

## TERVEINKRŐL

A Gazdaságmodellezési Társaság 2014. szeptember 15-i vezetőségi ülésén döntés született a Szigma folyóirat szerkesztési koncepciójának módosításáról, a hazai szakmai közösség igényeihez történő további közelítés érdekében. Ennek megfelelően folyóiratunk továbbra is nyitott az egyes doktori iskolák hallgatói által írt tanulmányok megjelentetése iránt. Egyúttal felhívjuk a figyelmet, hogy az MTA Gazdaságtudományi Doktori Minősítő Bizottsága által „A” kategóriába sorolt lapról lévén szó, a Szigmában megjelenő cikkek értékelési pontszáma mind az egyetemeken, mind az Akadémián magas.

Az eddig általánosságban követett gyakorlattól eltérően a Szigma nagyobb teret szeretne adni a legfeljebb 5 oldal terjedelemben megírt rövid közleményeknek (short communication). Az önálló, új tudományos eredmény azonban ebben az esetben is elvárás.

További tervünk az egyes szakterületeken az utóbbi évek során bekövetkezett fejlődést bemutató, irodalmi áttekintő jellegű cikkek (review paper) közlése. Fontosnak tartjuk ugyanis az irodalmi kutatómunka eredményeinek szakmai közösségen belül történő közvetlen megosztását.

A Szigma Szerkesztőbizottsága reméli, hogy e módosítások révén folyóiratunk még több segítséggel tud majd szolgálni a hazai kutatómunkában részt vevőknek. Ehhez várjuk Olvasóink segítségét szerzőként és lektorálásra felkért szakértőként egyaránt.

Bessenyei István  
főszerkesztő

## AUGUSZTINOVICS MÁRIA (1930–2014)

Ismét eltávozott közülünk egy nagy egyéniség. Csak nemrég volt, hogy a közgazdász-szakma búcsúztatta Bródy Andrást, s most ismét egy pótolhatatlan veszteség ért bennünket, Augusztinovics Mária, Guszti halálával. (Az olvasó ne tekintse a Guszti becenév említését sem tiszteletlenségnek, sem túlzott bizalmaskodásnak, hiszen aki valaha is valamilyen szakmai kapcsolatba került vele, az megtapasztalhatta, hogy a közvetlen kapcsolat kialakítása érdekében éppen ő bátorított mindenkit, hogy használja a becenevét.)

Augusztinovics Mária 1952-ben végzett a Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetemen, ezt követően először a Pénzügyminisztériumban, majd pedig az Országos Tervhivatalban dolgozott. Kandidátusi értekezését a forradalom évében, 1956-ban védte meg. Ezek a szikár tények azt sugallhatják a tájékozatlan olvasó számára, hogy bizonyára egy „vonalas szocialista káder” búcsúztatásáról lesz szó. Akik viszont valamelyest is ismerték Gusztit és netán találkoztak is vele, meggyőződhetnek arról, hogy a felszínes információk mennyire csalókák tudnak lenni. Mert aki vele bármilyen kapcsolatba is került, legalább három dologról meggyőződhetett: egyrészt a nyitottságról és a minden feltétel nélküli segítőkészségéről, másrészt a széles szakmai látóköréről és harmadrészt pedig a minőség és a szakmai színvonal iránti erős elköteleződéséről. Soha semmilyen körülmények között nem vált semmilyen ideológia vagy irányzat kiszolgálójává, egész lényével a tudományosan megalapozott és igazolt összefüggéseket kereste. Kisugárzó egyénisége szinte senkit nem hagyott közömbösen. Emlékszem, hogy egy-egy konferencia szünetében hányszor álltuk körbe, kíváncsian vártuk a véleményét az aktuális szakmai problémákról, s még az sem riasztott el bennünket, hogy közben nyelnünk kellett a cigarettafüstöt, mert szenvedélyes dohányos volt.

Nem kereste az olcsó népszerűséget, nem állt be egyik politikai szekértábor szakértői csapatába sem. Talán éppen ennek a hajlíthatatlan, elvszerű magatartásának tudható be, hogy nem kapott annyi hivatalos elismerést, mint amennyit megérdemelt volna. Kicsit megkésve, nyolcvanéves korában, 2010-ben kapta meg a Széchenyi díjat. Jóllehet őt sohasem érdekelték a hivatalos elismerések, mégis nagyon fájó volt tudomásul venni – no nem neki, hanem nekünk a tudományos közösség tagjainak – hogy az 1980-ban megszerzett közgazdaság-tudományok doktora cím megszerzését nem követte az MTA tagsága. A jeles tudományos társaság nem látta indokoltnak maga körébe invitálni Augusztinovics Máriát. Persze értékelhetjük ezt úgy is, hogy egy valóban autonóm egyéniség, aki nem akarja egyik közgazdasági iskola korlátait sem magára venni, az nem számíthat sok pártfogóra. Szerencsére őt sokkal jobban érdekelték a tanítványok és a tudományos műhelyek munkája, mint a hivatalos vélekedések. S ezért hatása is nagyobb volt, mint némely akadémikusnak, minden bizonnyal az MTA tagság nélkül is sokan fognak rá jó szívvel emlékezni, és a nagyszámú tanítványa gyakran hivatkozik majd tudományos elemzéseire.

Augusztinovics kutatómunkája két nagy témakörbe sorolható. Tudományos pályájának első felében a pénzülmélettel és a népgazdasági tervezéssel foglalkozott. Ennek kapcsán igen sokat tett az input-output modellek használatának és elterjesztésének területén. A szocialista gazdaság pénzforgalmi modellje című kandidátusi értekezése nemcsak a maga korában volt úttörő jellegű, hiszen a szocialista-kommunista felfogásban a pénznek és az ezzel kapcsolatos modelleknek nem nagy becsülete volt, a természetes tervezés dominanciája miatt. De még mai szemmel is előremutatónak tekinthető, hiszen olyan kérdéseket feszegetett, mint a tőke- és hitelmérlegek, valamint a stock és a flow összefüggések kérdésköre. A mai főirányú makroökönómia egyik komoly hiányossága éppen az, hogy nem helyez kellő hangsúlyt a stock-flow kapcsolatokra és többek között ezért sem tudja megragadni a gazdaság dinamikus mozgásának a lényegét. (A manapság oly divatos impulzus-válasz elemzés, az egyensúlyi pályáról külső sokkok hatására való letérés és visszatérés modellezése nyilván nem tekinthető autentikus dinamikus közelítésmódnak.)

Módszertani szempontból is kiemelkedő jelentőségű munkát végzett: a Pénzforgalmi Kapcsolatok Mérlegének megalkotásával ugyanis az input-output technikát alkotó módon használta a pénzügyi kapcsolatok vizsgálatában. Matematikai felkészültsége alapján válhatott volna akár mainstream közgazdásszá is a rendszerváltozás után, hiszen a módszertanilag legigényesebb makro- és mikroterületeken egyaránt helyt tudott volna állni. De ő nem a könnyen elérhető siker alapján választotta kutatási témáit. Számára a matematikai modellezés és módszertani közelítésmód sohasem volt öncél, mindig a vizsgálandó feladatnak megfelelően használta ezeket az eszközöket, szigorúan csak annyit, amennyi szükséges volt. Soha sem a matematikai módszerhez keresett közgazdasági alkalmazási területet, hanem a számára fontos közgazdasági terület elemzéséhez választott adekvát vizsgálati eszközöket a módszertani arzenálból.

Augusztinovics Mária másik meghatározó kutatási területe, amellyel főként 1984 után – az MTA Közgazdaságtudományi Intézetébe való kerülése után – foglalkozott, s amely alapján vált igazán közismertté, az a nyugdíjrendszerek vizsgálata, az emberi életpálya közgazdasági modellezése. Tagja volt a 2007 és 2010 között működő Nyugdíj- és Időskorú Kerekasztalnak. Ez a szakértőkből összeállt műhely igen sokat tett annak érdekében, hogy felhívja a közvélemény figyelmét a nyugdíjrendszerünk anomáliáira és hosszú távon való fenntarthatatlanságára. A Kerekasztal arra is jó példát adott, hogy miként lehet egymás mellé leültetni bal- és jobboldali irányultságú szakértőket egy közös, az egész országot érintő probléma megoldásának keresésére. Talán nem véletlen, hogy Guszti volt ennek az egész szerveződésnek a motorja, hiszen az ő egyéniségéből áradt a másokra való figyelés, tolerancia, az együttgondolkodás, a konstruktív együttműködés őszinte szándéka. Nagy kár, hogy nem követték ezt a jó példát más területek, és hogy mára már teljesen illuzórikussá vált ilyen paritásos szakmai műhelyek létrehozása.

A magyar nyugdíjrendszer fenntarthatósága tekintetében nem azt tartotta alapvető problémának, hogy az előregedő társadalom miatt egyre kedvezőtlenebb lesz a munkaképes korúak és a nyugdíjasok aránya, mert valójá-

ban ez az arány nem romlott számottevően az elmúlt évtizedekben. Hanem sokkal inkább azt, hogy alacsony a foglalkoztatási ráta és a bérjövodelemk színvonala. Megállapítása szerint az adott magyar foglalkoztatási és jövodelemi viszonyok mellett a mai aktív korúak nagy részének nagy valószínűséggel nem képződik elégséges többletmeztakarítása a nyugdíjas évekre. Amennyiben ezek a trendek tartósak maradnak, akkor 2050-re az átlagos nyugdíj az átlagos jövodelemnek csak töredéke, 10-20%-a lesz.

A súlyos problémák megoldására Guszti egy három pilléren álló nyugdíj-rendszert javasolt. Az első pillér az adókból finanszírozott alapnyugdíj, amely a társadalmi szolidaritás alapján, állampolgári jogon mindenkinek járna. A második pillért a kötelező munkanyugdíj adja, amelyben a járadék alapját szigorúan a befizetett járulékok határozza meg. És végül a harmadik pillér az önkéntes, magánnyugdíj, amely az érintett felek megegyezése alapján alakul. A javasolt hárompilléres rendszert lehet és kell is bírálni, de meggyőződés szerint megkerülni semmiképpen nem lehet. Mert bizonyos, hogy a magyar társadalomnak valamit kell kezdeni azokkal az emberekkel – akiknek a száma nem szűkül, hanem inkább bővül –, akik az életük során, ilyen vagy olyan okok miatt nem tudtak elégséges nyugdíjalapot összegyűjteni. S ugyancsak rendezni kellene azt az áldatlan állapotot, hogy a munkanyugdíjak tekintetében a mai rendszerben alig fedezhető fel kapcsolat a nyugdíjcélú befizetések és a később folyósított nyugdíj járadék között.

Hetvenedik születésnapjára a tanítványai egy emlékkötettel lepték meg, amelynek címe Racionalitás és méltányosság (szerk.: Király J., Simonovits A. és Száz J., Közgazdasági Szemle Alapítvány Budapest 2000.) volt. Minden biztonnyal a kötet névadói nemcsak, vagy elsősorban nem a kötet tartalma alapján választották a címet, hanem sokkal inkább az ünnepelt személy miatt. Biztosan nem tévedtek, mert aligha lehetne két szóban pontosabban jellemezni Augusztinovics Máriaát és munkásságát. Jó érzékkel navigált a méltányosság és a racionalitás sziklái között és biztos kézzel tartotta a kutatásai kormányát a kívánatos mix irányába. Tudta ugyanis a nagy titkot, amely ezt a feloldhatatlannak látszó dilemmát mindig lerendezi, nevezetesen sohasem lehet egy olyan megoldást racionálisnak értékelni, amely jelentős társadalmi méltánytalanságokat idéz elő.

Mellár Tamás

# EPQ MODELLEK VÁLTOZTATHATÓ MINŐSÉG-ELLENŐRZÉSI SEBESSÉG ESETÉN<sup>1</sup>

HAUCK ZSUZSANNA

*PTE Közgazdaságtudományi Kar*

Jelen munkában olyan Economic Production Quantity (EPQ) modelleket vizsgálunk, melyekben minden egyes terméket átvizsgálunk eladás előtt. A selejtes termékek az átvizsgálási periódus végén egyszerre hagyják el a rendszert, arányuk valószínűségi változó. A termelési ráta és a minőség-ellenőrzés sebessége döntési változó a vállalat számára. A szűk keresztmetszet sebességének növelése csökkenti a hiányból adódó költségeket és a selejtaránytól függően hat a készleten tartási, valamint a sorozatkezdési költségekre. A sebesség növelésére vonatkozó különböző költségfüggvények mellett keressük a készletezéssel kapcsolatos összköltség minimumát. Mindezt megtesszük összefüggő ciklusokra, ahol minden periódusban ugyanannyi a selejtarány, illetve egymástól független ciklusokra is, ahol a meghibásodás százaléka periódusonként változik. Eredményeinket az Economic Order Quantity (EOQ) modell eredményeivel is összevetjük.

*Kulcsszavak:* EPQ modell, minőség-ellenőrzési sebesség, gazdaságos sorozatnagyság

## 1 Bevezetés

A termelés menedzsment szakirodalom egyik alapműve Harris (1913) Economic Order Quantity (EOQ) modellje, melynek lényege, hogy a kereslet, a fajlagos készletezési költség, valamint a sorozatkezdési költség ismeretében meghatározza azt a gazdaságos sorozatnagyságot, mely mellett a készletezéssel kapcsolatos összköltség minimális lesz. Ezt a problémát gondolta tovább Taft (1918), feltételezve, hogy a termékek nem a készletezési periódus elején, egyszerre, hanem folyamatosan érkeznek a raktárba. Jelen munka az erre a gondolatmenetre felírt Economic Production Quantity (EPQ) modell egy továbbfejlesztett változata.

Az EOQ és EPQ alapmodellek kimondatlanul ugyan, de feltételezik, hogy a raktárba érkező termékek mindegyike kifogástalan minőségű. Erre a problémára többen felhívták ugyan a figyelmet, de Porteus (1986) volt az első, aki EOQ modellben feltételezte, hogy egy bizonyos valószínűség szerint hibás termékek keletkeznek. Rosenblatt és Lee (1986) a probléma kapcsán arra a következtetésre jutott, hogy selejtes termékek előfordulása esetén kisebb sorozatokban célszerű gyártani. Vörös (1999) a Toyota Termelési Rendszerből kiindulva feltételezte, hogy a termelési rátát csökkenthetik a folya-

<sup>1</sup>Beérkezett: 2014. augusztus 22. E-mail: hauckzs@ktk.pte.hu.

mat minőségi problémái. Ha ugyanis minőségi hibát találnak a dolgozók, akkor megállíthatják a termelőszalagot. Hiány keletkezését nem megengedő EPQ modelljében arra a következtetésre jutott, hogy a folyamat minőségének romlása növeli a gazdaságos sorozatnagyságot és csökkenti az átállás és készlettartás éves költségeit. Növeli ugyanakkor a javítás költségeit, így meghatározható az optimális folyamatminőség szintje.

Salameh és Jaber (2000) modelljének alapgondolata, hogy eladás előtt a vállalat minden egyes termék minőségét leellenőrzi, az átvizsgálási periódus végén pedig a selejtes termékek távoznak a rendszerből. A téma kiterjesztési irányzatait részletesen tárgyalja Khan et al. (2011). Ezek a modellek jellemzően a gazdaságos sorozatnagyság meghatározásával hivatottak minimalizálni a készletezéssel kapcsolatos összköltséget. Hauck és Vörös (2015) azonban rámutatnak arra, hogy mindegyre a vállalatnak az átvizsgálási sebesség változtatásának eszköze is rendelkezésére áll. Jelen munka is ezt a két döntési változót veszi figyelembe, azzal a különbséggel, hogy ha a termelési ráta lassabb a minőség-ellenőrzés sebességénél, akkor – mivel ez esetben a termelési ráta a szűk keresztmetszet, ezért – az optimális sebesség a termelésre vonatkozik.

Papachristos és Konstantaras (2006) felhívják a figyelmet arra, hogy Salameh és Jaber (2000) modelljének feltevése nem elegendő a hiány elkerüléséhez. Vörös (2013) megoldja ezt a problémát, és bevezeti az összefüggő, valamint az egymástól független ciklusok fogalmát. Előbbi esetben minden periódusban ugyanúgy viselkedik a rendszer, ahogy az az elsőben kialakult. Utóbbiban minden periódus végén egy a többtől független ciklus kezdődik. Az egymástól független ciklusokra vonatkozó számítások Maddah és Jaber (2008) gondolatán alapulnak, akik a ciklusok hosszának várható értékét javasolják alkalmazni.

A következő szakaszban bemutatjuk a modell alapvetéseit elegendő mértékű jó minőségű kereslet, illetve hiány keletkezése esetére. A 3. részben ezek alapján írjuk fel az összköltség függvényt, melynek minimumát összefüggő és egymástól független ciklusok esetére is bemutatjuk. A 4. szakasz összefoglalja vizsgálódásaink tárgyát és főbb eredményeit.

## 2 A modell

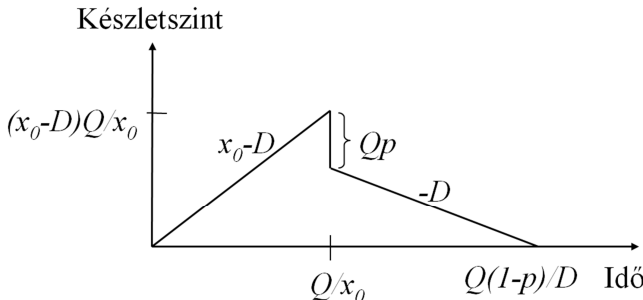
A tanulmányban olyan EPQ modellekkel foglalkozunk, amelyek feltételezik, hogy értékesítés előtt minden egyes terméket át kell vizsgálni. Ez jellemző gyakorlat például az egészségügy számára beszállított termékek (pl. gyógyszerek, gyógyászati segédeszközök) gyártása esetén. A keresletet a jó minőségű termékekkel elégítik ki. Amennyiben ezekből nem áll rendelkezésre megfelelő mennyiség, úgy hátralék keletkezik. Feltételezzük, hogy a ki nem elégített kereslet nem veszik el, és a hiányt minden egyes készletezési ciklus végén egy 100%-ban jó minőséget garantáló beszállító pótolja. Ugyanezekben az időpontokban, egyszerre hagyják el a raktárhelyiséget a selejtnek bizonyult termékek.

A jó minőségű termékek napi keresletét  $D$ -vel jelöljük és konstansnak feltételezzük. A selejtarányt, így a rendszer minőségét  $p$  valószínűségi változó írja le. Megmutatja, hogy a vállalat egy megtermelt sorozatnak hány százalékat kényszerül megjavítani, alacsonyabb áron értékesíteni vagy megsemmisíteni. A modell a három lehetőséget egy kategóriaként kezeli, minden egyes átvizsgálási periódus végén a  $Q$  mennyiségű termékből álló sorozat  $p$  aránya egyszerre távozik a rendszerből. Ezen  $Qp$  egység további sorsának jelen optimalizálási probléma szempontjából nincs jelentősége.

jelölés	jelentése
$D$	napi kereslet (db/nap)
$x$	a minőség-ellenőrzés sebessége (db/nap), döntési változó
$x_0$	a jelenlegi minőség-ellenőrzési sebesség, $x_0 \geq D$
$x_{\max}$	a legmagasabb elérhető minőség-ellenőrzési sebesség
$z$	$z = D/x$ , $z \leq 1$ ; $z_{\min} = D/x_{\max}$
$g(z)$	a minőség-ellenőrzés $z$ szintre történő gyorsításának napi költsége
$s$	sorozatkezdési költség (ciklusonként merül fel)
$h$	egy termék készleten tartásának napi költsége
$b$	termékenkénti napi hátralékköltség
$Q$	sorozatnagyság (db), döntési változó
$p$	a selejt termékek aránya (%), $p \in [0, 1]$ , valószínűségi változó
$f(p)$	a selejt termékek arányának sűrűségfüggvénye
$a$	a selejt termékek lehető legmagasabb aránya ( $a \leq 1$ ) egy sorozatban
$N$	egy évben ledolgozott munkanapok száma

1. táblázat. A jelölések jegyzéke

A vállalatnak naponta  $x$  mennyiségű termék átvizsgálására van kapacitása. Ezt a sebességet akkor tudja elérni, ha minden nap keletkezik is ennyi késztermék, azaz ha a termelési ráta legalább akkora, mint a minőség-ellenőrzési sebesség. Amennyiben a vállalat naponta  $x$ -nél kevesebb mennyiségű terméket küld minőség-ellenőrzésre, úgy nincs értelme növelni annak sebességét, hanem a termelési ráta mint szűk keresztmetszet gyorsítására van szükség. Ha a termelési ráta éppen megegyezik az átvizsgálási sebességgel, úgy az arra kapott optimum a termelési rátára is igaz. Utóbbi esetekben azonban  $g(z)$  függvénynek a termelés gyorsításának költségeit (is) tartalmaznia kell.



1. ábra. Készletalakulási diagram hátralék nélküli esetben ( $D \leq x(1 - p)$ ).  
 Forrás: Vörös (2013) alapján saját szerkesztés

Mivel a selejt előfordulásának lehetőségével is számolunk, ezért naponta legalább annyit kell termelnie és átvizsgálania a vállalatnak ( $x$ ), hogy ki tudja elégíteni a keresletet, vagyis  $x \geq D$  teljesüljön. Ez a mennyiség azonban csak ritkán elegendő, ugyanis mivel a selejt aránya  $p$  százalék, ezért naponta valójában csak  $x(1-p)$  jó minőségű kínálat keletkezik. Amennyiben ez eléri a napi kereslet szintjét  $D \leq x(1-p)$ , úgy nem keletkezik hátralék. Ezt az esetet illusztrálja az 1. ábra.

Az átvizsgálási sebesség kezdeti szintjét jelöli  $x_0$ , melyből a napi keresletet kivonva kapjuk, hogy napi  $x_0 - D \geq 0$  termék kerül a raktárba (1. ábra). Ez a mennyiség a napi keresletet meghaladó jó minőségű napi kínálat ( $x_0(1-p) - D$ ), valamint a naponta talált selejt darabszám ( $x_0p$ ) összege. A készlet szint növekedése addig tart, amíg a teljes sorozatot, azaz  $Q$  db-ot át nem vizsgálnak. Az átvizsgálás tehát  $Q/x_0$  napot vesz igénybe, és ez alatt  $(x_0 - D)Q/x_0$ , azaz  $(1 - z_0)Q$  készlet halmozódik fel a raktárban, ahol  $z_0 = D/x_0$ . Mivel a sorozatnagyságot  $Q$ -val jelöljük, melynek  $p$  százaléka selejt, ezért  $Qp$  selejt hagyja el a rendszert a  $Q/x_0$  időpontban, vagyis a készlet szint  $(1 - z_0 - p)Q$  értékre csökken. Ezt követően a ciklus végéig már nem érkezik több termék a raktárba, a megmaradt készlet pedig naponta  $D$  mennyiséggel csökken. Mivel a jó minőségű, azaz értékesíthető mennyiség egy készletezési ciklusban  $Q(1-p)$  darab, így egy ciklus hossza addig tart, amíg ezt a mennyiséget a kereslet fel nem emészti, vagyis  $Q(1-p)/D$  napig (Vörös, 2013).

