hogy

$$|m_{ii}| > \sum_{j \neq i} |m_{ij}|.$$

A bal oldalba behelyettesítve

$$|m_{ii}| = 1 + \sum_{k=1}^K (1 - \theta_{ik}) h_{ki} > 1,$$

a jobb oldal pedig

$$\sum_{j \neq i} |m_{ij}| = \sum_{k=1}^K \theta_{ik} h_{ik} < \sum_{k=1}^K h_{ik} = 1,$$

amelyből adódik a szigorú egyenlőtlenség. A Gershgorin-tétel következtében, mivel az M szigorúan diagonálisan domináns, ezért M lineárisan független oszlopvektorokból áll, tehát M és így az M' is invertálható. \square

Az így átrendezett hasznosságfüggvény megadásával könnyebben értelmezhetővé válik a határhaszon, valamint a nettó kereslet fogalma is.

2. Definíció (Nettó kereslet). Az i játékos nettó keresletét az az y_i mennyiség jelenti, amely az i játékos q ár mellett az y_i szerinti határhaszna éppen nulla, és e mellett hasznossága maximális:

$$y_i^d(q) \doteq \left\{ y_i \mid \frac{\partial u_i}{\partial y_i}(y_i, q) = 0; \frac{\partial^2 u_i}{\partial y_i^2}(y_i, q) < 0 \right\}, \quad (14)$$

ahol $u_i(y_i)$ az explicit hasznosságvektor i -edik eleme.

A nettó kereslet nem adja meg, hogy melyik játékos kivel szeretne cserélni, csak a játékos által elérni kívánt mennyiséget határozza meg.

3.3 Piaci egyensúly

Most vizsgáljuk meg a piac egyensúlyi helyzetét. Az eddigiek segítségével adjuk meg az egyensúly definícióját a belső piacon.

3. Definíció (Piaci egyensúly). Tekintsük az $(x, \lambda, \Gamma, \theta)$ struktúrával definiált piacot. Minden $i \in \{1 \dots K\}$ játékos feladata olyan $y_i \in \mathbb{R}$ cseremennyiség megválasztása adott q mellett, amelyre hasznossága maximális:

$$\max_{y_i} u_i(y_i),$$

az alábbi korlátozó feltétel mellett:

$$\sum_{k=1}^K y_k^d(q) = 0. \quad (15)$$

Ez utóbbi a piac megtisztulásának feltétele.

A piac megtisztulása azt jelenti, hogy minden játékos a hasznának maximalizálására törekszik a cserék során, miközben csak egymás között kereskedhetnek a felek. Vegyük észre, hogy ezt a feltételt már korábban beépítettük, az (5) egyenlet megfogalmazásakor. Az alábbiakban megadjuk az egyensúlyi y allokációt és a piactisztító q belső elszámolóárat.

2. Állítás Adott $(x, \lambda, \Gamma, \theta)$ piacon az i játékos nettó keresleti függvényének alakja:

$$y_i^d(q) = -x_i + \frac{1}{\lambda_i \sigma^2} \mu - \frac{1}{\lambda_i \sigma^2} q. \quad (16)$$

Bizonyítás. Az optimum elsőrendű feltétele szerint

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial y_i}(y_i) &\doteq \sum_{k=1}^K \left\{ \left[(I - B)^{-1} \right]_{ii} \frac{\partial a_i}{\partial y_i}(y_k) \right\} = \\ &= \left[(I - B)^{-1} \right]_{ii} \frac{\partial a_i}{\partial y_i}(y_i) + \sum_{k \neq i}^K \left\{ \left[(I - B)^{-1} \right]_{ik} \frac{\partial a_k}{\partial y_i}(y_k) \right\} = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Az elsőrendű feltételben szereplő második tag zérus, így a feltétel az alábbira egyszerűsödik:

$$\left[(I - B)^{-1} \right]_{ii} \frac{\partial a_i}{\partial y_i} (y_i) = 0 .$$

Mivel az $(I - B)$ mátrix főátlójának elemei pozitívak és a mátrix szigorúan diagonálisan domináns, így az inverzének főátlóelemei sem lehetnek nullák. Ezért a fenti egyenlet bal oldala csak akkor lehet zérus, ha $\frac{\partial a_i}{\partial y_i} (y_i) = 0$. Kibontva a deriváltat kapjuk:

$$\mu - q - \lambda_i \sigma^2 (x_i + y_i) = 0 ,$$

amelyből kifejezhetjük a nettó keresleti függvényt:

$$y_i^d(q) = \frac{1}{\lambda_i \sigma^2} (\mu - q) - x_i .$$

Ha minden játékos ehhez hasonlóan dönt, akkor a többi játékosról tett feltevés teljesül, és valóban ez lesz az optimális keresleti mennyiség elsőrendű feltétele. A másodrendű feltétel szerint:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial y_i^2} (y_i) \doteq \left[(I - B)^{-1} \right]_{ii} \frac{\partial^2 a_i}{\partial y_i^2} (y_i) < 0 . \quad (18)$$

Be kell látnunk, hogy a második derivált negatív az y_i helyen. Fejezzük ki az $a_i(y_i)$ második deriváltját:

$$\frac{\partial^2 a_i}{\partial y_i^2} (y_i) = -\lambda_i \sigma^2 < 0 \quad (19)$$

minden i elemre. Vizsgáljuk meg az $\left[(I - B)^{-1} \right]_{ii}$ elemek előjelét. Az $I - B$ mátrix inverzét kifejezhetjük a determináns és adjungált segítségével

$$(I - B)^{-1} = \frac{1}{\det(I - B)} \text{adj}(I - B) , \quad (20)$$

ahol az adjungált mátrix főátlójának elemeit

$$[\text{adj}(I - B)]_{ii} = (-1)^{2i} [(I - B)]_{ii} \quad (21)$$

alakban írjuk fel. Mivel az eredeti $I - B$ mátrix főátlójának elemei pozitívak és a -1 páros hatványait vesszük, így az adjungált főátlójának elemei is pozitívak. A mátrix szigorúan diagonálisan domináns, pozitív főátlóbeli elemekkel és nempozitív főátlón kívüli elemekkel. Fiedler és Pták (1962) 4.3-as tételét alkalmazva, ha Z egy ilyen tulajdonságú négyzetes mátrix, akkor $\det(Z) > 0$. Ezt kihasználva az $I - B$ mátrix determinánsa is pozitív, és ebből következik, hogy a (21)-beli inverz főátlójában lévő elemek is pozitívak. Összegezve, a másodrendű és az elsőrendű feltétel is teljesül a (16) alakú nettó keresleti függvényre. \square

3. Állítás Adott $(x, \lambda, \Gamma, \theta)$ piacon az egyensúlyi y^* allokáció az i játékosra:

$$y_i^* = \frac{\frac{1}{\lambda_i \sigma^2}}{\sum_{k=1}^K \frac{1}{\lambda_k \sigma^2}} \sum_{k=1}^K x_k - x_i, \quad (22)$$

valamint a piactisztító belső elszámolóár:

$$q^* = \mu - \frac{\sum_{k=1}^K x_k}{\sum_{k=1}^K \frac{1}{\lambda_k \sigma^2}}. \quad (23)$$

Bizonyítás. Felhasználva a (15) egyenletbeli piac megtisztulásának feltételét és összegezve a játékosok nettó keresletét azt kapjuk, hogy

$$\sum_{k=1}^K \frac{1}{\lambda_k \sigma^2} (\mu - q) = \sum_{k=1}^K x_k, \quad (24)$$

amelyet q -ra rendezve kapjuk az egyensúlyi belső elszámolóárat:

$$q^* = \mu - \frac{\sum_{k=1}^K x_k}{\sum_{k=1}^K \frac{1}{\lambda_k \sigma^2}}.$$

Ezt kifejezve kapjuk az i játékos nettó keresletét a piaci egyensúlyban:

$$y_i^* = \frac{\frac{1}{\lambda_i \sigma^2}}{\sum_{k=1}^K \frac{1}{\lambda_k \sigma^2}} \sum_{k=1}^K x_k - x_i.$$

□

Az eredmény következtében amennyiben a piac szereplői ismerik a piacon lévő eszközök teljes mennyiségét ($\sum_{k=1}^K x_k$), úgy az eszközök allokációja nem tér el a walrasi piac (keresés nélküli piac) által javasolt eszközallokációtól: a játékosok egyensúlyi nettó kereslete és az egyensúlyi belső elszámolóár egyértelműen megadható a keresési preferenciák ismerete nélkül.

Fontos megjegyezni viszont, hogy a T , c , így az egyedi hasznosságok és a bilaterális tranzakciók árai nem függetlenek mindezeketől. A keresési preferenciákat ismerve a hasznok elosztása is egyértelmű. A népszerűbb vagy erősebb több pénzt visz haza, mint minden másban hasonló helyzetben lévő társai. A hálózati sűrűlódások tehát jelentősen képesek befolyásolni a kereskedéssel megszerzett profitot.

Következmény. Ha a tranzakciókat az (5) és (6) egyenletekben megadottak szerint számoljuk az egyensúlyi nettó keresleti mennyiségek mellett, akkor a bilaterális tranzakciókban az ár i és j szereplő között

$$p_{ij} = q - d_{ij} \frac{1}{t_{ij}} \quad (25)$$

lesz minden $t_{ij} \neq 0$ -ra.

Ha i vásárol, vagyis $t_{ij} > 0$, akkor pozitív (kapott) d_{ij} esetén olcsóbban vesz. Ha $t_{ij} < 0$, akkor pozitív (kapott) d_{ij} esetén drágábban ad el.

A $t_{ij} = 0$ esetet tekintve felvetődik, hogy ugyan i és j között nincs eszkozmozgás, de a modell szerint ettől még lehetne pénzmozgás. Ez azt jelentené, hogy az egyik játékos jótékonykodna a másikkal: csak azért adna pénzt, mert a belső piacon hasznosnak ítélné meg a létezését. Ez a modell keretein belül megmagyarázható, de nem egészen életszerű. A „nincs jótékonykodás” feltétele azonban könnyen beépíthető a modellbe. A számítási algoritmus a következő. Ehhez először a 3. állítást felhasználva adjuk meg az egyensúlyi y^* allokációt, majd az (5), (6) egyenletekből a tranzakciókat. Ahol $t_{ij} = 0$ lett, ott módosítsuk a keresési együtthatókat a következőképpen $\gamma'_{ij} = 0$ és $\gamma'_{ji} = 0$. Nem számoljuk újra a t_{ij} -ket, hiszen azok már adóttak, ez csak azt jelenti, hogy a keresésre szánt idő végül üresjárat lett, ezt azonban a felek előre nem tudják. Ezek alapján, a már meglévő y^* allokációval és q árral már kiszámolhatjuk a (13)-beli u hasznosságvektort és a (9)-beli pénzmozgás-vektort. Mivel az y^* optimumhely független Γ -tól, ezért az új egyensúlyi u értékek is az adott feltételek melletti legnagyobb hasznosságot adják meg.

Következmény. *A belső piacon minden i játékos számára az y_i elmozdulás Pareto-hatékony, hiszen a hasznosságmaximumba érkeznek, amelyre igaz, hogy*

$$u_i(y_i^*) \geq u_i(0) . \quad (26)$$

A belső piac értéket teremthet azért, hogy cserélnek egymással a felek. Önmagában a játékosok fedezési célokkal érkeznek a belső piacra, hiszen y_i cserével jobb helyzetbe kerülhetnek. A keresési súrlódás azt is előidézi, hogy nemcsak fedezési célból, hanem közvetítési célból lehetnek jelen piaci szereplők. A megkerülhetetlen (népszerű, keresett) játékosok induló x_i készletek nélkül is aktívak lehetnek a belső piacon, a közvetítésért díjat számolva fel. Ez a díj a hasznosságnövekményeken való alkudozásból képződik.

3.4 Numerikus példák

Az alábbiakban néhány elemi példán keresztül illusztráljuk a bemutatott modell fő jegyeit.

Elemi hálózatok

Az első példában $K = 4$ szereplő cserélhet egymással a belső piacon. Az eszköz várható értéke $\mu = 1$, varianciája $\sigma^2 = 1$. A szereplők kezdeti x eszközeit, kockázatkerülési együtthatóit, valamint a kiinduló állapotbeli hasznosságait az 1. táblázat tartalmazza. Nem teszünk fel heterogenitást a kockázati attitűdben (minden $\lambda = 2$) és az egyedi alkupozíciókban sem (minden játékos egyforma alkuerővel rendelkezik, $\theta_{ij} = 0.5$ minden i és j -re). A fent definiált piacon néhány elemi hálózaton történő kereskedés egyensúlyi helyzetét mutatjuk be (2. táblázat). A következő hálózatokat vizsgáljuk:

- Teljes hálózat: minden játékos mindenkit egyforma arányban keres fel.
- Csillag alakú hálózat: az első változatban az $x_1 = -1$ pozícióval rendelkező 1-es játékos, a második változatban az $x_2 = 0$ pozícióval bíró 2-es játékos lesz a központi szereplő, mindenki más csak rajta keresztül tud kereskedni.
- Kör alakú hálózat: a játékosok egymással vannak összekötve a 1-2-3-4 vonalon, minden játékos csak a nála eggyel nagyobb sorszámú játékost keresi, a 4-es játékos az 1-essel van összekapcsolva.
- Vonal alakú hálózat: a kapcsolódást az 1-2-3-4 pontok mentén alakítottuk ki, úgy, hogy a köztes játékosok fele-fele arányban keresik két szomszédjukat.

A hálózatokat a keresési preferenciák segítségével adjuk meg. A teljes hálózat esetén minden szereplő egyenlő arányban keresi a többieket, a többi hálózatos formánál, ahol csak egyfelé irányul a keresés, 0 vagy 1 a súly nagysága. A csillagpontos hálózatokban a középpontbeli játékos szintén egyenlő arányban indít kereséseket.

	x	λ	$U(0)$	y^*
1	-1	2	-2	1
2	0	2	0	0
3	0	2	0	0
4	1	2	0	-1

1. táblázat. Kereskedés elemi hálózatokon: Induló paraméterek és az egyensúlyi alokkáció

		Teljes	Csillag 1	Csillag 2	Kör	Vonal
$U(y^*) - U(0)$	1	0.800	1.000	0.833	0.833	0.786
	2	0.200	0.000	0.333	0.167	0.214
	3	0.200	0.000	0.000	0.167	0.214
	4	0.800	1.000	0.833	0.833	0.786
p	1-2	0.600	-	0.833	0.333	0.786
	1-3	0.600	-	-	-	-
	1-4	1.000	1.000	-	1.000	-
	2-3	-	-	-	1.000	1.000
	2-4	1.400	-	1.167	-	-
	3-4	1.400	-	-	1.667	1.214
t	1-2	0.250	0.000	1.000	0.250	1.000
	1-3	0.250	0.000	0.000	0.000	0.000
	1-4	0.500	1.000	0.000	0.750	0.000
	2-3	0.000	0.000	0.000	0.250	1.000
	2-4	0.250	0.000	1.000	0.000	0.000
	3-4	0.250	0.000	0.000	0.250	1.000

2. táblázat. Kereskedés elemi hálózatokon: Hasznosság, páronkénti tranzakciók árak és mennyiségek

A piaci egyensúlyt a következő jellemzi. Az egyensúlyi belső elszámolóár $q = 1$ lesz, ami megegyezik az eszköz μ várható értékével is. Az y^* egyensúlyi nettó keresleti mennyiség a tükröképe a kiinduló pozícióknak, a végső $(x + y^*)$ allokációban minden szereplő zérus pozíciót tart az eszközből. Tekintsük a belső piaci cserékkel nyert hasznokat, amelyeket $U(y^*) - U(0)$ formában adunk meg! A keresési preferenciák által alkotott teljes hálózat némileg eltérő eredményt ad az első intuícióhoz képest. Azt várnánk, hogy az 1-es és 4-es játékos cserélne egymással csak a teljes hálózaton. Azonban, a keresési súrlódás következtében előre el kell dönteni, hogy az erőforrások (idő) mekkora részét fordítják az egyes szereplők felkeresésére. Így az eszközpozícióval nem rendelkező játékosok is közvetítő szerephez jutnak. Vegyük észre, hogy ez a keresési koncepció eltér azoktól a megközelítésektől, amelyek során egy játékos addig keres, még meg nem találja az optimális jelöltet. Itt a felkeresés (és egyeztetés) ideje korlátos és szimultán. A 2-es és 3-as játékos közvetítővé válik, ezért pedig díjat szed, vételi-eladási árak 0.6 – 1.4 lettek, viszont csak 0.25 mennyiségű eszközt tudnak fejenként cserélni a keresési feltételek mellett. A 2-es és 3-as játékos nem cserél egymással. A *csillag 1* alakzatban az 1-es és 4-es játékos közvetlen kapcsolatban áll egymással és mivel csak kettejüknek van indítéka a kereskedésre, egymás között rendezik a tranzakciót. Más szereplő nem vesz részt a piaci allokációban. A *csillag 2* alakzat jó példája a tiszta közvetítői szerepvállalásnak. Amennyiben a pozícióval nem rendelkező 2-es játékos az 1 és 4 közé állva egy egységet közvetít, így ilyen kockázatkerülési attitűd mellett 1 ± 0.167 áron vesz és ad eszközt, jelentős hasznot szerezve a közvetítésből. A kör alakú hálón jól látható, hogy közvetlen és közvetített csere is zajlik. A vonal struktúrán a két közvetítő csere hatása figyelhető meg. A két közvetítő együttesen több, de külön-külön kevesebb hasznot szerez, mint a *csillag 2*-ben a központi játékos. Mint látjuk, a megszerzett haszon mértékét a hálózatban való központoság és a kezdeti pozíció jelentősen befolyásolja.

Keresési preferencia-arányos alkuerő központ-periféria hálózaton

Még egy példával illusztráljuk a belső piacok működését, jelen esetben olyan Γ mátrixot definiálunk, amelyben bizonyos szereplők népszerűbbek a többiekénél. Az így kialakuló hálózat hasonlít azokhoz a központ-periféria alakú hálózatokhoz, amelyet az empirikus tanulmányokban is megfigyelnek (pl. Li és Schuerhoff (2012)). A mátrix képzésének menete minden $i \neq j$ -re:

$$\gamma_{ij} = \frac{e^{\rho \frac{i-j}{K^2}}}{\sum_{k=1}^K e^{\rho \frac{i-k}{K^2}}},$$

ahol ρ skalázási paraméter, amely a hálózat központosíttóságát módosítja. Valamint minden $i = j$ esetén a keresési arány értelemszerűen nulla. Két esetet mutatunk be. Az elsőben i és j játékos közötti Nash-alku során az alkuerőt a korábbi példában szereplő $\theta_{ij} = 1/2$ -nek adjuk meg, míg a

másodikban

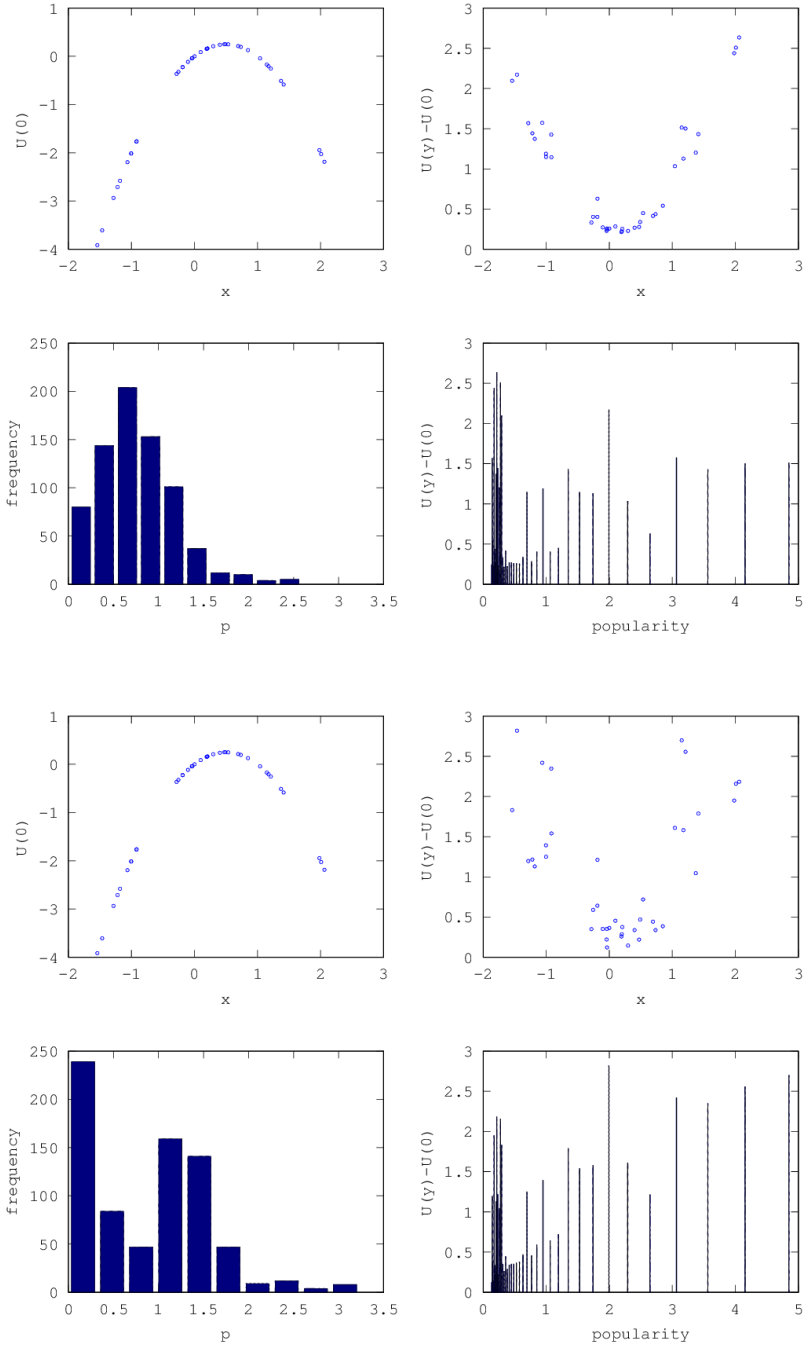
$$\theta_{ij} = \frac{\gamma_{ji}}{\gamma_{ij} + \gamma_{ji}}$$

nagyságúnak választjuk, ezzel érzékeltetve a központi helyzetben lévő szereplők többlet-alkupozícióját.

Az induló készletek legyenek standard normális eloszlásúak $x_i \sim N(0, 1)$, az eszköz várható értéke $\mu = 1$, varianciája $\sigma^2 = 1$. Ez a piacnak azon jegyét hordozza magában, hogy a játékosok képesek fedezni pozíciójukat a belső piacon, mert van megfelelő számú szereplő az ellentétes oldalon. (Más eredményt kapnánk, ha a pozíciók zömében egy oldalon lennének, ekkor a kockázatdiverzifikáció hatása lenne erősebb, nem pedig a fedezési hatás.) Minden játékos $\lambda = 0.3$ kockázatelutasítási együtthatóval rendelkezik. A szereplők száma legyen $K = 50$. A korábban definiált preferencia-képzési módszerben a skálázási együttható értékét $\rho = 20$ -nak választottuk.

A 2. ábrán a szimuláció négy tulajdonságát mutatjuk be. A kétféle θ paraméterezésben készült szimulációkat 4-4 kisebb ábrán ismertetjük. Mindkét szimulációban a kiinduló x pozícióknak ugyanazt a generált véletlen realizációt használtuk fel, hogy jobban összevethetők legyenek az eredmények.

A 2.a ábrákon a kezdeti hasznosság látható a kiinduló készlet függvényében. Az eszköz várható értéke $\mu = 1$, de a kockázata kvadratikus, ami a hasznosságot is erősen meghatározza. A 2.b ábrák a csere után megvalósult hasznosságnövekedéseket adják meg. A $\theta_{ij} = 1/2$ esetben a szélsőséges pozícióval rendelkező szereplőknek érte meg leginkább a piacon kereskedni, a hasznosságnövekmény is hasonló a kvadratikus formához, azonban bizonyos szereplők kiemelkednek hasznosságnövekedés tekintetében a mezőnyből. Ezek a játékosok a népszerű játékosok. A $\theta_{ij} = \gamma_{ji}/(\gamma_{ij} + \gamma_{ji})$ esetben a parabolikus alak kevésbé látszik, nagyobb a szerepe az hálózati alkuerőnek a profitszerzésben. A 2.d ábrákon a népszerűség (másoktól érkező megkeresések rátáinak összege) alapján rangsoroltuk a kereskedőket és ábráztuk a haszonnövekményt. Az ábrákon két mintázat figyelhető meg. Az egyik a szélsőséges pozícióból származó magas profitot elérők csoportja, az alacsony népszerűség melletti tartományon tömörülő kiemelkedő profitok. A másik mintázatnál azt találjuk, hogy a profit a nagyobb népszerűségben örvendő játékosok esetén nagyobb. Ez az összefüggés nem lehet tökéletes, mert a nagy induló készletpozíciójú szereplők ekkor is képesek a fedezést annyira kihasználni, hogy nagyon hasznosnak ítélik meg a kereskedést. A 2.c ábrákon a kétoldalú tranzakcióban szereplő árak gyakorisági diagramjait adjuk meg. A vízszintes tengelyen a tranzakciós árat, a függőlegesen a megfigyelt gyakoriságot látjuk. A legmagasabb 30 árból származó megfigyelés adatait nem tüntetjük fel az ábrákon, mert extrém értékeket jelentettek a többihez képest, és hisztogram releváns része nem lenne így látható. Jól megfigyelhető, hogy míg az egyenlő alkuerős esetben az árak eloszlásának egy módusza van, addig a központi alkuerős esetben két jellemző érték körül alakulnak a tranzakciós árak.