Készlettartási költség annyi termék után merül fel, amennyi a készletalakulási diagram (1. ábra) görbe alatti területe. A fentieknek megfelelően ez egy ciklusban az (1) egyenlet által leírt  $HCC1$  készlettartási költséget jelent, melyben nemcsak a sorozatnagyság, hanem az átvizsgálási sebesség is döntési változó:

$$\begin{aligned} HCC1(Q, x) &= h \left[ \int_0^{Q/x} (x - D)t dt + \int_{Q/x}^{Q(1-p)/D} Q(1-p-z) - Dt dt \right] = \\ &= h \frac{Q^2}{2D} (2pz + (1-p)^2 - z). \end{aligned} \tag{1}$$

Mivel hátralék nélküli esetben egy periódus hossza  $Q(1-p)/D$ , ezért egy évben  $ND/Q(1-p)$  pozitív hosszúságú ciklus zajlik le. A kapcsolódó készletezési összköltség három elemből áll. Az egy ciklusban felmerülő  $HCC1(Q, x)$  készlettartási költséget a ciklusok számával felszorozva megkapjuk a vonatkozó éves költséget. Emellett minden ciklus elején sorozatkezdési költség merül fel, melynek egyszeri mértékét  $s$ -sel jelöljük, éves szintjét pedig az éves ciklusszámmal történő szorzás adja meg. Az eredeti EPQ modellhez képest még egy költségelemmel számolnunk kell a készletezéssel kapcsolatos éves összköltség ( $TC1(Q, z)$ , ld. (2)) meghatározásához, ez pedig a minőségellenőrzés gyorsításából adódó napi költség, melyet  $g(z)$  függvényvel mérünk.

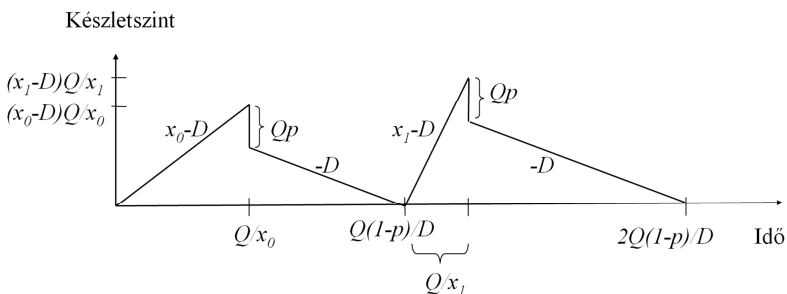
Az átvizsgálás sebességének növelése történhet alvállalkozó bevonásával, túlorázttatással vagy a technológia fejlesztésével. Ha a sebesség éppen annyi, hogy hibátlan sorozatot feltételezve a vállalat ki tudja elégíteni a keresletet, akkor  $x = D$ , azaz  $z = 1$ . Mivel ez a sebesség minimuma, ezért gyorsítás



nem történt, emiatt  $g(1) = 0$ . Amennyiben gyorsabban kell elvégezni a feladatot, úgy az alvállalkozó magasabb áron vállalja azt, vagy a túlóra jár többletköltséggel. A sebességet növelve  $g(z)$  tehát nő, viszont  $x$  és  $z$  között fennálló reciprok viszony ( $z = D/x$ ) miatt ez azt jelenti, hogy  $g(z)$  szigorúan monoton csökken  $z$ -ben. Konvex csökkenést feltételezünk, ami abból következik, hogy minél magasabb szintről növeljük a sebességet, az annál nagyobb erőfeszítéssel jár. Egy cikluson belül  $g(z)$  annyi napon merül fel, amennyin átvizsgálás folyik, azaz hátralék nélküli esetben  $Q(1-p)/D$  napból  $Q/x$  ideig, ami az évi  $N$  számú munkanap  $z/(1-p)$  hányadát jelenti. A hányadost nem kell  $p = 1$ -re értelmeznünk, mivel ha a teljes sorozat hibás, akkor hátralék keletkezik. A hátralék nélküli összköltség:

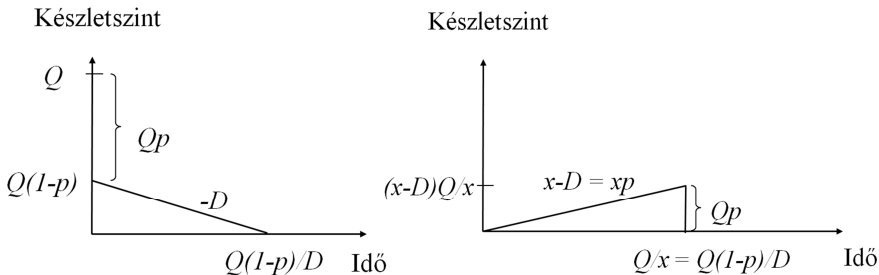
$$TC1(Q, z) = \frac{ND}{Q(1-p)}S + \frac{NhQ}{2(1-p)}(2zp + (1-p)^2 - z) + \frac{N}{1-p}zg(z). \quad (2)$$

Ahogy azt a (2) kifejezés mutatja, a sorozatnagyság mellett a minőség-ellenőrzés sebessége is döntési változó. Előbbi megszokott az irodalomban, utóbbit viszont Hauck és Vörös (2015) vizsgálta először EOQ modellekre. A 2. ábra megmutatja, mi történik az EPQ modell hátralék nélküli változatában, ha a második ciklusban megnöveljük a minőség-ellenőrzés sebességét ( $x_0 < x_1$ ). Ennek eredményeként a ciklus hossza, így az évente felmerülő ciklusok száma, ebből következően pedig az éves sorozatkezdési költség nem változik. Le-rövidül azonban a minőség-ellenőrzési időszak. A selejtes termékek emiatt hamarabb hagyják el a raktárhelyiséget, a jó minőségű napi többletkínálat ugyanakkor korábban kerül be a raktárba, mint az első ciklusban.



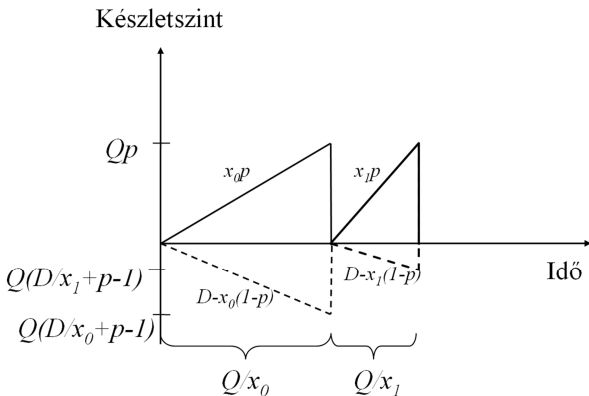
2. ábra. Készletalakulási diagram hátralék nélküli esetben ( $D \leq x(1-p)$ ), a második ciklusban megnövelt átvizsgálási sebességgel ( $x_0 < x_1$ )

A minőség-ellenőrzési sebességet minden határon túl növelve az átvizsgálás a ciklus kezdetének pillanatában befejeződik, amivel tulajdonképpen az EOQ modellt kapjuk vissza (ld. 3. ábra bal oldala). A másik véglet, ha a sebesség annyira lassú, hogy minden nap éppen annyi jó minőségű terméket vizsgálnak át, amennyi az aznapi kereslet. Ez azt eredményezi, hogy csak a selejtes termékek kerülnek a raktárba (ld. 3. ábra jobb oldala). Az ábrák érzékeltetik, hogy ha a selejtarány magas, akkor a lehető leggyorsabb minőség-ellenőrzési sebesség mellett adódik a készlettartási költségek minimuma. Ha ugyanis a 3. ábra bal oldalán alacsony lenne a selejtszint, akkor a görbe alatti terület jóval magasabb lenne, ez esetben pedig célszerű megfontolni a jobb oldali ábrán bemutatott lassú átvizsgálást.



3. ábra. Hátralék nélküli EPQ modell készletalakulási diagramja minden határon túl növelt, illetve minimális minőség-ellenőrzési sebesség mellett

Könnyen előfordulhat, hogy – például egy gép meghibásodása miatt – magasabb lesz adott sorozatban a selejtarány, melynek következtében a vállalat nem tudja kielégíteni a keresletet, azaz  $D > x(1 - p)$ . Amennyiben a napi kereslet meghaladja a naponta bevizsgált jó minőségű kínálatot, úgy hátralék keletkezik. Ennek napi mértéke a két mennyiség különbsége, azaz  $D - x(1 - p)$ . Mivel így nem keletkezik többlet jó minőségű termékből, ezért csak a selejt kerül a raktárba. Az átvizsgálás végeztével a ciklus is véget ér, hiszen a  $Qp$  selejt eltávolítását követően nem marad más a raktárban. Egy ciklus hossza tehát  $Q/x$ , és feltételezzük, hogy ebben az időpontban egy megbízható beszállító tökéletesen pótolja az addig felhalmozott hiányt. A hátralék keletkezéséből származó egységenkénti többletköltséget  $b$  fejezi ki, melynek mértékét a hiány pótlásának módja is befolyásolhatja.



4. ábra. Készletalakulási diagram hátralék keletkezése esetén ( $D > x(1 - p)$ ), a második ciklusban megnövelt átvizsgálási sebességgel ( $x_0 < x_1$ )

A hátralék esetét bemutató 4. ábrán leolvashatjuk, hogy a minőségellenőrzés sebességét növelve (második ciklus) az átlagos készletszint nem változik, ugyanígy  $Qp/2$  marad. A hátralékot azonban hamarabb szünteti meg a beszállító, így annak átlagos szintje,  $Q(z + p - 1)/2$ , ebből kifolyólag pedig az azzal kapcsolatos költségek is csökkennek. Lerövidül ugyanakkor a ciklushossz, ami évente magasabb ciklusszámot, ezen keresztül pedig a sorozatkezdési költség gyakoribb felmerülését jelenti. Az egy ciklus során felmerülő

készlettartási, ill. hátralék költségeket a (3) és (4) egyenletek írják le hátralék keletkezése esetén.

$$HCC2(Q, x) = h \left[ \int_0^{Q/x} xpt \, dt \right] = h \frac{Q^2}{2D} pz \quad (3)$$

$$BCC2(Q, x) = b \left[ \int_0^{Q/x} (D - x(1 - p))t \, dt \right] = b \frac{Q^2}{2D} (z^2 - z(1 - p)) \quad (4)$$

A készletezéssel kapcsolatos éves összköltség hátralék keletkezése esetén négy elemből adódik tehát össze, ezek az éves (i) sorozatkezdési, (ii) készlettartási, (iii) hátralékkal kapcsolatos, valamint (iv) minőségellenőrzési költségek. Utóbbi minden munkanapon felmerül, hiszen nincsen szünet az átvizsgálási periódusok között, az egyik ciklus végeztével azonnal újabb kezdődik. Hátralékot tartalmazó esetben tehát a ciklusok hossza megegyezik az átvizsgálási periódus hosszával, így azok éves száma  $Q/x$  reciproka, szorozva az egy évben ledolgozott munkanapok számával ( $N$ ). Az egy készletezési periódusra vonatkozó  $HCC2$  és  $BCC2$  mennyiségeket a ciklusszámmal megszorozva kapjuk az (5) egyenlet második és harmadik tagját. A készletezéssel kapcsolatos költségeket a 2. táblázat listázza az EPQ modell hátralékot feltételező és nem megengedő esetére.

	nem keletkezik hátralék: $D \leq x(1 - p)$	keletkezik hátralék: $D > x(1 - p)$
egy készletezési ciklus hossza	$Q(1 - p)/D$	$Q/x$
ciklusok száma egy évben	$ND/Q(1 - p)$	$Nx/Q$
éves sorozatkezdési költség	$NDs/Q(1 - p)$	$Nxs/Q$
éves készlettartási költség	$\frac{NhQ}{2} \left( z \frac{2p-1}{1-p} + 1 - p \right)$	$\frac{NhQ}{2} p$
hátralék éves költsége	-	$\frac{NbQ}{2} (z + p - 1)$
minőség-ellenőrzés éves költsége	$g(z)zN/(1 - p)$	$g(z)N$

2. táblázat. Készletezéssel kapcsolatos költségek EPQ modellben

Hátralék keletkezése esetén a készletezéssel kapcsolatos összköltség tehát:

$$TC2(Q, z) = \frac{ND}{zQ} S + \frac{NhQ}{2} p + \frac{NbQ}{2} (z + p - 1) + Ng(z). \quad (5)$$

1. TÉTEL. A folyamatminőség romlása hátralék nélküli esetben növeli, hátralék keletkezését feltételező esetben csökkenti a gazdaságos sorozatnagyságot.

A (2) összefüggésben definiált összköltség függvény minimumát keresve, hátralék nélküli esetben a gazdaságos sorozatnagyság

$$Q_1^* = \sqrt{\frac{2Ds}{h}} \sqrt{\frac{1}{2zp + (1 - p)^2 - z}}.$$

A Wilson-formula módosító faktorának nevezője  $p$ -ben csökkenő, ha  $z \leq 1 - p$ , azaz nem keletkezik hátralék. Mivel  $p$  a selejtarány, ezért tulajdonképpen a rendszer minőségét írja le. Ha tehát az előállítási folyamat minősége

romlik, azaz több hiba fordul elő a gyártás során, akkor a módosító faktor, ennek következtében pedig a sorozatnagyság is növekszik. Ez összhangban van Vörös (1999) megállapításával, aki a Toyota Termelési Rendszer folyamatminőségét az andon zsinór meghúzása miatti leállások idejével jellemzi.

Az (5) egyenlet alapján hátralékot feltételező esetben a gazdaságos sorozatnagyság  $Q_2^* = \sqrt{2Ds/h \cdot \sqrt{1/(hp + b(z + p - 1))}}$ . A módosító faktor nevezője  $p$ -ben növekvő, vagyis hátralék keletkezése esetén a folyamatminőség romlása csökkenti a sorozatnagyságot.

### 3 A minőség-ellenőrzési sebesség növelése EPQ modellekben

Az előzőekben láttuk, hogy a napi kereslet, a minőség-ellenőrzési sebesség, valamint a selejtarány mértékétől függően keletkezhet készlettelőbblet vagy hátralék. A keresletet konstansnak tekintjük, a sebességről a vállalat dönt, a selejtszázalék pedig valószínűségi változó. Vörös (2013) alapján két esetet különböztetünk meg, majd hasonlítunk össze aszerint, hogy az egymást követő ciklusokban változhat-e a selejtarány, vagy minden periódusban annyi marad, ahogy az az első ciklusban kialakult. Utóbbi esetben összefüggő, a selejtarány változását megengedő esetben egymástól független ciklusokról beszélünk.

#### 3.1 A minőség-ellenőrzési sebesség növelése egymással összefüggő ciklusokban

A (2) és (5) összefüggésekkel leírtuk a készletezéssel kapcsolatos összköltség alakulását hátralék nélküli, majd hátralékos feltételező esetre. Ezen függvények független változója  $Q$  és  $z$ , melyekről a szóban forgó vállalat a sorozatnagyság ( $Q$ ), valamint a minőség-ellenőrzési sebesség ( $x$ ) megválasztásával dönt. Hátralék attól függően keletkezhet, hogy az egy sorozatban jelenlevő selejt aránya ( $p$ ) meghaladja-e az  $(1 - z)$  értéket, ahol  $z$  a napi kereslet ( $D$ ) és az egy nap alatt átvizsgált termékmennyiség ( $x$ ) hányadosa. Ha ugyanis nem keletkezik hátralék, akkor  $D \leq x(1 - p)$ , melyet átrendezve  $p \leq (1 - z)$ . Az összköltségfüggvény tehát

$$TC(Q, z) = \begin{cases} TC1(Q, z), & \text{ha } 0 \leq p \leq 1 - z \\ TC2(Q, z), & \text{ha } 1 - z < p \leq 1. \end{cases}$$

Mivel  $p$  valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye  $f(p)$ , ezért az összköltség várható értéke:

$$ETC(Q, z) = \int_0^{1-z} TC1(Q, z) f(p) dp + \int_{1-z}^1 TC2(Q, z) f(p) dp. \quad (6)$$

Az alábbi mennyiséget szeretnénk tehát minimalizálni:

$$\frac{ETC(Q, z)}{N} = sS(z)D/Q + (H(z) + B(z))Q/2 + G(z), \quad (7)$$

ahol

$$S(z) = \int_0^{1-z} 1/(1-p)f(p) dp + \int_{1-z}^1 (1/z)f(p) dp \quad (7a)$$

$$H(z) = h \int_0^{1-z} (1-2p-2z+z/(1-p))f(p) dp + E(p) \quad (7b)$$

$$B(z) = b \int_{1-z}^1 (z+p-1)f(p) dp \quad (7c)$$

$$G(z) = \int_0^{1-z} zg(z)/(1-p)f(p) dp + \int_{1-z}^1 g(z)f(p) dp \quad (7d)$$

$$1 \geq D/x_0 = z_{\max} \quad \text{és} \quad z_{\min} = D/x_{\max} . \quad (7e)$$

$S(z)$ ,  $B(z)$  és  $G(z)$  megegyeznek az EOQ modellben (Hauck és Vörös, 2015) definiált összefüggésekkel,  $H(z)$  azonban módosul (ld. Vörös, 2013).

**2. TÉTEL.** *A  $0 \leq z \leq 1-a$  intervallumon  $H(z)$  lineáris,  $H(0) = h(1-E(p))$  kezdeti értékkel. Az  $1-a \leq z \leq 1$  intervallumra nézve  $H(z)$  függvény  $z = 0.5$ -ig konkáv, majd konvex, és  $H(1) = hE(p)$ -ben végződik. Amennyiben  $a < 0.5$ , úgy  $H(z)$  konkáv az intervallumon.*

A tétel bizonyításához felhasználjuk a lenti deriválási szabályt:

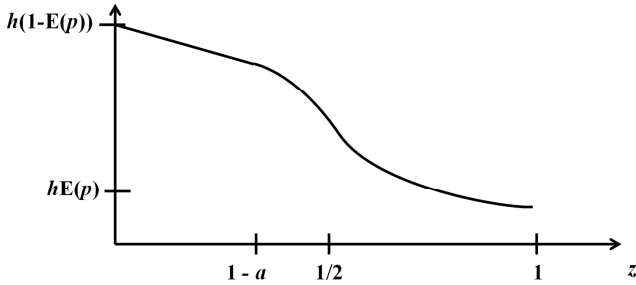
$$\frac{d}{dx} \int_{k(x)}^{l(x)} m(x, p) dp = l'(x)m(x, l(x)) - k'(x)m(x, k(x)) + \int_{k(x)}^{l(x)} \frac{\partial}{\partial x} m(x, p) dp ,$$

melyből  $H_z = h \int_0^{1-z} (-2 + \frac{1}{1-p})f(p) dp$ .  $H_z$  előjelét keressük, hogy meg tudjuk határozni a függvény monotonitását. Ehhez szükséges tudnunk, hogy  $h$  mindig pozitív,  $f(p)$  pedig pozitív értéket vesz fel, ha  $0 \leq p \leq a$ , egyébként nulla. Definíció szerint  $p \leq a$ , ezért ha  $a < 1/2$ , akkor  $H_z$  biztosan negatív, azaz a függvény  $z$ -ben szigorúan monoton csökken. Az  $a \geq 1/2$  esetben az eloszlástól függ, hogy növekvő vagy csökkenő-e a függvény.

Amennyiben  $a < 1-z$ , úgy  $H_z$  konstans, ezért  $H(z)$  lineáris. Mindezt a második derivált segítségével is igazolhatjuk, hiszen ezen az intervallumon  $f(1-z) = 0$ :

$$H_{zz} = h(2 - 1/z)f(1-z) . \quad (8)$$

Ha  $(1-z) \leq a$ , akkor  $f(1-z) > 0$ . A második derivált ezért negatív, ha  $z < 1/2$ , de pozitív, ha  $z > 1/2$ , a  $z = 1/2$  helyen pedig inflexiós pontja van. Ezek szerint  $H(z)$  lineáris a  $0 \leq z \leq 1-a$  intervallumon, majd konkáv  $1-a \leq z \leq 1/2$ -ig,  $z = 1/2$  helyen inflexiós pontja van, az  $1/2$ -nél magasabb  $z$ -kre pedig konvex. Ezt az esetet mutatja be az 5. ábra. Amennyiben  $a < 1/2$ , úgy  $1/2 < 1-a$ , ami azt jelenti, hogy az  $1-a \leq z$  intervallumon  $H(z)$  konvex.



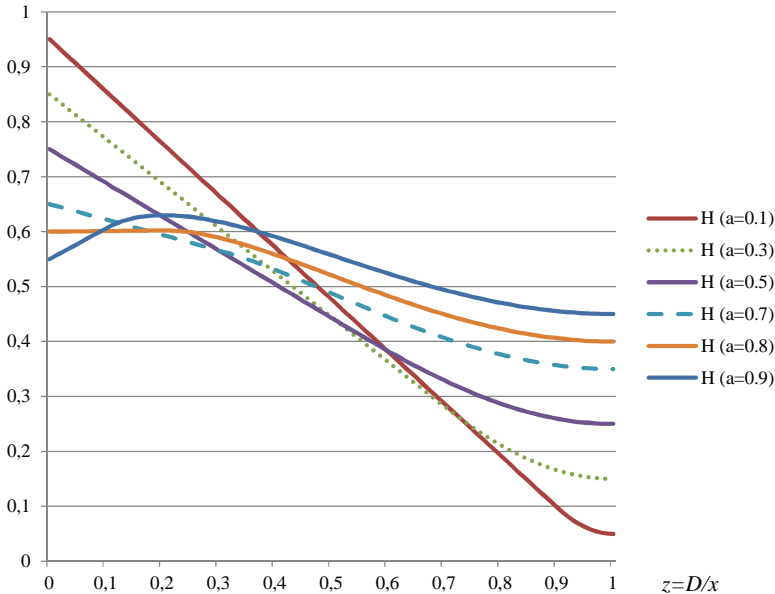
5. ábra.  $H(z)$  egy lehetséges alakja

$H(z)$  kezdeti értéke  $H(0) = h[1 - E(p)]$ , végső értéke pedig  $H(1) = hE(p)$ . Összehasonlítva a két kifejezést, a kezdeti érték a magasabb, ha a selejtarány várható értéke ( $E(p)$ ) alacsonyabb 50%-nál. Tegyük most fel, hogy a selejtarány egyenletes eloszlást követ a  $[0, a]$  intervallumon, azaz

$$f(p) = \begin{cases} 1/a, & \text{ha } 0 \leq p \leq a \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases} \tag{9}$$

A selejtarány várható értéke ekkor  $E(p) = a/2$ . Ezek szerint  $H(0) \geq H(1)$ , ha  $1 - a/2 \geq a/2$ , vagyis  $1 \geq a$ . Mivel ez definíció szerint teljesül, ezért a selejtarány egyenletes eloszlása esetén mindig igaz, hogy  $H(0) \geq H(1)$ .

(7b) és (9) miatt az  $a < 1 - z$  intervallumon  $H(z) = h[1 - a/2 - 2z - z \ln(1 - a)/a]$ ,  $1 - z \leq a$  esetén pedig  $H(z) = h[(z^2 - z - z \ln z)/a + a/2]$ . Ezen összefüggéseket felhasználva a 6. ábra hat különböző  $a$  értékre mutatja be a görbe alakját.



6. ábra.  $H(z)$  alakja egyenletes eloszlásra,  $a$  különböző értékei és  $h = 1$  esetén

Ahogy azt a fentiekben megállapítottuk, a görbe  $(1 - a)$ -ig lineáris,  $z = 1/2$ -ig konkáv, majd konvex. Konkáv intervallum csak abban az esetben létezik, ha  $a > 1/2$ , mivel csak  $1 - a \leq z$  esetén nem lineáris  $H(z)$ .

Egyenletes eloszlás esetén az első derivált  $H_z = h(-2 - \ln(1 - a)/a)$  az  $a < 1 - z$  intervallumon, mely konstans előjele  $a$ -tól függ.  $H_z$  pozitív, azaz  $H(z)$  lineárisan növekszik, ha  $a \geq 0.8$  (kerekítve). Ellenkező esetben ugyanakkor lineárisan csökken a  $0 \leq z < 1 - a$  intervallumon.  $1 - z \leq a$  esetén az első derivált  $H_x = h(2z - 2 - \ln z)/a$ , amely akkor pozitív, azaz  $H(z)$  akkor növekszik, ha  $z < 0.2$  (megközelítő érték). Ennél nagyobb  $z$ -kre a függvény csökkenő. A fentiekben megállapítottaknak megfelelően a függvény  $z = 0.5$ -ig konkáv, ezt követően pedig konvex.