2. ábra. A szimuláció eredményei (felső: $\theta = 1/2$, alsó: θ_{ij} központiságtól függ): a) Kiinduló hasznosság a kezdeti készlet függvényében; b) Haszonnövekedés a kezdeti készlet függvényében; c) Páronkénti tranzakciós ár hisztogramja; d) Haszonnövekedés a népszerűség függvényében



3. ábra. A szimulált kereskedési hálózat: a) A forgalom felső 50%-ából képzett súlyozott irányított gráf; b) A forgalom felső 20%-ából képzett súlyozott irányított gráf

A 3. ábrán a páronkénti tranzakciók forgalmi adatából készítettünk két gráfot. A bal oldali ábrán a tranzakciók felét jelenítettük meg, azokat is, amelyek léteznek ugyan, de közgazdasági értelemben aránylag jelentéktelennek számítanak. Súlyozott gráfot láthatunk, a legnépszerűbb (itt legnagyobb sorszámú) szereplők élei a legvastagabbak: itt megy a legnagyobb forgalom. Sok forgalmat bonyolítanak a szélsőséges induló készlettel rendelkezők is. Látható, hogy bár páronként egyirányú a forgalom, egy-egy játékos egyszerre vevő és eladó is a piacon, vagyis a közvetítési motívum jelen van. A jobb oldali ábrán a forgalom felső 20 százalékát ábrázoltuk, ahol ennél kisebb volt a tranzakciós mennyiség, azok esetén nem jelenítettük meg kapcsolatot. Jól látható, hogy az alacsonyabb sorszámú (népszerűtlen), valamint a kis induló készletű szereplők kevés kapcsolattal bírnak. A nagy sorszámú szereplők egymással sokat kereskednek, de egy-egy él összekapcsolja őket a periférián maradt játékosokkal is. Az is látható, hogy a népszerű szereplők inkább nagy forgalmat generálnak, míg a szélsőséges pozíciójú szereplők inkább sok egyéni kapcsolattal, de kisebb forgalommal rendelkeznek: náluk a fedezési motívum az elsődleges, és alig jellemző rájuk a közvetítési motívum.

4 Stratégiai viselkedés a külső piacon

A külső piacon azt a helyzetet vizsgáljuk, amikor az ügyfélkörök nem különülnek el, és az árjegyzők egymással versenyeznek az ügyfelekért. Ezen a piacon minden árjegyző ára nyilvános. Egyenlő árak esetén egyenletesen oszlanak meg a választott árjegyzők között a befektetők. Bár a következő speciális eseteket a pénzügyi piacok jegyeinek elemzésére konstruáljuk, akár hétköznapi szituációkra is alkalmazható a koncepció. Képzeljünk el egy nemzetközi repülőteret, ahol érkező turisták százai váltják saját valutájukat az ország pénznemére a repülőtéren üzemelő két pénzváltónál. A pénzváltók különböző váltási árfolyamot jegyezhetnek, amelyeket a turisták könnyen megfigyelhetnek, mindkettőt egyszerre. Emiatt érdemes összehangolniuk az árazásukat, és ezért is elsősorban a napi forgalom kívánt mennyiségéről döntenek. A pénzváltók az irodák mögötti folyosón egymáshoz át tudnak menni, és szükség esetén egymás között hiányukat pótolni vagy fölöslegüket leadni, némi alkudozás eredményeként. Mennyiben módosul a két pénzváltó közti verseny, ha van átjárás a folyosón, illetve ha az egyik pénzváltó (valamely külső ok folytán) jobb alkupozícióban van?

4.1 A kétszereplős feladat

Amennyiben a külső piacon egyének szintjén nincs egyensúly, de piaci szinten a vételi és eladási igény megegyezik, a belső piac funkciójának megfelelően működik. A belső piac működése akkor válik kritikussá, amikor rövid időre egyoldali ajánlatok kerülnek túlsúlyba a külső piac egészén. Ilyenkor fel kell mérni, hogy a belső piac mennyi kockázatot képes ebből elnyelni. Ilyen esetekben nem mindegy, hogy a közvetítők hogyan reagálnak egymás lépéseire, egymásra tudják-e vajon terhelni a kockázatokat. Ennek elemzésére a következő részben két szereplőre vonatkozóan többféle duopol struktúrát elemezzünk. Ezek: Cournot-duopólium; Stackelberg-duopólium; két Stackelberg-vezető duopol szituáció; kartellhelyzet. Az elemzési keretünknek a mennyiségvezérelt duopóliumokat választottuk az árvezérelt duopóliumokkal szemben (amelynek módszertanát lásd például Mas-Colell, Whinston és Green (1995) piaci erőfölénnyel foglalkozó fejezetében). Ez első ránézésre idegen az árjegyzői piacok logikájától, ahol jellemzően az árjegyzők egymással konzisztens (arbitrázsmentes), de egymástól különböző vételi és eladási árakat (ársávokat) jegyeznek, nem pedig mennyiségeket adnak meg. Mégis, az árjegyző brókerségek számára hosszabb távú kérdés lehet, hogy stabil kereskedési igények („kereslet”) esetén mennyi legyen jellemzően az a felvállalt árrés, amivel a megcélzott forgalom elérhető és profitot hoz. Ez implicite azt jelenti, hogy a befektető ügyfelek nem rendelkeznek információs többlettel a brókerségekhez képest az eszköz értékére vonatkozóan.

Mivel mindkét árjegyző árait látják a befektetők, ezért nincs értelme a két árjegyzőnek különböző árakat adni. Megcélozhatják viszont a kívánatos eladási és vételi mennyiségeiket, amellyel „kitapogatva” a megfelelő árfolyamokat már összhangban tud a két szereplő árat jegyezni. A befektetők (ügyfelek) inverz vételi és eladási „keresleti” függvényeit ezért a következő módon adjuk meg

$$\epsilon^a = \frac{a}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} (n_1^a + n_2^a) , \quad (27)$$

$$\epsilon^b = \frac{b}{\beta} - \frac{1}{\beta} (n_1^b + n_2^b) . \quad (28)$$

Ahol n_i^a az i árjegyző vételi, n_i^b az eladási mennyisége, az ϵ a fél árrés, azaz $\mu + \epsilon^a$ és $\mu - \epsilon^b$ a jegyzett eladási és vételi ár. Az árrés nagysága $\epsilon^a + \epsilon^b$.

Az általunk vizsgált árjegyzői piac amnyiban tér el a hagyományos duopóliumoktól, hogy az árjegyzők a külső tranzakciót követően még a belső piacon elosztják egymás között a kockázatot, és ezért fizetnek, vagy pénzt kapnak. Kérdésünk, hogy mennyire változtatja meg ez a helyzet a szereplők magatartását. Ha egy szereplő például a külső kereslet-árrugalmasságoknak megfelelően nem nulla nettó pozíciót hoz létre, és ezzel nagy kockázatot vállal, akkor az itt keletkező profit egy részét fel kell ajánlania a másik (kockázatot elnyelő) szereplőnek. Ezért felmerül a kérdés, hogy a tudatos stratégiával milyen mértékű extraprofitot lehet elérni, és mi jellemezi az egyensúlyi helyzeteket.

Az árjegyzői feladat az első szereplőre a következő alakot ölti:

$$\max_{\{n_1^b, n_1^a, y\}} U \doteq \mu x_1 - R_1(x_1 + y) + E(\epsilon_1^b n_1^b + \epsilon_1^a n_1^a) + c_{12}, \quad (29)$$

ahol bevezettük az $R_i(x) \doteq \frac{1}{2}\lambda_i\sigma^2x_i^2$ jelölést, valamint figyelembe vettük a külső piacon szerezhető várható profitot is. A külső piacon a bid és az ask árjegyzéstől függ a megszerezhető mennyiség nagysága:

$$n_1^a = a - \alpha\epsilon_1^a - n_2^a, \quad n_1^b = b - \beta\epsilon_1^b - n_2^b. \quad (30)$$

A nettó pozíciók pedig $x_1 = n_1^b - n_1^a$, $x_2 = n_2^b - n_2^a$. A pénzáram definícióját a kétszereplős helyzetre alkalmazva kapjuk a

$$c_{12} = -qy + \theta[U_2(x_2 - y) - U_2(x_2)] - (1 - \theta)[U_1(x_1 + y) - U_1(x_1)]$$

kifejezést, amelyre behelyettesítés és átalakítás után adódik a

$$c_{12} = -\frac{1}{2}\left\{\mu y + \theta[R_2(x_2 - y) - R_2(x_2)] - (1 - \theta)[R_1(x_1 + y) - R_1(x_1)]\right\} \quad (31)$$

képlet. A második szereplő pénzmozgása $c_{21} = -c_{12}$.

4.2 Duopol-szituációk egyoldali jegyzés, egyenlő belső alkuerő esetén

Az első elemzési esetben a partnereknek egyenlő az alkuereje. A korábban bevezetett osztozkodási szabályt $\theta = 1/2$ esetre alkalmazzuk. A két szereplőnek azonos kockázatviselő hajlandósága van, a kockázatelutasítási paraméterek ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$) nem térnek el egymástól. Az egyszerűség kedvéért csak a vételi ajánlatokat tekintjük, ezek keresleti paraméteréhez $\beta = 1$ -et választjuk. Az eladási ajánlatok számát $n^a = 0$ -ban rögzítjük. A μ várható ár legyen 0. A kockázatos eszköz árának varianciája legyen $\sigma^2 = 1$. Döntési változóként az n^b elérni kívánt tranzakciós mennyiséget határozzuk meg, amelyekből következik majd a vételi ár (bid, ϵ^b) is.

$$\max_{\{n_1^b, y\}} U \doteq \epsilon_1^b n_1^b - \frac{1}{2}\lambda(n_1^b + y)^2 + c_{12}, \quad (32)$$

ahol $\epsilon_1^b = b - n_1^b - n_2^b$. Az első szereplőre jutó kockázatkezelésből származó pénzáram:

$$c_{12} = -\frac{1}{2}\mu y + \frac{1}{8}\lambda\left\{\left[(n_1^b + y)^2 - (n_1^b)^2\right] - \left[(n_2^b - y)^2 - (n_2^b)^2\right]\right\}.$$

A belső piaci egyensúly elsőrendű feltétele szerint az y csere $y = 0.5(n_2^b - n_1^b)$, a belső piaci elszámolóár pedig $q = -0.5\lambda(n_1^b + n_2^b)$. A pénzáram a belső piac egyensúly és $\mu = 0$ esetén:

$$c_{12} = \frac{1}{8}\lambda\left[(n_2^b)^2 - (n_1^b)^2\right]. \quad (33)$$

Az átalakítás után az egyes játékosok hasznosságfüggvényére pedig az

$$U_1 = \epsilon_1^b n_1^b - \frac{1}{8} \lambda (n_1^b + n_2^b)^2 + \frac{1}{8} \lambda \left[(n_2^b)^2 - (n_1^b)^2 \right] \quad (34)$$

$$U_2 = \epsilon_2^b n_2^b - \frac{1}{8} \lambda (n_1^b + n_2^b)^2 - \frac{1}{8} \lambda \left[(n_2^b)^2 - (n_1^b)^2 \right] \quad (35)$$

alakot kapjuk.

Tekintsük elsőként a Cournot-duopólium esetét. Az előző levezetésből és a Cournot-duopol viselkedésből már könnyen megadható az 1. játékos hasznosságfüggvényének redukált alakja. Az első szereplő reakciófüggvénye

$$n_1^b = \frac{2}{\lambda + 4} b - \frac{1}{2} n_2^b,$$

ebből következően az egyensúlyi mennyiség

$$n_1^{b*} = \frac{2}{3} \frac{2}{\lambda + 4} b, \quad (36)$$

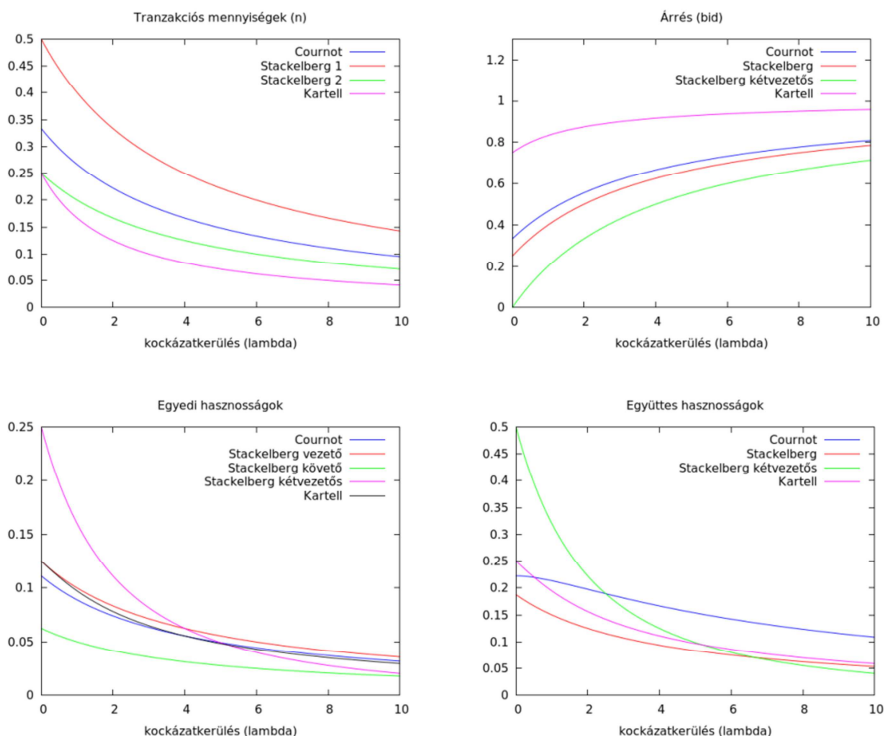
és az egyensúlyi árres fele pedig $\epsilon_1^b = \epsilon_2^b = [(\lambda + 4/3) / (\lambda + 4)] b$ lesz. Jól látszik, ha a szereplők kockázatelutasítása magasabb, akkor az árres nagyobb, és a tranzakciós mennyiség kevesebb. Következzen a Stackelberg duopólium ismertetése. Amennyiben az egyik árjegyző árvezérlőként előbb jegyez árat, mint a második, és a másik követőként viselkedik a külső piacon, akkor a két szereplő árjegyzése nyomán a második szereplő reakciófüggvénye a Cournot-féle magatartást követi, az első szereplő pedig beépíti a másik cselekvését a döntésébe. A vezető és a követő játékos egyensúlyi mennyisége

$$n_1^{b*} = \frac{2}{\lambda + 4} b, \quad n_2^{b*} = \frac{1}{2} \frac{2}{\lambda + 4} b, \quad (37)$$

az árjegyzésből fakadó fél árres az egyensúlyban $\epsilon_1^b = \epsilon_2^b = [(\lambda + 1) / (\lambda + 4)] b$. A kétvezetős duopol szituációban, vagyis ha mindketten vezetőként lépnének fel n_1^{b*} mennyiséggel, amely a piacon azt eredményezné, hogy mindkét szereplő az $\epsilon_1^b = \epsilon_2^b = [\lambda / (\lambda + 4)] b$ árat jegyeznék. Kartell megállapodást kötő játékosok esetén a tranzakciós mennyiségek:

$$n_1^{b*} = n_2^{b*} = \frac{1}{2} \frac{1}{\lambda + 2} b, \quad (38)$$

és az ehhez tartozó árresék: $\epsilon_1^b = \epsilon_2^b = [(\lambda + 1) / (\lambda + 2)] b$. A négy változat piaci egyensúlyi árait és mennyiségeit a λ kockázati paraméter függvényében a 4. ábra illusztrálja $b = 1$ eset mellett. Az ábrán az árjegyzők forgalmát, a vételi árakat, a játékosok egyedi hasznosságait valamint az árjegyzők együttes hasznosságát mutatjuk be az általános kockázatkerülés függvényében. A nagyobb általános kockázatkerülési együttható óvatosabb szereplőket jelez, akik erősebben támaszkodnak a belső piacra. Ahogy a kockázatkerülés általános mértéke a játékosoknál nő, úgy tűnik el fokozatosan a külső piaci erőfölény a játékosok között. Ezt jelzi az is, hogy a piaci forgalom, az ár, valamint az egyedi és aggregált hasznosságok egymáshoz közeli értékeket vesznek fel a különböző piacszerkezetek mellett, ha nagy a kockázatelutasítás mértéke.



4. ábra. Különböző piaci szituációk, a kockázatkerülés függvényében, egyenlő alkuerők.
 a) Árjegyzők egyéni tranzakciószáma, b) Piaci bid ajánlatok, c) Egyes árjegyzők hasznossága,
 d) Az árjegyzők együttes hasznossága

4.3 Aszimmetrikus alkuerő a belső piacon

A második elemzési esetben az elosztási szabályban aszimmetrikus az alkuerő. Ebben a helyzetben a szimmetrikus külső piaci szituációk (Cournot, kétvezetős Stackelberg, kartell) nem változnak, hiszen ott nem is használják a belső piacot a cserére az azonos mértékben kockázatkerülő, és ezért a külső piacon azonos irányú és nagyságú pozíciót felvállaló játékosok. A Stackelberg duopólium eredményei viszont eltérnek az előző esethez képest. Tegyük fel, hogy az aszimmetrikus külső piaci viszonyok mellett a vezető játékos θ , a követő játékos pedig $1 - \theta$ alkuerővel rendelkezik a belső kockázatelosztást illetően. Minél nagyobb a θ , annál inkább részesül az első (vezető) játékos a belső cseréből fakadó hasznokból. Viszont, a követő játékos is figyelembe veszi azt, ha a belső piacon drága a kockázat csökkentése, és mérsékelheti aktivitását a külső és belső piacon is. Nem egyértelmű tehát, hogy a Stackelberg vezető jobban vagy rosszabbul jár, ha alkuereje nagyobb a belső piacon. A kérdés fordítva is érdekes: vajon a külső piacon Stackelberg követő típusú (2. számú) játékos a belső piacon képes-e a vezető (1. számú) szereplő profitját is megszerezni, ha a belső piacon ő az erősebb?

A fentiekhez fejezzük ki az alkuerőtől függő pénztranszfert a belső piac

egyensúlya esetén:

$$c_{12} = \frac{1}{4}\lambda(n_2 - n_1)^2\theta + \frac{1}{4}\lambda\left(\frac{1}{4}(n_2 + n_1)^2 - n_1^2\right). \quad (39)$$

Ezt a transzfert építi be mindkét szereplő (vezető és követő) a döntésébe. Mivel csak “féloldalas” (bid) külső piac van, ezért olyan kockázat-csökkentő belső csere nincs, amely esetén mindkét szereplő egyszerre csökkentené a kockázatát, a belső piacra lépés motívuma tehát nem a fedezés, hanem a kockázatok átadása-átvállalása. A fentieket figyelembe véve a vezető és a követő optimális mennyiségei:

$$n_1^{b*} = \frac{A_1}{B}b, \quad n_2^{b*} = \frac{A_1 - A_2}{B}b \quad (40)$$

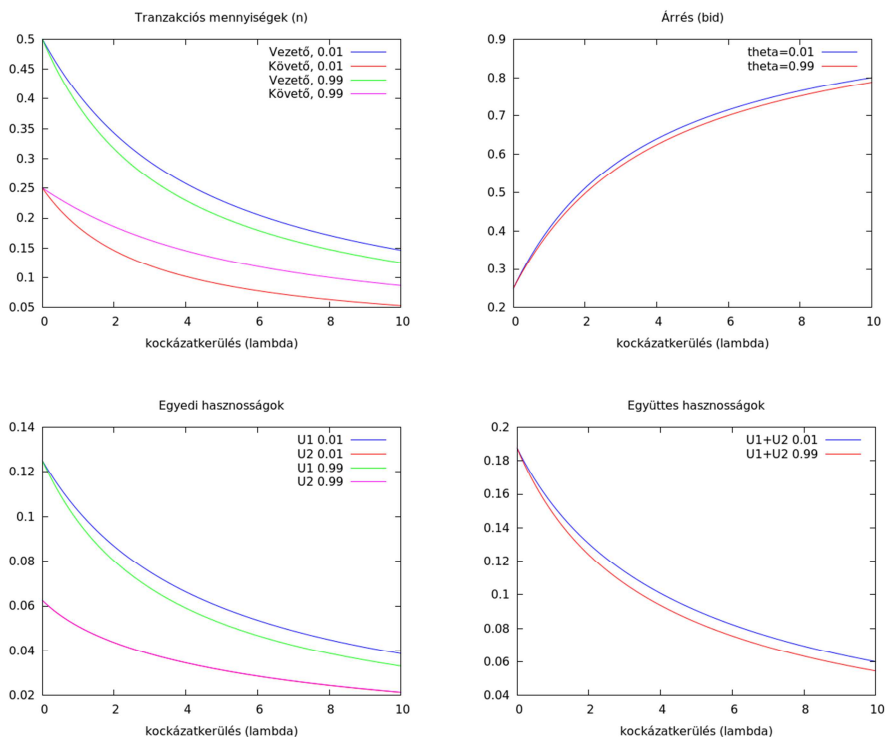
lesznek, ahol

$$\begin{aligned} A_1 &= 2\lambda^2 [1 - 4\theta(1 - \theta)] + 16(\lambda + 4)^2 \\ A_2 &= 4(\lambda + 4)(2\lambda\theta - 3\lambda - 8) \\ B &= (\lambda + 4) [8\lambda^2\theta^2 - (6\lambda^2 - 8\lambda)\theta + 9\lambda^2 + 60\lambda + 128], \end{aligned}$$

valamint a jegyzett ár az egyensúlyban $e_1^b = e_2^b = [1 - (2A_1 - A_2)/B]b$. A külső piacon a Stackelberg vezető mennyisége nagyobb, mint a Stackelberg követőé, ennél fogva az ott begyűjtött kockázata is nagyobb. A Stackelberg vezető tehát ebben a példában a belső piacon mindig kockázat-átadó, vagyis pénzt fog adni a követőnek mindezért. Ehhez érdemes megvizsgálni azt, hogy mi a hatása, ha gyenge, illetve ha erős a vezető a belső piacon, és hogyan befolyásolja a hatásokat a kockázatelutasítási attitűd.

Az 5. ábrán ehhez két esetet számolunk ki és vizsgálunk. Az első esetben kicsi ($\theta = 0.01$), a másodikban nagy ($\theta = 0.99$) alkuereje van a vezetőnek. Azt találjuk, hogy amikor a vezetőnek nagyobb alkuereje van a belső piacon, akkor a vezető jobban vissza fogja szorítani külső piaci tevékenységét. A követők külső piaci mennyisége ellenben nagyobb lesz. Mindez azt eredményezi, hogy az össz mennyiség a külső piacon kevesebb, a külső piaci ár pedig magasabb lesz, mint amikor a vezető kis alkuerővel rendelkezik a belső piacon. Ez a befektetőknek összességében kedvezőtlenebb helyzetet jelent.

A követő játékos hasznossága nem változik a belső alkuerő változásával. A vezető hasznossága alacsonyabb, ha erősebb a belső piacon. Az intuíciónak látszólag ellentmondó eredmények magyarázata az, hogy mivel a gyenge követő nem keres jól a belső piacon való kereskedéssel, figyelme a külső piacra fordul, ott próbál meg érvényesülni. Ezért nagyobb pozíciókat halmoz fel, ami a belső piaci kockázatelnyelő képességét csökkenti. Az erős vezető így nem tud a külső piacon még nagyobb pozíciókat szerezni, hiszen drága és korlátos a külső piacról szerzett kockázat csökkentése.



5. ábra. Stackelberg külső piac, aszimmetrikus belső piac. a) Árjegyzők egyéni tranzakciószáma, b) Piaci bid ajánlatok, c) Egyes árjegyzők hasznossága, d) Az árjegyzők együttes hasznossága

Összegezve, a kétszereplős, egyoldali árjegyzős példákban jól látszik a két szereplő között zajló kockázatelosztás működése. Ez csökkenti a felek közötti erőfölény kialakulását, abban az értelemben, hogy ha az egyik szereplő – engedve a kereslet-kínálat igényeinek – csak az egyik irányba csinálna ügyleteket a külső szereplőkkel, előbb-utóbb a belső piacról érkező korrekciós nyomás (az egyre drágább kockázatcsökkentési költség) csökkenti ennek jövedelmezőségét. Erős belső piaci szereplő jobban ragaszkodik a belső piaci haszonhoz, ami miatt erősebben csökkenti a belső piacon a fedezésre szánt mennyiséget. Továbbá, minél erősebb a kockázatkerülés az árjegyzők körében, annál erősebb a belső piac hatása a külső piaci helyzetre, annál kiegyensúlyozottabb a külső piaci szereplők ereje.

Az ügyfélpiacon megfigyelhető árrés szempontjából ezek szerint az a kívánatosabb állapot, ha a belső piacon erős alkuerővel rendelkező játékos lesz a külső piacon vezető, és a belső piacon gyenge szereplő csak követő stratégiát alkalmaz. Az üzleti gyakorlatban általában az erősebb (szofisztikáltabb) közvetítők erősek a belső és a külső piacon is. Általában ők alkalmazhatnak oligopolstratégiát a külső piacon, és ők azok, akik a belső piaci hálózat közepén helyezkednek el. Ebből általános következtetést nehéz ugyan levonni az ilyen tőzsdén kívüli piacokon a nagy bankházakra vonatkozóan, de sikerült egy meglepő elméleti összefüggést azonosítani, amit érdemes lehet empirikusan is tesztelni különböző pénzügyi piacokon.

5 Összefoglalás

Tanulmányunkban a pénzügyi közvetítői piacok kettős szerkezetét elemezzük mikroökonómiai módszerekkel. A kettős szerkezet két közgazdaságilag elkülöníthető piacot jelent (amely fizikailag nem biztos, hogy eltér egymástól a gyakorlatban). Az egyik piac az árjegyzők és a befektetők közötti piac, amelyen az árjegyzők likviditást biztosítanak a piac többi szereplőjének közvetítési díjért cserébe. A másik piac az árjegyzők egymás közötti piaca, ahol semlegesítik nettó pozícióikat az árjegyzők, megszüntetve, vagy legalább csökkentve ezzel a kereskedett eszköz árváltozásából fakadó piaci kockázatukat.

A dolgozat első felében a belső piac egy esetét mutattuk be és jellemeztük. A kockázatkerülő árjegyzők kockázatcsökkentési céllal lépnek a belső piacra. A belső piacon a keresés és a kereskedés költséges, amelyet a kereskedési idő korlátosságával ragadtuk meg. Ez a súrlódás egy, a kereskedésre vonatkozó preferencia-rendszert implikált, amelynek következménye a szereplők páronkénti kereskedésének hálózatos alakja. A kétoldalú tranzakciókban eltérnek az árak, amelyeket a szereplők alkuereje is befolyásol. Ebben a keretben megadtuk a piac egyensúlyát és annak főbb jellemzőit.

A dolgozat második részében azt vizsgáltuk, hogy ha egy árjegyző gazdasági erőfölénnyel rendelkezik a befektetők piacán (oligopolistaként képes viselkedni), akkor a belső piac jelenléte hogyan befolyásolja a külső piaci versenyt. Megállapítottuk, hogy az általunk tárgyalt speciális esetben a belső piac jelenléte csökkenti a külső piaci versenyt, ami Reiss és Werner (1998) a Londoni Értéktőzsdén (London Stock Exchange) tevékenykedő árjegyzők közötti piacának empirikus elemzésével cseng össze. Bár az árjegyzői piacon jellemzőbb helyzet az, hogy nagyjából ugyanannyi árjegyző akar adni, mint venni az egymás közötti piacon, mi a kiegyensúlyozatlan piaci helyzetre fókuszáltunk. Ez az átmeneti helyzet is gyakran előfordul, ekkor az árjegyzői belső piac tulajdonságai megváltoznak, ami külön figyelmet igényel, hiszen ez figyelhető meg a pénzügyi krízisek során. A duopol árjegyző szereplők viselkedését különböző kockázati étvágy mellett elemeztük. Ezzel megmutattuk, hogy a kockázatkerülés emelése esetén csökken a piaci struktúra (duopólium típusa) okozta különbség a piacon.

Irodalom

1. Ágoston, K. C. (2010): CVaR számítás SRA algoritmussal. *Sigma* **41**(1-2), 61–73.
2. Amihud, Y. és Mendelson, H. (1980): Dealership market: Market-making with inventory. *Journal of Financial Economics* **8**(1), 31–53.
3. Atkeson, A., Eisfeldt, A. L. és Weill, P.-O. (2013): The Market for OTC Derivatives. CEPR Discussion Papers 9403.
4. Babus, A. és Kondor, P. (2013): Trading and information diffusion in OTC markets. CEPR Discussion Papers 9271.
5. Balog, D., Bátyi, T. L., Csóka, P. és Pintér, M. (2012): Pénzügyi hálózatok modellezése Jackson és Watts (2002) nyomán. in *Egyensúly és optimum. Tanulmányok Forgó Ferenc 70. születésnapjára*. Aula Kiadó. 151–168.

6. Berlinger, E., Michaletzky, M. és Szenes, M. (2011): A fedezetlen bankközi forintpiac hálózati dinamikájának vizsgálata a likviditási válság előtt és után. *Közgazdasági Szemle* **58**(3), 229–252.
7. Borch, K. (1962): Equilibrium in a Reinsurance Market. *Econometrica* **30**(3), 424–444.
8. Craig, B. és von Peter, G. (2010): Interbank tiering and money center banks. Technical Report 322. Monetary and Economic Department.
9. Csóka, P., Herings, P. J.-J. és Kóczy, L. Á. (2009): Stable allocations of risk. *Games and Economic Behavior* **67**(1), 266–276.
10. Dodd, R. (2008): Markets: Exchange or Over-the-Counter. *Finance and Development*, 34–35.
11. Dodd, R. (2012): Markets: Exchange or Over-the-Counter. How securities are traded plays a critical role in price determination and stability (Updated). Technical report.
12. Duffie, D., Gârleanu, N. és Pedersen, L. H. (2005): Over-the-Counter Markets. *Econometrica* **73**, 1815–1847.
13. Erb, T. és Havran, D. (2015): Mit veszítünk a piaci súrlódásokkal?: A pénzügyi piacok mikrostruktúrája. *Közgazdasági Szemle* **62**(3), 229–262.
14. Fiedler, M. és Pták, V. (1962): On matrices with non-positive off-diagonal elements and positive principal minors. *Czechoslovak Mathematical Journal* **12**(3), 382–400.
15. Fricke, D. és Lux, T. (2012): Core-Periphery Structure in the Overnight Money Market: Evidence from the e-MID Trading Platform. Technical Report 1759. Kiel Institute of the World Economy.
16. Garman, M. B. (1976): Market microstructure. *Journal of Financial Economics* **3**(3), 257–275.
17. Glosten, L. R. és Milgrom, P. R. (1985): Bid, ask and transaction prices in a specialist market with heterogeneously informed traders. *Journal of Financial Economics* **14**(1), 71–100.
18. Hansch, O., Naik, N. Y. és Viswanathan, S. (1998): Do Inventories Matter in Dealership Markets? Evidence from the London Stock Exchange. *Journal of Finance* **53**(5), 1623–56.
19. Ho, T. S. Y. és Stoll, H. R. (1983): The Dynamics of Dealer Markets under Competition. *Journal of Finance* **38**(4), 1053–74.
20. Ho, T. és Stoll, H. R. (1981): Optimal dealer pricing under transactions and return uncertainty. *Journal of Financial Economics* **9**(1), 47–73.
21. Kyle, A. S. (1985): Continuous Auctions and Insider Trading. *Econometrica* **53**(6), 1315–35.
22. Kyle, A. S. (1989): Informed Speculation with Imperfect Competition. *Review of Economic Studies* **56**(3), 317–355.
23. Li, D. és Schürhoff, N. (2012): Dealer Networks. Working paper.
24. Loertscher, S. (2005): Market making oligopoly. Diskussionsschriften dp0512. Universität Bern, Departement Volkswirtschaft.
25. Malamud, S. és Rostek, M. (2012): Decentralized Exchange. Working Papers 12-18. NET Institute.
26. Mas-Colell, A., Whinston, M. D. és Green, J. R. (1995): *Microeconomic Theory*. Oxford University Press. New York.

27. Mildestein, E. és Schlee, H. J. (1983): The Optimal Pricing Policy of a Monopolistic Marketmaker in the Equity Market. *Journal of Finance* **38**(1), 218–231.
28. Neklyudov, A. V. (2012): Bid-Ask Spreads and the Decentralized Interdealer Markets: Core and Peripheral Dealers. Working paper.
29. Pagano, M. (1989): Endogenous Market Thinness and Stock Price Volatility. *Review of Economic Studies* **56**(2), 269–287.
30. Pozsar, Z., Adrian, T., Ashcraft, A. és Boesky, H. (2012): Shadow Banking. FRB of New York Staff Report 458.
31. Reiss, P. C. és Werner, I. M. (1998): Does Risk Sharing Motivate Interdealer Trading?. *Journal of Finance* **53**(5), 1657–1703.
32. Shachar, O. (2012): Exposing The Exposed: Intermediation Capacity in the Credit Default Swap Market. Technical report. Stern School of Business, New York University.
33. Shen, P. és Starr, R. M. (2002): Market-makers' supply and pricing of financial market liquidity. *Economics Letters* **76**(1), 53–58.
34. Stoikov, S. és Sağlam, M. (2009): Option market making under inventory risk. *Review of Derivatives Research* **12**(1), 55–79.
35. Zawadowski, A. (2013): Entangled Financial Systems. *Review of Financial Studies* **26**(5), 1291–1323.

MARKET MAKER BEHAVIOR WITH HEDGING ON INTER-DEALER MARKETS

Financial intermediary institutions often compete and cooperate with each other at the same time. These financial actors provide services to their investors (mutual funds, hedge funds, etc.) and enter into transactions with them. Moreover, these players very often trade with each other to mitigate their market risks related to their exposures against their clients. Inter-dealer markets differ from the walrasian textbook markets in three characteristics: transactions are bilateral, market players form a network, market players possess diverse bargaining power. We develop a one-shot market model for describing the market equilibrium and the effects of the network structure for the price distribution on the inter-dealer market. We analyze furthermore how the inter-dealer trading for risk allocation influences the market behavior on the customer markets. We investigate the situation of duopolist markets where market makers are able to trade with each other as well. The model shows that inter-dealer markets may mitigate the market power on customer markets. If the market makers become more risk averse, it decreases the market power on the customer markets.

Keywords: market making, inter-dealer markets, risk allocation, financial markets, market micro-structures.

HITELÉRTÉKELÉSI KIIGAZÍTÁS – A FEDEZETI HAIRCUT MODELLBE ILLESZTÉSE¹

BOROS PÉTER

Budapesti Corvinus Egyetem

Jelen munka a hitelértékelési kiigazítás (Credit Valuation Adjustment - CVA) fedezeti haircut melletti számítását és tulajdonságait írja le. A Brigo et al. (2014) által felépített modellt bővítjük, hogy bevezessük a biztosíték megfelelő értékcsökkenését. Rámutatunk, hogy az így kapott új modell eredménye már több, mint az egyszerű partnerkockázat miatti kiigazítás, hiszen a haircut miatti értékvesztés is beépül az árba. Hasonlóan belátjuk, hogy a kockázatos ár még alternatív feltételek mellett is egységes lesz a szereplők számára. A tanulmány végén egy piaci adatokra épülő numerikus példán szemléltetjük, hogy az így kapott kiigazítás szignifikánsan eltérhet az kiinduló esettől.

Kulcsszavak: CVA, fedezet, fedezeti haircut, hitelértékelési kiigazítás, partnerkockázat, redukált csődmódel. *JEL:* C15, C53, G12, G13, G32, G33

1 Bevezetés

Az OTC piacokon megkötött derivatív szerződések élettartama során a szereplők lehetséges csődje miatt fellépő veszteség kockázatát partnerkockázatnak hívjuk. A partnerkockázat megfelelő mérése és kezelése a legutóbbi gazdasági világválság óta az OTC piacok résztvevőinek fontos feladatává nőtte ki magát. A kockázat kezelésének egyik alapeszköze a pénzügyi szabályozásokban előírt tőketartalékolás. A tartalékolat tőke azonban csak a tényleges csőd bekövetkezésekor szolgál védelemmel, így a piaci szereplők számos más eszközt is bevetnek, hogy a partnerük felé fennálló kitétségüket – amely követelésük csőd esetén veszélybe kerülne – redukálják. A kitétség csökkentő eszközök közül a nettósítás és a letéti megállapodás, illetve fedezet alkalmazása a legismertebb módszerek. Azok felhasználásáról a Bázeli III szabályozás kínál pontos utasításokat. A válság tapasztalatait számításba véve a Bázeli III a hitelértékelési kiigazítást (Credit Valuation Adjustment, továbbiakban CVA) is az előtérbe helyezi.

A CVA a kockázatmentes és a partnerkockázatot magába foglaló kockázatos ár különbsége. A CVA tehát a partnerkockázat ára. Mivel már egy régóta létező fogalomról van szó, így a téma szakirodalma is messzire nyúlik vissza. Duffie és Huang (1996) munkáját szokás az egyik első teljes eredményként feltüntetni. Azonban a CVA-t a ma használatos formájában Canabarro és Duffie (2003) korai munkája mutatja be részletesen. A válság előtti időket

¹Beérkezett: 2016. április 9. Boros Péter PhD hallgató, Budapesti Corvinus Egyetem, Befektetések és Vállalati Pénzügy Tanszék. E-mail: borospeter90@gmail.com.

az egyoldalú CVA számítás jellemezte, amelyben a számítást végző felet kockázatmentesnek tekintették. Brigo és Capponi (2010) már kétoldalú CVA-t (továbbiakban BCVA) használ hitelmulasztási csereügyletekre (Credit Default Swap) alkalmazva. A BCVA-t számító fél már a saját kockázatát is figyelembe veszi az ár kiigazításakor.

Az OTC piacon megkötött tranzakciók jelentős része kétoldalú letéti megállapodással kerül megkötésre, amely pontos feltételeit a Credit Support Annex (CSA) szerződés elfogadásával rögzítik a felek. Az International Swaps and Derivatives Association (ISDA) 5 000 milliárd dollárra becsüli a piacon lévő nem klíringelt OTC ügyletkez kapcsolódó fedezet értékét 2014 végén.² A Banking Committee on Banking Supervision (BCBS) és az International Organization of Securities Commissions (IOSCO) által kibocsátott legújabb szabályozás³ értelmében a kétoldalú nem klíringelt OTC ügyletek esetében a felek a korábbiaknál szigorúbb, kötelező letéti egyezményre kényszerülnek.⁴ Így tehát a fedezet jelenlegi fontos szerepköre a továbbiakban várhatóan még inkább felértékelődik. A fedezet kitétség csökkentő szerepköre azonban közvetlenül a BCVA értékére is hatással van.

Brigo et al. (2011) (illetve kiegészített formában: Brigo et al. (2014)) az elők között építettek egy általános modellkeretet, amely a letéti megállapodást is figyelembe veszi a BCVA számításánál. Ez az eredmény, valamint Brigo és Morini (2011) modellje inspirálta Durand és Rutkowsky (2013) munkáját, amely egy általánosított modellt kínál a BCVA különböző pozíciózárások feltételezése melletti alakulásáról a fedezet számításba vételével. Hasonlóan a fedezet modellbe építését célozta meg Bielecki et al. (2011), akik hitelmulasztási csereügyletekre alkalmazták az eredményüket.

Tökéletes fedezet mellett a kitétség értéke minden időpillanatban nulla lenne, ezért nem lenne szükség a BCVA számítására. A valóságban a fedezet azonban nem tekinthető tökéletesnek, hiszen számos tényező valamint CSA megállapodás rontja annak hatékonyságát. Ilyen például a minimális transzfer összeg, a gyakran nullától különböző fedezeti küszöbérték, a letéti hívás küldésének gyakorisága vagy a fedezeti viták. Az előbbieket mellett a CSA szerződésnek eleme lehet a fedezeti haircut⁵ is, amely jelen munka tárgyát képezi. Brigo et al. (2011) már a minimális transzferösszeg és általános fedezeti küszöbérték figyelembevétele mellett építette fel modelljét. Bielecki et al. (2011) alternatív eszköztárat használó munkájában már megemlítik a haircut lehetséges szerepeltetést, azonban annak tényleges modellbe illesztését nem teszik meg. Durand és Rutkowsky (2013) pozíciózárások hatására koncentráló munkájában ugyan beillesztik a BCVA számításba a lehetséges haircut értékét azonban egy egyszerűsítő feltétellel ki is vezetik azt a modellből.

²Az adat az ISDA által publikált éves felmérésből (Margin Survey) származik: <http://www2.isda.org/functional-areas/research/surveys/margin-surveys>

³A publikáció elérhető a BCBS weboldalán: <http://www.bis.org/bcbs/publ/d317.htm>

⁴Az új fedezeti szabályozást és annak hatását a BCVA értékére Green és Kenyon (2014) tanulmánya tárgyalja.

⁵Az angol haircut szó a magyar szakirodalomban is elterjedt kifejezés. Szokás még fedezeti arányszámként is hivatkozni rá. Mi összhangban a magyar és az angol szakirodalommal a haircut kifejezést fogjuk használni.

Jelen munkában megvizsgáljuk, hogy a CSA szerződésben rögzített haircut miként hat az árkiigazítás értékére.

A következő oldalakon a probléma részletesebb ismertetésével folytatjuk. Bemutatjuk a fogalmakat és az általunk használt keret alapjait. A 3. részben bevezetjük a modellt és megmutatjuk, hogy az ár egységes szerepe nem sérül még alternatív haircut sémát feltételezve sem. Ez különös szereppel bír a manapság egyre fontosabbá váló téma, a finanszírozási kiigazítás (Funding Valuation Adjustment – FVA) tükrében. A 4. részben egy numerikus példával egy egyszerű határidős ügyleten érzékeltetjük a haircut BCVA-ra gyakorolt hatását. A munkát az 5. fejezetben egy összefoglalással zárjuk.

2 A haircut értelmezése

A letéti megállapodást kötő felek a CSA szerződésben rögzített feltételek mellett fogják a fedezethez tartozó műveleteiket elvégezni. A CSA szerződés minden fedezethez kapcsolódó szabályt rögzít, így például a minimális transzfer összeg nagyságát, amelynek egyik fontos célja a költségek csökkentése. Hasonlóan tartalmazza a fedezeti küszöb értékét, amely alatt nincs fedezve a kitétség, és a letéti hívás küldésének gyakoriságát, amit napi szintnél nem szokás gyakoribbnak választani. A CSA részletezi a fedezet elfogadható formáit is, amelynek egyik legelterjedtebb formája a pénz. Az ISDA adatai alapján azonban 2014 végén a teljes fedezeti állomány közel egynegyede értékpapír volt.⁶

Az értékpapír fedezethez kapcsolódó fogalom a haircut, amely értéke eszköztípusonként a CSA szerződésben rögzített. A haircut megmutatja, hogy az adott eszköz értékét mennyivel is csökkenti a fedezetet fogadó fél. Ez egyben azt is jelenti, hogy a letéti híváskor a haircuttal megnövelt értéket fogja bekérni, hogy kitétsége az adott pillanatban teljesen fedezve legyen.

Ezt a megnövelt értéket építette modelljébe Durand és Rutkowsky (2013). A haircut azonban több, mint egy egyszerű túlfedezés. Az ISDA által kiadott hivatalos leírás a következőképpen fogalmaz: „A haircutot leggyakrabban a fedezet piaci árából levont százalékos érték formájában adják meg. A haircuttal csökkentett biztosítéknak kell elegendőnek lennie a fennálló kitétséget fedezésére.”⁷ A fedezet csökkentésének eljárását az ISDA újabb, 2005-ben kiadott dokumentuma (ISDA (2005)) már lépésről lépésre leírja. Tehát a kitétség csökkentés figyelembevételkor a fedezet haircut által meghatározott mértékben csökkentett értékét kell használni.

A haircut a kitétséggel kapcsolatos negatív hatásokat számszerűsíti. Napi letéti hívás esetén elképzelhető lenne feltételezni, hogy a fedezet értéke nem tud leromlani. Azonban minden csődidőpontot egy hosszabb időszak, az úgy-

⁶Az adat szintén az ISDA piaci felméréséből származik: <http://www2.isda.org/functional-areas/research/surveys/margin-surveys>

⁷„Haircuts are most often expressed as a percentage which is deducted from the market value of each collateral asset type. It is the sum of the collateral values after application of the haircuts which has to be sufficient to cover the exposure that is being secured.” ISDA (1996) 21. oldal

nevezett likviditációs periódus (Margin Period of Risk – MPR) előz meg. A likviditációs periódus a letéti hívás nem teljesítésétől a pozíciózárásig eltelt idő. Hossza eszköztípusonként változik, de legalább két hét. Ezen időszak alatt a bajba jutott fél lehetőséget kap, hogy átmeneti likviditási problémáit kezelje, és eleget tegyen kötelezettségeinek, hogy elkerülje a csődöt. Ebben az időintervallumban a fedezet értéke szabadon mozoghat, kockázatot jelentve a túlélő fél számára.⁸ Az ilyen piaci kockázat mellett azonban a haircut más kockázatokat is magában foglal: figyelembe veszi a piaci likviditás hiányából adódó kockázatot, valamint a tartási periódus hosszát. A haircut értékének meghatározásakor releváns kockázatok átfogó listáját és leírását az ISDA (1996) dokumentuma foglalja magába. A következő részben Brigo et al. (2014) modelljét kiegészítjük a haircut megfelelő figyelembevételével.

Röviden megjegyezzük, hogy a tőkeszükséglet meghatározásához használt kitettség fogalomban hasonló logika érvényesül, amelyet a szabályozás ír elő. Ott azonban további szabályozói haircut értékeket is figyelembe kell venni. Fontos azonban, hogy ezt a fogalmat ne keverjük össze a BCVA számolásához használt kitettség fogalmával, hiszen a szabályozói CVA mást jelent.

3 A modell

Az eredmények könnyebb összevethetősége érdekében jelen munkában igyekszünk Brigo et al. (2014) jelöléseit használni, de néhány esetben el kell térnünk azoktól. Hogy ez ne okozzon félreértést, minden jelölést külön bevezetünk.

Tételezzük fel, hogy két szereplő megköt egy T időpontban lejáró derivatív szerződést. Hívjuk az egyik felet banknak és a másikat partnernek, valamint jelöljük megfelelően „B” és „C” indexszel őket.

A vizsgálatot egy $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbf{Q})$ valószínűségi mezőn végezzük. A \mathcal{G}_t filtráció testesíti meg a piacon adott t pillanatban elérhető összes információt. Mivel az elemzéshez a kockázatsemleges mértéket fogjuk használni, a \mathbf{Q} valószínűségi mérték alatt rögtön azt értjük. A \mathbf{Q} mérték alatt vett \mathcal{G}_t feltételes várható értéket $\mathbf{E}_t[\cdot]$ jelöli.

Tegyük fel, hogy mindkét partner kockázatos és jelölje τ_B és τ_C a bank és a partnere csőd időpontját, valamint legyen $\tau = \min\{\tau_B, \tau_C\}$. Jelentse $\Pi(t, s)$ a t és az s időpontok közötti, a derivatív szerződésből származó pénzáramok diszkontált jelenértékének az összegét a bank szemszögéből nézve, kockázatmentes feleket feltételezve. A különböző pozíciózárásokra való általánosíthatóság kedvéért vezessük be az $E_{i,t}$ jelölést, ahol $i \in \{B; C\}$. Ezzel a mennyiséggel pozíciózáráskor a piacon a derivatív újrakötéséhez szükséges értéket jelenítjük meg az $i \in \{B; C\}$ szereplő szemszögéből. Jelen dolgozat a haircut szerepének bemutatásával foglalkozik így megengedhetjük az $E_{B,t} = -E_{C,t}$ feltételezést. Ezzel azt állítjuk, hogy a piacon megfigyelhető pozíciózárás eltérhet a kockázatmentes ártól, azonban mindkét fél ugyanazt az árat látja. Egy egyszerű változtatással könnyen megvizsgálható az az esetet, amikor ez

⁸A többi kockázatot figyelmen kívül hagyva, önmagában szemléletes példa a piaci mozgásból adódó kockázatra a kitettségtől eltérő devizában denominált fedezet.

nem teljesül, de jelen munkában ezzel nem foglalkozunk.

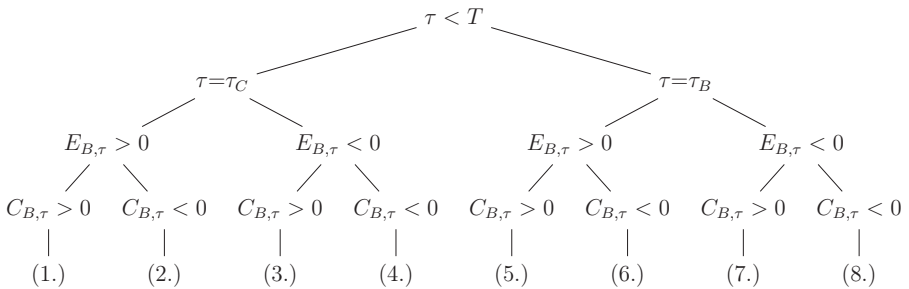
A fedezet modellezéséhez tételezzünk fel egy kétoldalú CSA szerződést, ahol a fedezetet kezelő fél mindig az, akinek az adott pillanatban pozitív értéke kell hogy legyen a fedezeti számlán.

Mivel a dolgozat a BCVA számításáról és annak értékéről szól, tekintsünk el a fedezetre fizetendő kamatoktól, hiszen a finanszírozási kérdés nem témája a mostani munkának. Jelölje $C_{i,t}$ a fedezet értékét a t időpontban $i \in \{B; C\}$ szereplő szemszögéből. Legyen $REC_i \in [0, 1]$, ahol $i \in \{B; C\}$ a bank és a partner csődje esetén a túlélő fél számára jutó megtérülési hányados (Recovery Value), és hasonlóan $REC'_i \in [0, 1]$, ahol $i \in \{B; C\}$ a bank és a partner csődje esetén a náluk lévő fedezetből visszanyerhető összeg aránya.

Végül vezessük be a haircut értékét a modellbe. Jelölje H_B és H_C a bank és a partner által alkalmazott értékelési hányadost. Ha tehát C értékű fedezet áll rendelkezésre, azt a bank $H_B C$ értékűnek, a partner $H_C C$ értékűnek tekinti attól függően, hogy melyikük is használja a kitettség csökkentéshez. Az így értékcsökkentett fedezetet effektív fedezetnek hívjuk. Értelemszerűen $\frac{1}{H_i} = 1 + h_i$, ahol h_i az i szereplő által használt haircut. Ezek alapján a fedezeti szabályt a következő formában adjuk meg:

$$C_{B,\tau} = \begin{cases} \frac{1}{H_B} E_{B,\tau-\alpha} & \text{ha } E_{B,\tau-\alpha} > 0 \\ -C_{C,\tau} & \text{ha } E_{B,\tau-\alpha} \leq 0 \end{cases} \quad C_{C,\tau} = \begin{cases} \frac{1}{H_C} E_{C,\tau-\alpha} & \text{ha } E_{C,\tau-\alpha} > 0 \\ -C_{B,\tau} & \text{ha } E_{C,\tau-\alpha} \leq 0, \end{cases} \quad (1)$$

ahol α jelöli a likviditációs periódus hosszát. Végül jelölje $A^+ = \max(A, 0)$ és $A^- = \min(A, 0)$, valamint $D(t, s)$ a t és s időpontok közötti diszkontfaktort. A bank által számított BCVA meghatározásához kétszer négy különböző esetet kell megkülönböztetnünk. Az esteket a jobb áttekinthetőségért az 1. ábrán szemléltetjük.



1. ábra. A lehetséges esetek fa ábrája

Az első négy esetben a fa első elágazásánál balra elindulva a partner csődjekor bekövetkező lehetséges eseteket kell megvizsgálni.