Hauck és Vörös (2015) alapján minden  $z$ -re igaz, hogy a (7) modellnek optimális sorozatnagysága

$$Q_{opt}(z) = \sqrt{2sD} \sqrt{S(z)/(H(z) + B(z))}, \quad (10)$$

a készletezéssel kapcsolatos összköltség várható értékének minimális szintje pedig

$$\min_z ETC(z)/N = \sqrt{2sD} \sqrt{S(z)/(H(z) + B(z))} + G(z), \quad (11)$$

feltéve, hogy  $z_{max} \geq z \geq z_{min}$ .

**3. TÉTEL.** *Összefüggő ciklusok esetén az EPQ modellben több elemből áll a gazdaságos sorozatnagyság, mint az EOQ modellben.*

A (10) összefüggés az EOQ és EPQ modellre egyaránt igaz, a különbség  $H(z)$  szintjében van. Mivel  $H(z)$  az EPQ modellben kisebb, ezért az EOQ modellhez képest kisebb a (10) nevezője, amiből következően a hányados, így a gazdaságos sorozatnagyság nagyobb lesz.

Mivel a célfüggvény viselkedését az átvizsgálási sebesség megválasztásával tudjuk befolyásolni, ezért meg kell ismernünk azon kifejezések tulajdonságait, melyek függnek  $z$ -tól. Ezek  $K(z) = S(z)(H(z) + B(z))$  és  $G(z)$ .

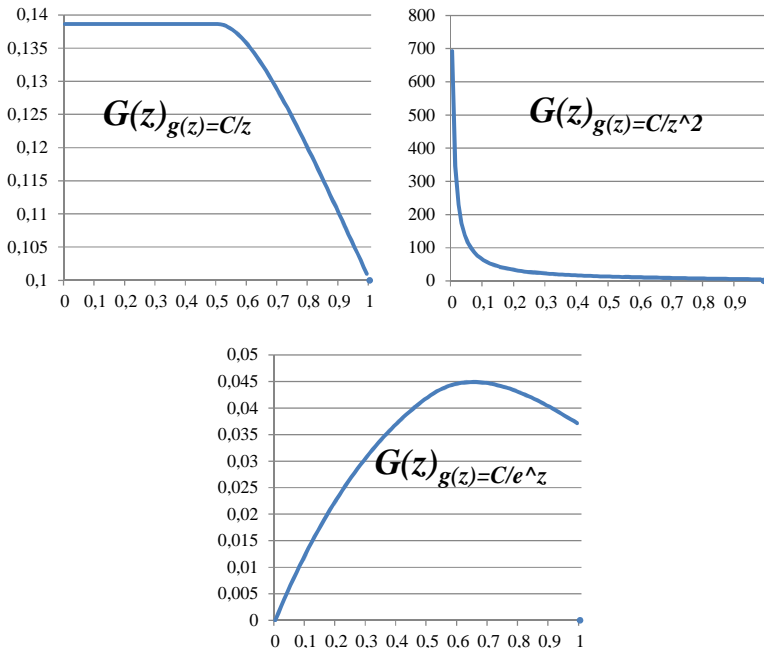
**4. TÉTEL.** *Ha a selejtarány eloszlása egyenletes, akkor a  $0 \leq z < 1 - a$  intervallumon  $G(z)$  szigorúan monoton növekszik, ha  $-g(z)/g_z > z$ , és szigorúan monoton csökken, ha  $-g(z)/g_z < z$ . A függvény konkáv, ha  $-z(g_{zz}/g_z) < 2$ , és konvex, ha  $-z(g_{zz}/g_z) > 2$ . Az  $1 - a \leq z \leq 1$  intervallumon  $G(z)$  csökkenésének feltétele  $a > g(z) \ln z/g_z + z \ln z + 1 - z$  egyenlőtlenség teljesülése. A függvény konvex, ha  $a > 2 \ln z g_z/g_{zz} - g(z)/z g_{zz} + z \ln z + 1 - z$ .*

$G(z)$  első és második deriváltját írják le a következő egyenletek:

$$G_z = \int_0^{1-z} (g(z) + z g_z)/(1-p)f(p) dp + \int_{1-z}^1 g_z f(p) dp$$

$$G_{zz} = \int_0^{1-z} (2g_z + z g_{zz})/(1-p)f(p) dp + \int_{1-z}^1 g_{zz} f(p) dp - \frac{g(z)}{z} f(1-z)$$

Egyenletes eloszlás esetén ezek a deriváltak az alábbi alakot öltik.



7. ábra.  $G(z)$  jellemző alakja három különböző  $g(z)$  és  $a = 0.5$  esetén

Ha  $0 \leq z < 1 - a$ , akkor

$$G_z = \frac{-\ln(1 - a)}{a}(g(z) + zg_z) \quad \text{és} \quad G_{zz} = \frac{-\ln(1 - a)}{a}(2g_z + zg_{zz}) .$$

Mivel  $-\ln(1 - a)/a > 0$ , ezért a monotonitásról ( $g(z) + zg_z$ ), a konvexitás-konkavitásról pedig ( $2g_z + zg_{zz}$ ) kifejezés előjele dönt. Mivel  $g(z)$  konvex módon csökken, ezért első deriváltja negatív, vagyis  $g_z < 0$ , a második derivált pedig pozitív, azaz  $g_{zz} > 0$ .  $G(z)$  szigorúan monoton növekszik ezen az intervallumon, ha  $-g(z)/g_z > z$ , de csökken, ha  $-g(z)/g_z < z$ . Továbbá konkáv, ha  $-z(g_{zz}/g_z) < 2$  és konvex, ha  $-z(g_{zz}/g_z) > 2$ .

Hauck és Vörös (2015) alapján három lehetséges  $g(z)$  függvényt vizsgálunk példaként. Amennyiben  $g(z) = C/z$ , úgy  $G(z)$  konstans, mivel  $g(z) + zg_z = 0$ , ennek megfelelően pedig a második derivált is nulla. Konvex csökkenő  $G(z)$ -hez jutunk ugyanakkor, ha  $g(z) = C/z^2$ . Ekkor ugyanis  $-g(z)/g_z = z/2$ , ami kisebb  $z$ -nél, az első derivált tehát negatív. A konvexitás abból következik, hogy  $-z(g_{zz}/g_z) = 3 > 2$ . Konkáv növekvő  $G(z)$ , ha például  $g(z) = Ce^{-z}$ . Ekkor ugyanis  $-g(z)/g_z = 1$ , mely értéknél  $z$  kisebb, ill. lehet vele egyenlő, így a növekedés  $z = 1$  helyen áll meg. A konkavitást tekintve  $-z(g_{zz}/g_z = z)$ , melyre mindig igaz, hogy 2-nél kisebb értéket vesz fel.

$1 - a < z \leq 1$ , akkor

$$G_z = \frac{1}{a}(g_z(a - 1 + z - z \ln z) - g(z) \ln z) ,$$



$$G_{zz} = \frac{1}{a}(g_{zz}(a - 1 + z - z \ln z) - 2g_z \ln z - g(z)/z).$$

Az előző intervallumhoz hasonlóan, mivel  $1/a$  pozitív, ezért a zárójeles kifejezések döntenek az előjelekről. Ezek alapján  $G(z)$  csökkenő  $z$ -ben, ha  $(a - 1 + z)/\ln z < z + g(z)/g_z$ , és növekvő, ha az egyenlőtlenség a másik irányban teljesül. Mivel  $1 - a \leq z$ , ezért  $(a - 1 + z)$  nemnegatív, és ezt az értéket egy negatív számmal kell osztanunk, tekintve ugyanis, hogy  $0 \leq z \leq 1$ ,  $\ln z$  negatív. Az egyenlőtlenség bal oldala tehát negatív vagy nulla. Átrendezéssel kapjuk, hogy a csökkenés feltétele, hogy  $a > g(z) \ln z/g_z + z \ln z + 1 - z$ . A második derivált pozitív, azaz  $G(z)$  konvex, ha  $a > 2 \ln z g_z/g_{zz} - g(z)/z g_{zz} + z \ln z + 1 - z$ .

A másik intervallumon bemutatott három példát folytatva  $g(z) = C/z$  esetén  $G(z)$  csökkenő, hiszen  $z + g(z)/g_z = 0$ . A második deriváltat tekintve  $g_{zz} = 0$  miatt csak  $g_z(1 - 2 \ln z) < g(z)/z$  egyenlőtlenség teljesülését szükséges figyelembe vennünk. Ez mindig igaz, mivel a bal oldal negatív, míg a jobb pozitív.  $G(z)$  tehát konkáv.

Ha  $g(z) = C/z^2$ , akkor  $z + g(z)/g_z = z/2$ , ami csökkenő irányra utal.  $G(z)$  konvex ezen az intervallumon, ha a függvényre aktualizált feltétel,  $a > z \ln z/3 + z/6 + 1 - z$  teljesül. Átrendezve ez  $a - 1 + z > z \ln z/3 + z/6$ , ahol  $a - 1 + z \geq 0$ . Numerikusan meghatározva a jobb oldalon álló kifejezés értékét  $z \leq 0.7$  esetén negatív számot kapunk, a maximum pedig  $z = 1$  helyen 0.176, vagyis ennél nagyobb  $a$ -kra biztosan konvex  $G(z)$ .  $0.7 \leq z \leq 1$  esetén pedig kis  $a$ -k mellett lehet konkáv.

Végül  $g(z) = Ce^{-z}$  függvénnyel kalkulálva  $G(z)$  csökken, ha  $a > (\ln z - 1)(z - 1)$ . Ha  $z \leq 0.44$ , akkor a szorzat értéke meghaladja az 1-et, ezért az ilyen  $z$ -kre  $G(z)$  biztosan növekvő. A  $z = 1$  helyen van minimuma, melynek értéke 0. Van tehát csökkenő függvényrész is, amely a  $0.44 < z < 1$  szakaszon kezdődik. A konkavitás feltétele mindig teljesül, mivel  $a < 1/z + 1 - z + (z - 2) \ln z$  mindig igaz, a kifejezés ugyanis  $z = 1$  helyen, 1 értékkel veszi fel minimumát,  $a$  maximálisan pedig 1 lehet.

5. TÉTEL.  $A 0 \leq z \leq 1 - a$  intervallumon  $K(z) = S(z)(H(z) + B(z))$  lineáris;  $z = 1$ -ben növekvő, ha  $b/(b + h) > E(p)$ , és csökkenő, ha  $b/(b + h) < E(p)$ .

Ahogy a 3. táblázat összefoglalja,  $S(z)$ ,  $H(z)$  és  $B(z)$  tulajdonságai jelentősen eltérnek egymástól. Amennyiben  $0 \leq z \leq 1 - a$ , úgy  $B(z) = 0$ , ezért  $K(z) = S(z)H(z)$ . Tekintve, hogy  $S(z)$  konstans,  $H(z)$  pedig lineáris ezen az intervallumon, ezért  $K(z)$  is lineáris. A kezdeti érték  $K(0) = S(0) \cdot h(1 - E(p))$ , és  $H(z)$  monotonitása dönti el, hogy csökkenő vagy növekvő-e a függvény.

	$0 \leq z < 1 - a$	$1 - a \leq z \leq 1$
$S(z)$	konstans pozitív	csökkenő; konkáv, majd konvexre válthat $S(1) = 1$
$H(z)$	lineáris; kezdő értéke $H(0) = h(1 - E(p))$	$z = 0.5$ -ig konkáv, majd konvex, $H(1) = hE(p)$
$B(z)$	nulla	konvex növekvő, $B(1) = bE(p)$

3. táblázat.  $S(z)$ ,  $H(z)$  és  $B(z)$  tulajdonságai az EPQ modellben.  
Forrás: Hauck és Vörös (2015),  $H(z)$  saját számítás

A  $0 \leq z \leq 1 - a$  intervallumon ennek következtében vagy a  $z = 0$  vagy a  $z = 1 - a$  helyen lesz  $K(z)$  minimuma.

A magasabb  $z$ -t, azaz lassabb minőség-ellenőrzést jelentő  $1 - a \leq z \leq 1$  intervallumon sokkal komplexebb a helyzet. Az elemzéshez szükségünk van  $K(z)$  kifejezés  $z$  szerinti első és második deriváltjaira, melyek az alábbiak:

$$K_z = S_z(H(z) + B(z)) + S(z)(H_z + B_z),$$

$$K_{zz} = S_{zz}(H(z) + B(z)) + 2S_z(H_z + B_z) + S(z)(H_{zz} + B_{zz}).$$

Az előjelek megállapításához ismernünk kell  $S(z)$ ,  $H(z)$  és  $B(z)$  első és második deriváltjait:

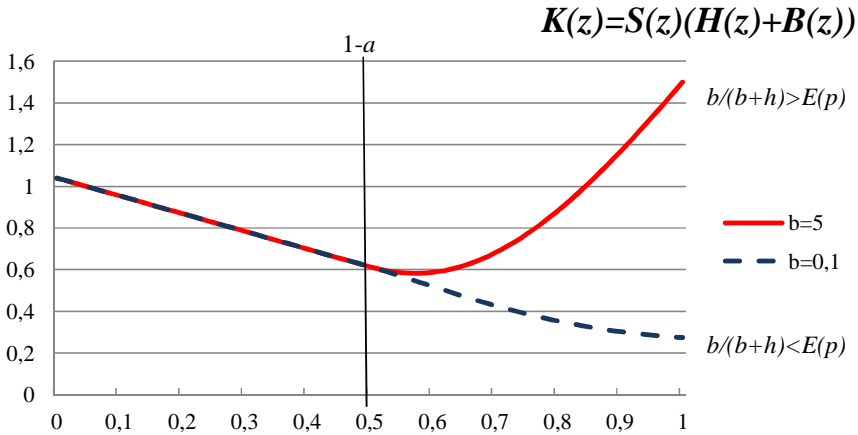
$$S_z = - \int_{1-z}^1 \frac{1}{z^2} f(p) dp \quad \text{és} \quad S_{zz} = 2 \int_{1-z}^1 \frac{1}{z^3} f(p) dp - \frac{1}{z^2} f(1-z),$$

$$H_z = h \int_0^{1-z} \left( -2 + \frac{1}{1-p} \right) f(p) dp \quad \text{és} \quad H_{zz} = h(2 - 1/z) f(1-z),$$

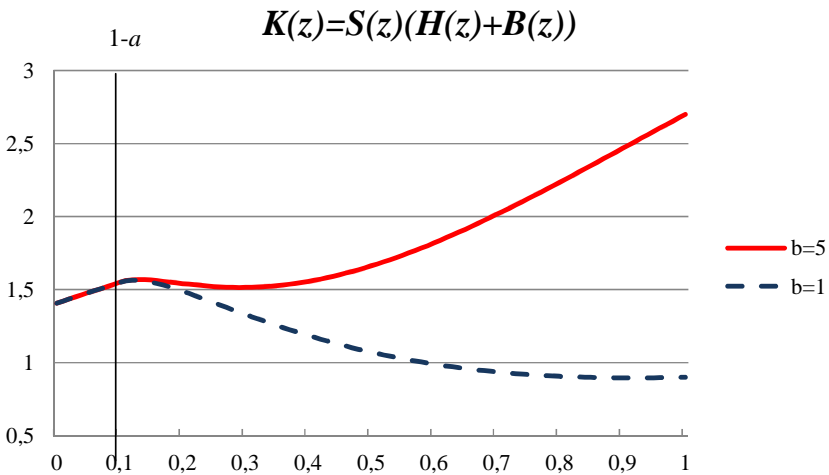
$$B_z = b \int_{1-z}^1 f(p) dp \quad \text{és} \quad B_{zz} = b f(1-z).$$

A lehető legmagasabb  $z$ -hez tartozó  $K(z)$  érték  $K(1) = (h+b)E(p)$ . Ebben a  $z = 1$  pontban  $K(z)$  növekvő, ha  $K_z(1) = -(h+b)E(p) + b > 0$ , azaz  $b/(b+h) > E(p)$ . Utóbbi egyenlőtlenség bal oldalán az irodalomból jól ismert (ld. Vörös, 2010) optimális termékelérhetőségi szint (optimális fogyasztó-kiszolgálási szint) áll. Amennyiben ez magasabb a selejtarány várható értékénél, úgy  $K(z)$  növekvő  $z = 1$ -ben. Nem ebben a pontban van tehát a függvény minimuma, hanem egy alacsonyabb  $z$ -hez, azaz magasabb minőség-ellenőrzési sebességhez tartozó pontban. Mivel a hiány fajlagos költsége legalább annyi, mint a fajlagos készletezési költség ( $b \geq h$ ), ezért  $b/(b+h) > 1/2$ . Ha tehát a selejtarány várható értéke nem haladja meg az 50%-ot, akkor  $K(z)$  növekvő  $z = 1$ -ben. Egyenletes eloszlás esetén ez mindig teljesül, ugyanis a selejtarány várható értékének maximuma  $1/2$ .

Eddigi megállapításaink alapján tehát a  $0 \leq z \leq 1 - a$  intervallumon  $K(z)$  lineáris, és lehet végig növekvő vagy végig csökkenő,  $z = 1$ -ben pedig növekvő, ha  $b/(b+h) > E(p)$ , és csökkenő, ha  $b/(b+h) < E(p)$ . Ez összesen négy esetet eredményez. A 8. ábra két olyan esetet mutat be egyenletes eloszlásra, ahol  $a < 0.8$ , ezért  $K(z)$  szigorúan monoton csökken a  $0 \leq z \leq 1 - a$  intervallumon. Ennél nagyobb  $z$ -kre általánosságban annyit állapíthatunk meg, hogy nagyobb  $b$ -re a függvény hamarabb kezd növekedni, ha egyáltalán növekszik. Az illusztráció kedvéért egy magas és egy irreálisan alacsony  $b$ -t választottunk. Utóbbi azt hivatott bemutatni, hogy  $z = 1$  helyen csökkenő a függvény, ha  $b/(b+h) < E(p)$ . A költségfüggvény minimuma ezért  $z = 1$  helyen, azaz az ellenőrzés gyorsítását nélkülöző helyen van. Magasabb fajlagos hiányköltség esetén az  $1 - a \leq z < 1$  intervallumon található a minimum.



8. ábra.  $K(z)$  alakja a selejtarány egyenletes eloszlása,  $a = 0.5$ ,  $h = 1$  és  $b$  két különböző értéke esetén

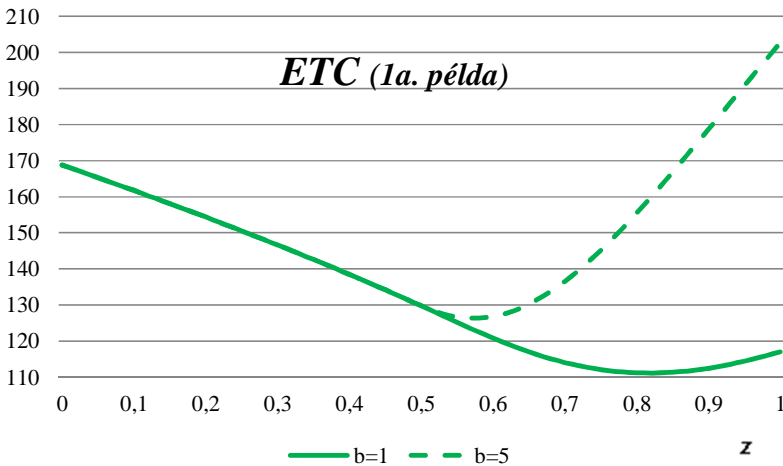


9. ábra.  $K(z)$  alakja a selejtarány egyenletes eloszlása,  $a = 0.9$ ,  $h = 1$  és  $b$  két különböző értéke esetén ( $b/(b + h) > E(p)$ )

A 9. ábra jóval magasabb maximális selejtarányt enged meg ( $a = 0.9$ ), így az első intervallumon  $K(z)$  szigorúan monoton növekszik. Ez a monotonitás a második intervallum elején folytatódik, majd mindkét esetben csökkenés után vált újra növekedésre. A költségfüggvény minimuma ezért vagy ismét az  $1 - a \leq z < 1$  intervallumon van, vagy a  $z = 0$  helyen. Utóbbi azt jelenti, hogy a minőség-ellenőrzés sebessége végtelen, azaz nulla időegységet vesz igénybe ez a tevékenység. Mivel ez a gyakorlatban nem kivitelezhető, ezért feltételeznünk kell  $z$ -nek egy nullánál nagyobb minimumát, és ezen  $z_{\min}$  mellett fennálló függvényértéket kell összevetnünk a másik intervallum minimumával.

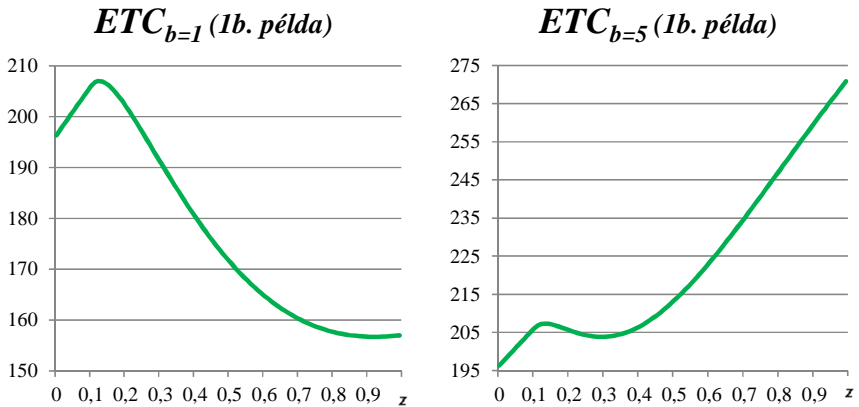
A fenti két ábra segítségével is összefoglalhatjuk, hogy míg  $0 \leq z < 1 - a$  és  $z = 1$  esetére meg tudunk mondani bizonyos szabályszerűségeket, addig az  $1 - a \leq z < 1$  intervallumon a függvény a paraméterektől függően számos különböző alakot ölthet. Ezen tulajdonságok nagyban befolyásolják az összköltség függvény alakját. Ezek közül mutatunk meg többet a következő három példában.

*1a. példa.* Legyen  $g(z) = Ce^{-z}$ ,  $C = 0.1$ ,  $a = 0.5$ ,  $h = 1$ ,  $b_1 = 1$  és  $b_2 = 5$ . Salameh és Jaber (2000) alapján  $s = 100$  és  $D = 137$ . Az összköltség függvény  $0 \leq z < 0.5$  intervallumon megegyezik a két  $b$  értékre, magasabb  $z$ -kre azonban jelentős eltérés mutatkozik. A hiány alacsonyabb fajlagos költsége esetén ( $b_1 = 1$ ) alacsonyabb a minimum értéke  $ETC_{\min} = 111.15N$ , melyet magasabb helyen ( $z = 0.82$ ) vesz fel.  $b_2 = 5$  esetén ugyanis  $z = 0,57$ -ben van minimum, melynek értéke  $ETC_{\min} = 126.36N$ . A hiány magasabb fajlagos költsége tehát gyorsabb minőség-ellenőrzésre ösztönzi a vállalatot.