1. A partner csődjének időpontjában a banknak pozitív kitettsége van ($E_{B,\tau} > 0$) és rendelkezésére áll valamennyi, a partner által biztosított fedezet is ($C_{B,\tau} > 0$). Ilyenkor a bank a kitettség csökkentéshez figyelembe veszi a fedezet effektív értékét. Ha ez után is marad kitettség, akkor annak csak bizonyos részét szerzi vissza a bank, míg ha a fedezet

bizonyult nagyobbak, akkor a fennmaradó részt visszajuttatja a partnernek

$$REC_C(E_{B,\tau} - H_B C_{B,\tau})^+ + \frac{1}{H_B}(E_{B,\tau} - H_B C_{B,\tau})^- . \quad (2)$$

2. A partner csődjekor a banknak pozitív kitettsége van ($E_{B,\tau} > 0$) de ő biztosította a fedezetet a partnernek ($C_{B,\tau} < 0$). Ebben az esetben nem történik kitettség csökkentés, így a bank mind a kitettségéből, mind a fedezet értékéből csak a megtérülési hányadosnak megfelelő összeget kaphatja vissza

$$REC_C E_{B,\tau} - REC'_C C_{B,\tau} . \quad (3)$$

3. Ha éppen a bank az adós ($E_{B,\tau} < 0$) viszont ő rendelkezik fedezettel ($C_{B,\tau} > 0$), akkor a partner minden neki járó kifizetést megkap

$$E_{B,\tau} - C_{B,\tau} . \quad (4)$$

4. Végül, a bank tartozik ($E_{B,\tau} < 0$) és ehhez fedezetet is biztosított ($C_{B,\tau} < 0$). A partner az általa használt haircut értékkel csökkenti a fedezetet és ezt használja a kitettség csökkentéséhez. A fennmaradó fedezet egy részét a bank visszakapja, míg a fennmaradó kitettséget meg kell térítenie

$$\frac{REC'_C}{H_C}(E_{B,\tau} - H_C C_{B,\tau})^+ + (E_{B,\tau} - H_C C_{B,\tau})^- . \quad (5)$$

A bank csődjekor bekövetkező pénzáramokat is meg kell vizsgálnunk a kétoldali CVA felírásához.

5. A bank csődjekor, annak pozitív kitettsége van a partner felé ($E_{B,\tau} > 0$). Hogy kitettségét csökkentse, rendelkezésre áll a partner által biztosított fedezet ($C_{B,\tau} > 0$). Ha a haircuttal csökkentett fedezet nem elég a kitettség teljes csökkentéséhez, akkor a fennmaradó részt a partner megfizeti, viszont ha a fedezet volt a nagyobb, akkor abból a partnernek egy bizonyos részt fizet a bank

$$(E_{B,\tau} - H_B C_{B,\tau})^+ + \frac{REC'_B}{H_B}(E_{B,\tau} - H_B C_{B,\tau})^- . \quad (6)$$

6. A csőd pillanatában a banknak tartozik a partnere ($E_{B,\tau} > 0$) és nincs rendelkezésre álló fedezet a kitettség csökkentéséhez ($C_{B,\tau} < 0$). Ilyenkor a partner minden kötelezettségét megtéríti, és a fedezetet is visszaadja

$$E_{B,\tau} - C_{B,\tau} . \quad (7)$$

7. A bank az adós ($E_{B,\tau} < 0$), miközben a fedezetet is ő birtokolja ($C_{B,\tau} > 0$). A partner csak egy redukált összeget kap mind a kitettségéből, mind pedig a fedezetéből

$$REC_B E_{B,\tau} - REC'_B C_{B,\tau} . \quad (8)$$

8. A partnernek van kitétsége a bank felé ($E_{B,\tau} < 0$), de rendelkezésére áll a bank által biztosított fedezet ($C_{B,\tau} < 0$). A fedezet effektív értékével csökkenti a kitétség értékét, és a fennmaradó kitétség helyett már csak annak megtérülési hányadosának megfelelő értékét kapja, viszont ha a kitétség bizonyul többnek, azt a túlélő fél visszafizeti

$$\frac{1}{H_C}(E_{B,\tau} - H_C C_{B,\tau})^+ + REC_B(E_{B,\tau} - H_C C_{B,\tau})^- . \quad (9)$$

Most ezeket a tagokat aggregálhatjuk, hogy megkapjuk a kockázatos pénzáramokat, majd a kockázatos árat.

$$\begin{aligned} \Pi'(t, T; C, H) = & \Pi(t, T)1_{\tau > T} + 1_{\tau < T} \left(\Pi(t, \tau) + D(t, \tau)C_{B,\tau} \right) \\ & + 1_{(\tau_C = \tau = T)}1_{(E_{B,\tau} > 0)}1_{(C_{B,\tau} > 0)}D(t, \tau) \left(REC_C(E_{B,\tau} - H_B C_{B,\tau})^+ + \frac{(E_{B,\tau} - H_B C_{B,\tau})^-}{H_B} \right) \\ & + 1_{(\tau_C = \tau = T)}1_{(E_{B,\tau} > 0)}1_{(C_{B,\tau} < 0)}D(t, \tau) \left(REC_C E_{B,\tau} - REC'_C C_{B,\tau} \right) \\ & + 1_{(\tau_C = \tau = T)}1_{(E_{B,\tau} < 0)}1_{(C_{B,\tau} > 0)}D(t, \tau) \left(E_{B,\tau} - C_{B,\tau} \right) \\ & + 1_{(\tau_C = \tau = T)}1_{(E_{B,\tau} < 0)}1_{(C_{B,\tau} < 0)}D(t, \tau) \left(\frac{REC'_C}{H_C}(E_{B,\tau} - H_C C_{B,\tau})^+ + (E_{B,\tau} - H_C C_{B,\tau})^- \right) \\ & + 1_{(\tau_B = \tau = T)}1_{(E_{B,\tau} > 0)}1_{(C_{B,\tau} > 0)}D(t, \tau) \left((E_{B,\tau} - H_B C_{B,\tau})^+ + \frac{REC'_B}{H_B}(E_{B,\tau} - H_B C_{B,\tau})^- \right) \\ & + 1_{(\tau_B = \tau = T)}1_{(E_{B,\tau} > 0)}1_{(C_{B,\tau} < 0)}D(t, \tau) \left(E_{B,\tau} - C_{B,\tau} \right) \\ & + 1_{(\tau_B = \tau = T)}1_{(E_{B,\tau} < 0)}1_{(C_{B,\tau} > 0)}D(t, \tau) \left(REC_B E_{B,\tau} - REC'_B C_{B,\tau} \right) \\ & + 1_{(\tau_B = \tau = T)}1_{(E_{B,\tau} < 0)}1_{(C_{B,\tau} < 0)}D(t, \tau) \left(\frac{(E_{B,\tau} - H_C C_{B,\tau})^+}{H_C} + REC_B(E_{B,\tau} - H_C C_{B,\tau})^- \right) . \end{aligned} \quad (10)$$

Néhány egyszerű átalakítás után a következő jobban átlátható alakot kapjuk:

$$\begin{aligned} \Pi'(t, T; C, H) = & \Pi(t, T) - 1_{(\tau < T)}D(t, \tau)(\Pi(\tau, T) - E_{B,\tau}) \\ & - 1_{(\tau = \tau_C < T)}D(t, \tau) \left[(1 - REC_C)(E_{B,\tau}^+ - H_B C_{B,\tau}^+)^+ + (1 - \frac{REC'_C}{H_C})(E_{B,\tau}^- - H_C C_{B,\tau}^-)^+ \right] \\ & - 1_{(\tau = \tau_B < T)}D(t, \tau) \left[(1 - REC_B)(E_{B,\tau}^- - H_C C_{B,\tau}^-)^- + (1 - \frac{REC'_B}{H_B})(E_{B,\tau}^+ - H_B C_{B,\tau}^+)^- \right] \\ & + 1_{(\tau = \tau_C < T)}D(t, \tau) \left[1_{(E_{B,\tau} > 0)}1_{(C_{B,\tau} > 0)}(C_{B,\tau}(1 - H_B) + (\frac{1}{H_B} - 1)(E_{B,\tau} - H_B C_{B,\tau})^-) \right. \\ & \left. + 1_{(E_{B,\tau} > 0)}1_{(C_{B,\tau} < 0)}C_{B,\tau}(1 - H_C) + 1_{(E_{B,\tau} < 0)}1_{(C_{B,\tau} < 0)}C_{B,\tau}(1 - H_C) \right] \\ & + 1_{(\tau = \tau_B < T)}D(t, \tau) \left[1_{(E_{B,\tau} > 0)}1_{(C_{B,\tau} > 0)}C_{B,\tau}(1 - H_B) + 1_{(E_{B,\tau} < 0)}1_{(C_{B,\tau} > 0)}C_{B,\tau}(1 - H_B) \right. \\ & \left. + 1_{(E_{B,\tau} < 0)}1_{(C_{B,\tau} < 0)}(C_{B,\tau}(1 - H_C) + (\frac{1}{H_C} - 1)(E_{B,\tau} - H_C C_{B,\tau})^+) \right] . \end{aligned} \quad (11)$$

Az egyszerűsítés kedvéért tételezzük fel, hogy a pozíciózárás értéke egybeesik az elméleti kockázatmentes árral, azaz $E_{B,s} = \mathbf{E}_s[\Pi(s, T)]$. Az ár megállapításához vegyük ezen diszkontált pénzáramok kockázatmentes mérték szerinti várható értékét

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_t[\Pi'(t, T; C, H)] = & \mathbf{E}_t[\Pi(t, T)] \\ & - \mathbf{E}_t \left[1_{(\tau = \tau_C < T)}D(t, \tau) \left((1 - REC_C)(E_{B,\tau}^+ - H_B C_{B,\tau}^+)^+ - (1 - \frac{REC'_C}{H_C})(E_{B,\tau}^- - H_C C_{B,\tau}^-)^+ \right) \right] \\ & - \mathbf{E}_t \left[1_{(\tau = \tau_B < T)}D(t, \tau) \left((1 - REC_B)(E_{B,\tau}^- - H_C C_{B,\tau}^-)^- - (1 - \frac{REC'_B}{H_B})(E_{B,\tau}^+ - H_B C_{B,\tau}^+)^- \right) \right] \\ & + \mathbf{E}_t[HCC_\tau] + \mathbf{E}_t[HCB_\tau] , \end{aligned} \quad (12)$$

ahol

$$\begin{aligned}
 HCC_\tau &= 1_{(\tau=\tau_C < T)} D(t, \tau) \left[1_{(E_{B,\tau} > 0)} 1_{(C_{B,\tau} > 0)} \left(C_{B,\tau} (1 - H_B) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \left(\frac{1}{H_B} - 1 \right) (E_{B,\tau} - H_B C_{B,\tau})^- \right) + 1_{(E_{B,\tau} > 0)} 1_{(C_{B,\tau} < 0)} C_{B,\tau} (1 - H_C) \right. \\
 &\quad \left. + 1_{(E_{B,\tau} < 0)} 1_{(C_{B,\tau} < 0)} C_{B,\tau} (1 - H_C) \right], \tag{13}
 \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}
 HCB_\tau &= 1_{(\tau=\tau_B < T)} D(t, \tau) \left[1_{(E_{B,\tau} > 0)} 1_{(C_{B,\tau} > 0)} C_{B,\tau} (1 - H_B) \right. \\
 &\quad \left. + 1_{(E_{B,\tau} < 0)} 1_{(C_{B,\tau} > 0)} C_{B,\tau} (1 - H_B) + 1_{(E_{B,\tau} < 0)} 1_{(C_{B,\tau} < 0)} \left(C_{B,\tau} (1 - H_C) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \left(\frac{1}{H_C} - 1 \right) (E_{B,\tau} - H_C C_{B,\tau})^+ \right) \right]. \tag{14}
 \end{aligned}$$

Az így kapott analitikus formula megadja a kockázatos árat fedezeti haircut mellett. A továbbiakban a fenti formula alapján számolt árkiigazítást – azaz a kockázatos és a kockázatmentes ár különbségét – HBCVA-nak nevezzük, hogy kiemeljük a haircut megjelenését a modellben. Vegyük észre, hogy az így kapott eredmény a haircut nélküli esetben ($H_B = H_C = 1$) éppen Brigo et al. (2014) eredményét adja vissza. Az egyenlet tehát azt jelenti, hogy a bank szempontjából számított kockázatos ár megkapható, ha a kockázatmentes árból levonjuk a partner csődjekor a kitettségen és az esetlegesen visszajáró fedezeten elszenvedett veszteségek értékét, valamint hozzáadjuk a bank csődje miatti kötelezettség csökkenésekből adódó értéket. Ezen felül még további kiigazításokat is számításba kell venni, amelyek a fedezet csökkentett figyelembevétele miatt jelentkeznek. Ezeket a HCC_τ és HCB_τ tagok jelenítik meg a fenti egyenletben. Vegyük észre, hogy ezek a tagok nem a felek lehetséges csődjéből adódó veszteség, azaz a partnerkockázat miatt jelennek meg. A HCC_τ és HCB_τ kifejezések pusztán a haircut miatti fedezeti értékcsökkenést hivatottak megragadni.

Fontos kihangsúlyozni, hogy szemben Brigo et al. (2014) eredményével, az árkiigazítás nem lesz nulla teljes megtérülés esetén sem. Ha mindkét szereplő esetében teljes megtérülést tételezünk fel ($REC_C = REC_B = REC'_C = REC'_B = 1$), az azt jelenti, hogy egyik felet sem érheti veszteség a partner csődjekor. Így tehát a partnerkockázat miatti kiigazításnak el kell tűnnie. Itt viszont azt tapasztaljuk, hogy ilyen esetben sem lesz nulla a kiigazítás mértéke. Ez a nullától eltérő tag a haircut bevezetése miatt jelenik meg, hiszen a felek kiigazítják az árat, hogy az tükrözze a másik fél és a saját maguk által felhasznált haircut miatti értékcsökkenést. Ezzel tehát egy további árkiigazítást vezetünk be a modellbe. A haircut miatti kiigazítás azonban nem pusztán egy additív tag, hiszen az szerepet játszik a kitettség csökkentésében, így a partnerkockázat miatti tagok értékének meghatározásában is.

Az így kapott kiigazítás szimmetrikus, azaz a felek meg tudnak egyezni egy egységes árban. Hogy ezt belássuk, listázzuk a partner által számított HBCVA elemeit is.

A bank csődjekor fellépő pénzáramok:

1. A bank csődjekor, a partnernek pozitív kitettsége van felé ($E_{C,\tau} > 0$) és annak csökkentésére szolgáló bizonyos mértékű fedezet is rendelkezésre áll ($C_{C,\tau} > 0$). A partner visszaadja a megmaradt fedezetet, viszont veszteséget könyvel el a megmaradó kitettségén

$$REC_B(E_{C,\tau} - H_C C_{C,\tau})^+ + \frac{1}{H_C}(E_{C,\tau} - H_C C_{C,\tau})^- . \quad (15)$$

2. A csőd pillanatában a partnernek pozitív kitettsége van a csődölt bank felé ($E_{C,\tau} > 0$), viszont a fedezet is a banknál van ($C_{C,\tau} < 0$). A partner nem számíthat a teljes összegre egyik követelésén sem

$$REC_B E_{C,\tau} - REC'_B C_{C,\tau} . \quad (16)$$

3. A csődölt banknak tartozik a partnere ($E_{C,\tau} < 0$) aminek a csökkentéséhez nem rendelkezik fedezettel ($C_{C,\tau} > 0$). A túlélő fél minden tartozását megfizeti

$$E_{C,\tau} - C_{C,\tau} . \quad (17)$$

4. Az utolsó esetben a partner tartozásának ($E_{C,\tau} < 0$) csökkentéséhez fedezet áll rendelkezésre ($C_{C,\tau} < 0$). A bank megállapítja a fedezet effektív értékét és csökkenti a kitettséget. A partner további tartozását teljesen törleszti, viszont a megmaradó fedezetből csak egy részt kap vissza

$$\frac{REC'_B}{H_B}(E_{C,\tau} - H_B C_{C,\tau})^+ + (E_{C,\tau} - H_B C_{C,\tau})^- . \quad (18)$$

A partner csődjekor fellépő pénzáramokat listázva:

5. A partner a csőd pillanatában pozitív kitettséggel rendelkezik ($E_{C,\tau} > 0$) és ehhez rendelkezésére áll fedezet is ($C_{C,\tau} > 0$). A bank minden fennmaradó tartozást megtérít, viszont az esetlegesen visszajáró fedezetből csak egy töredéket kap vissza

$$(E_{C,\tau} - H_C C_{C,\tau})^+ + \frac{REC'_C}{H_C}(E_{C,\tau} - H_C C_{C,\tau})^- . \quad (19)$$

6. A csődkor a túlélő fél tartozik ($E_{C,\tau} > 0$), és a fedezeti számla is neki mutat pozitív egyenleget ($C_{C,\tau} < 0$). A partner nem szenved veszteséget, hiszen minden követelését be tudja hajtani

$$E_{C,\tau} - C_{C,\tau} . \quad (20)$$

7. A partner adósként jelent csődöt ($E_{C,\tau} < 0$) miközben ő birtokolja a fedezetet is ($C_{C,\tau} > 0$). A bank minden követelésén veszíteni fog

$$REC_C E_{C,\tau} - REC'_C C_{C,\tau} . \quad (21)$$

8. Végül a partner tartozásának ($E_{C,\tau} < 0$) csökkentéséhez fedezet is rendelkezésre áll ($C'_{C,\tau} < 0$). A bank a fedezet effektív értékével csökkenti a kitettséget. A megmaradó fedezetet visszafizeti, míg a további tartozásán veszteséget könyvel el

$$\frac{1}{H_B}(E_{C,\tau} - H_B C_{C,\tau})^+ + REC_C(E_{C,\tau} - H_B C_{C,\tau})^- . \quad (22)$$

Az előző kifejtés során felhasznált egyenletek sorrendjében összegezve a tagokat a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} \Pi'_C(t, T; C, H) = & -\Pi(t, T)1_{\tau > T} + 1_{\tau < T} \left(-\Pi(t, \tau) + D(t, \tau)C_{C,\tau} \right) \\ & + 1_{(\tau_C = \tau < T)}1_{(E_{C,\tau} < 0)}1_{(C_{C,\tau} < 0)}D(t, \tau) \left(\frac{(E_{B,\tau} - H_B C_{B,\tau})^+}{H_B} + REC_C(E_{B,\tau} - H_B C_{B,\tau})^- \right) \\ & + 1_{(\tau_C = \tau < T)}1_{(E_{C,\tau} < 0)}1_{(C_{C,\tau} > 0)}D(t, \tau) \left(REC_C E_{C,\tau} - REC'_C C_{C,\tau} \right) \\ & + 1_{(\tau_C = \tau < T)}1_{(E_{C,\tau} > 0)}1_{(C_{C,\tau} < 0)}D(t, \tau) \left(E_{C,\tau} - C_{C,\tau} \right) \\ & + 1_{(\tau_C = \tau < T)}1_{(E_{C,\tau} > 0)}1_{(C_{C,\tau} > 0)}D(t, \tau) \left((E_{C,\tau} - H_C C_{C,\tau})^+ + \frac{REC'_C}{H_C} (E_{C,\tau} - H_C C_{C,\tau})^- \right) \\ & + 1_{(\tau_B = \tau < T)}1_{(E_{C,\tau} < 0)}1_{(C_{C,\tau} < 0)}D(t, \tau) \left(\frac{REC'_B}{H_B} (E_{C,\tau} - H_B C_{C,\tau})^+ + (E_{C,\tau} - H_B C_{C,\tau})^- \right) \\ & + 1_{(\tau_B = \tau < T)}1_{(E_{C,\tau} < 0)}1_{(C_{C,\tau} > 0)}D(t, \tau) \left(E_{C,\tau} - C_{C,\tau} \right) \\ & + 1_{(\tau_B = \tau < T)}1_{(E_{C,\tau} > 0)}1_{(C_{C,\tau} < 0)}D(t, \tau) \left(REC_B E_{C,\tau} - REC'_B C_{C,\tau} \right) \\ & + 1_{(\tau_B = \tau < T)}1_{(E_{C,\tau} > 0)}1_{(C_{C,\tau} > 0)}D(t, \tau) \left(REC_B (E_{C,\tau} - H_C C_{C,\tau})^+ + \frac{(E_{C,\tau} - H_C C_{C,\tau})^-}{H_C} \right) . \end{aligned} \quad (23)$$

Jelen kifejtési mód a partner nézőpontjából tükrözi a pénzáramokat. Ha visszahelyettesítjük a bank szempontjából használt változókat, már tisztán adódik, hogy az így kapott ár éppen a (11) egyenlet mínusz egyszerese, ahogy azt a szimmetrikus esetben elvártuk.

4 Egy numerikus példa

Ebben a részben a korábban levezetett eredményeket mutatjuk be egy numerikus példát felhasználva. Az eddigiek fontosságának érzékeltetéséhez egy egyszerű, osztalékot nem fizető részvényre szóló határidős ügylet BVCA értékét és annak tulajdonságait vizsgáljuk meg fedezeti haircut mellett. A példában a vételi oldalt képviselő bank szemszögéből, Monte-Carlo szimuláció segítségével végezzük el a számításokat. A HBCVA kiszámításához szimulálnunk kell az alaptermék áralakulását és a csődidőpontokat.

Annak érzékeltetéséhez, hogy az eredmények a legegyszerűbb modellkeretben is szignifikánsak, egyszerűsítő feltételekkel élünk. Az alaptermék árára egy geometriai Brown-mozgást feltételezünk, amely paraméterezését 2. táblázatban közöljük. A csődidőpontok meghatározására redukált formájú, strukturális és faktor modellek a legelterjedtebbek.⁹ Mi egy speciális, Cox-folyamatra épülő redukált formájú modellt használunk Lando (1998) munkája

⁹Bielecki és Rutkowski (2013) könyve átfogó összefoglalást ad e modellek tulajdonságairól és használatáról.

alapján. Ez a keret lehetőséget ad arra, hogy a csődintenzitások korrelációjának implikációját is fel tudjuk mérni, más torzító hatások nélkül, például az alaptermék és a csödesemények korrelációja. Hogy példánk a valós élethez közel álljon, a csődmodell paramétereit valós piaci adatok alapján kalibráljuk. Külső megfigyelőként azonban úgy gondoljuk, hogy ha még a partnereket ismerjük is, az általuk megkötött ügyletről nincs információnk. Így példánkban a részvényárfolyamot leíró modellt nem kalibráljuk piaci adatokhoz, hanem annak paramétereit mi választjuk meg.

A részvényárfolyam dinamikáját tehát az alábbi geometriai Brown-mozgással írjuk le:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad (24)$$

ahol W_t egy Wiener folyamat a \mathbf{Q} mérték alatt.

A csődidőpontok szimulálásához egy Cox-folyamaton alapuló redukált modellt használunk. Jelölje λ_t^i az i szereplő hazard rátáját. A redukált modellekben a csőd egy Poisson-folyamat első ugrásának feleltethető meg. Itt azonban a hazard ráta is sztochasztikus, speciálisan Brigo és Alfonsi (2005) munkája alapján egy CIR++ folyamatot követ, azaz:

$$dx_t^i = k^i(\theta^i - x_t^i) dt + v^i \sqrt{x_t^i} dW_t^i, \quad (25)$$

$$\lambda_t^i = x_t^i + \phi_t^i, \quad i \in \{B; C\}, \quad (26)$$

ahol ϕ_t^i jelenti a determinisztikus eltolást, és W_t^B és W_t^C két korrelált Wiener folyamat a \mathbf{Q} mérték alatt: $dW_t^B dW_t^C = \rho dt$.

A fentihez hasonló redukált modellekben a csődidőpont saját kumulált intenzitásával transzformálva egy exponenciális eloszlású valószínűségi változót ad 1 várható értékkel

$$\int_0^\tau \lambda_s ds = \xi \sim \text{Exp}(1). \quad (27)$$

Jelölje a kumulált intenzitást, vagy más néven hazard függvényt $\Lambda(t)$. Ekkor a csődidőpontot könnyen megkaphatjuk a következő alakban:

$$\tau = \Lambda^{-1}(\xi). \quad (28)$$

A modell illesztését a piacon megfigyelt hitelmulasztási csereügyletek feláráiból visszszámolt csődvalószínűségekkel végeztük. Az illesztés technikáját Brigo és Alfonsi (2005) dolgozta ki a kamatlábmodellekkel analóg módon. Az alapötlet, hogy a Cox-folyamatra épülő redukált modell azonosítható egy kamatlábmodellel, hiszen egy adott időtartamra vonatkozó, a kockázatmentes mérték alatt számolt túlélési valószínűség megegyezik egy ugyanilyen lejáratú kötvény árfolyamával egy az intenzitás dinamikáját használó kamatlábmodellelben:

$$\mathbf{Q}(\tau > t) = \mathbf{E}\left[e^{-\int_0^t \lambda_s ds}\right]. \quad (29)$$

A modellünktől azt kell elvárunk, hogy a csődvalószínűségek bármilyen időtávon tükrözzék a piaci értékeket. A piaci csődvalószínűségeket pedig

a hitelmulasztási csereügyletek piacon megfigyelt feláraiból számoljuk vissza, úgy, hogy az adott felár mellett olyan csődvalószínűséget keresünk, ami mellett az ügylet ára nulla. Ebben a rekurzív feladatban a csődvalószínűségekre egy determinisztikus hazard rátát használó modellből megkaphatjuk az úgynevezett implicit hazard ráta függvényt. Mivel a piacon rendszerint csak néhány standard lejáratra jegyeznek hitelmulasztási ügyleteket, ezért a köztes intervallumokon közelítést szokás alkalmazni. A közelítés az implicit hazard ráta függvény jegyzett lejáratok közötti interpolálását jelenti.

A példában a JPMorgan Chase & Co. (*B*) és az Ally Financial Inc. (*C*) 2015.07.30-án megfigyelt hitelmulasztási csereügylet feláraitra építünk, megvizsgálva a HBCVA alakulását, ha a két szereplő megállapodást kötne egymással. A hitelmulasztási csereügylet felárakat az 1. táblázat foglalja össze.

Lejárat (év)	JPMorgan Chase & Co.	Ally Financial Inc.
1	28,8	29,1
3	45,7	52,3
5	70,9	79,9
7	93,2	103,7
10	110,5	123,4

1. táblázat. A piacon megfigyelt CDS felárak (bázis pont)

A modell illesztése után kapott paramétereket a 2. táblázat tartalmazza.