10. ábra. Az 1a. példa összköltség függvényei ( $g(z) = Ce^{-z}$ ,  $C = 0.1$ ,  $a = 0.5$ ,  $h = 1$ ,  $s = 100$ ,  $D = 137$ )

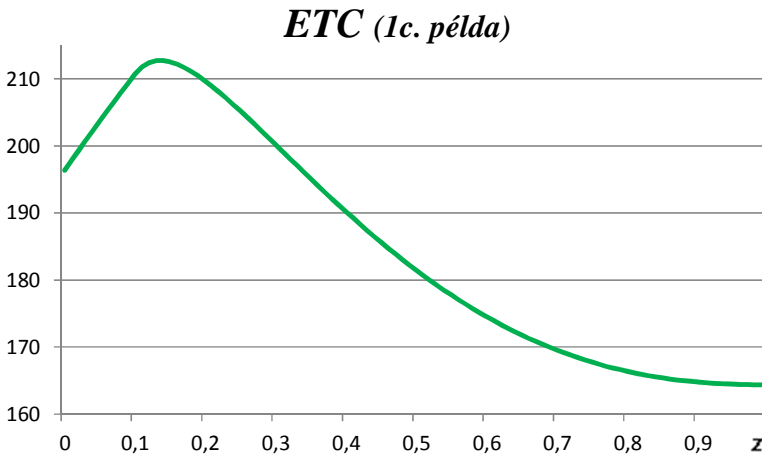
*1b. példa.* Tekintsük az 1a. példát  $a = 0.9$ -re. A  $0 \leq z < 1 - a$  intervallumon  $ETC$  lineáris növekvő, melyet  $0.1 \leq z$  szakaszon némi növekedés után csökkenés, majd megint növekedés követ. Alacsony fajlagos hiányköltség esetén az összköltség minimuma a  $z = 1$ -hez közel helyezkedik el, minimális sebességnövelésre van tehát szükség. Magas  $b$  érték esetén azonban épp  $z = 0$ -ban van az elméleti minimum. Attól függően, hogy hol van  $z$  technikai minimuma, vagy abban a  $z_{\min}$  pontban, vagy a  $z = 0.29$  helyen veszi fel a legalacsonyabb értékét  $ETC_{b=5}$ .



11. ábra. Az 1b. példa összköltség függvényei ( $g(z) = Ce^{-z}$ ,  $C = 0.1$ ,  $a = 0.9$ ,  $h = 1$ ,  $s = 100$ ,  $D = 137$ )

Az eddig bemutatott példákban  $z = 1$  helyen növekvő volt az összköltség függvény, ami annak köszönhető, hogy  $K(z)$  kifejezés nagyobb súllyal szerepelt az összegben. Ahogy a fentiekben láttuk,  $G(z)$  csökkenő  $z = 1$ -ben, ezért ennek a tagnak nagyobb súlyt adva  $ETC$  is csökkenhet  $z = 1$ -ben, így lehet ezen a helyen a minimum. Az 1c. példában ennek érdekében megnöveltük a minőség-ellenőrzés gyorsításának költségét.

1c. példa. Tekintsük az 1a. példát  $a = 0.9$ ,  $b = 1$  és  $C = 20$  mellett. A függvény menetét tekintve annyi változás történt, hogy  $z = 1$ -hez közeledve a monotonitás továbbra is csökkenő marad, így a minimum  $z = 1$  helyen van. A minőség-ellenőrzés sebességének növelése drágább tehát annál, amennyit a vállalat megtakarítana a gyorsabb munkavégzés következtében.



12. ábra. Az 1c. példa összköltség függvényei ( $g(z) = Ce^{-z}$ ,  $C = 20$ ,  $a = 0.9$ ,  $h = 1$ ,  $b = 1$ ,  $s = 100$ ,  $D = 137$ )

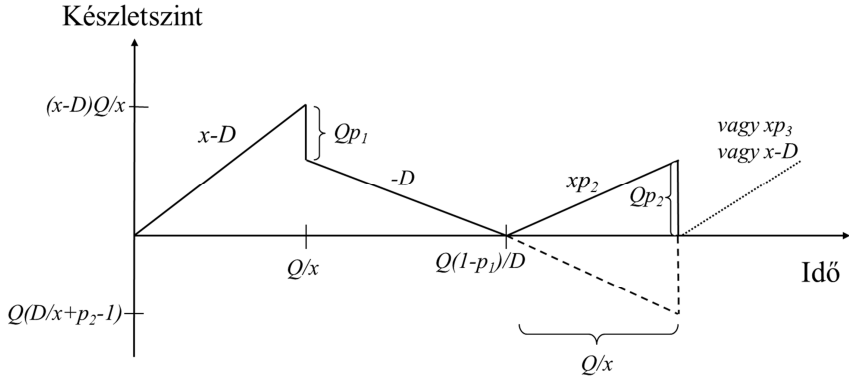
Ahogy azt a példák is érzékeltetik, az összköltség függvény minimuma a  $z_{\max} \geq z \geq z_{\min}$  intervallumon elhelyezkedhet  $z_{\min}$ ,  $z_{\max}$ ,  $z = 1 - a$  helyeken, illetve a  $z_{\max} > z > 1 - a$  szakaszon. Amennyiben  $K(z)$  és  $G(z)$  monotonitása ellentétes irányú, és  $G(z)$  annyira magas, hogy  $ETC$  nem lineáris a  $z_{\min} \leq z \leq 1 - a$  intervallumon, úgy ezen szakasz belső pontja is lehet minimumpont. A minimumhely megtalálására alkalmazhatjuk az EOQ modellből ismert (Hauck és Vörös, 2015) algoritmust.

### Algoritmus

1. Kiszámítjuk  $ETC(z_{\max})$  értékét, és legyen  $L = ETC(z_{\max})$ , valamint  $z_{opt} = z_{\max}$ .
2. Tekintsük  $\partial ETC(z)/\partial z$  deriváltat a (7a-e) összefüggések érvényessége mellett az  $1 - z \leq a$  intervallumon! Megnézzük, hogy  $\partial ETC(z)/\partial z = 0$  elsőrendű feltételnek létezik-e megoldása az  $[1 - a, z_{\max}]$  intervallumon, és az minimumpont-e. Ha van minimum ezen az intervallumon, akkor jelölje  $z_{opt1}$ ! Az  $ETC(z_{opt1})$  érték kiszámítása után megvizsgáljuk, hogy  $ETC(z_{opt1}) < L$  teljesül-e. Ha igen, akkor legyen  $z_{opt} = z_{opt1}$ ! Amennyiben nincs minimum az intervallumon, akkor  $ETC(1 - a)$  értékét számítjuk. Ha  $ETC(1 - a) < L$ , akkor legyen  $L = ETC(1 - a)$  és  $z_{opt} = 1 - a$ !
3. Tekintsük  $\partial ETC(z)/\partial z$  deriváltat a (7a-e) összefüggések érvényessége mellett az  $a < 1 - z$  intervallumon! Megnézzük, hogy az  $\partial ETC(z)/\partial z = 0$  elsőrendű feltételnek létezik-e megoldása a  $[z_{\min}, 1 - a]$  intervallumon, és az minimumpont-e. Ha van minimum ezen az intervallumon, akkor jelölje  $z_{opt2}$ ! Az  $ETC(z_{opt2})$  érték kiszámítása után megvizsgáljuk, hogy  $ETC(z_{opt2}) < L$  teljesül-e. Ha igen, akkor legyen  $z_{opt} = z_{opt2}$ . Amennyiben nincs minimum az intervallumon, akkor  $ETC(z_{\min})$  értékét számítjuk. Ha  $ETC(z_{\min}) < L$ , akkor legyen  $L = ETC(z_{\min})$  és  $z_{opt} = z_{\min}$ !
4.  $L$  értéke megmondja az éves készletezéssel kapcsolatos összköltség minimumát. Az optimális minőség-ellenőrzési sebesség pedig  $x_{opt} = D/z_{opt}$  összefüggésből adódik. A kapott értéket a (10) összefüggésbe helyettesítve megkapjuk a gazdaságos sorozatnagyság,  $Q_{opt}$  szintjét.

### 3.2 A minőség-ellenőrzési sebesség növelése egymástól független ciklusokban

Az eddigiekhez képest ebben a szakaszban arra az esetre terjesztjük ki vizsgálódásainkat, hogy mi történik, ha az egymást követő készletezési periódusokban eltérő lehet a selejtarány. Ez olyan ingadozásokhoz is vezethet, hogy egyes ciklusokban keletkezik hátralék, míg másokban nem.



13. ábra. Készletalakulási diagram egymástól független ciklusokra, a második periódusban magasabb selejtaránnyal. Forrás: Vörös (2013) alapján saját szerkesztés

A 13. ábra egy olyan példát szemléltet, ahol az első ciklusban még alacsonyabb volt a selejtarány, ezért nem fordult elő hiány, a másodikban azonban olyan szintű meghibásodás történt, hogy jelentős mennyiségű hátralék halmozódott fel. Ennek megfelelően a második periódus csak az átvizsgálási időszak végéig tart, vagyis rövidebb az elsőnél. Az éves készletezési összköltség meghatározásához tehát a ciklushossz várható értékével kell számolnunk. Ehhez tudnunk kell, hogy egy periódus  $Q(1-p)/D$  ideig tart, ha nincs hiány, és  $Q/x$  ideig, ha van:

$$CL(Q, z) = \begin{cases} Q(1-p)/D & \text{ha } 0 \leq p \leq 1-z, \\ Q/x & \text{ha } 1-z < p \leq 1. \end{cases}$$

A ciklushossz ( $CL$ ) várható értéke tehát:

$$\begin{aligned} ECL(Q, z) &= \int_0^{1-z} \frac{Q(1-p)}{D} f(p) dp + \int_{1-z}^1 \frac{Q}{x} f(p) dp = \\ &= \frac{Q}{D} \left( \int_0^{1-z} (1-p) f(p) dp + z \int_{1-z}^1 f(p) dp \right) = \frac{Q}{D} S(z). \end{aligned} \quad (12)$$

Egy évben tehát  $1/ECL = D/(QS(z))$  periódust feltételezünk, ha  $S(z) > 0$ .  $S(z)$  definíciója alapján (ld. 7a)  $E(p) < 1$  esetén pozitív. Mindig teljesül tehát a feltétel, mivel ha a selejtarány várható értéke 100% lenne ( $E(p) = 1$ ), akkor a vállalkozás működésének nem lenne értelme. A készletezési és hátralék költségek várható összege egy ciklusban:

$$\begin{aligned} ECC(Q, z) &= \int_0^{1-z} HCC1(Q, z) f(p) dp + \int_{1-z}^1 (HCC1(Q, z) + BCC2) f(p) dp = \\ &= h \frac{Q^2}{2D} H(z), \end{aligned}$$

ahol

$$\begin{aligned} H(z) &= \int_0^{1-z} (2pz + (1-p)^2 - z) f(p) dp + \\ &+ z \int_{1-z}^1 \left( p + \frac{b}{h}(z-1+p) \right) f(p) dp. \end{aligned} \quad (13)$$

A fentiekből következően a készletezési összköltség várható értéke:

$$\begin{aligned} ETC(Q, z) &= \frac{ND}{QS(x)} \left( s + \frac{hQ^2H(z)}{2D} + \frac{g(z)zQ}{D} \right) = \\ &= \frac{N}{S(x)} \left( \frac{sD}{Q} + \frac{hQH(z)}{z} + zg(z) \right), \end{aligned} \quad (14a)$$

így a gazdaságos sorozatnagyság minden  $E(p) < 1$ -re

$$Q_{opt}(z) = \sqrt{\frac{2sD}{h}} \sqrt{\frac{1}{H(z)}}. \quad (14b)$$

6. TÉTEL. *Egymástól független ciklusokat feltételezve, az EPQ modellben több elemből áll a gazdaságos sorozatnagyság, mint az EOQ modellben.*

$H(z)$ -t összehasonlítva az EOQ modellre érvényes értékével, az EPQ-ra jellemző érték  $z$  egységgel kevesebb. Ebből következően (14b) miatt a gazdaságos sorozatnagyság nagyobb az EPQ modellben, ami megfelel a szakirodalom minőség-ellenőrzés nélküli EOQ és EPQ modelljeivel kapcsolatos megállapításainak.

(14) felhasználásával a következő optimalizálási problémához jutunk:

$$\min_z ETC(z)/N = (\sqrt{2sDh}\sqrt{H(z)} + zg(z))/S(z) \quad (15)$$

A  $zg(z)$  kifejezés  $z$  szerinti deriváltja  $(g(z) + zg_z)$ , ahol mivel  $g(z)$  csökkenő, ezért  $g_z$  előjele negatív, így az összeg is lehet negatív. A fentiekben vizsgált függvények közül  $g(z) = C/z$  esetén a derivált értéke nulla, ezért  $zg(z)$  konstans. Negatív a derivált előjele, ha  $g(z) = C/z^2$ , és pozitív, ha  $g(z) = Ce^{-z}$ . A második deriváltak alapján előbbi konvex csökkenést, míg utóbbi konkáv növekvést jelent  $z$ -ben.

7. TÉTEL. *Független ciklusok esetén  $S(z)$  viselkedése megegyezik az EOQ modellben (Hauck és Vörös 2015) leírtakkal,  $H(z)$  tulajdonságai azonban eltérnek attól. A kezdeti értékek megegyeznek, a  $0 \leq z < 1 - a$  intervallumon  $H(z)$  lineáris, de az EOQ modellben növekvő, míg az EPQ modellben csökkenő. Az  $1 - a \leq z \leq 1$  intervallumon mindkét esetben konvex a függvény, EOQ-ra növekvő. A  $z = 1$  helyen felvett érték az EOQ modellben egységnyiivel nagyobb, mivel a két függvény értéke között  $z$  egységnyi különbség van.*

	$0 \leq z < 1 - a$	$1 - a \leq z \leq 1$
$S(z)$	konstans pozitív, értéke $1 - E(p)$	konvex növekvő, $S(1) = 1$
$H(z)$ – EOQ modell	lineáris növekvő, $H(0) = E(1 - p)^2$	konvex növekvő, $H(1) = 1 + E(p) + bE(p)/h$
$H(z)$ – EPQ modell	lineáris csökkenő, $H(0) = E(1 - p)^2$	konvex, $H(1) = E(p)(1 + b/h)$

4. táblázat.  $S(z)$  és  $H(z)$  tulajdonságai független ciklusok esetén.  
Forrás: Hauck és Vörös (2015), valamint saját számítás



Mivel

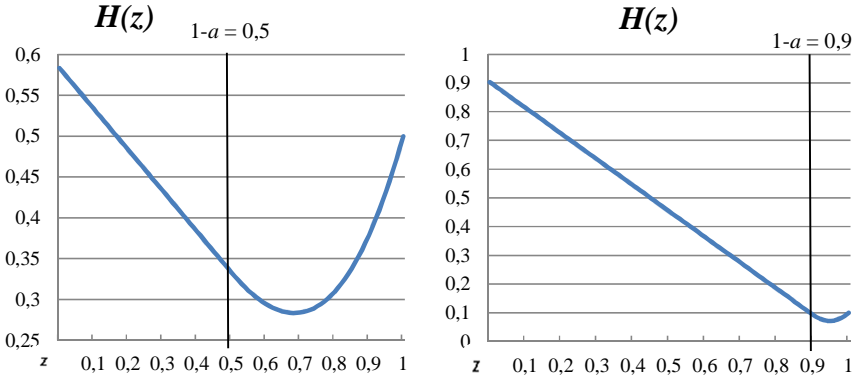
$$H_z = \int_0^{1-z} (2p-1)f(p) dp + \int_{1-z}^1 \left(p + \frac{b}{h}(2z-1+p)\right)f(p) dp,$$

ezért egyenletes eloszlás esetén  $H(z)$  lineáris csökkenő a  $z < 1 - a$  intervallumon, ugyanis  $H_z = a - 1$ , ami  $a < 1$  miatt negatív. A függvény konvex az  $1 - a \leq z \leq 1$  intervallumon, mivel

$$H_{zz} = z(1 + b/h)f(1 - z) + (2b/h) \int_{1-z}^1 f(p) dp > 0.$$

Nem állapíthatunk meg az egész intervallumra jellemző monotonitási irányt, viszont  $z = 1$ -ben a függvény növekvő, mivel  $H_z(1) = E(p) + E(1+p) \cdot b/h > 0$ .

A 14. ábra egyenletes eloszlásra és két különböző  $a$ -ra mutatja be  $H(z)$  alakját. Láthatjuk, hogy a csökkenés a második intervallumra érve is folytatódik, majd a minimumot elhagyva konvex módon növekszik.



14. ábra.  $H(z)$  alakja egyenletes eloszlásra  $a = 0.5$  és  $a = 0.1$  esetén ( $h = b = 1$ )

8. TÉTEL. A (15) optimalizálási problémában szereplő  $\sqrt{H(z)}/S(z)$  hányados  $a \leq z < 1 - a$  intervallumon csökkenő;  $z = 1$  helyen növekvő, ha  $b/(b+h) > E(p)$ , és csökkenő, ha  $b/(b+h) < E(p)$ .

A  $\sqrt{H(z)}/S(z)$  tört  $z$  szerinti deriváltjának előjelét  $(S(z)H_z - 2H(z)S_z)$  előjele határozza meg. Ha  $0 \leq z < 1 - a$ , akkor mivel  $S_z = 0$ ,  $S(z) > 0$  és  $H_z < 0$ , ezért negatív eredményt kapunk, a hányados tehát  $z$ -ben csökken. A  $z = 1$  helyen tudjuk, hogy  $S(1) = 1$ ,  $S_z(1) = 1$ ,  $H(1) = (1 + b/h)E(p)$  és  $H_z(1) = E(p) + (b/h)E(1 + p)$ . Ebből következően  $S(z)H_z - 2H(z)S_z = -(1 + b/h)E(p) + b/h$ , ami pozitív, tehát a hányados növekvő  $z = 1$  helyen, ha  $b/(b+h) > E(p)$ , és negatív, tehát csökkenést tapasztalhatunk, ha  $b/(b+h) < E(p)$ . Ez a tulajdonság megegyezik az 5. tételben  $K(z)$  szorzatra tett megállapítással.

9. TÉTEL. A  $0 \leq z < 1 - a$  intervallumon  $ETC(z)$  összköltség függvény csökkenő, ha  $g(z) + zg_z < 0$ , és abban a ritka esetben növekvő, ha

$$-\sqrt{2sDh} \cdot (H_z/2\sqrt{H}) < g(z) + zg_z.$$

A  $z = 1$  helyen a függvény csökkenő, ha  $b/(b+h) < E(p)$ . Ha  $b/(b+h) > E(p)$ , akkor a csökkenés feltétele:

$$g_z < \left( \sqrt{2sDh}(E(p)(1+b/h) - b/h) \right) / 2\sqrt{E(p)(1+b/h)}.$$

Az összköltség várható értékének minimumát keresve meghatározzuk (15) menetét. Az első derivált az alábbi alakot ölti:

$$\frac{\partial}{\partial z}(ETC/N) = \left( \sqrt{2sDh}(SH_z/2\sqrt{H} - S_z\sqrt{H}) + (g(z) + zg_z)S - S_zzg(z) \right) / S^2. \quad (16)$$

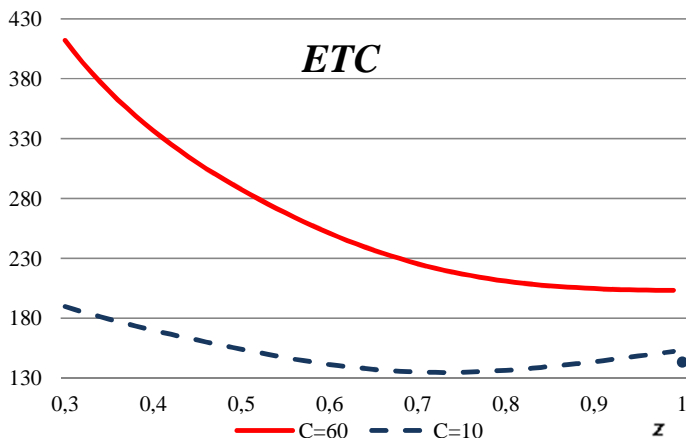
A 8. tétel alapján a  $0 \leq z < 1 - a$  intervallumon az összeg első tagja csökkenő. A második tagban  $S_z = 0$  és  $S(z) > 0$  miatt  $g(z) + zg_z$  dönt az előjelről, melynek viselkedését a fentiekben mutattuk be. Összességében megállapíthatjuk, hogy a  $0 \leq z < 1 - a$  intervallumon az összköltség függvény csökkenő, ha  $g(z) + zg_z < 0$ . Nem minimum tehát a  $z = 0$  pont, ahol a minőség-ellenőrzés sebessége minden határon túl növelt. Növekedés is elképzelhető ezen az intervallumon, ha  $g(z) + zg_z > 0$  (pl.  $g(z) = Ce^{-z}$  függvényt feltételezve) és  $\sqrt{2sDh}$  rendkívül alacsony:  $-\sqrt{2sDh}(H_z/2\sqrt{H}) < g(z) + zg_z$ .

A  $z = 1$  helyen (16) második tagja mindig negatív, mivel  $S(z) = S_z(z) = 1$ , amiből  $(g(z) + zg_z)S - S_zzg(z) = g_z$ , ami pedig definíció szerint negatív. (16) első tagja a 8. tétel alapján szintén csökkenő a  $z = 1$  helyen, ha  $b/(b+h) < E(p)$ . Ebben az esetben tehát az összköltség függvény biztosan csökkenő  $z = 1$ -ben, vagyis lehet minimumhely. Ez azt jelenti, hogy a minőség-ellenőrzés sebessége a napi kereslet ütemével egyezik meg.

(16) első tagja pozitív  $z = 1$ -ben, ha  $b/(b+h) > E(p)$ , ezért az összköltség lehet növekvő ezen a helyen. Tekintve, hogy a hiány fajlagos költsége jellemzően magasabb, mint a készlettartásé, ezért  $b/(b+h) > 0.5$  reális feltételezés. Az egyenlőtlenség másik oldalán álló  $E(p)$  a selejtarány várható értéke, így jellemzően kevesebb 0.5-nél. Egyenletes eloszlásnál például  $E(p) = a/2$  és  $a < 1$  miatt igaz ez az állítás. Összességében tehát  $b/(b+h) > E(p)$  teljesülése a valószínűbb. Ebben az esetben (16) csökkenő  $z = 1$ -ben, ha

$$g_z < \left( \sqrt{2sDh}(E(p)(1+b/h) - b/h) \right) / 2\sqrt{E(p)(1+b/h)}.$$

2a. példa. Legyen  $g(z) = C/z^2$ ,  $b = 2h$  és  $a = 0.5$ . Salameh és Jaber (2000) példájának megfelelően  $\sqrt{2sDh} = 165.53$ . Az előző egyenlőtlenséget aktualizálva és egyenletes selejteloszlást feltételezve, az összköltség függvény csökkenő  $z = 1$ -ben, ha  $-2C < -119.5$ , azaz  $C > 59.75$ .