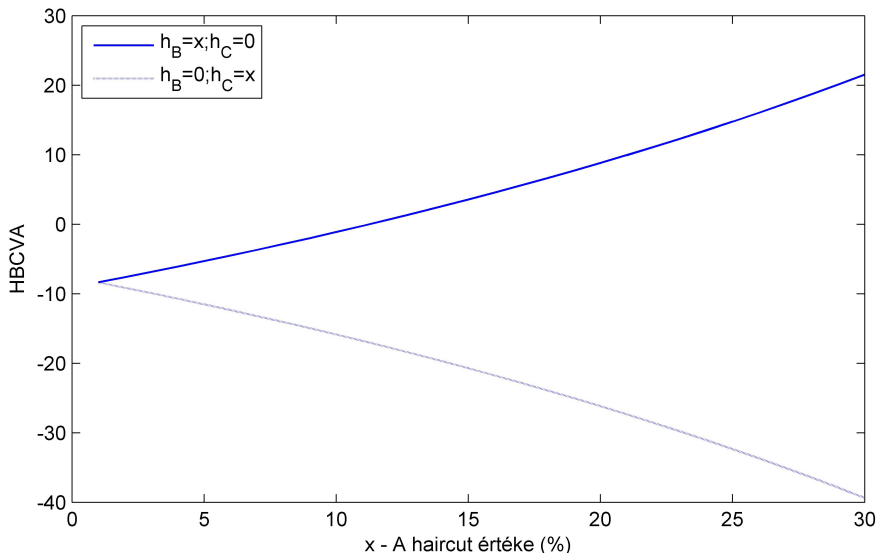
	k	θ	v
<i>B</i>	0,036	0,239	0,132
<i>C</i>	0,009	0,331	0,078
	$r = 0.01$	$\sigma = 0.1$	

2. táblázat. CIR++ és GBM modell paraméterek

A 2. ábrán szemléltetjük a haircut miatti kiigazítás jelentőségét. Az ábra a bank szempontjából számított HBCVA alakulását írja le a haircut függvényében két különböző esetben attól függően, hogy melyik fél használja a haircutot a partnere által biztosított fedezet csökkentésére. Ha csak a bank számol haircutot az az árat pozitívabb irányba módosítja. Ez a viselkedés egybeesik a várakozásainkkal, hiszen azt mutatja, hogy a bank figyelembe veszi, hogy partnere ugyan önmagában kockázatosabb – és így a haircut nélküli kiigazítás negatív – azonban a haircut növeli a biztonságot, így megteheti, hogy a negatív kiigazítást kezdetben csökkenti, majd magas haircut mellett pozitívvá fordítja át.

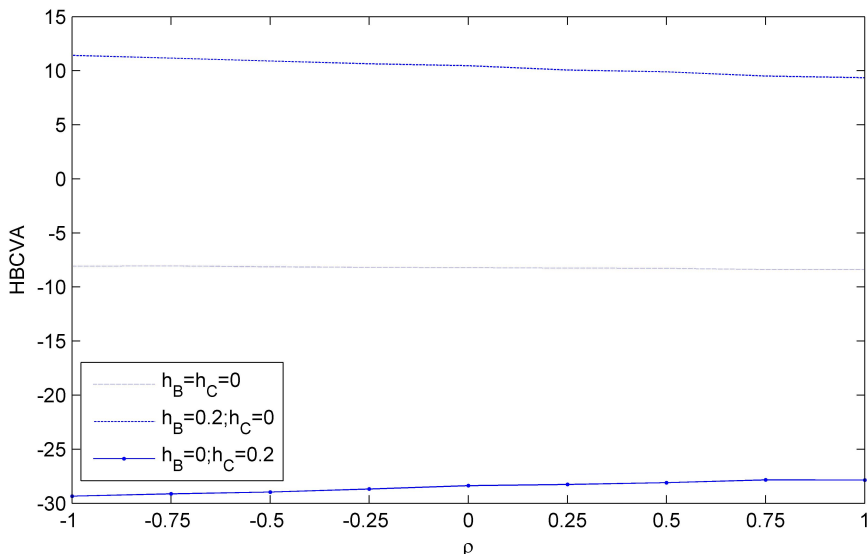
A második esetben csak a partner csökkenti a fedezet értékét. Ez a bank szempontjából tovább csökkenti a HBCVA értékét, hiszen további várható veszteségeket áraz be a fedezetén felszámolt haircut miatt.

Láthatjuk, hogy a haircuttal kiegészített BCVA már alacsony haircut mellett is jelentősen eltér az eredetitől.



2. ábra. HBCVA különböző haircut feltételek mellett

A 3. ábrán a HBCVA egy különleges tulajdonságát mutatjuk be. A bank és a partnere hazard rátáira ható véletlen események közötti korreláció függvényében a bank szempontjából számolt BCVA értéke enyhén csökken. A csődmodell jellegéből adódóan negatív korreláció mellett gyakrabban fog valamelyik fél csődőlni, mint magas pozitív korreláció mellett. Negatív korreláció mellett a felek aszimmetrikusan teljesítenek, így várhatóan amikor az egyik fél jól teljesít, a másik rosszul fog. Tehát gyakrabban fogunk csődeseménnyel találkozni, mint pozitív korreláció mellett, ahol is a felek hasonlóan viselkednek.



3. ábra. HBCVA a hazard rátákat meghatározó korreláció függvényében

Magas pozitív korreláció mellett ugyan kevesebb csődeseménnyel számolunk, mégis a partner relatíve többet fog csődölni, hiszen a magasabb felárai miatt alaptól kockázatosabbnak tekinthető. Így a haircut nélküli esetben a bank jobban ki fogja igazítani az árat a magas korreláció miatt.

A haircut modellbe helyezése azonban a nulla felé húzza a kiigazítást, és ezzel megfordítja a trendet. Az első esetben a HBCVA értékét a partner által felszámolt 20 százalékos haircut mellett ábrázoljuk, miközben a bank nem számol haircutot a fedezetre. A partnerkockázat miatti kiigazítás itt is egy csökkenő trendet adna a HBCVA-nak, azonban a haircut felfelé húzó trendje dominál az árkiigazításban. Mint ahogy azt a modellből már láttuk, magas korreláció mellett kevesebb csőddel kell számolni, azaz kevesebb kitétség csökkentést kell végrehajtani, így a bank számára is kevesebb haircut veszteséget kell elkönyvelni. A fordított esetet – amikor a bank számol 20 százalékos haircutot a fedezeten – lefelé törő trendje az előzőek tükrében hasonlóan magyarázható.

5 Összefoglalás

A fedezeti haircut a biztosítékok kezelésének egyik legfontosabb módszere. Meghatározása számos kockázati faktor figyelembevételét kívánja meg. Egy OTC piacon megkötött szerződés esetén a felek a partner esetleges csődje miatt kockázattal szembesülnek. A túlélő fél még fedezett pozíció mellett is kockázatnak van kitéve, a biztosíték esetleges elértéktelenedése miatt. Ennek elkerülése végett a CSA szerződések gyakran tartalmaznak haircut előírásokat.

Brigo et al. (2014) a BCVA számításának egy új modelljét kínálják, amiben a fedezet számbavételére is sor kerül. Ezt a modellt egészítettük ki a fedezeti haircut figyelembevételével. Amennyiben a fedezet kevesebbet ér, annak hatással kell lennie a partnerkockázat miatti árkiigazításra is. Munkánkban azonban megmutattuk, hogy a partnerkockázati hatások mellett a haircut egy másik kiigazítást is beépít a modellbe, amely az esetleges haircut miatti nyereségeket, illetve veszteségeket számszerűsíti. A haircut kétféle hatást is kifejt a derivatíva árára, így az semmiképpen nem elhanyagolható tényező az ár modellezésekor.

Jelen munkában megmutattuk, hogy ez a kiigazítás még aszimmetrikus haircut esetén sem sérti meg az egységes ár szerepét, hiszen a felek kölcsönösen beárazzák a CSA feltételeit. A HBCVA számolását leíró általános árazó képlet levezetése után egy számszerűsített példán mutattuk meg, hogy a haircut modellhez adása többszörösére változtathatja a BCVA értékét. Hasonlóan rámutattunk, hogy a csődeseményeket generáló hazard ráták közötti korreláció szerepe is felcserélődik, ha a haircut miatti kiigazítást is figyelembe vesszük.

Irodalom

1. Bielecki, T. R., Cialenco, I., és Iyigunler, I. (2011) Counterparty risk and the impact of collateralization in CDS contracts. *Stochastic Processes, Finance*

- and Control: A Festschrift in Honor of Robert J Elliott* (Advances in Statistics, Probability and Actuarial Science) Ed. Samuel N. Cohen, Dilip Madan, Tak Kuen Siu, Hailiang Yang, 2012:181–216.
2. Bielecki, T. R. és Rutkowski, M. (2013) *Credit risk: modeling, valuation and hedging*. Springer Science & Business Media.
 3. Brigo, D. és Alfonsi, A. (2005) Credit default swap calibration and derivatives pricing with the SSRD stochastic intensity model. *Finance and Stochastics*, 9(1):29–42.
 4. Brigo, D. és Capponi, A. (2010) Bilateral counterparty risk with application to CDSs. *Risk*, 23(3):85.
 5. Brigo, D., Capponi, A., és Pallavicini, A. (2014) Arbitrage-free bilateral counterparty risk valuation under collateralization and application to credit default swaps. *Mathematical Finance*, 24(1):125–146.
 6. Brigo, D., Capponi, A., Pallavicini, A., és Papatheodorou, V. (2011) Collateral margining in arbitrage-free counterparty valuation adjustment including re-hypotecation and netting. <http://arxiv.org/pdf/1101.3926.pdf>.
 7. Brigo, D. és Morini, M. (2011) Close-out convention tensions. *Risk*, 24(12):74.
 8. Canabarro, E. és Duffie, D. (2003) Measuring and marking counterparty risk. *Asset/Liability Management for Financial Institutions, Institutional Investor Books*.
 9. Duffie, D. és Huang, M. (1996) Swap rates and credit quality. *Journal of Finance*, 51(3):921–949.
 10. Durand, C. és Rutkowski, M. (2013) CVA under alternative settlement conventions and with systemic risk. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 16(7):1–40.
 11. Green, A. és Kenyon, C. (2014) MVA: Initial margin valuation adjustment by replication and regression. <http://arxiv.org/pdf/1405.0508v2.pdf>.
 12. ISDA (1996) Guidelines for collateral practitioners. <http://www.isda.org/press/pdf/colguide.pdf>.
 13. ISDA (2005) Collateral guidelines. <http://www.isda.org/publications/pdf/2005isdacollateralguidelines.pdf>.
 14. Lando, D. (1998) On cox processes and credit risky securities. *Review of Derivatives research*, 2(2-3):99–120.

CREDIT VALUATION ADJUSTMENT – ADDING THE COLLATERAL HAIRCUT TO THE MODEL

This paper describes the calculation and the features of the credit valuation adjustment (CVA) with collateral haircut. We extend the model developed in Brigo et al. (2014) to include the discount on the collateral introduced by the haircut. We show that the price generated by the new model comprises not only the counterparty risk, but also the gain or loss on the value reduction of the collateral. The price is proved to be unique for both participant even under asymmetric assumptions. We use a numerical example to illustrate that the adjustment on the risk free price may be significantly different than the original adjustment accounting for counterparty risk only.

HEGESZTÉSSEL KOMBINÁLT CSŐVÁGÁSI FELADAT¹

ÁGOSTON KOLOS CSABA – NYÍRI JÁNOS
Budapesti Corvinus Egyetem

A vágási problémát (angolul cutting stock) sokan és mélyrehatóan tanulmányozták. Az alapfeladatot az évek során többféle irányban általánosították. Ebben a cikkben mi is bemutatjuk az egydimenziós probléma egy lehetséges továbbfejlesztését. A mi esetünkben (iparági szabványnak megfelelően) engedélyezett a toldás (hegesztés), de egy egység csak maximum két darabból rakható össze. Bemutatunk egy algoritmust, amely a problémát vegyes egészértékű LP feladatok sorozataként oldja meg. Az algoritmus viszonylag gyorsan lefut, és skálázható.

1 Bevezetés

A vágási problémát először Kantorovics (1939) fogalmazta meg. Később ilyen feladatokkal Gillmore és Gomory (1961) is részletesen foglalkozott, átfogó elemzéssel támogatva a megoldási folyamatokat. Cikkünkben a problémát egészértékű LP feladatként fogalmazták meg, amelynek megoldásához vágási tervek (eredeti szóhasználatban: activity) volt szükség, és az egészértékű programozási feladat megmondta, hogy melyik vágási tervet hányszor kell alkalmazni. Hozzájárulásuk legfontosabb eredménye az volt, hogy olyan eljárást mutattak fel, amelyhez nem szükséges az összes vágási terv előzetes létrehozása, ugyanis az algoritmus a lényeges vágásokat menet közben generálja (egy ún. oszlopgenerálási módszer segítségével). Ugyanakkor az algoritmus nem feltétlenül generál egészértékű megoldást is egyben.

Az eredeti feladat lényegében egydimenziós feladat: csövek vagy olyan szalagok vágásához lehetett felhasználni, ahol a szélesség adott. A gyakorlatban előforduló problémák azonban az eredeti modell kiterjesztését motiválták. Legjellemzőbb kiterjesztés a dimenziószám növelése volt: vizsgáltak két- és többdimenziós problémákat. A többdimenziós problémák esetén lényeges kérdés, hogy milyen vágások engedélyezettek: egyszerűbb esetben a vágásoknak végig kell haladniuk az anyagban (pl. üveget nem szokás félig levágni), ezekre a szakirodalomban a ‘guillotine’ probléma megnevezés honosodott meg. Textilíák esetében viszont nem jelent problémát, ha a vágás nem ér végig az anyag teljes szélességén. Operációkutatói szempontból ez a kétféle vágási technika eltérő kezelést implikál.

A vágási problémákról összefoglalót ad Cheng et al (1994). Ipari alkalmazásról lásd például Stadler (1990).

¹Beérkezett: 2016. április 14. E-mail: kolos.agoston@uni-corvinus.hu.

Napjainkban elterjedtek az ún. Sprinkler tűzvédelmi rendszerek. A rendszer tervezésének, kivitelezésének és karbantartásának specifikációját a MSZ EN 12845:2004+ A2:2009 számú szabvány írja le. Egy adott megrendelés esetén az előzetesen méretre vágott csöveket a helyszínen szerelik össze. A feladat érdekességét az adja, hogy a szabvány szerint ezeket a csöveket lehet hegeszteni, de csövenként maximum egyszer.

A 2. fejezetben definiáljuk a problémát, a 3. fejezetben bemutatjuk, hogy hogyan lehet a hegesztéssel kombinált feladatot visszavezetni az alapfeladatra, ugyanakkor felhívjuk a figyelmet a visszavezetés korlátaira is. A 4. fejezetben felírjuk a hegesztéssel kombinált vágási problémát vegyes egészértékű LP feladatként, amely futási ideje csillagászati mértékű is lehet. Az 5. fejezetben megadunk egy közelítő eljárást, amely elfogadható idő alatt lefut. Numerikus futtatások eredményei a 6. fejezetben szerepelnek, melyet az összefoglalás követ.

2 A hegesztéssel kombinált vágási feladat ismertetése

Adott egy L^d lista, amely a d átmérőhöz tartozó levágandó csöveket tartalmazza. Mivel különböző átmérőjű csöveket nem lehet összehegeszteni, így minden átmérőhöz külön feladat tartozik, ezért a d index nem feltétlenül jelenik meg a későbbiekben, kivéve a paraméterekben. A levágandó csövek hossza 0 és 12 000 mm között változhat, amelyet l_i jelöl ($i \in L^d$). Iparági szabvány, hogy a csöveket lehet hegeszteni, de darabonként maximum egyszer. A hegesztés költsége w^d —amely függhet az átmérőtől— az üzletmenet során változhat. Ha sok a megrendelés, akkor magas költséggel számolhatunk, mert a megnövekedett munkaráfordítás miatt más megrendeléseket vissza kell utasítani, így a hegesztés rezsiköltségéhez viszonylag nagy alternatíva költség is járul. Ha kevés a megrendelés, akkor csak a viszonylag alacsony rezsiköltséget kell figyelembe venni.

A csöveket 6 000 mm hosszú alapanyagokból kell méretre vágni, majd szükség esetén a ledarabolt csöveket összehegeszteni. Az egyértelmű szóhasználat miatt hívjuk a továbbiakban az alapanyagként szolgáló ‘csövet’ rudnak, míg a listában szereplőt csőnek, habár ez nem teljesen szabatos. A rudak ára természetesen függ az átmérőtől: p^d .

A kérdés az, hogyan lehetne elvégezni egy L^d listához tartozó csövek méretre vágását és hegesztését úgy, hogy az összköltség (nyersanyagár plusz hegesztési költség) minimális legyen? A nyersanyagárat az elhasznált rudak darabszáma alapján kell kalkulálni, a keletkező hulladékot nem lehet felhasználni egy másik megrendeléshez.

3 Visszavezetési kísérlet

Első lehetőségként vizsgáljuk meg, hogy vissza tudjuk-e vezetni a feladatot hegesztés nélküli darabolási feladatra!

Gillmore és Gomory (1961) által megadott algoritmus nem kezeli a hegesztéseket; az alapanyag hosszúsága viszont többféle is lehet. A mi esetünkben az alapanyag hossza 6 000 mm, de egy hegesztéssel készíthetünk egy 12 000 mm hosszú rudat, melynek ára $2p^d + w^d$; két hegesztéssel készíthetünk egy 18 000 mm hosszú rudat, amelynek ára $3p^d + 2w^d \dots$ Tehát úgy tűnik, hogy visszavezettük a feladatot hegesztés nélküli vágási feladatra.

De ez a visszavezetés nem tökéletes. Legyen pl. 3 db 10 000 mm hosszú leszabandó cső. Ekkor Gillmore és Gomory (1961) algoritmus (vagy valamely továbbfejlesztett változata) le fogja darabolni ezt egy 30 000 mm hosszú rúdból vágási hulladék nélkül. Viszont a 30 000 mm hosszú rúd elkészítéséhez 4 hegesztés kell, a 3 csövet pedig maximum 3-szor lehet hegeszteni (csövenként egyszer). Az ilyen jellegű problémákat megnyugtató módon nem tudjuk kezelni a visszavezetés során.

További probléma, hogy nagy teljesítményű (szabad felhasználású) implementációja nem érhető el a darabolási feladatnak.

Lehetőség lenne az oszlopgeneráció módosítására is, de ez sem feltétlenül célravezető, hiszen a toldás lehetősége miatt a megoldandó feladat mérete megnő, ami akár nagyon nagy futási időt is okozhat (ugyanis egészértékű feladat megoldása szükséges hozzá).

A cikkben bemutatott algoritmus egyfajta kísérletnek is tekinthető, hogy milyen teljesítményre lehet számítani, ha eltérünk az oszlopgenerálás technikától. Az implementáció az üzleti életben hasznos segítséget jelentett, a megoldással a megrendelő elégedett volt. A bemutatásra kerülő programozási feladatok jól hasznosíthatóak egy módosított oszlopgenerálás algoritmus megalkotásakor.

4 Globális optimum

A 2. fejezetben leírt feladat optimális megoldása megadható egy vegyes egészértékű programozási feladatként. Legyen K olyan nagy szám, hogy a feladat K rúd segítségével már biztosan elvégezhető. Jelölje x_{ik} , $i \in L^d$, $k = 1 \dots K$, hogy az i levágandó cső mekkora részét vágjuk le a k rúdból. Jelölje r_k bináris változó, hogy a k rudat felhasználtuk-e (van-e olyan i index, amelyre x_{ik} pozitív). Legyenek h_{ik} bináris indikátorváltozók, hogy x_{ik} változók pozitívak-e vagy sem.

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^K \left(p^d r_k + \sum_{i \in L^d} w^d h_{ik} \right) \rightarrow \min \\
\text{f. h.:} & \\
& x_{ik} - 6000 h_{ik} \leq 0 \quad \forall i \in L^d, k = 1 \dots K \\
& \sum_{i \in L^d} x_{ik} - 6000 r_k \leq 0 \quad k = 1 \dots K \\
& \sum_{k=1}^K x_{ik} = l_i \quad \forall i \in L^d \quad (1) \\
& \sum_{i \in L^d} x_{ik} \leq 6000 \quad k = 1 \dots K \\
& \sum_{k=1}^K h_{ik} \leq 2 \quad \forall i \in L^d \\
& x_{ik} \geq 0 \quad \forall i \in L^d, k = 1 \dots K \\
& h_{ik} \in \{0; 1\} \quad \forall i \in L^d, k = 1 \dots K \\
& r_k \in \{0; 1\} \quad k = 1 \dots K
\end{aligned}$$

Az (1) feladat megfogalmazásánál figyelni kell arra, hogy a célfüggvényben a hegesztés költségét egyszer akkor is hozzáadjuk a költséghez, ha nincs hegesztés. Tehát a kapott célfüggvény értékből le kell vonni a csövek számaszor a hegesztés költségét (de ez egy fix összeg, az optimum helyét nem változtatja meg).

Az (1) programozási feladat megoldható vegyes egészértékű solverek segítségével. A felírásban szereplő nagyszámú bináris változó miatt a szükséges idő extrém nagyra nőhet.

A numerikus számításokat egy Intel Duo 2,33 GHz processzonnal, 2 GB RAM-mal rendelkező számítógépen futattuk; az operációs rendszer Windows 7 Enterprise volt, az LP solver pedig a 4.55 verziószámú GLPK.

A későbbiekben az 1. táblázatban szereplő feladatot fogjuk szemléltetés-ként használni.

Azonosító	Hossz	Azonosító	Hossz
c1	4680	c17	4680
c2	4000	c18	4680
c3	4680	c19	2000
c4	7200	c20	4500
c5	4680	c21	5096
c6	5000	c22	4680
c7	5250	c23	7000
c8	4680	c24	4660
c9	4680	c25	4500
c10	6000	c26	5500
c11	5260	c27	4500
c12	7200	c28	4660
c13	5660	c29	7000
c14	4680	c30	4680
c15	4500	c31	6000
c16	4680		

1. táblázat. Szemléltető példa adatai

Ha az 1. táblázatban csak az első 5 csővel futtattuk le a modellt, és 6 rudat engedélyeztünk, akkor is 187,7 másodperc volt szükséges az optimális megoldás megtalálásához, ami elég tekintélyes idő a feladat méretéhez képest. Ha az első 6 csővel futtattuk, 1 óra (3600 másodperc) sem volt elég az optimum megtalálásához.

Érdemes figyelembe venni, hogy a feladat futási ideje jelentősen csökkenthető, ha a korlátok közé hozzávesszük a $r_{k-1} \geq r_k$ feltételeket, így már mind a két eset 1 másodpercen belül megoldhatóvá vált. A 2. táblázat mutatja a futási időket a csövek számának növekedésével.

Csővek száma	Futási idő (sec)
5	> 1
6	> 1
7	410
8	< 3600

2. táblázat. A szemléltető példában szereplő első néhány csővel futtatott feladat futási ideje másodpercben

A teljes modell futtatásához szükséges idő beláthatatlan. Legalább 15 másodpercre volt szükség ahhoz, hogy a program az első egészértékű lehetséges megoldást megtalálja. Ennél jóval nagyobb méretű problémák esetén egy lehetséges egészértékű megoldás megtalálása várhatóan jóval több időt igényel, és a folyamat kevésbé befolyásolható. Megelégednénk egy közelítő optimummal is, ha azt viszonylag gyorsan megkaphatnánk. További elvárás, hogy az algoritmus skálázható legyen.

5 Közelítő algoritmus

Az előző fejezet alapján levonhatjuk azt a következtetést, hogy nem célszerű egyetlen nagy méretű feladatot felírni.

Vegyes egészértékű programozási feladatok tanulmányozása során jutottunk arra a megállapításra, hogy kb. 30-50 bináris változót tartalmazó feladatot tudnak gyorsan megoldani a solverek. Természetesen ez csak egy hozzávetőleges szám, ezen belül is sok függ a feladat struktúrájától. Szeretnénk olyan algoritmust létrehozni, ami akár sok vegyes egészértékű feladatot megold, de a mondott 30-50 bináris változónál nem tartalmaz többet, de ennél célravezetőbb, ha külső paraméterrel kontrolálható a bináris változók (maximális) száma. Legyen ez a paraméter *pmb!*

Az ötlet az, hogy bontsuk két fázisra az algoritmust. Az első fázisban csak a vágási hulladék minimalizálása a cél, és előállítunk sok lehetséges vágási tervet, amelyek közül a második fázisban kiválasztjuk, melyik esetén lesz az összköltség minimális.

Az első fázist is további alfázisokra bontjuk: 1/1 alfázis, 1/2 alfázis ... Az alfázisokat az különbözteti meg, hogy hány rudat tekintünk egyszerre.

5.1 1/1 alfázis

Kezdjük az 1/1 alfázissal! Adva van L^d lista, és van egy 6 000 mm hosszú rúd. Szeretnénk a levágandó csövek közül kiválasztani néhányat, hogy a legkisebb vágási hulladék keletkezzen. Mint látni fogjuk ez gyakorlatilag egy hátizsák probléma. Mivel egyetlen rúd van, a hegesztésnek nincs értelme. Egyetlen probléma, hogy az L^d listában elképzelhető, hogy több elem van, mint a pmb paraméter értéke. Vegyünk ki véletlenszerűen (visszatevés nélkül) maximum pmb elemet a L^d listából, legyen ez az I_1 lista.

Mit kezdünk a 6 000 mm-nél hosszabb csövekkel? Ezeket a csöveket egyszer mindenképpen hegeszteni kell, ez a hegesztés nem befolyásolja az optimumot. Ezért úgy járunk el, hogy levesszük belőlük a 6 000 mm-es részt, és csak a maradékot szerepeltetjük a listában.

Az 1/1 alfázishoz tartozó feladat: jelölje d_i bináris változó, hogy kiválasztásra kerül-e az i elem a listában.

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I_1} l_i d_i &\rightarrow \max \\ \text{f. h.:} & \\ \sum_{i \in I_1} l_i d_i &\leq 6\,000 \\ d_i &\in \{0; 1\} \quad \forall i \in I_1 . \end{aligned} \tag{2}$$

A feladat optimális megoldásaként kapunk egy vágási tervet, amelynek összhossza remélhetőleg közel van a 6 000 mm-hez. Tároljuk el ezt a vágási tervet (javaslatot)! Azokat a csöveket, amelyeket ebben az iterációban levágtunk (azaz ahol az optimális megoldásban 1 érték szerepel), kivesszük az I_1 listából, és ha lehet, az eredeti L^d listából újabbakkal pótoljuk. Ha ez már nem lehetséges, akkor az I_1 lista elemszáma csökken.

A (2) feladatot annyiszor futtatjuk, amíg az I_1 lista ki nem ürül. Így az eredeti L^d listában szereplő összes csövet leszabtuk valamilyen módon. A generált vágási terveket a 3. táblázat tartalmazza.

Ez az alfázis adott esetben kiváltható lenne pl. Gillmore és Gomory (1961) által leírt algoritmussal (ami vélhetően jobb eredményt adna), de egyrészt nem találtunk beágyazható programot, másrészt a feladat bonyolultságát a toldások lehetősége adja. Mivel ebben az alfázisban még nincs hegesztés, az itt nyert előnyök kevésbé számítanak a végső megoldásnál.

Vágás sorszáma	Csövek azonosítói	Összhossz	Hegesztések száma
v1	c10	6 000	0
v2	c31	6 000	0
v3	c2, c19	6 000	0
v4	c6, c23	6 000 (+6 000)	1
v5	c12, c30	5 880 (+6 000)	1
v6	c1, c4	5 880 (+6 000)	1
v7	c3, c29	5 680 (+6 000)	1
v8	c13,	5 660	0
v9	c26	5 500	0
v10	c11	5 260	0
v11	c7	5 250	0
v12	c21	5 096	0
v13	c9	4 680	0
v14	c8	4 680	0
v15	c14	4 680	0
v16	c16	4 680	0
v17	c17	4 680	0
v18	c18	4 680	0
v19	c22	4 680	0
v20	c5	4 680	0
v21	c28	4 660	0
v22	c24	4 660	0
v23	c20	4 500	0
v24	c25	4 500	0
v25	c27	4 500	0
v26	c15	4 500	0

3. táblázat. Az 1/1 alfázis során generált vágási tervek

5.2 1/2 alfázis

Ha készen vagyunk az 1/1 alfázissal visszatesszük az összes elemet az L^d listába. Az 1/2 alfázis esetén két 6 000 mm-es rúd áll rendelkezésre. Itt már értelmet nyer a hegesztés, de mivel két rúd van, nem kell külön kikötni, hogy csak maximum egyszer lehet hegeszteni, ez magától teljesül. Most is csak arra koncentrálunk, hogy a vágási hulladék minimális legyen, a hegesztés költségét nem vesszük figyelembe.

Kiveszünk most is véletlenszerűen egy maximum pmb elemet tartalmazó listát az L^d listából, és eltároljuk a I_2 listában. Legyen d_i jelentése ugyanaz, mint az 1/1 alfázisban! Jelentse x_{i1} és x_{i2} hogy az i levágandó csőhöz mennyit használunk el az 1., illetve 2. rúdból!

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i \in I_2} l_i d_i \rightarrow \max \\
 \text{f. h.:} & \sum_{i \in I_1} x_{i1} \leq 6\,000 \\
 & \sum_{i \in I_1} x_{i2} \leq 6\,000 \\
 & x_{i1} + x_{i2} - l_i d_i = 0 \quad \forall i \in I_2 \\
 & x_{i1}, x_{i2} \geq 0 \quad \forall i \in I_2 \\
 & d_i \in \{0; 1\} \quad \forall i \in I_2 .
 \end{aligned} \tag{3}$$

Vágás sorszáma	Csövek azonosítói	Összhossz	Hegesztések száma
v27	c2, c10, c19	12 000	0
v28	c6, c29	12 000	1
v29	c3, c4	11 880	1
v30	c9, c12	11 880	1
v31	c23, c30	11 680	1
v32	c13, c31	11 660	0
v33	c11, c26	10 760	1
v34	c7, c21	10 346	1
v35	c1, c22	9 360	1
v36	c5, c18	9 360	1
v37	c14, c16	9 360	1
v38	c8, c17	9 360	1
v39	c24, c28	9 320	1
v40	c15, c25	9 000	1
v41	c20, c27	9 000	1

4. táblázat. Az 1/2 alfázis során generált vágási tervek

A (3) feladat optimális megoldása nem feltétlenül marad optimális, amint a hegesztés költségével is számolunk. Nézzük a 4. táblázatban a v33 vágást! A (3) feladat optimális megoldása esetén van egy hegesztés: az első rudat felvágjuk 5 500+500 módon, a másodikat 4 760+1 240 módon, majd az 500 mm-es és 4 760 mm-es darabot összehegesztjük. Természetesen ezt a részfeladatot meg lehetne hegesztés nélkül is oldani. Mivel a célfüggvényben nem szerepeltetjük a hegesztés költségét (ez jelentősen megnövelné a futási időt), ezért a modell számára ez a két megoldás ekvivalens. Egyrésztől itt is látszik, hogy az algoritmus nem feltétlenül találja meg a globális optimumot: ez az ára a gyorsaságnak. Másrésztől a jelen példa esetén látható, hogy az 1/1 alfázisban szerepel az a vágás, hogy 5 500+500 (v9 vágás) és 5 260+740 (v10 vágás), tehát ebben a konkrét esetben ez nem jelent tényleges hátrányt, mert az 1/1 alfázis v9 és v10 vágása együttesen dominálja a v33 vágást: ugyanúgy két rudat használunk fel mindkét esetben az 5 500 és az 5 260 mm-es csövek előállításához, de a v33 vágási javaslat esetén ehhez társul egy hegesztés költsége is.

5.3 1/3 alfázis

Ha készen vagyunk az 1/2 alfázissal, megint visszatesszük az összes elemet az L^d listába. Az 1/3 alfázis esetén már három 6 000 mm-es rúd áll rendelkezésre. Innentől kezdve vigyázni kell arra is, hogy egy csövet csak maximum két részből hegeszthetünk össze. Ez a tény a feladatban szereplő bináris változók számát jelentősen megnöveli.

Kiveszünk most is véletlenszerűen egy maximum pmb elemet tartalmazó listát az L^d listából és eltároljuk az I_3 listában. Legyen d_i és x_{ik} jelentése ugyanaz, mint az 1/2 alfázisban. Legyenek h_{ik} bináris indikátorváltozók,

hogy x_{ik} változók pozitívak-e vagy sem.

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i \in I_2} l_i d_i \rightarrow \max \\
 \text{f. h.:} & \\
 & \sum_{i \in I_3} x_{i1} \leq 6000 \\
 & \sum_{i \in I_3} x_{i2} \leq 6000 \\
 & \sum_{i \in I_3} x_{i3} \leq 6000 \tag{4} \\
 & x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} - l_i d_i = 0 \quad \forall i \in I_3 \\
 & x_{ik} - 6000 h_{ik} \leq 0 \quad k = 1 \dots 3, \quad \forall i \in I_3 \\
 & h_{i1} + h_{i2} + h_{i3} \leq 2 \quad \forall i \in I_3 \\
 & x_{i1}, x_{i2}, x_{i3} \geq 0 \quad \forall i \in I_3 \\
 & d_i, h_{i1}, h_{i2}, h_{i3} \in \{0; 1\} \quad \forall i \in I_3
 \end{aligned}$$

Vágás sorszáma	Csővek azonosítói	Összhossz	Futási idő (sec)
v42a	c2, c23, c29	18 000	< 1(< 1)
v43a	c19, c26, c27	18 000	< 1(< 1)
v44a	???	?	> 3 600(< 1)

5. táblázat. A (4) feladattal generált néhány vágás futási ideje

A (4) feladat futásigénye jelentősen megnőtt, lásd 5. táblázatot. Jó lenne olyan módon megfogalmazni a feladatot, hogy ne növekedjen a bináris változók száma. Erre akkor van lehetőségünk, ha nem vesszük figyelembe az összes lehetséges vágást, így a futási idő akár nagyságrendekkel is csökkenthető.

Bontsuk az I_3 listát két diszjunkt részre: I_3^1 és I_3^2 . Mivel az I_3 listát véletlenszerűen töltöttük fel, ezért elégséges pl. ha az I_3^1 lista az I_3 lista első felét tartalmazza, az I_3^2 pedig a másodikát. A korlátozás legyen az, hogy az I_3^1 lista elemeit csak az első és második rúdból tölthetjük össze, az I_3^2 elemeit pedig csak az első és harmadik rúdból. Ekkor nem kell külön feltételként kikötni, hogy maximum egy hegesztés lehetséges. Tehát a megoldandó feladat:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i \in I_2} l_i d_i \rightarrow \max \\
 \text{f. h.:} & \\
 & \sum_{i \in I_3} x_{i1} \leq 6000 \\
 & \sum_{i \in I_3^1} x_{i2} \leq 6000 \\
 & \sum_{i \in I_3^2} x_{i3} \leq 6000 \tag{5} \\
 & x_{i1} + x_{i2} - l_i d_i = 0 \quad \forall i \in I_3^1 \\
 & x_{i1} + x_{i3} - l_i d_i = 0 \quad \forall i \in I_3^2 \\
 & x_{i1}, x_{i2}, x_{i3} \geq 0 \quad \forall i \in I_3 \\
 & d_i \in \{0; 1\} \quad \forall i \in I_3
 \end{aligned}$$

Ha megkaptuk az optimális megoldást, akkor a levágott csöveket kivesszük az I_3 listából, és ha tudjuk, feltöltjük új elemekkel. Ha már nincs új elem,

akkor a lista mérete csökken. Akár így, akár úgy, az I_3^1 és I_3^2 listákat mindenképpen újra kell generálni, de mint említettük, ez lehet az I_3 lista első és második fele egyszerűen.

Megoldottuk a v44a feladathoz tartozó listát az (5) feladat segítségével is. A futási idő 1,7 másodperc volt, az optimum pedig 17 880. Látható, hogy a futási idő jelentős mértékben lecsökkent, de a vágási hulladék is nagyobb volt ebben az esetben, mint ameddig a (4) feladat megoldása során 1 óra alatt eljutottunk. Alternatív eljárás lehetne, hogy a (4) feladatot oldjuk meg és csak pár másodperces futást engedélyezünk, remélve, hogy eljutunk (egy nem túl rossz) egészértékű lehetséges megoldásig ennyi idő alatt. Mi inkább az (5) feladat mellett döntöttünk, a rövidebb futási idő miatt, de a kérdés akár további vizsgálódások tárgya is lehet.

Nézzük az (5) feladat korlátait! Legyen az I_3 listában négy 4 500 mm hosszú cső és a többi legyen 5 000 mm! Az optimális az lenne, ha két 6 000 mm-es rudat szétvágnánk 4 500 + 1 500 módon, a harmadikat pedig 3 000 + 3 000 módon. Így kapnánk két 4 500 mm hosszú csövet hegesztés nélkül, és kettőt 3 000 + 1 500 módon, egy-egy hegesztéssel. Ha a négy 4 500 mm hosszú csőből nem 2-2 kerül az I_3^1 és I_3^2 listába (aminek valószínűsége 62,5%), akkor nem a 4 500 mm hosszú csövek kerülnek kiválasztásra, hanem három 5 000 mm-es cső.

Az I_3^1 és I_3^2 listák újra generálásakor van újabb esély, arra hogy a 2-2 eloszlás létrejöjjön. Ha ez nem következik be, akkor a 4 500 mm hosszú csöveket is csak 1 500 mm vágási hulladékkal tudjuk elkészíteni.

Végezetül a 6. táblázat tartalmazza az 1/3 alfázisban (az (5) feladat által) generált vágásokat.

Vágás sorszáma	Csővek azonosítói	Összhossz	Hegesztések száma	Futási idő (sec)
v42	c2, c6, c19, c23	18 000	2	0,9
v43	c11, c13, c29	17 920	2	2,5
v44	c12, c30, c31	17 880	2	1,4
v45	c4, c21, c26	17 796	2	0,8
v46	c7, c10, c17	15 930	2	0,4
v47	c1, c16, c22	14 040	2	0,1
v48	c8, c14, c18	14 040	2	> 0, 1
v49	c3, c9, c24	14 020	2	> 0, 1
v50	c5, c15, c28	13 500	1	> 0, 1
v51	c20, c25, c27	13 500	1	> 0, 1

6. táblázat. Az 1/3 alfázis során generált vágási tervek

5.4 További alfázisok

Nem feltétlenül állunk meg az 1/3 alfázisnál (ez paraméter kérdése). Ha befejeztük az 1/j-1 alfázist és tovább szeretnénk menni, a követett módszer analóg: visszatesszük az összes elemet az L^d listába, majd véletlenszerűen kiválasztunk maximum pmb elemet az I_j listába. Az I_j listát $j - 1$ diszjunkt részre osztjuk: $I_j^1 \dots I_j^{j-1}$. A megoldandó vegyes egészértékű programozási

feladat:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i \in I_2} l_i d_i \rightarrow \max \\
 \text{f. h.:} & \\
 & \sum_{i \in I_j} x_{i1} \leq 6000 \\
 & \sum_{i \in I_j^m} x_{i(m+1)} \leq 6000 \quad m = 1 \dots j-1 \\
 & x_{i1} + x_{i(m+1)} - l_i d_i = 0 \quad m = 1 \dots j-1, \quad \forall i \in I_j^m \\
 & x_{i1}, x_{i(m+1)} \geq 0 \quad m = 1 \dots j-1, \quad \forall i \in I_j^m \\
 & d_i \in \{0; 1\} \quad \forall i \in I_j.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Az optimális megoldásban szereplő csövekhez tartozó indexeket kivesszük az I_j listából, és ha van még cső az L^d listában, akkor a helyükre beteszünk újakat, ha nincs; akkor csökken a lista mérete. Újrdefiniáljuk a $I_j^1 \dots I_j^{j-1}$ listákat és lefuttatjuk megint a (6) vegyes egészértékű programozási feladatot.

A 7. táblázatban bemutatjuk az 1/4 alfázishoz tartozó vágásokat, és úgy döntünk, hogy a példánkban ezzel véget is ér az első fázis.

Vágás sorszáma	Csővek azonosítói	Összhossz	Hegesztések száma	Futási idő (sec)
v52	c10, c15, c19, c25, c29	24 000	2	2,1
v53	c4, c12, c21, c27	23 996	3	2,8
v54	c1, c2, c18, c20, c31	23 860	3	1,3
v55	c7, c11, c13, c23	23 170	3	0,4
v56	c5, c6, c17, c26	19 860	2	0,2
v57	c3, c8, c16, c30	18 720	2	> 0,1
v58	c9, c14, c22, c24	18 700	2	> 0,1
v59	c28	4 660	0	> 0,1

7. táblázat. Az 1/4 alfázis során generált vágási tervek

5.5 2. fázis

Az alfázisok során keletkezett J vágási ajánlat. A második fázisban ki kell válogatni közülük azokat, amelyek összköltsége a legkisebb. A b_{ij} paraméter értéke legyen 1, ha az i cső a j vágásban szerepel ($j = 1 \dots J$); 0, ha nem. Jelölje y_j bináris változó, hogy a j . vágási javaslat szerepel-e a végső vágási tervben. Legyen c_j a j . vágás költsége. A vágás költsége megkapható, ha összeadjuk a vágáshoz elhasznált rudak (anyag)költségét, és a hegesztések költségét. A második fázisban megoldandó feladat:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=1}^J c_j y_j \rightarrow \min \\
 \text{f. h.:} & \\
 & \sum_{j=1}^J b_{ij} y_j \geq 1 \quad \forall i \in I^d \\
 & y_j \in \{0; 1\} \quad j = 1 \dots J.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Ha egy rúd ára 4200 Ft és a hegesztés költsége pedig 80 Ft, akkor a következő vágások kerültek be a végső vágási tervbe: v4, v5, v8, v9, v10, v11, v12, v13, v14, v15, v16, v17, v19, v20, v22, v25, v29, v52, v54 v59. Így összességében 29 rudat használtunk fel, és 8 hegesztésre volt szükség. Ha a hegesztés költsége megváltozik 2000 Ft-ra, akkor már a végső vágási tervhez 30 rúdra volt szükség, de csak 4 hegesztésre.

5.6 Skálázási lehetőségek

Az algoritmus skálázható a megrendelői igényeknek és a feladat méretének megfelelően. Eddig bemutatásra került a *pmb* paraméter, ami a maximális bináris változók számát mutatja az első fázis feladataiban. Minél nagyobb a paraméter értéke, annál nagyobb a lista, így több lehetőséget tud egyszerre figyelembe venni, és így vélhetőleg kisebb hulladékkal tud vágási javaslatokat előállítani. Ugyanakkor a paraméter növekedésével jelentősen megnőhet a futási idő. Futtatási tapasztalok alapján a paramétert 30 és 50 között érdemes választani.

A másik lehetőség, hogy hány alfázist engedélyezünk az első fázisban. 2 alfázist legalább érdemes, mert csak a 2. alfázisban jelennek meg a hegesztések. Az első két alfázis viszonylag gyorsan lefut, a 3. alfázistól megnőhet a futási idő. 5-6 alfázisnál többet nem érdemes választani.

Felfigyelhetünk arra, hogy sokszor egy későbbi alfázisban generált vágási terv előáll több korábbi alfázisban generált vágási tervek összegeként. Például az v27 vágási terv megegyezik az v1 és v3 vágási terv összegével. Ha bizonyos csöveket sikerült jól összepárosítani —azaz kicsi a vágási hulladék—, akkor ezeket a csöveket már nem feltétlenül tesszük vissza a következő alfázis elején a listába. Tehát definiálunk egy küszöbértéket, és ha egy vágási javaslat esetén a hulladék mértéke ennél kisebb, akkor a vágási javaslatához tartozó csöveket már nem tesszük vissza az L^d listába a következő alfázistól. Így elérhetjük, hogy a 3., 4., stb. alfázisokban —ahol hosszabb ideig is eltarthat egy feladat megoldása—, már kevesebb cső van, így összességében kevesebb feladatot kell megoldani.

Természetesen ennek a megoldásnak is ára van. Legyen pl. 3 db 2000 mm hosszú levágandó cső és 3 db 4000 mm hosszú. Az optimális megoldás könnyen kitalálható: a 6000 mm-es rudakat szét kell vágni 4000 + 2000 módon. De az algoritmus lehet, hogy az 1/1 fázisban kiválasztja a 3 db 2000 mm-es csövet, 0 vágási hulladékkal. Ha ezeket a csöveket nem tesszük vissza, akkor az optimális megoldást a további alfázisok sem képesek megtalálni. Tehát még a 0 vágási hulladékú javaslatokhoz tartozó csöveket is érdemes lehet visszatenni a listába.

Összességében elmondható, hogy minél kisebb a vágási hulladékhoz tartozó küszöbérték, valószínűsíthetően annál kisebb összköltségű lesz a végső vágási terv, de annál hosszabb ideig tart az algoritmus futása. Az algoritmus futása közben érdemes kis értékre állítani a vágási hulladékot, pl.: 150 mm. A konkrét érték természetesen a nyersanyag árának és a vágás költségének arányától is függ. Minél nagyobb (relatív) a hegesztés költsége, annál na-

gyobb lehet a vágási hulladékhoz a küszöbszám.

Az utolsó skálázási lehetőség, hogy hány másodperces futási időt engedélyezünk az alfázisokban egy-egy programozási feladat megoldásához. Az algoritmus működőképes marad, ha a megoldó nem találja meg az optimális megoldást, csak egy egészértékű lehetséges megoldást. A 6. és 7. táblázatok adatai mutatják, hogy a futási idők jellemzően kicsik, ugyanakkor ritkán nagyon hosszú futási idők is adódhatnak. Tapasztalatok szerint 1 másodperc alatt mindig volt lehetséges egészértékű megoldás. 10 másodpercnél általában nem érdemes hosszabb futási időt engedélyezni, hacsak nem nagyon speciális a megoldandó feladat.

6 Numerikus eredmények

Az előző szakaszban bemutatott algoritmust implementáltuk, hogy az algoritmust numerikusan is tesztelni tudjuk.

Az előző pont során bemutatott példát futtattuk a következő paraméterekkel: a nyersanyagár 4200 Ft rudanként, a hegesztés költsége 80 Ft, a bináris változók maximális száma 31, az első fázisban 5 alfázis engedélyezett, a vágási hulladékhoz 150 mm a küszöbszám és maximum 5 másodperc engedélyezett egy vegyes egész értékű feladat futásához.

Az algoritmus teljes futásához 2,2 másodpercre volt szükség. A végső vágási terv 29 rudat használ fel és 6 hegesztés szükséges hozzá, tehát még jobb tervet kaptunk, mint a bemutatott példában.

Nézzünk egy nagyobb méretű feladatot. A 8. táblázat tartalmazza a le-vágandó csöveket. A feladatban összesen 334 cső szerepel, ami nagyságrendi különbséget jelent a mintapéldához képest.

Cső hossza	Darabszám
6 002	43
5 116	36
4 731	45
4 434	44
4 330	6
3 800	160

8. táblázat. Numerikus példa adatai

Ha a korábbi paraméteregyüttessel futtattuk le az algoritmust, akkor 252 rudat kell vásárolni és 183 hegesztés szükséges hozzá, ami 1 073 040 Ft összköltséget jelent. Az algoritmus futási ideje 18 perc körül volt, ami, bár jelentős növekedés az előzőhöz képest, üzletileg még vállalható.

Itt használhatjuk ki az algoritmus skálázhatóságát. Ha szükséges, akkor az algoritmus rövidebb idő alatt is futtatható. A korábbi 5 másodperc helyett először csak 3 másodpercet, majd 1 másodpercet engedélyeztünk egy vegyes egészértékű programozási feladat futásához. A futási idő így először 13 percre, majd 5 percre rövidült. A konkrét esetben sem a felhasznált rudak száma, sem a hegesztések száma nem változott meg, de ez a megfigyelés nyilván nem általánosítható. Az üzleti feladatok során —főleg a nagyméretűeknél— 1

másodperc futási idővel szoktuk futtatni az algoritmust, a fejezet további részében is ezt az értéket használjuk.

Ha tovább szeretnénk rövidíteni a futási időt, akkor lehetőségünk van az alfázisok számának csökkentésére. Megváltoztattuk előbb 4-re, majd 3-ra az engedélyezett alfázisok számát. A futási idő lecsökkent 4 és fél percre, majd 3 és fél percre (208 másodperc). 4 alfázis esetén az elhasznált rudak száma nem változott, de a hegesztések száma megnövekedett eggyel, ami 80 forintos összköltség emelkedést eredményezett, ami 1 tized ezreléknek felel meg. 3 alfázis esetén az elhasznált rudak száma hárommal növekedett (255-re), a hegesztéseké pedig tizenhatal csökkent (167-re), ami a kiindulási állapothoz képest 11 320 ft. költség-növekedést okoz (kb. 1%).

Alternatív lehetőség, hogy nem az alfázisok számát, hanem a hulladékhoz használt küszöbértéket emeljük meg (így kevesebb cső kerül a későbbi alfázisokba és kevesebb vegyes egészértékű feladatot kell megoldani). A küszöbértéket (5 alfázis engedélyezése mellett) először 300-ra, majd 450-re növeltük. Így a futási idő lecsökkent 4 és fél percre (a két eset között pár másodperc volt a különbség, természetesen a 450-es küszöbérték javára). 300-as küszöbérték mellett az algoritmus 253 rudat használt el és 177 hegesztést javasolt; az összköltség 3 720 forinttal emelkedett meg, ami 0,3%-os emelkedés a kiindulási állapothoz képest. 450 küszöbérték esetén a rudak száma és a hegesztések száma ugyanaz volt, mint 300-as küszöbérték esetén.

7 Összefoglalás

A cikkben az irodalomban ismert vágási probléma egy lehetséges továbbfejlesztését ismertettük. A megoldott vágási problémának az a specialitása, hogy engedélyezett a toldás, de darabonként maximum egyszer. A feladatot vegyes egészértékű feladatok sorozatára bontottuk: az első fázis lehetséges vágási terveket generál, ezek közül a második fázis törekszik a legalacsonyabb költségűt kiválasztani. Az algoritmus nem feltétlenül találja meg a globális optimumot, csak egy ehhez közeli megoldást ad. A felhasználó paraméterek beállításával dönthet, hogy inkább gyors, vagy inkább pontos végeredményt szeretne.

A leírt algoritmust implementáltuk, és bemutattuk, hogy a futási idők elfogadhatóak a mindennapi üzleti gyakorlatban.

Irodalom

1. Cheng, C. H., Feiring, B. R. és Cheng T. C. E. (1994): The cutting stock problem – a survey. *International Journal of Production Economics*, vol 36. Iss. 3, pp. 291–305.
2. Gilmore, P. C. és Gomory, R. E. (1961): A linear programming approach to the cutting-stock problem. *Operations Research* 9, pp. 849–859.
3. Gilmore, P. C. és Gomory, R. E. (1963): A linear programming approach to the cutting-stock problem - Part II. *Operations Research* 11, pp. 863–888

4. Kantorovics, L. V. (1939): *Mathematical methods of organizing and planning production*. Leningrad State University.
5. Stadtler, H. (1990): A one-dimensional cutting stock problem in the aluminium industry and its solution. *European Journal of Operational Research* 44, pp. 209–223.

CUTTING STOCK PROBLEM WITH THE POSSIBILITY OF WELDING

Cutting stock problem is widely studied in operations research. In this paper we discuss a possible extension of the one-dimensional cutting stock problem: welding is allowed —according to industrial standard—, however every piece can be jointed from maximum two parts. We present an algorithm which solve the problem with successive use of mixed integer LP. The running time is acceptable for business usage, and it is controlled by various parameters (i.e. decision maker can influence whether she/he would like a faster or a more exact solution).