15. ábra. A 2a. példa összköltség függvényei.  $g(z) = C/z^2$ ,  $g(z_{\max}) = 0$ ,  $z_{\max} = 1$ ,  $z_{\min} = 1$ ,  $a = 0.5$ ,  $b = 2h$ ,  $s = 100$ ,  $D = 137$

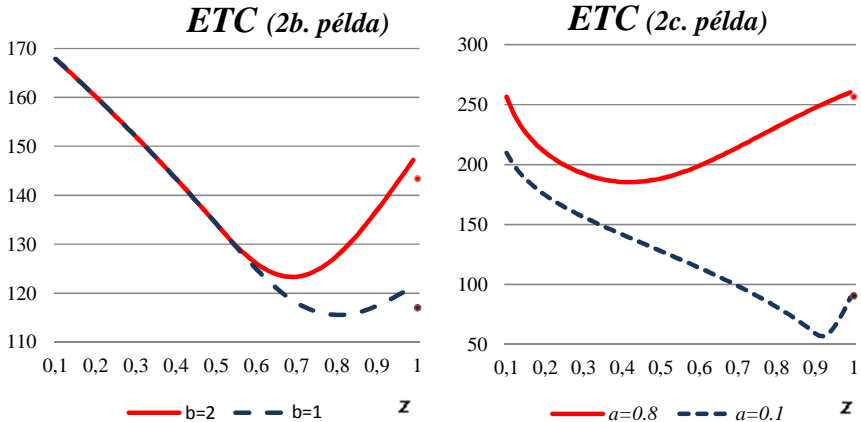
A 15. ábra bemutatja, hogy a minőség-ellenőrzés növelésének magas költsége ( $C = 60$ ) mellett a függvény csökkenő  $z = 1$ -ben, azaz a vállalatnak nem célszerű gyorsítania az átvizsgálási sebességet. A minimum értéke  $ETC(1) = 143.4N$ . Amennyiben azonban olcsóbban ( $C = 10$ ) tudja megvalósítani a gyorsítást, úgy az összköltség minimuma alacsonyabb  $z$ , azaz magasabb átvizsgálási sebesség mellett áll elő. Esetünkben  $z = 0.73$ -ban veszi fel a minimumot,  $ETC = 134.8N$  értékkel.

2b. példa. Legyen  $g(z) = 5/z$ ,  $a = 0.5$ ,  $z_{\min} = 0.1$ ,  $\sqrt{2sDh} = 165.53$ ,  $h = 1$ ,  $b_1 = 1$  és  $b_2 = 2$ . A 7. tételnek megfelelően  $ETC$  a  $0 \leq z < 1 - a$  intervallumon csökkenő,  $z = 1$ -ben pedig növekvő. A minimum ezért a  $0.5 \leq z \leq 1$  szakaszon található. Ahogy az a 16. ábrán is látszik, a hiány fajlagos költségének emelése sürgeti a minőségellenőrzést,  $b_1 = 1$  esetén ugyanis  $z = 0.8$ , míg  $b_2 = 2$ -re  $z = 0.69$  a minimum helye. A minimum értéke rendre  $115.6N$  és  $123.3N$ .

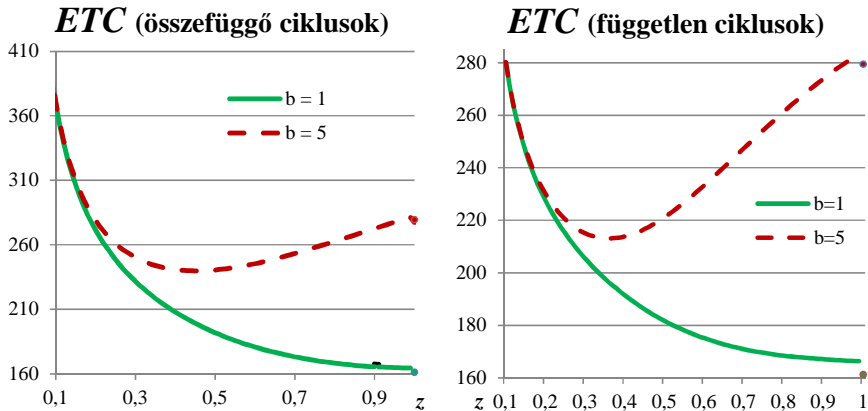
2c. példa. Legyen  $g(z) = 5/z^2$ ,  $a_1 = 0.1$ ,  $a_2 = 0.8$ ,  $z_{\min} = 0.1$ ,  $\sqrt{2sDh} = 165.53$ ,  $h = 1$  és  $b = 5$ . A 7. tételnek megfelelően  $ETC$  a  $0 \leq z < 1 - a$  intervallumon csökkenő,  $z = 1$ -ben pedig növekvő. A minimum ezért az  $1 - a \leq z \leq 1$  szakaszon található. Ahogy az a 16. ábrán látható, a selejtarány várható értékének növekedése gyorsabb minőség-ellenőrzésre készíti a céget,  $a_2 = 0.8$  esetén ugyanis  $ETC_{opt}(0.42) = 185.23N$ , míg  $a_1 = 0.1$ -re  $ETC_{opt}(0.92) = 56.8N$ .

Az összefüggő és egymástól független ciklusok összehasonlításához Hauck és Vörös (2015) EOQ modellekre vonatkozó példáját oldjuk meg. Ez lehetővé teszi, hogy nemcsak a két rendszertípust, de az EOQ és az EPQ modellváltozatok különbségeit is össze tudjuk vetni egymással:

3. példa. Legyen  $g(z) = 5/z^2$ ,  $a = 0.95$ ,  $z_{\min} = 0.1$ ,  $\sqrt{2sDh} = 165.53$ ,  $h = 1$ ,  $b_1 = 1$  és  $b_2 = 5$ . A példát a 17. ábra illusztrálja.



16. ábra. A 2b és 2c példa összköltség függvényei

17. ábra. A 3. példa összköltség függvényei.  $g(z) = C/z^2$ ,  $g(z_{\max}) = 0$ ,  $z_{\max} = 1$ ,  $z_{\min} = 0.1$ ,  $C = 5$ ,  $a = 0.95$ ,  $s = 100$ ,  $D = 137$ 

Alacsony fajlagos hiányköltség esetén ( $b_1 = 1$ ) az összefüggő és a független ciklusokat bemutató *ETC* görbék alakja hasonló. A minimum mindkét esetben  $z = 1$  helyen van, értéke  $161.34N$ . A minőség-ellenőrzés sebességét növelve – tehát a görbén jobbról balra haladva – azonban jelentősen magasabb az összefüggő ciklusokra vonatkozó összköltség. Ennek oka, hogy a selejt lehetőleg magasabb aránya magas:  $a = 0.95$ .

Amennyiben megnöveljük a hátralék fajlagos költségét ( $b_2 = 5$ ), úgy az optimumban is nagyobb eltérést tapasztalhatunk. Ismét az összefüggő ciklusokra vonatkozó összköltség a magasabb  $ETC_{\min}(0.45) = 24.85N$ , melynek a helye az egymástól független ciklusokhoz képest magasabb  $z$  helyen van, ami lassabb minőség-ellenőrzést jelent. Ennek minimuma ugyanis  $ETC_{\min}(0.36) = 213.07N$ .

Az EOQ modell ugyanezen példára kapott eredményeit tekintve  $b_1 = 1$  esetén ugyanúgy  $z = 1$  helyen van a minimum. Összefüggő ciklusokra  $b_2 = 5$

mellett nem találtunk nagy különbséget, ugyanis  $z_{opt} = 0.53$  (vs. 0.45). Egymástól független ciklusok esetén jelentősebb különbség mutatkozik, az összköltség függvény ugyanis a  $z_{opt} = 0.16$  (vs. 0.36) helyen, tehát jóval gyorsabb minőség-ellenőrzés mellett ( $x_{opt} = 865$  vs.  $x_{opt} = 304$ ) veszi fel minimumát. A fentiekben és a szakirodalomban megállapítottaknak megfelelően az EPQ modellben magasabb a gazdaságos sorozatnagyság. A  $b_2 = 5$  esetben összefüggő ciklusokat feltételezve 219 egység áll az EOQ 148 darabos sorozatnagyságával szemben, míg egymástól független ciklusokra kisebb a különbség, 252 vs. 232 darab. Ahogy láttuk, nem állapíthatunk meg hasonló szabályszerűséget azonban a minőség-ellenőrzés optimális sebességére vonatkozóan.

## 4 Következtetések

A tanulmányban olyan Economic Production Quantity (EPQ) modelleket írtunk fel, melyek figyelembe veszik, hogy eladás előtt minden egyes terméket át kell vizsgálnia a vállalatnak, hogy azok megfelelnek-e a minőségi elvárásoknak vagy sem. A minőségellenőrzés sebessége döntési változó, így a gazdaságos sorozatnagyság mellett ennek is kerestük az optimális értékét. Megjegyeztük, hogy a sebesség növelésének akkor van értelme, ha az lassabb a termelési rátánál. Amennyiben a termelési ráta a szűk keresztmetszet, úgy az optimális sebességre tett megállapításokat a termelés sebességére értelmezhetjük.

A rendszer viselkedésének két típusát különböztettük meg aszerint, hogy minden keresletet ki tud-e elégíteni a vállalat vagy sem. Amennyiben az adott napon talált jó minőségű termékek száma meghaladja a napi keresletet, úgy nem keletkezik hiány. Ebben az esetben a minőség-ellenőrzés sebességét akkor lehet érdemes növelni, ha a selejtarány eléri az ötven százalékot. Hátralék keletkezése esetén a sebesség növelése csökkenti a hiány átlagos szintjét, a készleten tartási költségeket nem befolyásolja, ugyanakkor növeli a sorozatkezdések számát. A selejtarány valószínűségi változó, amely meghatározó hatással lehet arra, hogy keletkezik-e hátralék. A vállalat ugyanezt a minőség-ellenőrzési sebesség (termelési ráta) megfelelő változtatásával tudja befolyásolni.

Az elemzést összefüggő és egymástól független ciklusokra is elvégeztük. Előbbi azt jelenti, hogy a rendszer minden egyes periódusban olyan selejtarányt és modelltypust mutat, ahogy az az elsőben kialakult. Összehasonlítottuk ezt azzal az esettel, hogy minden periódus végén az előzőtől független állapot áll elő. Jelentős különbségeket akkor tapasztaltunk, amikor magas fajlagos hiányköltséggel kalkuláltunk.

A problémát a sebességváltoztatás költségének három különböző típusú függvénye mellett vizsgáltuk meg. A készletezéssel kapcsolatos összköltség minimumát minden esetben a sorozatnagyság és az átvizsgálási sebesség döntési változók mentén határoztuk meg. Kitértünk arra is, hogyan hatnak az összköltség függvényre olyan paraméterek, mint a selejtarány maximálisan elérhető értéke, valamint a hiány fajlagos költsége. Ahogy az EOQ modellben, itt is igazolást nyert, hogy a hiány fajlagos költségének emelése különösen sürgeti az átvizsgálást. Az EOQ modellhez képest a gazdaságos sorozatnagyság

ság mind összefüggő, mind egymástól független ciklusok esetén magasabb lett, a minőség-ellenőrzési sebesség optimális szintje azonban hol magasabb, hol alacsonyabb értéket mutatott.

## Irodalom

1. Harris, F. (1913), How many parts to make at once, *Factory, The Magazine of Management* 10(2), 135–136.
2. Hauck Zs., Vörös J. (2015), Lot sizing in case of defective items with investments to increase the speed of quality control, *Omega* 52, 180–189.
3. Khan, M., Jaber, M. Y., Guiffrida, A. L., Zolfaghari, S. (2011): A review of the extensions of a modified EOQ model for imperfect quality items, *International Journal of Production Economics* 132, 1–12.
4. Maddah, B., Jaber, M. Y. (2008), Economic order quantity for items with imperfect quality: Revisited, *International Journal of Production Economics* 112, 808–815.
5. Papachristos, S., Konstantaras, I. (2006), Economic order quantity models for items with imperfect quality, *International Journal of Production Economics* 100, 148–154.
6. Porteus, E. L. (1986), Optimal lot sizing, process quality improvement and setup cost reduction, *Operations Research* 34(1), 137–144.
7. Rosenblatt, M. J. – Lee, H. L. (1986), Economic production cycles with imperfect production processes, *IIE Transactions* 18(1), 48–55.
8. Salameh, M. K., Jaber, M. Y. (2000), Economic production quantity model for items with imperfect quality, *International Journal of Production Economics* 64, 59–64.
9. Taft, E. W. (1918), The most economical production lot, *Iron Age* 101, 1410–1412.
10. Vörös, J. (1999), Lot sizing with quality improvement and setup time reduction, *European Journal of Operational Research* 113(3), 568–574.
11. Vörös, J. (2013), Economic order and production quantity models without constraint on the percentage of defective items, *Central European Journal of Operations Research* 21(4), 867–885.

## EPQ MODELS WITH THE SCREENING SPEED AS DECISION VARIABLE

In this paper, we consider Economic Production Quantity (EPQ) models where screening of every item is carried out before selling the lot. The proportion of defective items is random, and imperfect products found leave the system in a batch at the end of the screening period. Production rate and screening speed are decision variables. Enhancing speed of the bottleneck makes backlogging costs decrease and – depending on the proportion of defections – it does also affect holding and setup costs. Our goal is to find the minimum of the related total cost for different types of screening accelerating cost functions. Analysis is carried out for connecting and independent cycles as well, where percentage of defection stays the same and can change from period to period, respectively. Results are compared to those of Economic Order Quantity models.

*Keywords:* EPQ model, screening speed, lot size

# AZ ELSŐ DEMOGRÁFIAI OSZTALÉK, ÉS MAGYARORSZÁGI ALAKULÁSA<sup>1</sup>

BERDE ÉVA – KUNCZ IZABELLA

*Budapesti Corvinus Egyetem*

Cikkünkben a nemzeti transzfeszámhákon alapuló növekedési modellekkel foglalkozunk, illetve az ilyen típusú modellek által meghatározott ún. első demográfiai osztalékokat bontjuk fel összetevőire. Megmutatjuk, hogy az első demográfiai osztalék a korosztályos népességi számok alakulásán kívül nagyban függ a korosztályos munkajövedelem és fogyasztás adataitól is. Ezen értékek téves becslése torzíthatja az első demográfiai osztalékokra vonatkozó számítások eredményeit, akár olyan mértékben is, hogy pozitív növekedési faktor helyett negatívát mutat ki.

*Journal of Economic Literature (JEL) kód: E24, O49*

## 1 Bevezetés

Cikkünkben a demográfiai átmenetet figyelembe vevő, nemzeti transzfeszámhákon alapuló növekedési modellekkel foglalkozunk, illetve az ilyen típusú modellek által meghatározott ún. első demográfiai osztalékokat bontjuk fel összetevőire. A közgazdaságtan nagy utat járt be, míg a Harrod [1939] és Domar [1946] típusú modellektől Solow [1956] és Swan [1956] modelljén át, majd a lakosság inhomogenitását is figyelembe vevő együttélő nemzedékeket tartalmazó modellek (Samuelson [1958], Diamond [1965]) után, a Yaari [1965], Blanchard [1985] valamint a Barro [1991, 1998]-féle modelleken keresztül eljutott a Lee [1980, 1994], Bloom és Williamson [1998], Feyrer [2007], valamint Mason és Lee [2007] típusú, kifejezetten a lakossági korosztályok népességszámának, fogyasztásának és jövedelmének módosulásán alapuló növekedési modellekhez.

Ezek a modellek elvetik azt a korábbi implicit feltevést, hogy a népesség kor szerinti összetétele állandó. A korosztályos népesség változására épülő közgazdasági gondolkodásnak két, egymással összefüggő irányzata van: a megtakarítások és beruházások életciklus modellezése (lásd pl. Lee és szerzőtársai [2000], Bloom és szerzőtársai [2003], Augusztinovic [1992] valamint Simonovits [2003]), és a munka termelékenységének korszekifikus változásán alapuló növekedési modellezés. Ez utóbbi részeként a nemzeti transzfeszámhákkal (National Transfer Accounts, rövidítéssel NTA) foglalkozó irodalmak (lásd pl. Dramani és Ndiaye [2012], Mason és Lee [2013], Prskawetz és Sambdt [2014], Gál és szerzőtársai [2011]) megkísérik megbecsülni az ún. demográfiai

---

<sup>1</sup>Beérkezett: 2014. október 20. E-mail: [eva.berde@uni-corvinus.hu](mailto:eva.berde@uni-corvinus.hu).

osztalék valamelyik, vagy mindkét elemének (első és második demográfiai osztalék, angolul first and second demographic dividend) alakulását.

Az első demográfiai osztalék azt mutatja meg, hogy egy sajátos értelmezés szerint tekintett dolgozói létszám (munkások) növekedési üteme (esetenként ez csökkenést is jelenthet) milyen értékkel tér el egy szintén sajátos értelmezés szerint tekintett fogyasztói létszám növekedési ütemétől (mely utóbbi szintén jelenthet csökkenést). Amennyiben az eltérés pozitív, akkor az első demográfiai osztalék növekszik, negatív érték esetén pedig csökken. Mind a munkások, mind a fogyasztók számának sajátos értelmezése úgy történik, hogy egy munkásnak, illetve egy fogyasztónak tekintjük az előre rögzített korosztályba tartozó lakosok átlagos jövedelmét termelő, illetve átlagos fogyasztási értékét elfogyasztó, adott évben élő embert. Ezért az idősebbek és fiatalabbak általában kevesebbet „érnek” egy munkásnál, de fogyasztás szempontjából egyaránt jelenthetnek egynél több, vagy egynél kevesebb fogyasztót is.

Cikkünkben egyrészt megmutatjuk azt, hogy az első demográfiai osztalék számszerűsítésekor fontos a jövedelmi és fogyasztási adatok pontos értéke, és ha közelítésképpen más ország, vagy másik év jövedelmi és fogyasztási adatait használjuk, akkor az első demográfiai osztalék akár a növekedés tendenciáját tekintve is adhat téves eredményt. Emellett arra is felhívjuk a figyelmet, hogy az osztalék nagyságát annak a korosztálynak a korhatára is befolyásolhatja, akiknek az átlagos jövedelmét és átlagos fogyasztását tekintjük a viszonyítási alapnak. Míg az első demográfiai osztalék a lakosság jövedelemtermelésétől és fogyasztásától függ, addig a második demográfiai osztalék a munkaképes korúak megtakarításának, idősebb korok megélhetését finanszírozó fizikai és humán tőkeberuházásainak a függvénye. A második demográfiai osztalék azonban meghaladja a most vizsgálni kívánt kérdések témakörét.

A demográfiai hatások legalább közvetett figyelembe vétele a mai növekedési modellekben már olyannyira általános, hogy ha egy szerző egyéb irányú céljai következtében mégis eltekint a demográfiai változásoktól, akkor ezt általában meg is indokolja (lásd pl. Bessenyei és Horváth [2012]). Jelen tanulmányunkban éppen a demográfiai változások növekedést befolyásoló hatása a középpontba állított kérdés. A bevezetés után, a második részben ismertetjük az első demográfiai osztalék fogalmát, és az osztalék szempontjából kulcsfontosságú eltartási ráta (angolul support ratio) definícióját. A harmadik részben a demográfiai osztalék magyarországi alakulását mutatjuk be, adathiány miatt azzal a téves módszerrel, amire a második részben hívjuk fel a figyelmet. Nem tehattünk azonban mást, mert a szükséges jövedelmi és fogyasztási adatok pillanatnyilag csak egyetlen évre vonatkozóan állnak rendelkezésre. Rögtön meg is mutatjuk, hogy mennyivel más eredményt kaptunk volna, ha más év, vagy más ország jövedelmi és fogyasztási adatait illesztettük volna a magyar demográfiai értékek mellé. Egyelőre azonban a még frissnek tekinthető nemzetközi szakirodalom pontosan ezt a módszert alkalmazza, amelynek veszélyeire épp ezekkel, a Magyarországra számszerűsített különböző osztaléknagyságokkal kívánjuk felhívni a figyelmet. Végezetül, cikkünk befejezéseként, levonjuk a következtetéseket, és utalunk a korosztályi határok megválasztásának szerepére is.



## 2 Az első demográfiai osztalék

A továbbiakban Mason [2005] jelöléseit alkalmazva mutatjuk be azt a növekedési modellt, melyhez kapcsolódóan definiálható az első demográfiai osztalék. A modellben szükség van a figyelembe vett évek lakossági jövedelmére és fogyasztására. A jövedelem a megtermelt munkajövedelmet jelenti, melyet a statisztikai adatgyűjtés során a nettó bérek, valamint a munkavállaló és a munkáltató által kifizetett adók összegeként számszerűsítenek. Emellett különböző módszerekkel igyekeznek beszámítani a nem díjazott munkatevékenységek értékét is, elsősorban a háztartáson belüli munkavégzést (UN [2013], Gál et al. [2014]). A modell számszerűsítésekor fontos szerepet játszik a korosztályok fogyasztása is. Ennek az összeírása a háztartás-statisztikai felmérések segítségével készül. Az egyénileg finanszírozott fogyasztáshoz még hozzáadják a nemzeti statisztikákban feltüntetett közösségi fogyasztások értékét, elsősorban az oktatás és az egészségügyi ellátás költségét. A statisztikai részletek elemzése azonban mind a jövedelem, mind a fogyasztás vonatkozásában túlmutat jelenlegi vizsgálatunk témakörén. Cikkünkben alapvetően az első demográfiai osztalék modellezésére és meghatározására koncentrálnunk.

Az első demográfiai osztalékot meghatározó modellben a növekedés mércéje az egy effektív fogyasztóra jutó megtermelt jövedelem, a modell szóhasználatával az egy effektív fogyasztóra jutó kibocsátás alakulása. Az effektív fogyasztó meghatározása az alábbi (1)-es egyenletben egyrészt a lakosság demográfiai összetételétől, másrészt az egyes korosztályok relatív fogyasztásától függ.

$$N(t) = \sum_{a=0}^{\omega} \alpha(a, t) P(a, t) \quad (1)$$

Az (1) egyenletben  $N(t)$  a fogyasztók effektív száma a  $t$ -edik évben,  $\omega$  a maximális korév,  $P(a, t)$  az  $a$  életkorú populáció száma a  $t$ -edik évben, és  $\alpha(a, t) = \frac{c(a, t)}{c(b, t)}$ , korszpecifikus fogyasztási együttható. A korszpecifikus együtthatóban  $c(a, t)$  az  $a$  éves népesség  $t$ -edik évi egy főre eső átlagfogyasztása,  $c(b, t)$  pedig a 30-49 évesek életkoronkénti átlagfogyasztásának számtani átlaga szintén a  $t$ -edik évben. A 30-49 éveseket a továbbiakban báziskorosztálynak nevezzük. Ily módon a fenti (1)-es képlet a társadalom adott évi összes effektív fogyasztóinak a számát fejezi ki úgy, hogy egy effektív fogyasztónak azt a hipotetikus fogyasztót tekintjük, akinek a fogyasztása megegyezik a báziskorosztály átlagos fogyasztásával. A báziskorosztály átlagos fogyasztása pedig azt mutatja, hogy ha a báziskorosztály tagjai 30 és 49 éves koruk közt minden évben pontosan annyit fogyasztanak, mint a vizsgálat évében élő báziskorosztálybeliek életkoronkénti átlaga, akkor 30 és 49 éves koruk közt ennyi lenne az átlagos fogyasztásuk. Ez a megközelítés a handóságot figyelmen kívül hagyja.

A gazdaság növekedését az egy effektív fogyasztóra jutó kibocsátás (2)-es egyenlettel definiált értékének a növekedése méri

$$y^n(t) = \frac{Y(t)}{N(t)}, \quad (2)$$

ahol  $Y(t)$  az adott ország  $t$ -edik évi jövedelme. Értelemszerűen a modellben a gazdaság növekszik, ha  $y^n(t)$  értéke  $t$ -ben növekvő. Az egy effektív fogyasztóra jutó kibocsátást felbonthatjuk a (3) egyenletben látható tényezőkre:

$$\frac{Y(t)}{N(t)} = \frac{L(t)}{N(t)} \cdot \frac{Y(t)}{L(t)}, \quad (3)$$

ahol  $L(t)$  a  $t$ -edik évben a termelőtevékenységet végzők (általános szóhasználatnál a munkások) effektív száma. Az effektív munkások száma azt jelzi, hogy a  $t$ -edik évben a lakosok által realizált összes munkajövedelem hányszorosra a báziskorosztály átlagos munkajövedelmének.

$$L(t) = \sum_{a=0}^{\omega} \gamma(a, t) P(a, t), \quad (4)$$

ahol  $\omega$  a maximális korév,  $P(a, t)$  az  $a$  életkorú populáció száma a  $t$ -edik évben, és  $\gamma(a, t) = \frac{y(a, t)}{y(b, t)}$  a korszecifikus jövedelmi együttható. Ez utóbbiban  $y(a, t)$  az  $a$  éves korosztály  $t$ -edik évi átlagos egy főre eső munkajövedelme,  $y(b, t)$  pedig a 30-49 évesek – ahogy korábban elneveztük, a báziskorosztály – korosztályonkénti egy főre jutó jövedelmének számtani átlaga a  $t$ -edik évben.