TERMÉSZETI KÖRNYEZETBE ÁGYAZOTT VÁLLALATOK, ÉS TERMELÉSÜK MÓDSZERTANI SZAKIRODALMÁNAK ÁTTEKINTÉSE¹

HARTUNG KATALIN

PTE Közgazdaságtudományi Kar

A tanulmány ismerteti a természeti környezetbe ágyazott vállalatok főbb jellemvonásait, részletezve az ide vonatkozó fenntartható fejlődés irányzatait. Ennek megértéséhez feleleveníti a különféle vállalati erőforrás gazdálkodással kapcsolatos nézeteket, illetve a technológia és az innováció elengedhetetlen szerepét. Végül a tanulmány azon modellek módszertanáról ad szakirodalmi áttekintést, melyek a természeti környezetbe ágyazott vállalatok termelésének jövőbeli vizsgálatához adhatnak kiindulási alapot. Összefoglalva megállapítható, hogy a fenntartható fejlődés elméletei sokszor nehezen elkülöníthetőek egymástól, illetve a módszertani elemzések alig térnek ki a gyártás során keletkezett melléktermékek vállalaton belüli vagy kívüli hasznosításának lehetőségeire.

Kulcsszavak: fenntartható fejlődés irányzatai, természeti erőforrások, melléktermékek, hulladékok, optimalizációs lehetőségek, modellek

1 Bevezetés

Az elmúlt évtizedekben a természeti erőforrások keresletében folyamatos növekedés volt tapasztalható, ami a fejlődő országok gyors iparosodásának és a fejlett országok változatlan nyersanyagfogyasztásának köszönhető az OECD (2014) és Eurostat (2016) tanulmánya szerint. Ghisellinia és társai (2016), Munck (2016) és Scheel (2016) szerint törekedni kell a jövőben arra, hogy a gazdasági növekedést alacsonyabb környezetterhelés kísérje. Ebből következően olyan gazdasági tevékenységeknek kell előtérbe kerülniük, melyek minimális káros következménnyel járnak a környezetre és az emberi egészségre, miközben lehetőség szerint a teljes kibocsátás hasznosul a vállalat nyereséges működése során. Jaehn (2016) tanulmányában megfogalmazta, hogy a növekedéssel járó negatív környezeti kihívások kezelésére – mindössze tíz-húsz évvel ezelőtt – megjelent a fenntartható termelés fogalma, a figyelmet a megfelelő erőforrások hatékonyságát támogató irányzatokra és azon keresztül a termelővállalatokra irányítva. Hiszen a vállalatok – a gazdaság motorjaiként – döntéseik következményeivel jelentős hatást gyakorolnak a környezetre.

Az új fenntartható fejlődési irányzatok vállalati szintű anyaghatékonyságának mérése és módszertani kidolgozottsága közel sem tisztázott. Ilyen például a körforgásos (más fordításban körkörös) gazdaság (Genovese és társai

¹Beérkezett: 2016. március 23. E-mail: hartungk@ktk.pte.hu.

2015), a tisztább termelés (Rahim és Raman 2015), a „3R” elv (Su és társai 2013), a zárt ellátási lánc (Bocken és társai 2014), és a kék gazdaság (Bocken és társai 2014). Ezen fogalmak később tisztázásra kerülnek. A továbbiakban a fenti irányzatokat követő vállalatokat gyűjtő néven *természeti környezetbe ágyazott vállalatoknak* nevezzük, kiemelve egy közös tulajdonságukat: mindegyik irányzat törekszik a természeti erőforrásokkal való hatékonyabb és a fenntartható gazdálkodásra.

Tapasztalható, hogy a környezeti kihívásokra válaszul a vállalatok lehetőséget látnak az újrahasznosításban. Dobos (2008) munkájában kiemeli a vállalatok közvetlen gazdasági előnyei közül a profitnövelés lehetőségét, amit „a kisebb mértékű nyersanyag-felhasználás, a hulladék-elhelyezési költség csökkenése, illetve az újrafeldolgozás által nyerhető hozzáadott érték jelent”. A közvetett gazdasági előnyök között szerepet játszik a „zöld image” kialakítása, amivel napjainkban egyre több támogatót nyerhet egy vállalat. Genovese és társai (2015) szerint tapasztalatok igazolják, hogy a vállalat természeti környezetbe ágyazottságát figyelembe vevő, környezettudatos vállalati működés hosszú távon is stabil fogyasztói kapcsolatokat eredményez. Így ezek által versenylőnyre tehet szert a vállalat, melyek további profitszerzésre adnak lehetőséget. Dobos (2008) szerint a fentiekén túl a vállalatok önkéntes felelősségvállalása sem hagyható figyelmen kívül, ami a szervezeteken belül alakul ki, és onnan fejti ki hatását. Liu és Bai (2014), Ghisellinia és társai, és Scheel (2016) meglátása, hogy nem minden vállalat vélekedik hasonlóan. Sokan megkérdőjelezik a környezettudatos vállalatok jövedelmezőségét és működőképességét. Ez indokolja annak áttekintését – ahogy azt a továbbiakban tenni fogjuk –, hogy milyen módszertani megközelítéssel vizsgálható vállalati szinten az anyagi erőforrások zárt láncú termelésben történő hasznosítása.

2 Természeti környezetbe ágyazott vállalati irányzatok

A természeti környezetbe ágyazott vállalat - mint azt korábban említettük - a körforgásos gazdaság, a tisztább termelés, a „3R” elv, a zárt anyagáram és a kék gazdaság koncepciót alkalmazó vállalatot értjük. Bocken és társai (2014) szerint az irányzatok közti különbségek gyakran tisztázatlanok, ezért szükséges az ezek közötti kapcsolatok áttekintése. Az imént felsorolt elvek a környezettudatos vállalati működés gyakorlati megvalósítására keresik a választ, állítják Bocken és társai (2014), továbbá Sauvé és társai (2016).

Genovese és társai (2015) és Sauvé és társai (2016) rámutattak, hogy a *körforgásos gazdaság* önmagában nem újdonság, hiszen gyökerei megtalálhatók az ipari ökológiában, a bölcsőtől bölcsőig elv² és más fenntartható fejlődéssel foglalkozó gondolatok közt. Ami újdonság Sauvé és társai (2016)

²A bölcsőtől a bölcsőig elv az integrált termékpolitika eleme, mely egyik legátfogóbb szempontjaként említi a teljes életút-tervezést, azaz a bölcsőtől a bölcsőig elvet. Ez a fajta tervezés lehetővé teszi a hulladék újraszületését úgy, hogy azt a természetes vagy a termelői ciklusba helyezi vissza McDonough és Baungart (2002).

szerint, hogy teret hódított a politikában, üzletemberek, törvényhozók, és oktatók körében. Li és Su (2012) a körforgásos gazdaság két alapvető tulajdonságát fogalmazza meg. Elsőként a vállalatok felelősek az ember és a természet egyensúlyáért, mert gazdasági növekedés hatására sem változik meg az ökológiai rendszer. Másodsorban a körforgásos gazdaság termelési folyamatokat határoz meg. Sauvé (2016) megállapítja, hogy a vállalatok körforgásos természetükből fakadóan zárt rendszerben gondolkoznak, ahol a hulladékot próbálják a rendszerben tartani, ezáltal helyettesítve az ásványi nyersanyagok és természeti kincsek szükségtelen felhasználását. A körforgásos gazdaság megértéséhez lényeges a termodinamika első és második főtételének magyarázata és értelmezése, amit Andersen (2007) és Ghisellinia és társai (2016) tanulmánya alapján összegzünk. A termodinamika első főtétele kimondja az energiamegmaradás törvényét, miszerint az anyag és az energia zárt rendszerben állandó. Ez esetben a Föld is egy zárt rendszernek tekinthető, amiből az következik, hogy a keletkezett hulladék egyenlő a kitermelt természeti erőforrások mennyiségével. Így a tőkejavak átmeneti megtestesítői a természeti erőforrásoknak, hiszen selejtezés után a természeti környezetben hulladékként jelennek meg. Az energia nem vész el, de átalakítható vagy szétosztható. Ezért alkalmazza a körforgásos rendszer az újrahasznosítást, ahol valamennyi hulladék ismét erőforrássá alakul, ami az energiamegmaradás törvénye szerint lehetséges is. Ugyanakkor érdemes megjegyezni, hogy jelenleg a gazdaság nem tud minden hulladékot újrahasznosítani az elmulasztott lehetőségek, a megfelelő technológia hiánya miatt, vagy alapvető fizikai okokból fakadóan. A termodinamika második főtétele a spontán folyamatok irányát szabja meg. A tétel szerint minden valóságos folyamat irreverzibilis. Andersen (2007) a termodinamika második főtételét az entrópia fogalmának magyarázatával értelmezi, ami az anyag és energia rendezettségét írja le. Minél rendezettebb és egységesebb az anyag vagy energia, annál alacsonyabb annak entrópiája. Miközben a természeti erőforrások felhasználásra kerülnek a gazdaságban, entrópiájuk egyre növekszik. Andersen (2007) munkájában felidézi Georgescu-Roegen (1971) megállapítását, miszerint az entrópia arányosan növekszik a természeti erőforrások gazdasági célú kitermelésével.

Ugyanakkor Andersen (2007), valamint Ghisellinia és társai (2016) szerint az anyag és energia gazdaságban történő újrahasznosulása csökkenti az új természeti erőforrások keresletét és késlelteti a Föld entrópiájának növekedését. Bihari (2012) szerint ez azért lényeges, mert a világegyetem entrópiája a maximum felé törekszik, amint azt eléri, beáll az egyensúlyi állapot, ami a világ végét, a „hőhalált” eredményezi.

A *kék gazdaságról* nagyon kevés publikációt találunk a vezető folyóiratokban, ám ezek alapján érezhetően sok hasonlóságot mutat a körforgásos gazdaság koncepciójával. A fogalom önmagában nehezen definiálható, hiszen nézeteit a már létező elméletek megfogalmazták. Ilyen például az ipari ökológia, a nulla-hulladék elv (Pauli 1997) és a biomimikri³ (Benyus 1997). Elmond-

³A biomimikri arra keresi a választ, hogyan lehet a természettől tanulni. A természettől való tanulás olyan újításokhoz, innovációkhoz vezethet, mely a fenntartható fejlődés elveit támogatják. A biomimikri tulajdonképpen természetutánczó megoldások alapelveit rögzíti.

ható, hogy mind a kék gazdaság, mind a körforgásos gazdaság holisztikus megközelítéssel szemléli a gazdaság egészét és egy új jövőképet alkot. Mindkettő körforgásos rendszerekben gondolkozik önfenntartó termelési rendszereket kialakítva, csökkentve az ásványi nyersanyag és erőforrás készletek felhasználását, illetve a vállalatok indirekt környezetterhelését. A körforgásos gazdaság ismertsége Su és társai (2013), valamint Ghisellinia és társai (2016) szerint politikai támogatottságának köszönhető. Pauli (1998) arra hívja fel a figyelmet, hogy egy vállalat önmagában képtelen a nulla-hulladék elv betartására, ezért a vállalatok közti együttműködést nélkülözhetetlennek tartja. A kék gazdaság elvének legfontosabb eleme tehát, a vállalatok közti együttműködésben lehető fel, melynek célja az egyik vállalat termelése során keletkezett melléktermék alapanyagként történő felhasználása egy másik vállalat termelési folyamatában.

Elsősorban vállalati szinten alkalmazzák a kék és a körforgásos gazdaság elvét, ahol a vállalat erőforrás-hatékonyságának köszönhetően gyakran vállalatközi szinergikus együttműködések jönnek létre a hatékonyabb körforgásos struktúra érdekében. Ghisellinia és társai (2016) szerint a körforgásos és a kék gazdaság megvalósítása esetén a vállalati stratégia a tisztább termelést és ökológiai szemléletű tervezést alkalmazza. Li és Su (2012) összegzi a körforgásos gazdaság elvét követő vállalatok közös vonásait, miszerint minimális beruházással, minimális ipari szennyezéssel járnak. A rendelkezésre álló készleteket maximálisan kihasználják, és a környezetre a lehető legkisebb hatást gyakorolják. Ugyanakkor megjegyzendő, hogy mindez a keynesi elveknek gyökeresen ellentmond.

A *tisztább termelés* stratégiája eszközként jelenik meg a fenntartható fejlődés irányzatai közt. Khalili és társai (2015) és Ghisellinia és társai (2016) rámutattak, a tisztább termelés alapvetően erőforrás-hatékonysággal bír. A hulladék és károsanyag-kibocsátásának csökkentésével foglalkozik a termék és folyamattervezés vállalati szintű alkalmazása során. Támogatja az integrált és preventív környezeti stratégiákat, hogy egyensúlyt teremtsen a vállalat és a környezet között. Klemes (2012) alátámasztja, hogy a tisztább termelés egyre fontosabb eszköz lesz valamennyi ipari szereplő számára.

Genovese és társai (2015) tapasztalatai szerint a vállalatok egyre nagyobb hangsúlyt fektetnek a csővégi megoldásokon túl arra, hogy a teljes termék vagy szolgáltatás életciklusa során figyelemmel kísérjék és javítsák annak a gazdaságra, a környezetre és a társadalomra gyakorolt hatását. Itt említhető meg a *zárt ellátási lánc* elmélete. Bocken és társai (2014) szerint ez azt jelenti, hogy a vállalat törekszik az ellátási lánc működése során keletkező hulladék minimalizálására úgy, hogy a képződő anyagot újrahasználja, megjavítja vagy feldolgozza, ezzel is újabb hozzáadott értéket teremtve a vállalat vagy a fogyasztó számára. A zárt ellátási lánc a termék teljes élettartamára fókuszál, beleértve a termelés és a fogyasztás utáni részleges vagy teljes újrahasznosítást. Dobos (2008) különös figyelmet fordít a visszautas logisztika tanulmányozására. Ebben pontosan meghatározza a gyártási jellegű, elosztási és fogyasztói termék visszaküldéseket, és azok operatív, vállalaton belüli kezelését.

Su és társai (2013) szerint gyakori a „3R” elv⁴ vállalati szintű alkalmazása a termelési és fogyasztói rendszerekben. A „3R” elv jelentése a következőket tartalmazza: csökkentés – a vállalat minimalizálja a primer inputokat; újrafelhasználás – más vállalatok melléktermékét és hulladékát nyersanyagként felhasználja; valamint újrahasznosítás – a vállalat az újrahasznosítható anyagokat visszaforgatja a termelési rendszerbe csökkentve a primer nyersanyagigényt.

A természeti környezetbe ágyazott jelző használata indokolt, hiszen jól illusztrálja, hogy a vállalat a természeti környezetre tekintettel, azt tiszteletben tartva végzi munkáját. Kiss (2005) a természeti környezetbe ágyazott vállalatokat természetvezérelt vállalatoknak nevezi, ezzel az elnevezéssel azonban nem értünk egyet, mert a vállalati működés célja az emberi társadalom jólétének biztosítása. A természet egy zárt ökológiai rendszer, ami példát mutat a vállalat anyagáramlásának zárt módon történő működtetésére, ezért érdemes megvizsgálni a vállalatok természeti erőforrás alapú szemléletmódjának alakulását.

Elsőként fontos tisztázni, hogy a környezetgazdaság a környezetre forrásként és nyelőként tekinthet. Forrásként energiát és nyersanyagot biztosít a gazdaság és a társadalom számára. Az OECD (2014) kimutatása szerint jelenleg az OECD országok nyersanyag kitermelése és fogyasztása lassabban növekszik a globális értékhez képest és talán megállapodni látszik a jelenlegi szinten. Ezzel egyidejűleg az 1980-as szinthez képes 50%-kal növekedett a kibocsátás mennyisége egy tonna nyersanyag felhasználásából. Ebből az következik, hogy növekszik az anyaghatékonyság. Nyelőként megjelenik a hulladék problematikája függetlenül attól, hogy az energiát-, vagy a nyersanyagáramlást vesszük figyelembe. Az OECD (2014) becslése szerint a kitermelt nyersanyag hozzávetőleg egy ötöde végzi hulladékként. Rámutattak a tanulmányban a szilárd hulladék és a gazdasági növekedés lineáris kapcsolatára. Ahogy a gazdaság növekszik, úgy a szilárd hulladék mennyisége is azzal arányosan nő. Ez potenciális nyersanyagforrásként jelentkezik, mivel további felhasználásra alkalmas. A gazdaságban ragadt nyersanyagok mennyisége nagy jelentőséggel bír. Például 2011-ben az antropogén (ember által felhasznált) vaskészlet 15-20%-a a világon elérhető vaskészletnek. Dacára annak, hogy a kitermelt nyersanyag egyötöde végzi hulladékként, Ghisellinia és társai (2016) rámutattak, hogy a másodlagos erőforrások piaca és az újrahasznosítás mértéke lassan ugyan, mégis növekvő tendenciát mutat.

Genovese és társai (2015) munkájukban arról tesznek tanúságot, hogy a körforgásos gazdaság sem kivétel a termodinamika tételei alól. Tulajdonképpen az anyagok áramlása lineáris és egyirányú, felvéve egy alacsony entrópiájú anyagot a környezetből, és kibocsátva egy magas entrópiájú anyagot – a hulladékot. A környezettudatos vállalati viselkedés hatása az ellátási láncra abban nyilvánul meg, hogy a magas entrópiájú hulladék helyettesítőjeként az alacsony entrópiájú tiszta nyersanyagokat használja fel, állítja Andersen (2007) tanulmányában. Ez adja a természeti környezetbe ágyazott vállalatok

⁴„3R” elv elnevezés az alábbi három angol szó kezdőbetűjéből tevődik össze: reduce (csökkent), reuse (újrafelhasznál), recycle (újrahasznosít).

termelési rendszerének lényegét.

George és társai (2015) felidéznek, hogy a kapitalista piacgazdaság termelő-folyamatainak eredménye nem csak a végtermék, de a nem kívánatos hulladék is. Véleményük szerint a hulladékra gazdasági készletként kell tekinteni. Ezen hulladékok két féle kategóriába sorolhatók: szennyező és újrahasznosítható. Park és Chertow (2014) tanulmányában szintén *erőforrásként tekint a hulladékra*, amíg az ellenkezőjét be nem bizonyítják. Az okfejtést az erőforrás-paradigma fogalmi használatából eredeztetik. Ezzel szemben Sauvé és társai (2016) arra az álláspontra helyezkednek, hogy a vállalat lineáris termelési rendszerében értelmezett újrahasznosított hulladéknak nincs piaca és gyakran marad értékesítés nélkül, hiszen a vállalat változatlanul a könnyen elérhető és gyakran olcsóbb tiszta nyersanyagokat részesíti előnyben. A természeti környezetbe ágyazott vállalatok figyelmét ezzel szemben semmilyen anyag nem kerüli el. Ezen vállalatok arra törekednek, hogy minden inputot és outputot számításba vegyenek a termelési folyamat során, különös figyelmet fordítva az előforduló anyagok vállalaton belüli vagy kívüli kezelésére, hasznosítására.

Gazdasági szempontból, a természeti környezetbe ágyazott vállalatok nyereségessége vitatott. Sauvé és társai (2016) arra hivatkoznak, hogy az anyagok rendszerben tartásával járó többletköltség, ha elér egy bizonyos határt, akkor nem éri meg a vállalatnak újrahasznosítani. Andersen (2007) is megerősíti, hogy a természeti erőforrás szinte a kitermelés költségét tartalmazza eltekintve a kiaknázás és a környezeti károk költségétől, ezzel megkérdőjelezve az újrahasznosítás nyereségességét. Például Genovese és társai (2015) kutatásából kiderül, hogy a biodízel előállítás költségesebb, mint a hagyományos dízelé. Felhívják a figyelmet arra, hogy az állami támogatás bizonytalanná teszi a vállalatok életképességét. Gelderman és társai (2007) tapasztalatai szerint a kis és középvállalkozások (kkv) megtakarítási lehetőségei szerényebbek. A termelésükhöz szükséges anyagok nem érik el azt a kritikus mennyiséget, ahol megérné újrahasznosítani vagy újrafelhasználni a melléktermékeket. Ezért a vállalatközi kapcsolatok (pl. öko-park) nyújthatnak alternatív megoldást, melyekben közös tiszta termelési technológiákat alkalmaznak a kkv-k.

Sauvé és társai (2016) véleménye szerint addig érdemes zárt ellátási rendszerben gondolkodni, míg a társadalom igényt tart rá, és az hatékonyan működik. Magistris és Gracia (2016) tanulmányában bebizonyította, hogy a fogyasztók hajlandók prémium árat fizetni a helyben termelt termékekért. Ezen termékeken megkülönböztetett címke látható, mely tartalmazza az alábbi információkat: a termék származási helyétől való távolságot km-ben kifejezve, és az Európai Unió által elfogadott egyezményes „ökológiai logó”-t.⁵

Dobos (2008) szerint ugyanakkor a jogszabályi kötelezettség önmagában az üzleti szféra számára nem feltétlenül jelent kényszerítő erőt, hiszen – megfelelő rövid távú gazdasági haszon hiányában – sok esetben a vállalatok inkább a könnyebben megfizethető bírságot választják. Ugyanakkor a körforgásos gazdálkodás alkalmazása hosszútávon jelentős költségmegtakarítást

⁵Az EU ökológiai logóját a 2010. március 24-i 271/2010/EU bizottsági rendelet vezette be. Használatáról a 889/2008/EK bizottsági rendelet 57. cikke rendelkezik.

eredményezhet. Ebből az a következtetés adódik, hogy a vállalatok rövid távra terveznek.

Gelderman és társai (2007) munkájukban megemlítik, hogy a fenntartható termelési stratégiák vállalaton belüli alkalmazásához elengedhetetlen az innováció és a technológia menedzsment, mivel a technológia fejlődése új lehetőségeket kínál a készletek hatékonyabb termelésben való felhasználására. Munck (2016) szerint így a megfelelő technológia kiválasztása reagálni tud a környezetben végbemenő változásokra. Például a biofinomító konzerválja az energiát, visszaforgatja a bio-hulladékot, és tisztított vizet állít elő. Az ilyen típusú integrált fejlesztés biztosítja a társadalom alapvető szükségleteit, jelen esetben a tiszta vizet, az energiát, és a termékeny talajt. Az elérhető termelési technológiák gyors változásai szükségessé teszik a jövőben a termelési folyamatok rendszeres újratervezését.

Genovese és társai (2015) és Scheel (2016) szerint a természeti környezetbe ágyazott vállalatok az innovációnak köszönhetően fejlődtek ki, újszerű megoldásokat alkalmazva az üzleti szférában. Ezek bevezetéséhez a vállalatnak meg kell vizsgálnia termelési lehetőségeit, melyek függenek az input anyagoktól, azok minőségétől, a termelésben történő felhasználás milyenségétől. Mérlegelniük kell, hogy új technológiát alkalmaznak-e, vagy módosítanak a meglévő rendszeren, átgondolva, hogy milyen anyagok kerülnek kibocsátásra. A következő szakasz összefoglalja azon módszereket, melyek figyelembe veszik mind a gazdasági, mind pedig a környezeti szempontokat a természeti környezetbe ágyazott vállalatok esetében, különös figyelmet fordítva az anyagok áramlására és a melléktermékek kezelésére.

3 A fenntartható termelés vizsgálatának módszerei

Klasszikus értelemben a vállalatok költségminimalizáló és profitmaximalizáló szempontokat vesznek figyelembe mindennapi működésük során. A környezeti problémák megjelenésével, azonban elengedhetlenné vált a környezeti szempontok integrálása, és a termelés hatékonyságának növelése úgy, hogy a vállalat környezetre gyakorolt hatását minimalizálja. Számos kérdés még megválaszolásra vár. Többek között a természeti környezetbe ágyazott vállalatok esetében a képződő melléktermékek fenntartható módon történő kezelése, és termelési erőforrásként történő hasznosításuk lehetőségeinek feltárása. A jelen szakaszban arra keressük a választ, milyen módszertani megoldások találhatók a melléktermék imént említett kezelésére. Az 1. táblázat összegzi a fejezetben található módszereket és azok szakirodalmi hivatkozását.

Módszer	Termékhez kapcsolódó környezeti hatás vizsgálata	Vállalat termeléséhez kapcsolódó környezeti hatás vizsgálata	
		a termelés egészére	visszatérő termékekre
Többszempon­tú lineáris modell	Inghels és társai (2016)		
Nem-lineáris modell		Penkuhn és társai (1997)	
Pontrjagin-féle maximumelv			Dobos (2002)
Szimulációs modell			Ameli és társai (2016)
Hulladék alapú input- output modell		Li (2012)	
Általános egyensúlyi modell		Révész és Zalai (2014)	
Összevont mutató		Li és Su (2012) Park és Chertow (2014)	

1. táblázat. A melléktermékek hasznosítását alkalmazó módszerek összefoglalása, szakirodalmi hivatkozással

Inghels és társai (2016) a parkok karbantartása során keletkezett zöld hulladék (mint input) újrahasznosítási lehetőségeit vizsgálták egy zöld hulladék feldolgozó optimalizálásának segítségével. Tanulmányukban eltekintettek a feldolgozás során keletkező további melléktermékek vizsgálatától. Kutatásukban egy *többszempon­tú lineáris modellt* alkalmazva optimalizálták a gazdasági, a társadalmi és a környezeti hatásait annak, mi történik, ha a zöldhulladék kezelés nélkül a lerakóba kerül, vagy ha további kezeléssel hasznosítják. Az optimalizálás során a vállalat nyereségét és a társadalomra gyakorolt pozitív hatását maximalizálják, míg a környezetre gyakorolt negatív hatást minimalizálják. A tanulmányban az előbb említett szempontok megjelennek a célfüggvényben, mely a fenntarthatóság három pillérét veszi figyelembe: a nyereséget, a munkaerőt és a környezetet. A modell a bio-hulladék környezeti hatását a teljes életciklus (LCA) elemzés segítségével határozza meg. Ezt egy mutató összegzi (aggregálja), ami tartalmazza a zöld hulladék összetételét, a kezelés során szükséges teljes energiaszükségletet, és a levegő-talaj-talajvíz szennyezés csökkenésének mértékét. A célfüggvényben majd az aggregált mutató kerül megszorozásra az előállított termék mennyiségével. Az így kapott értéket normalizálják, és összehasonlítják az ország teljes környezeti hatásának értékével. Ebből lehet következtetni a vállalat működésére. A modellt GAMS-ben és Matlab-ban oldották meg a többszempon­tú vegyes egészértékű lineáris program (MOMILP) segítségével, ami egy Pareto-optimális halmazhoz vezetett.