A (3) egyenlet alapján az effektív fogyasztóra jutó kibocsátás növekedési ütemét az alábbi tényezőkre lehet bontani.

$$\dot{y}^n(t) = \dot{L}(t) - \dot{N}(t) + \dot{y}(t), \quad (5)$$

ahol  $\dot{y}^n(t)$  az effektív fogyasztóra jutó kibocsátás növekedési üteme,  $\dot{L}(t)$ ,  $\dot{N}(t)$ ,  $\dot{y}(t)$  pedig rendre az effektív munkások, az effektív fogyasztók, és az effektív munkásra jutó jövedelem növekedési üteme. Az (5) egyenletbeli  $\dot{L}(t) - \dot{N}(t)$  az első demográfia osztlék. Értéke pozitív, ha az effektív munkások száma jobban növekszik (kevésbé csökken), mint az effektív fogyasztók száma.

Az első demográfiai osztléket előnyösen befolyásolja, ha egy országban a gyerekek száma már nem, az időseké pedig még nem magas. Amikor korábbi nagy létszámú csecsemő kohorszok úgy érik el a munkaképes kort, hogy közben a születendő gyerekek száma csökken, az időseké pedig még relatíve nem magas, akkor pozitív első demográfiai osztlék várható, azaz a közepen kidudorodó korfa nagy valószínűséggel pozitív demográfiai osztlékkal jár együtt.

Mason és Kinugasa [2008] számításai szerint Ázsiában 1960 és 2000 között az első demográfiai osztlék 12,5%-os effektív fogyasztóra jutó kibocsátás-növekedést eredményezett, míg a vizsgált európai országokban ugyannerre az értékre csupán 6,1%-ot kaptak. Mason [2005] pedig arról ír, hogy jelentős eltérések vannak a különböző régiók első demográfiai osztlékai közt, mert pl. a becslések alapján 1950 és 2050 között az eltartási ráta teljes növekedési üteme az Egyesült Arab Emírátságokban várhatóan 64%, ugyanakkor Svédországban csak 3% lesz.

Ismét tekintsük a (3) egyenlet  $\frac{L(t)}{N(t)}$  tényezőjét, melynek a növekedési üteme az első demográfiai osztalék. Az alábbiakban ezt a hányadost  $D(t)$ -vel jelöljük, és két tényezőre bontjuk.

$$D(t) = \frac{L(t)}{N(t)} = \frac{\sum_{a=0}^{\omega} y(a,t)P(a,t)}{\sum_{a=0}^{\omega} c(a,t)P(a,t)} \cdot \frac{c(b,t)}{y(b,t)}. \quad (6)$$

A (6) egyenlet első tényezőjét  $\beta(t)$ -vel jelöljük.

$$\beta(t) = \frac{X(t)}{C(t)} = \frac{\sum_{a=0}^{\omega} y(a,t)P(a,t)}{\sum_{a=0}^{\omega} c(a,t)P(a,t)},$$

ahol  $X(t)$  a lakosság  $t$ -edik évi aggregált munkajövedelme,  $C(t)$  pedig a fogyasztása. Amennyiben  $\beta(t) = 1$ , akkor az adott évben az adott társadalom épp a megtermelt jövedelmét fogyasztja el, amennyiben  $\beta(t) > 1$ , akkor a társadalom tartalékokat képez, és ha  $\beta(t) < 1$ , akkor a társadalom külső hitelből, vagy korábbi megtakarításból finanszírozza a fogyasztás egy részét. A (6) egyenlet második tényezője, melyre a  $\zeta(t) = \frac{c(b,t)}{y(b,t)}$  jelölést alkalmazzuk, a báziskorosztály egységnyi átlagjövedelmére jutó átlagfogyasztását mutatja. Mivel várhatóan a báziskorosztály finanszírozza a társadalom többi tagja számára fogyasztásuk jelentős részét (legalábbis az adott évi, generációk közti transfereket tekintve) ezért a  $\zeta$  értéke 1-nél kisebb.

A  $D(t)$  növekedési ütemét, amit  $\dot{D}(t)$ -vel jelölünk, két tényezőre bonthatjuk:

$$\dot{D}(t) = \dot{\beta}(t) + \dot{\zeta}(t), \quad (7)$$

ahol  $\dot{\beta}(t)$  az aggregált munkajövedelem és az aggregált fogyasztás hányadosának növekedési üteme,  $\dot{\zeta}(t)$  pedig a báziskorosztály egységnyi átlagos munkajövedelmére jutó átlagos fogyasztásának növekedési üteme. Másképp fogalmazva, a (7) egyenlet alapján az első demográfiai osztalék egyrészt a lakosság aggregált jövedelmének az aggregált fogyasztáshoz viszonyított arányától, másrészt a báziskorosztály átlagos fogyasztásának átlagos jövedelméhez viszonyított arányától, pontosabban ezen arányok növekedési ütemétől függ. Az első demográfia osztalék értéke annál nagyobb, minél jobban nő a lakosság munkajövedelme a fogyasztáshoz képest, és a báziskorosztály relatíve minél inkább többet tud költeni saját jövedelméből saját fogyasztására.

A gazdasági növekedés vizsgálatokor az első demográfiai osztalék tartalmához hasonló, de attól többé-kevésbé eltérő kategóriákat is alkalmaznak. A demográfiai osztalék téves értelmezésének elkerülése érdekében érdemes összefoglalni ezeket a kategóriákat.

Az első demográfia osztalék, ahogy korábban is írtuk, az eltartási ráta növekedési üteme. Az eltartási ráta, az egy effektív fogyasztóra jutó effektív termelők száma annál nagyobb, minél többen dolgoznak, illetve minél kevesebben fogyasztanak, minden esetben egy effektív fogyasztót, illetve egy effektív termelőt tekintve egy embernek. Hasonló mutatót kapunk, ha egyszerűen a dolgozók számát osztjuk el a fogyasztók számával, de ebben az esetben nincs különbség a 80 éves dolgozó ember és a 30 éves dolgozó ember

közt, továbbá fogyasztás szempontjából is ugyanúgy vesszük számba mindkét korosztály átlagos tagját.

Amennyiben a társadalom aggregált munkajövedelmét osztjuk el a társadalom aggregált fogyasztási értékével, akkor is az eltartási rátához hasonló jellegű mutatót kapunk. Ez az indikátor azt fejezi ki, hogy az adott évben a társadalom összes jövedelme a társadalom összes fogyasztásának hányad részét fedezte, értéke lehet 1-nél nagyobb, illetve kisebb is. Amennyiben 1-nél nagyobb, akkor a társadalom tartalékot képzett, 1-nél kisebb érték esetén pedig a fogyasztás egy része vagy hitelből, vagy korábbi tartalékokból történt. Természetesen ez a megközelítés erősen leegyszerűsíti a valóságot, de ceteris paribus esetben jól jellemzi az összefüggéseket.

Az aggregált jövedelem aggregált fogyasztással elosztott értéke azonban a fogyasztást és a jövedelmet nem viszonyítja a báziskorosztály fogyasztásához, ill. jövedelméhez. Összehasonlíthatóságuk érdekében szokás mindkét aggregált kategóriát elosztani a báziskorosztály jövedelmével (lásd pl. Lee és Mason [2011], United Nations [2013]), és így egymáshoz képest jól viszonyíthatóvá válik az egyes korévekben megtermelt és elfogyasztott jövedelem. Mivel a korosztályonkénti jövedelmi és fogyasztási adatok statisztikai adatforrásokból való összegyűjtése és átstrukturálása, továbbá a fogyasztási adatokhoz még szükséges felmérések elvégzése nehéz és költséges, ilyen összesítéseket viszonylag ritkán végeznek<sup>2</sup>. Ezért egy szokásos technika, hogy egy rögzített év korosztályos jövedelmi és fogyasztási értékeit használják több éven keresztül, és így számszerűsítik az aggregált jövedelmi és aggregált fogyasztási értékeket, illetve ezek hányadosát (lásd pl. Mason és szerzőtársai [2009]). Ennek a hányadosnak a növekedési üteme semmiképp nem egyezik meg az első demográfiai osztalékkal, bár esetenként az adatok hiánya, és a korosztályos jövedelmi és fogyasztási értékek feltételezett robusztussága miatt ezt tekintik első demográfiai osztaléknak. Tanulmányunk következő részében azonban megmutatjuk, hogy ez az értelmezés félrevezető lehet, mert a korosztályos jövedelmi és fogyasztási adatok változása más első demográfiai osztalékértékeket eredményez, mintha ezektől a változásoktól eltekintենek.

Az eltartási rátát Cutler és szerzőtársai [1990] definiálta oly módon, amire azóta is folyamatosan hivatkoznak. Ugyanakkor az eltartási ráta Cutler és szerzőtársai [1990]-től eltérő értelmezése az irodalomban mélyebb gyökerekre nyúlik vissza. Az eltartási ráta és reciproka, a függőségi ráta, mint ahogy Gál és Vargha [2014] is összefoglalja, számos tanulmány fontos elemét képezte már Cutler és szerzőtársai 1990-es cikkének megjelenése előtt is (lásd pl. Kelley [1973], Ram [1982]), és azóta is gyakran alkalmazzák, pl. ezt is használja Lee [2003]). Az eltartási ráta, illetve a függőségi ráta egyes verziói könnyebben, mások nehezebben számszerűsíthetőek, a növekedési modellek Mason és Lee [2007]-féle megközelítése azonban egyértelműen az effektív

---

<sup>2</sup>Az ENSZ égisze alatt zajló National Transfer Account – rövidítve NTA – program keretében több országban egységes módszertan alapján (lásd UN [2013]) mérik fel és gyűjtik össze a lakossági korosztályok fogyasztási és jövedelmi adatait, az aggregátumok kiszámításához használt súlyokat. Mi is ezekkel, az NTA honlapján publikált adatokkal dolgoztunk számításaink során (lásd UN [2014]).

jövedelem effektív fogyasztással vett hányadosát tekintik kiindulópontnak. Az irodalom általában a függőségi ráta különböző definícióival foglalkozik, de mivel az első demográfiai osztalék értelmezésében az eltartási rátának van központi szerepe, ezért az 1. táblázatban összefoglaljuk az eltartási ráta lehetséges értelmezéseit.<sup>3</sup> A táblázatban gyakorlatilag a különböző függőségi ráták reciprokai szerepelnek, ezért az elnevezéseket is a függőségi ráta elnevezései alapján határoztuk meg.

Időskori eltartási ráta	$\frac{\sum_{a=15}^{64} P(a,t)}{\sum_{a=65}^{\omega} P(a,t)}$
Fiatalkori eltartási ráta	$\frac{\sum_{a=15}^{64} P(a,t)}{\sum_{a=0}^{14} P(a,t)}$
Teljes eltartási ráta	$\frac{\sum_{a=15}^{64} P(a,t)}{\sum_{a=0}^{14} P(a,t) + \sum_{a=65}^{\omega} P(a,t)}$
Lakossági létszám és munkaképes korúak száma alapján	$\frac{\sum_{a=15}^{64} P(a,t)}{\sum_{a=0}^{\omega} P(a,t)}$
Lakossági összes jövedelem és összes fogyasztás alapján	$\frac{\sum_{a=0}^{\omega} y(a,t)P(a,t)}{\sum_{a=0}^{\omega} c(a,t)P(a,t)}$
Effektív fogyasztók és effektív dolgozók száma alapján	$\frac{\sum_{a=0}^{\omega} \gamma(a,t)P(a,t)}{\sum_{a=0}^{\omega} \alpha(a,t)P(a,t)}$

1. táblázat. Az eltartási ráta különböző értelmezései

Az 1. táblázatban jelzett korhatárok szerinti, létszám alapján számított különböző eltartási rátákhoz szükséges demográfiai adatokat viszonylag egyszerű meghatározni, az Eurostat adatbázisa pl. 1960-tól kezdve számszerűsítette ezeket az értékeket. A jövedelmi és fogyasztási adatok azonban már sokkal kritikusabbak. Mint ahogy a bevezetésben is írtuk, a jövedelmi adatok bruttó értelemben tekintett munkajövedelmet jelentenek, beszámítva a házi

<sup>3</sup>A korosztályi határokat az irodalom az ifjú kornál leggyakrabban 15, az időseknél 65 évben rögzíti, de más korhatárok is alkalmazhatóak. A függőségi ráták a táblázatban bemutatott eltartási ráták reciprokai. A jelölések értelmezése az eddig használt képletek magyarázatánál található.

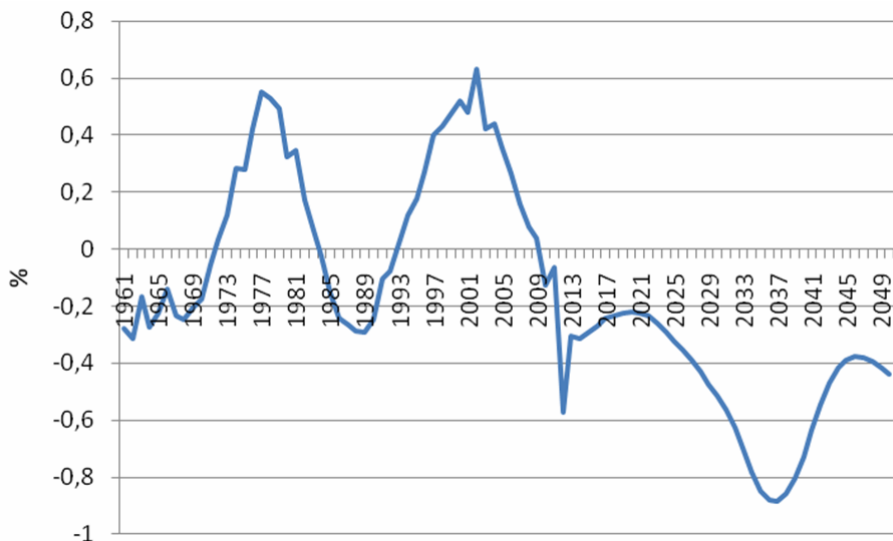
munka értékét is. A fogyasztási adatok pedig tartalmazzák mind a magán, mind a közösségi finanszírozású fogyasztást (UN [2013], Gál et al. [2014]).

Az 1. táblázat különböző eltartási rátáit használva a demográfia osztalék meghatározására, a gazdasági növekedés más és más aspektusait vizsgálhatjuk. Ha pl. növekszik a 15-64 évesek aránya a 15 évnél fiatalabbak és a 64 évnél öregebbekhez képest, illetve a teljes lakossághoz képest, ez azt jelenti, hogy relatíve a korábbiaknál többen dolgoznak, ami egyúttal a gazdasági bővülés lehetőségét is magában hordozza. A lehetőség azonban nem azonos a megvalósult növekedéssel, ehhez az erőforrások megfelelő kihasználása is szükséges. A 15-64 évesek arányának növekedése a 15 évnél fiatalabbakhoz képest pedig önmagában még nem is jelenti a munkaképes korúak arányának emelkedését, mert az idősök számának relatív növekedése ellentétes irányban hathat. Mindezek az állítások akkor is igazak maradnak, ha a kívülről bevitt korhatárokat módosítjuk, pl. a 15 év helyett a 20 évet tekintjük a munkavállalás kezdő életkorának. A lakosság aggregált munkajövedelmének aránya az aggregált fogyasztási értékhez képest már egyértelműen jelzi, hogy az adott évben a gazdaság relatíve hogy teljesített. Ezt az arányszámot gyakran használják a növekedési modellek eltartási rátája helyett, bár, mint ahogy korábban is írtuk, a Cutler és szerzőtársai [1990] gondolatai alapján szerkesztett eltartási ráta ezt a törtet még megszorozza egy másik törttel, a báziskorosztály átlagos fogyasztásának és átlagos jövedelmének hányadosával. Ezáltal a báziskorosztály tevékenysége, mind a munkavégzést, mind a fogyasztást illetően, kétszer is szerepet kap az eltartási rátában. Egyszer az aggregált jövedelem és aggregált fogyasztás számszerűsítésekor, egyszer pedig a báziskorosztályra vonatkozó értékek meghatározásakor.

### **3 Az első demográfiai osztalék magyarországi alakulása, és a számításnál használt súlyok szerepe**

Magyarországra vonatkozóan a Cutler és szerzőtársai [1990] gondolatai alapján definiált eltartási ráta számszerűsítéséhez szükséges jövedelmi és fogyasztási adatokat mindeztidáig csak 2005-re publikálták egységes rendszerben (Gál és Vargha [2013]), így a minden évre rendelkezésre álló korosztályos demográfiai adatok mellett az eltartási ráta kiszámításakor csak ezekre az értékekre tudtunk támaszkodni. Ez egyben azt is jelenti, hogy a magyar osztalékértékek kiszámításakor a jövedelmi és fogyasztási adatok vonatkozásában a Gál és Vargha [2013]-ban publikált adatokat használtuk.

Az eltartási rátát azért kívántuk meghatározni, hogy végül első demográfiai osztalékot számoljunk. Az 1. táblázat utolsó sorában megadott, effektív fogyasztók és effektív dolgozók száma alapján definiált eltartási ráta számszerűsítése helyett, adathiány miatt, csak a közelítő értékek meghatározása jöhet szóba, és emiatt az így kapott növekedési ütem csak több-kevesebb pontosságú becslése az első demográfiai osztaléknak.



1. ábra. A magyarországi első demográfiai osztalék múltbeli alakulása és értékeinek előrebecslése  
 Forrás: UN [2014], Eurostat [2014], KSH [2014], HMD [2014] adatok alapján saját számítás

Az 1. ábra ennek a becült első demográfiai osztaléknak az időbeli alakulását mutatja. A jövőbeli népességértékek esetében az Eurostat [2014] Europop előrebecsléseit használtuk. Hasonló ábra található többek között a Prskawetz és Sambdt [2014] és a Mason [2005] tanulmányokban is.

Az 1. ábra 1961 és 2050 közt ábrázolja az első demográfiai osztalék alakulását, azaz az eltartási ráta éves növekedési ütemét, azon feltételezéssel, hogy 2014 és 2050 közt a népesség az Eurostat becsléseinek megfelelően alakul. Mivel mindvégig a 2005-ös év jövedelmi és fogyasztási adatai segítségével számszerűsítettük az osztalékértékeket, ezért az 1. ábrán tulajdonképpen a következő,  $\hat{D}$ -vel jelölt mutató növekedési ütemét láthatjuk:

$$\hat{D}(t) = \frac{\sum_{a=0}^{\omega} y(a, 2005)P(a, t)}{\sum_{a=0}^{\omega} c(a, 2005)P(a, t)}, \quad (8)$$

ahol a jelölések megegyeznek a (7) egyenlet jelöléseivel. A (7) és a (8) egyenlet alapján egyértelmű, hogy a  $D(t)$  értékek nem azonosak a  $\hat{D}(t)$  értékekkel. Ennek megfelelően az 1. ábrán látható 0,264-es nagyságú 2006-os érték is csak körülbelül jelzi azt, hogy 2006-ban az első demográfiai osztalék önmagában 0,264%-os effektív fogyasztóra jutó kibocsátás-növekedést eredményezett. Így is figyelmet érdemel azonban, hogy 1972 és 1983 közt, valamint 1993 és 2009 közt pozitív a mutató értéke, a többi évben viszont negatív.

Az első demográfiai osztalék fenti módon történő közelítésének pontatlanságát jól illusztrálja következő gondolati kísérletünk. Rendre kiszámítottuk az effektív fogyasztóra jutó effektív dolgozók számát úgy, hogy a 2006-os magyar korosztályos demográfiai adatokat az NTA projektben résztvevő, és az országsúlyokat publikáló többi európai ország korosztályos jövedelmi és fogyasztási adataival szoroztuk meg. Megnéztük, hogy ily módon 2006-ban 2005-höz képest hány százalékkal változna az egy effektív fogyasztóra jutó

effektív dolgozók száma, azaz mekkora lenne az első demográfiai osztalék. Hangsúlyozzuk, hogy más évek, vagy más országok fogyasztási és jövedelmi adatainak használata az első demográfiai osztalék számításakor a nemzetközi szakirodalomban elfogadott technika (lásd pl. Mason és Lee [2006]), ezért a pontatlanságot tükröző 2. táblázat adatait érdemes alaposabban elemezni.

	Jövedelmi és fogyasztási adatok (súlyok) felvételének országa és éve						
	Magyar (2005)	Osztrák (2000)	Francia (2005)	Finn (2004)	Német (2003)	Spanyol (2000)	Svéd (2003)
Első demográfiai osztalék (%)	0,264	5,271	-1,855	3,703	-0,980	2,119	1,483

2. táblázat. A magyar első demográfiai osztalék 2006-ban különböző országok súlyait használva  
Forrás: UN [2014], Eurostat [2014], HMD [2014] adatai alapján saját számítás

Azokban az európai országokban, melyek részt vettek az NTA projektben, a fogyasztási és jövedelmi adatok számszerűsítését 2000 és 2005 közt, de nem azonos évben végezték el. Mivel ezen országok lakossági korosztályainak jövedelmi és fogyasztási adatait csak a gondolat kísérletünkhöz, a 2006-os magyar népességadatokat fogyasztási és jövedelmi értékekkel való összehasonlításához használtuk, a felvételi évek különbözősége nem okozott gondot. Az eredményeket tekintve a 2. táblázatból azonnal kitéjük, hogy a becslött 2006-os magyar első demográfiai osztalék a  $-1,855$  és  $5,271$  közti intervallumban különböző értékeket vett fel, miközben a 2005-ös magyar súlyokat használva 2006-ban az első demográfia osztalék  $0,264\%$  volt.

A 2. táblázat osztalékértékei nem csak nagyságrendileg térnek el egymástól, hanem abból a szempontból is, hogy többségük pozitív osztalékot jelez, kettő értéke viszont negatív. Azaz négy súlyozási módszerrel növekedési faktort kaptunk, kettővel pedig csökkenést. Természetesen a kiszámított osztalékértékeket egyetlen szerző se tekinti mérnöki pontosságú mutatóknak, és mi sem tanácsolunk mást, mint hogy az osztalékos idősorok tendenciáját érdemes csak irányadónak tekinteni. Mégis figyelemre méltónak tartjuk, hogy azonos népességi adatok esetén, pusztán csak az egyik év súlyainak módosításakor az első demográfiai osztalék ilyen érzékeny reakcióját tapasztalhatjuk,  $5\%$  feletti pozitív érték helyett akár  $-1,8\%$ -nál kisebb negatív értéket is kaphatunk.

A (6) egyenlet tanulmányozása magyarázatot ad az eltérő osztalékértékekre. A (6) egyenlet alapján az eltartási ráta nagysága ugyanis két tényezőtől, a  $\beta(t)$ -tól és a  $\zeta(t)$ -tól, illetve ezek növekedésétől függ. A 3. táblázatban feltüntetjük Magyarország eredeti 2005-ös súlyaival, és a helyettesítő országok súlyaival számszerűsített  $\beta$  és  $\zeta$  értékeket.