Penkuhn és társai (1997) kutatásukban arra keresték a választ, hogyan lehet a feldolgozóipar meglévő termelőegységeit hatékonyabbá tenni, hogy a csővégi kibocsátások mérése helyett már a termelés során figyelemmel kísérjék a környezet megóvásához elengedhetetlen szempontokat. Az elemzéshez szükséges a termelőfolyamatok pontos ismerete, illetve az anyagok kémiai összeté-

tele is, hogy a minőségi szempontok figyelembe vehetőek legyenek. A szerzők termodinamikus egyensúlyi számításokat alkalmaznak, ami szükségessé teszi a *modell nem-linearitását*. A modell *döntési változói*: a termék, a légnemű kibocsátás, a felhasznált javak, a termelés során keletkezett hulladék, az inputok, valamint az egyéb javak áramlása egységnyi működés esetén (kg/óra mértékegységben kifejezve). A modell *paramétere*i között megjelenik: az anyagmozgatás költségigénye; a karbon-adó; az újrahasznosítás vagy lerakás egységnyi költsége, az inputnak, egyéb javaknak; a hőmérséklet; a kémiai komponensek tömege; a sztöchiometriai (kémiai vegytan) együttható az i -edik folyamatban; a j -edik egységben zajló kémiai reakció mértéke; az egységek közti energiaáramlás; a kémiai összetevők hőkapacitása; és egységnyi reakció entalpiája. Az imént említett döntési változók és paraméterek segítségével egy általános termelés-tervezési modellt alkottak meg a szerzők. A célfüggvény a profit maximalizálást tartalmazza a közvetlen bevételekkel és a változó költségekkel, ugyanakkor figyelmen kívül hagyva a fix költségeket, mivel azok a rövid távú döntéseknél nem relevánsak. A célfüggvény tartalmazza továbbá az újrahasznosítás és a lerakás költségét is, figyelembe véve a környezeti szempontokat. Ezt követően 12 feltétel határozza meg a vállalat és egyben a modell működését, melyek közül az utolsó három a kibocsátásra és a lerakásra vonatkozó piaci korlátokat tartalmazza. A döntési változóknál alsó és felső korlátokat határoztak meg a szerzők, a termelő rendszerek műszaki kapacitás korlátaiból adódóan. A modellt az ASPEN PLUS software segítségével tesztelték az ammónia szintézis folyamata során.

Dobos (2002) kutatásában egy egy-termékes termelő vállalat termelésének környezetre gyakorolt hatását vizsgálta, ahol egy használat után visszaszolgáltató terméket, illetve egy nem-felhalmozódó emissziót vett figyelembe. Feltételezése szerint a visszautas terméket háromféle módon kezelheti a vállalat: újrahasznosítja, szétszerelt állapotában termelési tényezőként használja, vagy hulladékként kezeli. A modell feltételezi továbbá, hogy a vállalat nyereségmaximalizáló tevékenységet folytat. A megoldáshoz a *Pontrjagin-féle maximumelvet* alkalmazza a szerző. A modellalkotás során három állapotváltozót (termelési tényező, végtermék és a visszaérkező használttermékek készletállománya) és tíz irányítási változót vett figyelembe, megvizsgálva a készlet-szinteket befolyásoló változók hatását. A nyereséget modelljében a bevétel és a lineáris költségek különbségként értelmezi, melyben a költségek tartalmazzák a beszerzési költséget, a szennyezési adót, a hulladékkezelési költséget és a raktárak készletezési költségeit. A szerző a vállalat készletszintjére helyezi a hangsúlyt, és az újrafelhasznált termékek arra gyakorolt hatását vizsgálja, illetve pontosan tisztázza az újrafelhasználás technológiai feltételeit leíró implicit termelési függvények viselkedését. Meghatározza továbbá a „belső árakkal” definiált maximalizálási problémával, hogy a vállalatnak kedvezőbb-e a visszaérkező terméket újra feldolgozni és termelési tényezőként felhasználni, vagy inkább újra feldolgozott végtermékként értékesíteni. A modellben a természeti erőforrás felhasználásának mennyiségét a nyereségesség szabályozza, míg a környezetbe történő szennyezőanyagok kibocsátásának mértékét a szennyezési adó korlátozza. Arra, hogy az újrafeldolgozott vég-

terméket és a vállalatához visszakerült szétszerelt, javított termékeket vagy a nyersanyagot használja fel a vállalat, a későbbiekben a „belső árak” meghatározása ad választ.

Dobos (2008) későbbi munkájában az *anyagszükséglet tervezési rendszert* (material requirements planning, MRP) kívánja kibővíteni az újrahasznosítással, újszerű ismereteket adva a vállalati termelés-tervezés keretei között. Tanulmányának egy része a már korábban említett visszautas logisztika optimális tétel nagyságát folytatja. Ebben a cikkben a szerző ugyanakkor kitér a visszautas logisztika termelés-tervezésben betöltött fontos szerepére is. A szerző megjegyzi, hogy a végtermék előállításánál különböző melléktermékek is keletkeznek, amik a termelésből nem zárhatók ki. Ezeket a javakat azonban nem tüntetik fel a termelési tervben. A szerző véleménye szerint a keletkező melléktermékek csökkentését a tervezés melléktermékekkel történő kiterjesztésével lehet elérni. Dobos (2008) ezen felismerése a jelen szakirodalmi áttekintés szempontjából jelentős, hiszen ha a gyártás során keletkezett melléktermékek nem kerülnek feltüntetésre a termelési tervben, azok hasznosítási lehetőségeinek feltárása lehetetlenné válik, hisz a vállalatok nem is tudnak azok létezéséről.

Ameli és társai (2016) munkájában a fenntarthatósági szempontok figyelembevételével tervezett termékek fontosságát vizsgálja, ahol már a tervezés során figyelembe veszi az életút végi újrahasznosítás lehetőségeit. A szigorodó környezetvédelmi törvények szükségessé teszik a termék környezetre gyakorolt negatív hatásának csökkentését. A visszautas termék és alkatrészeinek karbon tartalmát a GaBi LCA software segítségével állapítják meg a szerzők, a környezetre gyakorolt hatás számszerűsítése érdekében. A modellben egy *döntést segítő szimulációs modellt* alkalmaznak. Négy megoldást javasol a visszautas termékekre: az újrafelhasználást, a feldolgozást, a hasznosítást és a lerakást. A modell az időt is figyelembe veszi, a visszaküldött termék esetében. Ha a használati idő lejárt után küldik vissza, akkor rögtön lerakásra kerülnek, azonban ha jóval később, nem fogadják be azokat. A termék jövőbeli hatásának értékeléséhez a paraméterek négy tényező meghatározásával írhatók le: a használat időtartamával, a visszaszolgáltatás időpontjával, a visszautas termék minőségével és az újrahasznosításból származó bevétellel. A modell pénzben fejezi ki a szétszerelt termék részeinek árát, a viszonteladásból származó bevételt, a termék feldolgozásából, illetve az újrahasznosításból származó bevételt, valamint a lerakás költségét. A paraméterek véletlenszerűségének eloszlásához méréseket kell végezni, ami beépítésre kerül a modellbe. Az első célfüggvény maximalizálja a profitot, mely tartalmazza az új termék eladásából származó bevételt és a visszahozott termékek, újrahasznosításából származó bevételeket. Ez utóbbi alatt értendő a viszonteladás, az újrafelhasználás, és bizonyos részek hasznosítása. A második célfüggvény teljesülésével a termék környezetterhelése csökken. A szerzők meghatározták a további feltételes egyenletek között egy újrahasznosítási korlátot, ami az adott jogi szabályozás hatására változik. Egyéb feltételeket is felírtak a modell futásához, például ha a vállalat j elemet újrahasznosításra jelöli, akkor ahhoz a modell automatikusan biztosít további termelési tényezőket a termék

előállításához. A szerzők által javasolt modell egy *két kritériumú sztochasztikus egészértékű optimalizációs* modell, ahol célként szerepel a nyereség maximalizálása, és a termék környezeti hatásának csökkentése figyelembe véve az aktuális jogi szabályozásokat. A modell futását követően kapott eredmény értelmezésében, egy szimulációs modell segíti a továbbiakban a döntéshozót. A modell működését egy nem létező vállalat mobiltelefont visszaszolgáltató esettanulmányán keresztül szemléltetik a szerzők.

Li (2012) munkájában a körforgásos gazdaság szemléletmódjában tevékenykedő vállalatok hatékonyságát kívánta bemutatni egy *hulladék alapú input-output* modell segítségével. Kidolgozott egy olyan módszertant, ahol az egyik tevékenységből kiáramló melléktermék, egy másik tevékenységben inputként történő felhasználását mutatja meg. Azt feltételezi, hogy vállalati szinten két termék létezik: a végtermék és a hulladék. A hulladék lehet légnemű szennyező vagy szilárd hulladék. Az előbbit mennyiségben, míg az utóbbit költségben fejezi ki a modell, ami ez esetben az eltakarítás, vagy Zalai (2012) kifejezésével élve a lomtalanítás költségét jelenti. A modell nem számol technológiai választékkal, azért lehetséges az input-output tábla használata. A hulladék alapú input-output tábla minden tevékenységnél megmutatja, mi történik a vállalatban belül keletkezett szennyezőanyaggal vagy szilárd hulladékkal, illetve ha nem a szilárd hulladék került felhasználásra, akkor megmutatja a vásárolt termelési tényező mennyiségét. Mindemellett a modell tevékenységenként meghatározza a szennyezőanyag keletkezésében és fogyasztásában beállt változás mennyiségét. A modell jól megragadja az anyag áramlását a rendszerben, illetve a hasznosítatlan melléktermék mennyiségét és annak változását.

Révész és Zalai (2014) kutatásukban *számított általános egyensúlyi modellt* (CGE) alkalmaznak, azt kibővítve egy energetikai és egy környezeti modullal (GEM-E3). Ez a modell elsősorban makro-, de mikro-szintű folyamatok vizsgálatára is alkalmas, figyelembe véve a stacionárius végállapot kiszámítását, illetve az odáig elvezető dinamikus folyamatokat. Ezt a modellt széles körben használják energetikai-, környezeti-, és gazdaságpolitikai intézkedések hatásainak elemzésére. A modell feltételezi a költségek minimalizálását és a hasznok maximalizálását. Abban tér el a CGE modelltől, hogy egyes ágazati bontások a szokásosnál részletesebbek. Például az energiaszektor alatt megjelenik a szénbányászat, a gázszolgáltatás, és az olajipar stb. A modell figyelembe veszi a levegőszennyezést, az energiát és más erőforrásokat, illetve az egyes energiahordozók egymás közötti helyettesíthetőségeit, a kibocsátást csökkentő technológiákat, valamint kibocsátásra előírt adókat és hatósági korlátokat. A szerzők részletes műszaki adatok alapján és lineáris tevékenységelemzési modellen (LTM) nyugvó optimalizálást alkalmazó részmoddellel bővítik ki és kapcsolják össze a CGE modellt. Ez azért indokolt, mert így a modell feltételezi a termelési tényezők folytonos helyettesíthetőségét, míg aggregált ágazati termelési és költségfüggvényeket alkalmaz. Az ismertett modellt a paksi erőmű makrogazdasági, energetikai és környezeti vizsgálatán keresztül mutatta be a szerzőpáros.

Li és Su (2012) kidolgozott egy értékelési mutatót annak megítélésére, mennyire követi a vállalat a körforgásos gazdálkodás elveit. A tanulmány célja számszerűsíteni a készletcsökkentés, az újrahasznosítás, az újrafelhasználás, a kibocsátás és a hatékonyság mértékét. A szerzők egy *összevont (aggregált) mutató* segítségével kívánják meghatározni a körforgásos gazdálkodás vállalaton belüli értékelését. A mutató az alábbi két szint összevonásából tevődik össze: az első szint tizenhét mutatót tartalmaz, mely öt kritérium értékét határozza meg. Végül az öt kritérium összege adja meg az összevont mutató értékét. A mutató célja: meghatározni a körforgásos gazdaság vállalaton belüli fejlettségi szintjét. A jelen tanulmányban az öt kritérium az alábbi szempontokat tartalmazza: a gazdasági fejlettséget, az erőforrás igényt, a szennyezés csökkenését, az ökológiai hatékonyságot, és a fejlődési potenciált. Ezeket további mutatókra bontja a szerző. A tanulmányban összesen 18 mutató van, azonban ez tetszőlegesen tovább bővíthető. Az erőforrásigény kritériuma alatt értendő például az egységnyi ipar kibocsátására vetített víz-, és energiafelhasználás, az ipari szilárd hulladék hasznosítása, az ipari vízfelhasználás újrahasznosítási mértéke. Míg a fejlődési potenciál kritériuma tartalmazza például a teljes ipar kibocsátásához mért technológiai befektetések mértékét, a tőke akkumulációs rátáját és az értékesítés növekedésének rátáját. Utolsó lépésként a szerzőpáros az összevont (aggregált) mutató meghatározásához standardizálja a mutatókat, elosztva a kapott értéket az átlagértékkel, majd ezt követően a mutatókat súlyozza 0-1 érték között fontosságuktól függően (becsült érték). Ezután a standardizált mutató és a súly értéke összeszorozásra kerül, ami kiadja az összevont mutató 0-1 közötti értékét. A kapott érték alapján besorolható a vállalat egy négy pontos skálán, mely megmutatja, hogy alig vagy kiválóan alkalmazza a körforgásos gazdaság stratégiáját.

Park és Chertow (2014) kidolgozta az *újrahasznosítás lehetőségének indikátorát*, ami megkísérli objektíven meghatározni a technikailag maximálisan felhasználható anyagok (ez esetben hulladék) mennyiségét. A hulladék gyakran lerakókba kerül, mert nincs használható tudásunk azok hasznosítási lehetőségeiről. Ezért ennek a technológiai innovációk szabnak határt. A szerzők az újrahasznosítás lehetőségének indikátorát egy 0-1 közötti skálán fejezik ki, megmutatva az anyagban rejlő további lehetőségét. A nulla azt jelenti, hogy a jelenlegi technológiai fejlettség szintjén az anyag nem hasznosítható újra; míg az 1-es érték esetén az anyag 100%-a újrahasznosítható. A szerzők a jelenleg elérhető technológiákat hasonlítják össze egymással, melyet egy diagramon ábrázolnak. A vertikális tengelyen jelenik meg a felhasználásból keletkezett jövedelem és a hulladékkezelés költségének különbsége, míg a horizontális tengelyen az újrahasznosítható anyag kerül ábrázolásra tonnában kifejezve. A kapott eredmények diagramon történő megjelenítéséből kiderül, hogy vajon nyereséges-e az adott technológia esetében a vállalatnak újrahasznosítani vagy sem. Az indikátor egyszerűen arányosítja az adott technológiával a felhasznált hulladék mennyiségét a teljes rendelkezésre álló hulladék mennyiségéhez. Ez adja meg a 0-1 közötti értéket. A tanulmány tartalmaz gazdasági számításokat, azonban eltekint a helyettesítő termékek beszerzési árának ingadozásától és a szállítás költségétől. Ezek azonban jelentősen befolyásolják

az újrahasznosítás nyereségességét. Az indikátor hiányossága továbbá, hogy figyelmen kívül hagyja a hulladék összetételét és a technológia időben történő változását, illetve a regionális különbségekből adódó eltéréseket sem kezeli. Ennek ellenére, az indikátor alkalmas a vállalaton belüli javulás mértékének nyomon követésére.

4 Összegzés

A szakirodalmi áttekintő lehetőséget adott egy új vállalati szemléletmód bemutatására, ahol az anyag-, illetve a természeti erőforrás hatékony felhasználása a cél, a környezet állapotának hosszú távú megóvása érdekében. Megállapítottuk, hogy a kék gazdaságról kevés publikáció született, mivel annak elméleti háttére átfedésben van a körforgásos gazdasággal. A bemutatott cikkek alapján úgy tűnik, hogy egyre szélesebb körben terjed a környezettudatos, erőforrás alapú vállalati szemléletmód, amely lehetőséget lát a hulladék újrahasznosításában, ugyanakkor a termelési tervben alig kerül feltüntetésre a hulladék, és ez megnehezíti annak hasznosítási lehetőségét. Nem szabad figyelmen kívül hagyni, hogy a hulladék újrahasznosítási lehetőségeinek az elérhető technológia szab elsősorban határt. Elmondható továbbá, hogy minden vállalati tevékenység mögött racionális gazdasági érvek szerepelnek. Ezt igazolja az is, hogy az egyre szigorodó környezetvédelmi szabályok betartása tette szükségessé a környezeti szempontok integrálását a tervezésbe. A szakirodalmi kutatásból kiderül, hogy kevesen vizsgálták a termelés során keletkezett melléktermék újrahasznosítási lehetőségeit.

A gyártók és kereskedők kénytelenek ráébredni arra, hogy a melléktermékek kezelésének szabályozása veszélyezteti jövedelmezőségüket és versenyképességüket. Ezért egy jól kidolgozott modell stratégiai jelentőségűvé válhat jövőbeli üzletpolitikájuk szempontjából. További vizsgálatokat javasunk a szakirodalomban alig kutatott, gyártás során keletkezett melléktermékek vállalaton belül történő hasznosításának vagy vállalatok közötti értékesítésének lehetőségéhez, melyhez Penkuhn és társai (1997) és Dobos (2002) eddigi munkássága biztos alapot teremt.

Irodalom

1. Ameli, M., Mansour, S., és Ahmadi-Javid, A. (2016): A multi-objective model for selecting design alternatives and end-of-life options under uncertainty: A sustainable approach. *Resources, Conservation and Recycling*, 109, 123–136.
2. Andersen, M. S. (2007): An introductory note on the environmental economics of the circular economy. *Sustainability Science*, 2, 133–140.
3. Benyus, J. M. (1997): *Biomimicry: Innovation Inspired by Nature*. New York, Harper Collins Publishers Inc.
4. Bihari P. (2012): *Műszaki hőtan*. Budapest, EDUTUS Főiskola.
5. Bocken, N. M. P., Short, S. W., Rana, P., és Evans, S. (2014): A literature and practice review to develop sustainable business model archetypes. *Journal of Cleaner Production*, 65, 42–56.

6. Dobos I. (2002): Környezetvédelmi tevékenység egy dinamikus termelési modellje. *Sigma*, 32, 3-4, 131–140.
7. Dobos I. (2008): Visszautas logisztika és termelésstervezés. *Sigma*, 39, 3-4, 139–167.
8. Eurostat (2016): File: Development of material consumption, 2000-15 (tonnes per capita) YB16 II.png. Letöltve 2016.07.21. <http://ec.europa.eu/eurostat/statistics-explained/index.php>
9. Geldermann, J., Treitz, M., és Rentz, O. (2007): Towards sustainable production networks. *International Journal of Production Research*, 45, 18-19, 4207–24.
10. Genovese, A., Acquaye, A. A., Figueroa, A., és Koh, A. C. L. (2015): Sustainable supply chain management and the transition towards a circular economy: Evidence and some applications. *Omega*, javított-rögzített változat
11. George D. A. R., Lin B. C., és Chen Y. (2015): A circular economy model of economic growth. *Environmental Modeling és Software*, 73, 60-63.
12. Georgescu-Roegen N. (1971): *The entropy law and economic processes*. Harvard University Press, Cambridge, Mass.
13. Ghisellinia, P., Cialanib, C., és Ulgiatic S. (2016): A review on circular economy: the expected transition to a balanced interplay of environmental and economic systems. *Journal of Cleaner Production*, 114, 11–32.
14. Inghels, D., Dullaert, W., és Bloemhof, J. (2016): A model for improving sustainable green waste recovery. *Resources, Conservation and Recycling*, 110, 61–73.
15. Jaehn, F. (2016): Sustainable Operations. *European Journal of Operational Research*, 253, 243–264.
16. Khalili, N. R., Duecker, S., Ashton, W., és Chavez, F. (2015): From cleaner production to sustainable development: the role of academia. *Journal of Cleaner Production*, 96, 30–43.
17. Kiss T. (2005): Nature-Driven Economy through Sustainable Communities. *World Futures: The Journal of New Paradigm Research*, 61(8), 591–599.
18. Klemes, J. J., Varbanov, P. S., és Huisingh, D. (2012): Recent cleaner production advances in process monitoring and optimization. *Journal of Cleaner Production*, 34, 1–8.
19. Li, S. (2012): The research on quantitative evaluation of circular economy based on waste input-output analysis. *Procedia Environmental Sciences*, 12, 65–71.
20. Li, R. H. és Su, C. H. (2012): Evaluation of the circular economy development level of Chinese chemical enterprises. *Procedia Environmental Sciences*, 13, 1595–1601.
21. Liu, Y. és Bai, Y. (2014): An exploration of firms' awereness and behavior of developing circular economy: An empirical research in China. *Resources, Conservation and Recycling*, 87, 145–152.
22. de-Magistris T. és Gracia A. (2016): Consumers' willingness-to-pay for sustainable food products: the case of organically and locally grown almonds in Spain. *Journal of Cleaner Production*, 118, 97–104.
23. McDonough, W. és Braungart, M (2002): *Cradle to Cradle: Remaking the Way We Make Things*. North Point Press, New York.
24. Munck, L. (2016): Sustainable grain production and utilization. *Encyclopedia of Food Grains* (Second edition), 4, 144–153.

25. OECD (2014): Material resources, productivity and the environment: Key findings. Letöltve 2016.06.12. http://www.oecd.org/greengrowth/material-resources-productivity-and-the-environment_key-findings.pdf
26. Park, J. Y. és Chertow, M. R. (2014): Establishing and testing „reuse potential” indicator for managing wastes as resources. *Journal of Environmental Management*, 137, 45–53.
27. Pauli, G. (1997): Zero emissions: The ultimate goal of cleaner production. *Journal of Cleaner Production*, 5, 1-2, 109–113.
28. Pauli, G. (1998): Technology Forecasting and Assessment: The Case of Zero Emissions. *Technological Forecasting and Social Change*, 58, 1-2, 53–68.
29. Penkuhn, T., Spengler, Th., Püchert, H., és Rentz, O. (1997): Environmental integrated production planning for the ammonia synthesis. *European Journal of Operational Research*, 97, 327–336.
30. Rahim, R. és Raman. A. A. A. (2015): Cleaner production implementation in a fruit juice production plant. *Journal of Cleaner Production*, 101, 215–221.
31. Révész T. és Zalai E. (2014): Egy gazdaság-energia-környezet kapcsolatok elemzésére alkalmazott általános egyensúlyi (GEM-E3) modell felépítése és alkalmazása. *Sigma*, XLV, 1-2, 23–55.
32. Sauvé, S., Bernard, S., és Sloan, P. (2016): Environmental sciences, sustainable development and circular economy: Alternative concepts for trans-disciplinary research. *Environmental Development*, 17, 48–56.
33. Scheel, C. (2016): Beyond sustainability. Transforming industrial zero-valued residues into increasing economic returns. *Journal of Cleaner Production*, 131, 376–386.
34. Su, B., Heshmati, A., Geng, Y., és Yu, X. (2013): A review of the circular economy in China: moving from rhetoric to implementation. *Journal of Cleaner Production*, 42, 215–227.
35. Zalai E. (2012): *Matematikai közgazdaságtan II. – Többsetektoros modellek és makrogazdasági elemzések*. Akadémiai Kiadó, Budapest.

LITERATURE REVIEW ON COMPANIES EMBEDDED IN NATURE AND THEIR PRODUCTION METHODOLOGIES

The study reviews characteristics of companies embedded in nature while detailing relevant sustainable development theories. It advocates the resuscitation of different resource management paradigms and the essential role of technology and innovation. At last, the study will overview several models methodologies which could serve as a reference in the future for researching companies embedded in nature. In conclusion the study has revealed that sustainable development theories are often overlapping and methodologies are seldom taking into consideration the utilization of by-products within or outside of the company.

Keywords: sustainable development theories, natural resources, by-products, wastes, optimizations, models.

CONTENTS

HAVRAN, DÁNIEL – SZŰCS, BALÁZS ÁRPÁD: Market Maker Behavior with Hedging on Inter-dealer Markets	1
BOROS, PÉTER: Credit Valuation Adjustment – Adding the Collateral Haircut to the Model	31
ÁGOSTON, KOLOS CSABA – NYÍRI, JÁNOS: Cutting Stock Problem with the Possibility of Welding	47
HARTUNG, KATALIN: Literature Review on Companies Embedded in Nature and Their Production Methodologies	63

TARTALOM

HAVRAN DÁNIEL – SZŰCS BALÁZS ÁRPÁD: Árjegyzői viselkedés belső kockázatosztás mellett	1
BOROS PÉTER: Hitelértékelési kiigazítás – a fedezeti haircut modellbe illesztése ..	31
ÁGOSTON KOLOS CSABA – NYÍRI JÁNOS: Hegesztéssel kombinált csővágási feladat	47
HARTUNG KATALIN: Természeti környezetbe ágyazott vállalatok, és termelésük módszertani szakirodalmának áttekintése	63

SZIGMA

Matematikai-közgazdasági folyóirat

A Gazdaságmodellezési Társaság lapja

Főszerkesztő:

BESSENYEI ISTVÁN

PTE Közgazdaságtudományi Kar, H-7622 Pécs, Rákóczi út 80.

Tel.: 72/501-599, Fax: 72/501-553

e-mail: essenyei@ktk.pte.hu

Társszerkesztők:

FÜLÖP JÁNOS

e-mail: fulop@oplab.sztaki.hu

HUNYADI LÁSZLÓ

e-mail: laszlo.hunyadi@office.ksh.hu

KOMLÓSI SÁNDOR

e-mail: komlosi@ktk.pte.hu

KOVÁCS ERZSÉBET

e-mail: erzsebet.kovacs@uni-corvinus.hu

VÍZVÁRI BÉLA

e-mail: vizvari@cs.elte.hu

Szerkesztőbizottság:

CSERHÁTI ILONA, FORGÓ FERENC, LIGETI CSÁK, MELLÁR TAMÁS,
MESZÉNA GYÖRGY, SISAKNÉ FEKETE ZSUZSA, SZÉP KATALIN,
TEMESI JÓZSEF, VÖRÖS JÓZSEF

Terjeszti a Gazdaságmodellezési Társaság. A kiadvány megjelenését az MTA
Könyv- és Folyóiratkiadó Bizottsága támogatta.

ISSN 0039-8128

www.sigma.ktk.pte.hu