	$\beta$	$\zeta$
Magyarország	0,8680	0,5814
Ausztria	0,9256	0,5725
Franciaország	0,8826	0,5597
Finnország	0,8592	0,6075
Németország	0,8308	0,5999
Spanyolország	0,8778	0,5855
Svédország	1,0137	0,5039

3. táblázat. A keresztsúlyozás eredményei 2006-ra



A báziskorosztály átlagos fogyasztásának növekedése egyrészt növeli a  $D(t)$ -t a  $\zeta(t)$  növelésével, másrészt hozzájárul a  $D(t)$  csökkenéséhez is, mert a  $\beta(t)$  nevezőjében a báziskorosztály fogyasztási értékeit rendre megszorozzuk a korosztályos létszámadatokkal, majd ezeket az értékeket összegezzük a nevezőben szereplő többi részszorzat értékével. A báziskorosztály átlagos jövedelmének növekedése pedig a  $D(t)$  mindkét összetevőjére épp az előzővel ellentétesen hat. A báziskorosztály átlagos fogyasztásának és átlagos jövedelmének változása a  $\zeta(t)$ -re relatíve nagyobb hatást gyakorol, mint a  $\beta(t)$ -re, mert a  $\beta(t)$ -ben a báziskorosztályon kívül az összes többi korosztály fogyasztása és jövedelme is szerepet kap.

A báziskorosztály fogyasztási és jövedelemtermelő magatartásának módosulása következtében egyszerre növekedhet és csökkenhet az eltartási ráta, illetve fordítva, egyszerre csökkenhet és nőhet is<sup>4</sup>. Az azonban soha nem fordul elő, hogy a báziskorosztály az eltartási ráta mindkét tényezőjét növeli, vagy csökkenti. Amennyiben a báziskorosztály magatartása növeli a  $\zeta(t)$  nagyságát, akkor a  $\beta(t)$ -re kifejtett csökkentő hatását csak az ellensúlyozhatja, ha a lakosság többi korosztálya növeli a munkajövedelmét, és/vagy csökkenti a fogyasztását. A 3. táblázat osztrák súlyokkal számított értéke a magyarnál kisebb  $\zeta$ -t ad, ami csökkenti az osztalékot, viszont a magyarénál jóval magasabb  $\beta$  jócskán kiegyensúlyozza, illetve felül is múlja ezt a hatást. A francia súlyok esetében viszont a  $\zeta$  jelentősebb csökkenése mellett csak viszonylag kicsit nő a  $\beta$ , és mindez az osztalék komolyabb csökkenését eredményezi. Akár a 3. táblázat két szélsőséges értékét, akár a közbelső adatait tekintjük, egyértelmű, hogy az első demográfiai osztalék alakulására nagy hatással van a báziskorosztályon kívüli népesség fogyasztása és munkajövedelme. Amennyiben ők több jövedelemre tesznek szert, illetve kevesebbet fogyasztanak, akkor ezzel elősegítik az első demográfiai osztalék növekedését.

Mielőtt a fentiekből téves közgazdasági következtetést vonnánk le, érdemes végiggondolni, mire is vonatkozik a szóban forgó összefüggés. A cikkben az egy effektív fogyasztóra jutó kibocsátást vizsgáltuk, és arra jutottunk, hogy ennek az értéknek a növelését elsősorban azzal tudjuk elősegíteni, ha a báziskorosztályon kívüli népesség, a 30 évnél fiatalabbak, és a 49 évnél idősebbek, több munkajövedelmet állítanak elő, és kevesebbet fogyasztanak. Az egy effektív fogyasztóra jutó kibocsátás azonban nem azonos az egy emberre jutó kibocsátással. Amennyiben változatlan összefogyasztás mellett a báziskorosztály fogyasztása csökken, ez máris megemeli az effektív fogyasztók számát, és változatlan jövedelmet feltételezve azt mutatja, mintha csökkenne az egy főre jutó kibocsátás. A Mason és Lee [2007] növekedési modell viszont mindössze annyit mond, hogy változatlan effektív fogyasztói létszám mellett a fiatalabbak és az idősebbek munkajövedelmének növekedése, illetve fogyasztásának csökkenése pozitívan hat a gazdasági növekedésre.

---

<sup>4</sup>A függelékben bebizonyítjuk, hogy egy báziskorosztálybeli kohorsz átlagos jövedelmének ceteris paribus növekedése csökkenti, egy azon kívüli kohorsz átlagos jövedelmének növekedése pedig növeli az első demográfiai osztalékot.

## 4 Összegzés

Cikkünkben a Mason és Lee [2007]-féle növekedési modellek által definiált első demográfiai osztalék alakulását vizsgáltuk. Először összefoglaltuk, hogy a növekedéssel foglalkozó irodalom milyen úton jutott el a demográfiai osztaléktól meghatározó növekedési modellekhez, majd definiáltuk az eltartási ráta és az első demográfiai osztalék fogalmát.

Felhívtuk a figyelmet arra, hogy az eltartási ráta pontos számszerűsítése rendkívül költséges, és ezért az ezzel foglalkozó NTA projektben részt vevő országok egyelőre csak egy évre vonatkozóan publikáltak adatokat. Ennek a problémának az áthidalására általánosan alkalmazott módszer, hogy az aktuális lakossági létszám adatok mellé egyetlen (mindig ugyanazon) év jövedelmi és fogyasztási adatait használják fel súlyozásra. Cikkünkben azonban megmutattuk, hogy így tulajdonképpen egységnyi aggregált fogyasztásra jutó munkajövedelem-növekedést mérnek, ezt is úgy, hogy a lakossági jövedelmi és fogyasztási adatokat állandónak tekintik.

Gondolatkísérletet végeztünk, ahol a tényleges 2005-ös magyarországi létszám-, fogyasztási és jövedelem adatok segítségével kiszámított eltartási rátát egy mesterségesen konstruált eltartási rátához hasonlítottuk. Ez utóbbit a magyar 2006-os létszám adatok és másik hat, az NTA projektben részt vevő európai ország jövedelmi és fogyasztási értékei segítségével határoztuk meg. A különböző súlyokkal különböző eltartási rátát kaptunk, és így a ráta növekedési üteme viszonylag széles spektrumban mozgott, negatív és pozitív értékeket is felvett. Ezzel azt mutattuk meg, hogy a jövedelmi aggregátumok fogyasztási aggregátumokhoz való hasonlítása ugyan számos közgazdasági elemzésnek lehet hasznos eszköze, de az első demográfiai osztalék becslésében téves következtetéseket is eredményezhet, akár a gazdasági növekedéshez való hozzájárulás előjelét illetően is.

Az első demográfiai osztalék képletének vizsgálata arra a következtetésre vezetett, mely szerint a 30-49-éves, báziskorosztálynak nevezett népesség átlagos fogyasztásának emelkedése egy részről pozitívan, más részről negatívan hat az osztalék növekedésére. A báziskorosztály átlagos munkajövedelmének növekedése pedig épp ezekkel ellentétes irányú hatást fejt ki. A báziskorosztályon kívüli lakosság, azaz a fiatalabbak és az öregebbek munkajövedelmének növekedése azonban egyértelműen növeli, fogyasztásának növekedése pedig csökkenti az eltartási ráta értékét. Ezzel kapcsolatosan további kutatási kérdés, hogy az eltartási ráta mennyire érzékeny a báziskorosztály életkori határainak változtatására. Az azonban vizsgálatunkból egyértelműen kitűnik, hogy az első demográfiai osztalék növekedésében vagy csökkenésében a fiatalabbak és idősebbek jövedelemtermelő és fogyasztási szokásai kulcsfontosságú szerepet kapnak.

## 5 Függelék

Eltartási ráta:

$$D(t) = \frac{L(t)}{N(t)} = \frac{\sum_{a=0}^{\omega} y(a, t)P(a, t)}{\sum_{a=0}^{\omega} c(a, t)P(a, t)} \cdot \frac{c(b, t)}{y(b, t)} \quad (\text{A.1})$$

Bázis korosztály (30-49 évesek) átlagos fogyasztása és jövedelme:

$$c(b, t) = \frac{c(30, t) + c(31, t) + \dots + c(49, t)}{20} \quad (\text{A.2})$$

$$y(b, t) = \frac{y(30, t) + y(31, t) + \dots + y(49, t)}{20} \quad (\text{A.3})$$

A jövedelem-változás hatása az eltartási rátára

$e \neq 30, 31, \dots, 49$

$$\frac{\partial \left( \frac{L(t)}{N(t)} \right)}{\partial y(e, t)} = \frac{P(e, t)}{\sum_{a=0}^{\omega} c(a, t)P(a, t)} \frac{c(b, t)}{y(b, t)} \quad (\text{A.4})$$

$e = 30, 31, \dots, 49$

$$\frac{\partial \left( \frac{L(t)}{N(t)} \right)}{\partial y(e, t)} = \frac{c(b, t)}{\sum_{a=0}^{\omega} c(a, t)P(a, t)} \left( \frac{P(e, t)y(b, t) - \sum_{a=0}^{\omega} y(a, t)P(a, t)\frac{1}{20}}{y^2(b, t)} \right) \quad (\text{A.5})$$

Az (A.4) deriválás eredménye pozitív, az (A.5) pedig negatív (a bázis-korosztály egyetlen korévéhez tartozó összes jövedelménél lényegesen több a negatív előjelű jövedelem összegének abszolút értéke), így egy bázis korosztálybeli lakos jövedelemváltozásának hatása az eltartási rátára negatív, míg egy nem bázis korosztálybeli lakosé pozitív.

## Irodalom

1. Augusztinovics, M. (1992) Towards a Theory of Stationary Economic Populations. KTI Budapest. Kézirat.
2. Barro, R. J. (1991) Economic Growth in a Cross Section of Countries, *The Quarterly Journal of Economics*, 106(2):407–43.
3. Barro, R. J. (1998) *Determinants of Economic Growth: A Cross-Country Empirical Study*, The MIT Press.
4. Bessenyei, I. and Horváth, M. (2012) Economic growth with incomplete financial discipline. In *Crisis Aftermath: Economic policy changes in the EU and its Member States, Conference Proceedings*, Szeged, University of Szeged, National Bureau of Economic Research, Inc. 307–314.

5. Blanchard, O. J. (1985) Debt, Deficits, and Finite Horizons. *Journal of Political Economy*, 93(2):223–47.
6. Bloom D. E., Canning D. and Graham B. (2003) Longevity and Life-cycle Savings. *Scandinavian Journal of Economics*, 105(3):319–338.
7. Bloom, D. E. and Williamson, J. G. (1998) Demographic Transitions and Economic Miracles in Emerging Asia. *World Bank Economic Review*, 12(3):419–55.
8. Cutler D. M., Poterba J. M., Sheiner L. M., and Summers, L. H. (1990) An Aging Society: Opportunity or Challenge? *Brookings Papers on Economic Activity*, 21(1):1–74.
9. Diamond, P. A. (1965) National debt in a neoclassical growth model. *The American Economic Review*, 1126–1150.
10. Domar, E. D. (1946) Capital expansion, rate of growth, and employment. *Econometrica, Journal of the Econometric Society*, 137–147.
11. Dramani, L. and Ndiaye, F. (2012) Estimating the First Demographic Dividend in Senegal: The National Transfers Account Approach. *British Journal of Economics, Management & Trade 2*, (2):39–59.
12. Eurostat (2014) Eurostat, Europop, <http://epp.eurostat.ec.europa.eu/portal/page/portal/population/data/database>, Letöltve: 2014. június.
13. Feyrer, J. (2007) Demographics and Productivity. *The Review of Economics and Statistics*, 89(1):100–109.
14. Gál, R., Gergely, V. and Medgyesi, M. (2011) National Transfer Accounts in Hungary: Contribution Asset and Returns in a Pay-As-You-Go Pension Scheme. In Lee, R. and Mason, A. eds., *Population Aging and the Generational Economy*, Cheltenham UK and Northampton MA: Edward Elgar Publishing, 542–553.
15. Gál, R. and Vargha, L. (2013) NTA Country Report, Hungary, 2005, <http://www.ntaccounts.org>.
16. Gál, R. and Vargha, L. (2014) Four Levels of Intergenerational Indicators and the Total Support Ratio. Kézirat
17. Gál, R., Szabó, E. and Vargha, L. (2014) The age-profile of invisible transfers: The true size of asymmetry in inter-age reallocations. *The Journal of the Economics of Ageing*.
18. Harrod, R. F. (1939) An essay in dynamic theory. *The Economic Journal*, 14–33.
19. HMD (2014) The Human Mortality Database, <http://www.mortality.org>, Letöltve: 2014. június.
20. Kelley, A. C. (1973) Population growth, the dependency rate, and the pace of economic development. *Population Studies*, 27(3):405–414.
21. KSH (2014) Központi Statisztikai Hivatal, Budapest, [https://www.ksh.hu/nepesseg\\_nepmozgalom](https://www.ksh.hu/nepesseg_nepmozgalom), Letöltve: 2014. június
22. Lee, R. (1980) Age Structure, Intergenerational Transfers and Economic Growth: an Overview. *Revue Économique*, 31(6):1129–1156.
23. Lee, R. (2003) The demographic transition: three centuries of fundamental change. *The Journal of Economic Perspectives*, 17(4):167–190.
24. Lee, R., Mason, A. and Miller, T. (2000) Life cycle saving and the demographic transition: The case of Taiwan. *Population and Development Review*, 194–219.

25. Lee, R. D. (1994) Population Age Structure, Intergenerational Transfer, and Wealth: A New Approach, with Applications to the United States. *Journal of Human Resources*, 29(4):1027–1063.
26. Mason, A. (2005) Demographic transition and demographic dividends in developed and developing countries. In *United Nations expert group meeting on social and economic implications of changing population age structures*, v. 31.
27. Mason, A. and Kinugasa, T. (2008) East Asian economic development: Two demographic dividends. *Journal of Asian Economics*, 19(5-6):389–399.
28. Mason, A. and Lee, R. (2006) Reform and support systems for the elderly in developing countries: capturing the second demographic dividend. *Genus*, 11–35.
29. Mason, A. and Lee, R. (2007) Transfers, capital, and consumption over the demographic transition. In Mason, A., Robert, C. and Naohiro, O. eds., *Population aging, intergenerational transfers and the macroeconomy*. Cheltenham, UK and Northampton, MA, USA, Edward Elgar, 128–162.
30. Mason, A. and Lee, R. (2013) Labor and consumption across the lifecycle. *The Journal of the Economics of Ageing*, 1:16–27.
31. Mason, A., Lee, R., Tung, A.-C., Lai, M.-S., and Miller, T. (2009) Population Aging and Intergenerational Transfers: Introducing Age into National Accounts. In Wise, D. A. ed. *Developments in the Economics of Aging*. National Bureau of Economic Research, Inc, 89–122.
32. Prskawetz, A. and Sambdt, J. (2014) Economic support ratios and the demographic dividend in Europe. *Demographic Research*, 30(34):963–1010.
33. Ram, R. (1982) Dependency rates and aggregate savings: a new international cross-section study. *The American Economic Review*, 537–544.
34. Samuelson, P. A. (1958) An exact consumption-loan model of interest with or without the social contrivance of money. *The Journal of Political Economy*, 467–482.
35. Simonovits, A. (2003) Öregedő népesség, medián választó és a jóléti állam mérete. *Közgazdasági Szemle*, 50(10):835–854.
36. Solow, R. M. (1956) A contribution to the theory of economic growth. *The Quarterly Journal of Economics*, 65–94.
37. Swan, T. W. (1956) Economic growth and capital accumulation. *Economic record*, 32(2):334–361.
38. UN (2013) *National Transfer Accounts manual: Measuring and Analysing the Generational Economy*. United Nations, New York
39. UN (2014) United Nations, National Transfer Accounts. [www.ntaccounts.org/web/nta/show/Country%20Summaries](http://www.ntaccounts.org/web/nta/show/Country%20Summaries), Letöltve: 2014. június.
40. Yaari, M. E. (1965) Uncertain lifetime, life insurance, and the theory of the consumer. *The Review of Economic Studies*, 137–150.

#### THE FIRST DEMOGRAPHIC DIVIDEND, AND ITS REALIZATION IN HUNGARY

The paper deals with the types of growth models that are based on National Transfer Accounts. The first demographic dividend, belonging to these models, is broken

up into components, and it is shown how different levels of these components influence the value of the dividend. Not only the increase or decrease in the size of the population of different cohorts has a crucial role on the first demographic dividend, but changes in income and the consumption values of cohorts could also have an influence. Incorrect statistics on population income and consumption may result in a wrong estimate of the first demographic dividend.

# ÁRFOLYAMINGADOZÁSOK VIZSGÁLATA SZIMMETRIKUS STABIL MODELLBEN<sup>1</sup>

CSENDES CSILLA  
*Budapesti Corvinus Egyetem*

Dolgozatomban a Budapesti Értéktőzsde vezető papírjainak árfolyam ingadozásait vizsgálom a naponkénti logaritmikus hozamok eloszlásának alapján. Vizsgálatomban a napi hozamokat függetlennek és szimmetrikus stabil eloszlásúnak feltételeztem. Bemutatok egy robusztus statisztikai eljárást, amellyel a stabil paraméterek (alak-, skála-, és helyparaméter) együttesen becsülhetők. Az eljárás jó statisztikai és numerikus tulajdonságokkal rendelkezik, továbbá könnyen alkalmazható. A szimmetrikus stabil modellből kiindulva becsültem a hozamok eloszlásának paramétereit és hipotézis vizsgálattal ellenőriztem az illeszkedést a stabil és a normális eloszláshoz. A becsült paraméterek segítségével meghatározásra kerültek az árfolyamokra vonatkozó konfidencia intervallumok.

## 1 Bevezetés

A stabil eloszlások családjának pontos definiálását Levy (1925) végezte el, aki független, azonos eloszlású valószínűségi változók összegeit tanulmányozta, és konvergencia tételeket bizonyított az összegekre. Az eloszláscsalád matematikai statisztikai jelentőségét az adja, hogy a centrális határeloszlás tétel általánosításaként adódó vonzási tartomány (domain of attraction) probléma lehetséges megoldását kizárólag ez a család tartalmazhatja. A vonzási tartomány problémában az összegzett változók függetlenek, azonos eloszlásúak, de a szórásnégyzetük nem véges. A stabil eloszlások tehát az általánosított centrális határeloszlás tétel alapján a normális eloszlás általánosítását adják (Uchaikin és Zolotarev (1999), 55. oldal).

1. DEFINÍCIÓ. *Egy  $X$  valószínűségi változót stabilnak nevezünk, ha minden  $n$ -re léteznek olyan  $X_1, X_2, \dots, X_n$  változók, melyeknek közös az eloszlása és amely eloszlás megegyezik  $X$  eloszlásával, továbbá léteznek olyan  $e(n)$  és  $a(n)$  konstansok ( $e(n)$  centráló,  $a(n)$  skálázó szerepet tölts be), úgy, hogy*

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{a(n)} - e(n) \quad (1)$$

*eloszlása megegyezik  $X$  eloszlásával.*

<sup>1</sup>A kutató munka a Miskolci Egyetem stratégiai kutatási területén működő Mechatronikai és Logisztikai Kiválósági Központ keretében valósult meg. Beérkezett: 2014. október 20. E-mail: csendescsilla@gmail.com.

Az eloszláscsalád használatát a gyakorlati modellezésben megnehezíti néhány olyan tulajdonság, amelyek miatt merőben új megközelítésekre van szükség. Habár létezik a stabil eloszlások sűrűség- és eloszlásfüggvénye, ezek nem ismertek zárt alakban. A függvények az ún. integrálrepresentációban, illetve sorfejtéssel adóttak. Tehát azok a statisztikai módszerek, amelyek a sűrűség- vagy eloszlásfüggvényre közvetlenül épülnek, mint például a maximum likelihood (ML) módszer, nem alkalmazhatóak. Léteznek numerikus integrálást tartalmazó közelítési eljárások (lásd Nolan (2001)), de ezeknek a számítási igénye nagyon jelentős.

A zárt alakú sűrűségfüggvény és eloszlásfüggvény hiányában az eloszláscsaládot a karakterisztikus függvénnyel írják le, amely az 1. definícióból levezethető. A karakterisztikus függvény a sűrűségfüggvény Fourier-transzformáltja, és a két függvény egyértelműen megfeleltethető egymásnak. A stabil karakterisztikus függvény ezért jól definiálja az eloszláscsalád tagjait. A függvény négy paraméter segítségével ír le egy általános stabil eloszlást, amelyek

- a  $0 < \alpha \leq 2$  karakterisztikus kitevő (stabilitási index, farkindex),
- a  $-1 \leq \beta \leq 1$  ferdeségi (aszimmetria) paraméter,
- a  $\gamma > 0$  skálaparaméter,
- és a  $\delta \in \mathbb{R}$  helyparaméter.

Legyen  $X \sim S(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$  stabil eloszlású valószínűségi változó a fenti paraméterekkel, ekkor az  $X$  változó karakterisztikus függvénye:

$$\begin{aligned}
 E \exp(itX) &= \\
 &= \begin{cases} \exp(-\gamma^\alpha |t|^\alpha [1 - i\beta(\tan(\frac{\pi\alpha}{2}))(\text{sign}(t))((\gamma|t|)^{1-\alpha} - 1)] + i\delta t), & \alpha \neq 1 \\ \exp(-\gamma|t| [1 - i\beta\frac{2}{\pi}(\text{sign}(t))(\ln|t| + \ln\gamma)] + i\delta t), & \alpha = 1 \end{cases} \quad (2)
 \end{aligned}$$

ahol  $\text{sign}(t)$  jelenti az előjel függvényt. Ha a  $\beta$  és  $\delta$  paraméter értéke nulla, azaz a valószínűségi változó szimmetrikus nulla körül, akkor a karakterisztikus függvény valós függvény, és a

$$\phi(t) = e^{-\gamma^\alpha |t|^\alpha} \quad (3)$$

egyszerűbb alakban áll elő.

A normális eloszlás az  $\alpha = 2$  paraméterű stabil eloszlás. A normális eloszlástól eltekintve a stabil eloszlások szórásnégyzete nem létezik, ugyanis a második momentumot definiáló integrál nem véges. Általánosságban igaz, hogy az  $E|X^p|$  momentumok nem végesek, ha  $p \geq \alpha$ , ahol  $0 < \alpha < 2$ . Ebből következik, hogy a magasabb rendű momentumok sem végesek. Léteznek olyan stabil eloszlások is, amelyeknek a várható értéke sem létezik, ilyen például a Cauchy-eloszlás ( $\alpha = 1$ ). Tehát a paraméterbecslésre szintén gyakran használt momentumok módszere sem használható.



A stabil eloszlások részletes leírását találhatjuk többek között a következő monográfiákban: Gnedenko és Kolmogorov (1954), Uchaikin és Zolotarev (1999), Samorodnitsky és Taqqu (1994).

Az eloszláscsalád adatmodellezésben való használatának legfőbb előnye ugyanakkor a rugalmasság, amelyet a négy paraméterrel történő illesztés jelent. Nyilvánvaló, hogy a normális eloszláshoz képest (amely esetén csak két paraméter áll rendelkezésre) sokkal pontosabban leírhatjuk a megfigyeléseket. Az utóbbi időben a számítógépek növekvő számítási kapacitásai révén egyre több statisztikai, ökonometriaik eszközt fejlesztettek ki, amelyekkel egyre inkább lehetővé válik az eloszláscsalád gyakorlati alkalmazása. A kidolgozott diagnosztikai eszközökről (sűrűségfüggvény közelítése, q-q ábrák, illeszkedés vizsgálata) Nolan (2001) ad részletes leírást.

A statisztikai vizsgálatokhoz elengedhetetlen a megfelelő eloszlású véletlen számok generálása. Az  $\alpha$ -stabil szimmetrikus  $Z$  változó generálható Zolotarev (1986) alapján a következő formulával:

$$Z(\alpha, 0) = \frac{\sin(\alpha\xi)}{(\cos \xi)^{\frac{1}{\alpha}}} \left( \frac{\cos((1-\alpha)\xi)}{\eta} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}, \quad (4)$$

ahol  $\eta$  standard exponenciális változó,  $\xi$  egyenletes valószínűségi változó a  $(-\pi/2, \pi/2)$  intervallumon. A standardizált  $\alpha$ -stabil változónak az alábbi formulával generálható valószínűségi változót tekintjük:

$$Z(\alpha, 0)/\alpha^{\frac{1}{\alpha}}.$$

A stabil eloszláscsalád használata a pénzügyi modellezésben az 1960-as évekre nyúlik vissza. Az első tanulmányok Mandelbrot (1964), illetve Fama (1965) nevéhez fűződnek, akik árfolyamváltozásokat vizsgálva azt tapasztalták, hogy a normális modellhez képest a hozamok nagyobb valószínűséggel szóródnak messzebb az átlagtól, azaz az extrém esetek valószínűsége nagyobb, mint azt a normális eloszlást feltételezve várnánk. Ennek a jelenségnek a leírására a vastag farkú (heavy-tailed) eloszlásokat, köztük a stabil eloszláscsaládot kezdték használni. Elméleti szempontból ez azért kedvező, mert a portfólió feladatban szereplő hozamösszegzéssel párhuzamba állítható a stabilitási tulajdonság, azaz hogy a stabil eloszlások zártak az összegzésre nézve.

Később újabb és újabb tanulmányok, empirikus vizsgálatok jelentek meg, és mára már széles körben elterjedt a stabil portfólió modell alkalmazása. A témában megjelent kötetek többek között Rachev (szerk.) (2003), Rachev és Mittnik (2000), valamint Adler *et al.* (szerk.) (1998). A hazai szakirodalomban is számos tanulmány található, amely stabil eloszlások pénzügyi területen való alkalmazásával foglalkozik, például Lux és Varga (1996), Palágyi (1999), Janecskó (2000), Palágyi (2003), valamint Lukács (2004).

Dolgozatom témája részvény árfolyamok vizsgálata szimmetrikus stabil modellben. A 2. szakaszban áttekintem a stabil portfólió modelleket, a hozamszámítás modelljeit, a stabil eloszlások ismert paraméterbecslési eljárásait. A 3. szakaszban bemutatok egy robusztus statisztikai módszert, amely az M-becslések közé tartozik, és az  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  paraméterek együttes (egyidejű)

becslését teszi lehetővé. Az eljárás a Probability Integral Transformation (PIT) technikán alapszik. Az árfolyam adatok elemzését a PIT módszer, valamint a STABLE program<sup>2</sup> segítségével a Budapesti Értéktőzsde (BÉT) legjelentősebb, vezető részvényeinek adatain végeztem el. Becsültem a részvényenkénti hozamok eloszlásának paramétereit és értékelem az illeszkedést a normális és becsült stabil eloszlásokhoz. A becsült paraméterek alapján konfidencia intervallumokat készítettem, az eredményeket tartalmazza a dolgozat 4. szakasza.

## 2 Stabil portfólió analízis

A XX. században számos közgazdaságtudományi Nobel-émlék díjjal jutalmazták a portfólió kiválasztás területén alkotott elméleteket, R. Mertont és M. Scholes-t a derivatívák értékének meghatározásáért (1997), W. Sharpe-ot a tőkepiaci árfolyamok modelljéért (Capital Asset Pricing Model, CAPM)<sup>3</sup> (1990), H. Markowitz-ot portfólió optimalizálási modelljének kidolgozásáért (1990). Ezen ismert közgazdaságtani, pénzügyi modellek mindegyikének létezik stabil eloszlásokra való kiterjesztése, amelyekről részletes áttekintést ad Uchaikin és Zolotarev (1999) (17. fejezet). Ezeket a modelleket tekintem át a következőkben.

A portfólió optimalizálás klasszikus modelljében a portfólió hozama a portfólióban található eszközök hozamainak súlyozott átlaga, a kockázatot pedig a portfólió szórásnégyzetével mérjük. A modellt H. Markowitz fogalmazta meg (1952), amely átlag - szórás megközelítés néven vált ismertté a magyar szakirodalomban.

Legyen  $n$  különböző értékpapír, amelyeknek a hozamai  $X = (X_1, \dots, X_n)$ , a várható értékük  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ ,  $\Sigma$  az  $X_i$  változók kovariancia mátrixa, és az eszközök súlyait a portfólióban jelölje  $w = (w_1, \dots, w_n)$  súlyvektor,  $w \geq 0$ . Ha feltételezzük, hogy  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$  többváltozós normális eloszlású, akkor a portfólió hozamának eloszlása szintén normális  $X_p \sim \mathcal{N}(\mu_p, \sigma_p^2)$ , ahol  $\mu_p = w^T \mu$  és  $\sigma_p^2 = w^T \Sigma w$ . A portfólió feladat lényege, hogy az optimális  $w$  súlyvektor meghatározásával egy a befektető által előírt  $\lambda$  várható hozamszint elérése mellett minimalizáljuk a kockázatot:

$$\begin{aligned} \min_w & \left[ w^T \Sigma w \right], \\ & w^T \mu \geq \lambda, \\ & w^T e = 1, \end{aligned} \tag{5}$$

ahol  $T$  a transzponálást jelenti,  $e = (1, \dots, 1)$  az  $n$ -dimenziós összegző vektor. Az optimalizálási probléma célfüggvénye ekkor kvadratikus függvény, és a feladat a kvadratikus programozás ismert algoritmusaival megoldható. A portfólió feladat felírható a fenti problémával azonos eredményre vezető lineáris programozási feladatként is, amelynek egy kvadratikus feltétele van.

<sup>2</sup>Ingyenesen elérhető szoftver J. P. Nolan weboldaláról [30].

<sup>3</sup>A CAPM megalkotója W. Sharpe mellett J. Lintner

Ekkor a befektető a számára maximálisan elviselhető  $\sigma_{max}^2$  kockázati szint mellett maximalizálja az elérhető hozamot:

$$\begin{aligned} \max_w \mu_p, \\ \sigma_p^2 \leq \sigma_{max}^2, \\ w^T e = 1. \end{aligned} \tag{6}$$

Az optimális portfólióvektor ekkor kvadratikus programozási feladatok sorozatának megoldásával állítható elő. A fenti modellekben a fedezetlen rövidre eladás (*short-selling*), azaz ha  $w_i < 0$ , nem engedélyezett. A fedezetlen rövidre eladás lehetőségét is megengedő nem korlátozott probléma, valamint további relaxált feltételekkel rendelkező problémák részletes leírása található például Lintner (1965) dolgozatában.

Bár a megközelítést sok kritika érte (főként a normális eloszlás feltételezése miatt), a modell jelentősége vitathatatlan. A tapasztalati vizsgálatok hamar rámutattak, hogy a normális eloszlástól csúcsosabb és vastagabb farkú (*heavy-tailed*) eloszlások sokkal inkább leírják a hozamokat. A stabil eloszláscsalád mellett más vastag farkú eloszlásokat is vizsgáltak, de a stabil eloszlások összegzési tulajdonsága, azaz hogy azonos  $\alpha$  karakterisztikus kitevővel rendelkező változók összegzésével újra  $\alpha$ -stabil változót kapunk, nagy előnyt jelent a portfólió analízisben.

A stabil portfólió feladatban azt feltételezzük, hogy a hozamok többváltozós szimmetrikus stabil eloszlást követnek. A szimmetria feltételezését egyrészt a tapasztalati megfigyelések támasztják alá, másrészt szimmetrikus eloszlás használatával a pozitív és negatív változások azonos mértékben súlyozhatók. A többváltozós stabil portfólió modelleket Press (1972) könyve alapján mutatom be.

A vizsgált többváltozós szimmetrikus ( $\beta = 0$ ) eloszláscsalád log-karakterisztikus függvénye:

$$\ln \phi_X(t) = ia^T t - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m (t^T \Omega_j t)^{\frac{\alpha}{2}}, \tag{7}$$

ahol  $X$  többváltozós hozameloszlás,  $\phi_X(t)$  jelöli az  $X$  változó karakterisztikus függvényét,  $i = \sqrt{-1}$ . Az  $a^T = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  vektor az eloszlás helyvektora,  $\alpha > 1$  esetén várható érték vektora. Az  $\Omega_j$  szimmetrikus skálamátrixok a változók függési struktúráját írják le,  $\forall j : \Omega_j \geq 0$ . Az  $0 < m \leq \infty$  egész a többváltozós stabil karakterisztikus függvény előbbi reprezentációjának előállításánál során bevezetett irányok számát jelenti. Az  $n$  változós, egység sugarú hipergömb felszínén értelmezett integrálás helyett  $m$  diszkrét pont (irány) felvételével és irányonkénti ( $j = 1, \dots, m$ ) összegzéssel határozzuk meg az összefüggési struktúrát (lásd Press (1972), 6. fejezet). Feltesszük, hogy  $\sum_{j=1}^m \Omega_j > 0$ , azaz nem degenerált az eloszlás, és hogy a várható érték véges, azaz  $1 < \alpha \leq 2$ . A portfóliót alkotó részvények súlyainak vektorát továbbra

is  $w^T = (w_1, w_2, \dots, w_n)$  jelöli. Ekkor a portfólió hozama

$$X_p = \sum_{i=1}^n w_i X_i,$$

a portfólió elvárt hozama

$$E(X_p) = \sum_{i=1}^n w_i E(X_i) = \sum_{i=1}^n w_i a_i = w^T a,$$

ha az  $X$  valószínűségi vektor eloszlása (7) szerinti. Az  $X_p$  portfólió hozam karakterisztikus függvénye:

$$\phi_{X_p}(v) = E(e^{ivX_p}),$$

$v \in \mathbb{R}$  a karakterisztikus függvény függő változója. Az  $X$  többváltozós hozam vektor karakterisztikus függvénye

$$\phi_X(t) = E(e^{it^T X}),$$

$t \in \mathbb{R}^n$  a karakterisztikus függvény függő változója. Legyen  $t = vw$ , ekkor

$$\phi_X(t) = \phi_X(vw) = E(e^{ivw^T X}) = \phi_{X_p}(v),$$

azaz  $X_p$  log-karakterisztikus függvénye

$$\ln \phi_{X_p}(v) = iv(w^T a) - \frac{1}{2}|v|^\alpha \sum_{j=1}^m (w^T \Omega_j w)^{\frac{\alpha}{2}}.$$

Hasonlóan a Markowitz modellhez, a portfólió kockázatot a hozamok eloszlásának valamely szóródási mutatójával, stabil eloszlások esetében a szórás hiányában a skálaparaméterrel mérjük, amely:

$$\gamma(x) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m (w^T \Omega_j w)^{\frac{\alpha}{2}}. \quad (8)$$

A  $w$  portfólió vektort a következő optimalizálási feladat megoldásával kapjuk:

$$\begin{aligned} \max_x \left[ \lambda a^T w - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m (w^T \Omega_j w)^{\frac{\alpha}{2}} \right], \\ w^T e = 1, \\ w \geq 0. \end{aligned} \quad (9)$$

A fenti modellben a részvények hozama közös  $\alpha$  paraméterrel rendelkezik (Model I). Press (1972) bemutat egy általánosabb problémát is (Model II), amelyben ez a megkötés már nem szerepel, azaz a részvények különböző  $\alpha$  paraméterű hozameloszlással rendelkezhetnek. Bizonyos esetben explicit

megoldás adható a feladatokra a Lagrange szorzók módszerével, továbbá bemutatja az  $m = 1$  speciális eset megoldását is. A Press által definiált problémáknál általánosabb leírást tesz lehetővé a spektrálmérték használata. A spektrálmérték definiálását Bradley és Taqqu (2003) alapján mutatom be.

A következő tétel az általános stabil véletlen vektort a véges  $\Gamma_X$  mérték segítségével definiálja.

1. TÉTEL. *Legyen  $0 < \alpha < 2$ . Ekkor  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  akkor és csak akkor stabil véletlen vektor  $\alpha$  stabilitási indexszel, ha létezik egy véges  $\Gamma_X$  mérték az egységsugarú  $\mathbb{R}^n$  beli  $S_n = \{s \mid s \in \mathbb{R}^n, \|s\| = 1\}$  hipergömbön értelmezve, és egy  $\mu \in \mathbb{R}^n$  vektor, hogy  $X$  karakterisztikus függvényére teljesüljön, hogy*

$$\begin{aligned} \Psi_\alpha(t) &= \\ &= \begin{cases} \exp\left(-\int_{S_n} |(t^T s)|^\alpha [1 - i(\text{sign}((t^T s)) \tan \frac{\pi\alpha}{2})] \Gamma_X(ds) + i(t^T \mu)\right), & \alpha \neq 1 \\ \exp\left(-\int_{S_n} |(t^T s)| [1 + i\frac{2}{\pi} \text{sign}((t^T s)) \ln |(t^T s)|] \Gamma_X(ds) + i(t^T \mu)\right), & \alpha = 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (10)$$

A  $(\Gamma_X, \mu)$  pár egyértelmű.

A  $\Gamma_X$  mértéket a stabil véletlen vektor spektrálmértékének nevezzük. Ez a mérték leírja a függőségi struktúrát a változók között. Ha  $X$  szimmetrikus stabil eloszlású  $\alpha$  kitevővel  $\mathbb{R}^n$ -ben, akkor a karakterisztikus függvény a

$$\Psi_\alpha(t) = \exp\left(-\int_{S_n} |(t^T s)|^\alpha \Gamma_X(ds)\right)$$

egyszerűbb alakban írható fel, ahol  $\Gamma_X$  az egyértelmű szimmetrikus spektrálmérték. Ha  $X$  többváltozós stabil eloszlású  $0 < \alpha < 2$  stabilitási indexszel, akkor  $X$  komponenseinek összes lineáris kombinációja is stabil eloszlást követ ugyanazzal az  $\alpha$ -val, azaz a stabilitási tulajdonság eszerint a definíció szerint is igaz. Legyen most  $X \in \mathbb{R}^n$  hozamvektor többváltozós stabil eloszlású (10) szerint, valamint  $w \in \mathbb{R}^n$  mint korábban. Ekkor  $X_p = (w^T X) = \sum_{i=1}^n w_i X_i$  stabil eloszlású  $S_\alpha(\beta_p, \gamma_p, \delta_p)$  paraméterekkel. A (10) karakterisztikus függvény alapján a  $\beta_p, \gamma_p, \delta_p$  paraméterek meghatározhatóak.

A skálaparaméter:

$$\gamma_{X_p} = \left(\int_{S_n} |(w^T s)|^\alpha \Gamma_X(ds)\right)^{\frac{1}{\alpha}}. \quad (11)$$

Legyen az  $X^T = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  árfolyamváltozás vektor (10) karakterisztikus függvényű többváltozós stabil eloszlású  $1 < \alpha < 2$  karakterisztikus kitevővel, a jelölések a korábbiaknak megfelelőek. A skálaparamétert (11) szerint definiáljuk. A portfólió optimalizálási probléma ekkor:

$$\begin{aligned} \min_w \left[ \left( \int_{S_n} |(w^T s)|^\alpha \Gamma_X(ds) \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right], \\ w^T \mu \geq \lambda, \\ w^T e = 1, \end{aligned} \quad (12)$$

ahol  $e$  az  $n$  dimenziós összegző vektor,  $\lambda$  a befektető által meghatározott elvárt hozamszint.

A portfólió modellek célja a portfólióban szereplő részvények súlyainak megválasztása, ezáltal optimális befektetési struktúra kialakítása. A tőkepiaci árfolyamok modellje (Capital Asset Pricing Model, CAPM, Sharpe (1964) és Lintner (1965) a részvények elvárt hozamát a piacon elérhető kockázatmentes befektetés és a piaci portfólió különbségéből adódó többlethozam függvényében vizsgálja. Jelölje  $X_M$  a piaci portfólió,  $X_i$  az  $i$ -edik részvény hozamát, és  $r$  a kockázatmentes hozamot. Ekkor a CAPM modell formálisan

$$E(X_i - r) = \beta_i E(X_M - r)$$

alakban írható, ahol

$$\beta_i = \frac{\text{Cov}(X_i, X_M)}{\text{Var}X_M}.$$

A részvényekre jellemző  $\beta_i$  érték<sup>4</sup> leírja a részvény és a piac kapcsolatát a piaci változásokra adott árfolyamváltozáson keresztül. Ha  $\beta_i > 1$ , akkor az  $i$ -edik részvény tartása nagyobb hozamot ígér, mint a piaci portfólió, ha  $\beta_i < 1$ , akkor ez a hozam prémium kisebb. Az egyenlet átalakítható a

$$X_i - r = \beta_i(X_M - r) + \epsilon_i$$

alakba, ahol  $E(\epsilon_i) = 0$  és  $\text{Cov}(\epsilon, X_M) = 0$ . Az egyenletet gyakran a hozamok egytényezős modelljének nevezik. A részvények kockázatára

$$\sigma_{X_i}^2 = \beta_i^2 \sigma_{X_M}^2 + \sigma_{\epsilon_i}^2,$$

ahol az első tag jelenti a szisztematikus kockázatot, míg a második tag a reziduális kockázatot. A portfólió bétáját a részvények bétájának súlyozott átlagával kapjuk, míg a portfólió kockázata hasonlóan az egyes részvényekhez

$$\sigma_{X_p}^2 = \beta_p^2 \sigma_{X_M}^2 + \sigma_{\epsilon_p}^2,$$

$$\sigma_{\epsilon_p}^2 = \sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_{\epsilon_i}^2,$$

ha feltételezzük, hogy a reziduálisok páronként függetlenek.

A fenti modellek közös jellemzője, hogy a portfólió kockázatát a portfólió hozam eloszlásának valamely szóródási mutatójával, a szórásnégyzettel vagy a skálaparaméterrel méri. A kockázatkezelésben alkalmazott másik megközelítés szerint a portfóliók tartásából eredő kockázatot olyan kockázati mértékkel kell mérni, amely rendelkezik a (i) monotonitás, (ii) szubadditivitás, (iii) pozitív homogenitás, (iv) eltolás ekvivariancia tulajdonságaival. Ezeknek a tulajdonságoknak a megkövetelése gyakorlati szempontból fontos (Gáll és Pap (2004)):

---

<sup>4</sup>A  $\beta$  jelölés itt a szakirodalomban általánosan használt jelölés, és nincs összefüggésben a stabil  $\beta$  ferdeségi paraméterrel.

- (i) ha egy portfólió minden esetben többet ígér egy másik portfóliónál, akkor annak ne legyen nagyobb a kockázata;
- (ii) két portfóliót egybetéve ne növekedhessen a kockázat, azaz a portfóliók kockázatának összegét nem haladhatjuk meg;
- (iii) megtöbbszörözve a portfóliót, ám megtartva annak összetételét, a kockázatosság a nagysággal arányosan változzon;
- (iv) ha biztosan realizálunk egy pótlólagos adott összegű pénzáramlást, akkor a portfólió kockázatossága ennek a pénzáramlásnak a nagyságával csökkenjen.

Ha egy kockázati mérték teljesíti a feltételeket, akkor koherens mértéknek nevezzük. Ezek a feltételek a szórás és skálaparaméter esetében nem teljesülnek, sőt, a népszerűbb VaR (Value-at-Risk, kockázatosított érték) mutató sem koherens, mert nem teljesíti a szubadditivitási feltételt. A VaR helyett használható az Expected Shortfall mutató, amely koherens kockázati mérték.

A hozamok számítása az árfolyamváltozások alapján többféle modellben is lehetséges. A leggyakrabban használt modell a relatív (százalékban kifejezett) hozam

$$R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1, \tag{13}$$

és a folytonosan számított (continuously-compounded rate) logaritmikus hozam

$$r_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) = \ln(R_t + 1), \tag{14}$$

ahol  $P_t$  és  $P_{t-1}$  jelenti a részvény árát az  $t$ -edik és  $t - 1$ -edik időpillanatban. Ezt a modellt egy napos (one-day, single-period) modellnek nevezik. Ha  $R_t$  értéke kicsi, akkor  $\ln(1 + R_t) \approx R_t$  a logaritmus függvény sorfejtése miatt, ezért a két modell nagyon hasonló eredményt ad.

A logaritmikus hozam modell használatának előnye, hogy az eltelt időre nézve additív. A portfólió hozama a logaritmikus modell szerint:

$$r_{pt} = \ln\left(\sum_{i=1}^n w_i e^{r_{it}}\right), \tag{15}$$

ahol  $w$  a portfólió vektor,  $r_{it}$  jelöli az  $i$ -edik részvény hozamát a  $t$ -edik időpontban.

Elemzésemben a Budapesti Értéktőzsde vezető részvényeinek  $r_i$  logaritmikus hozameloszlásának paramétereit számítottam ki. A négy stabil paraméter árfolyamok esetén szemléletes jelentéssel rendelkezik. Az  $\alpha$  alakparaméter, amely talán a négy paraméter közül a legfontosabb, jellemzi a farkak vastagságát (heaviness) és a csúcsosságot (peakedness). Az árfolyamok esetében minél alacsonyabb az  $\alpha$  paraméter értéke, annál nagyobb valószínűséggel következik be extrém áringadozás az adott részvény árfolyamában, ezért annál kockázatosabbnak tekinthető. A  $\beta$  aszimmetria paraméter írja le az eloszlás ferdeségét: ha értéke negatív, akkor az eloszlás balra ferde, és nagyobb

valószínűséggel csökken az árfolyam, míg ha pozitív, akkor jobbra ferde, és emelkedik az árfolyam. A  $\gamma$  skálaparaméter és a  $\delta$  helyparaméter a normális eloszlás szórásához és várható értékéhez hasonló szerepet tölt be. A  $\delta$  helyparaméter az eloszlás középpontját adja meg, tehát a várható hozamot jelenti. A skálaparaméter a megfigyelések szóródását jellemzi, azaz a változékonyságot (volatilitást), a kockázatosságot írja le.

A portfólió feladat megoldásához elengedhetetlen a paraméterek megbízható, pontos becslése. A paraméterek becslésére a szakirodalomban számos megközelítés létezik. Az ismert eljárásokról részletes leírást ad és összehasonlító tanulmányt mutatott be például Weron (1995), és Borak *et al.* (2005).

Az egyik legegyszerűbb megközelítés lényege, hogy *log-log* skálán ábrázoljuk a megfigyeléseket és a megfigyeléshez tartozó valószínűségeket, Mandelbrot (1964). Ekkor ha a minta  $\alpha$ -stabil eloszlású, akkor az empirikus eloszlásfüggvény pontjai a farkaknál egy  $-\alpha$  meredekségű egyeneshez illeszkednek. Ez az összefüggés az eloszlás farkának aszimptotikus Pareto-viselkedéséből vezethető le. Ez a grafikus módszer nem biztosít megfelelő paraméterbecslési lehetőséget, mert csak nagy minták esetében használható, és csak az alakparaméter becslésére. Vizsgálatok azt mutatják, hogy az általános Pareto-modell alkalmazása  $1 < \alpha < 2$  esetben felülbecsüli az  $\alpha$  paramétert; például egy szimulált  $\alpha = 1.9$  paraméterű mintára  $N = 10^4$  megfigyelésre 4 körüli  $\alpha$  becslés adódott (Borak *et al.* (2005)).

Az aszimptotikus Pareto-eloszlásra vonatkozó tulajdonságból vezethető le a farokindex becslések, amelyek az eloszlás parametrikus alakjára nézve semmilyen feltételezéssel nem élnek. Ezek a becslések csak az aszimptotikus viselkedés leírására használhatók, az egész eloszlás alakjának vizsgálatára alkalmatlanok. A farokindex becslések sem megbízhatóak, mert erősen függenek attól, hogy melyik empirikus kvantilis után tekintjük az aszimptotikus viselkedést. Habár a farokindex becslések önmagukban nem megbízható becslései a karakterisztikus kitevőnek, mégis a gyakorlatban egyszerűségük miatt használják őket. A legelterjedtebb farokindex becslés a Hill-becslés (Hill (1975)). A Hill-becslésnek számos változata ismert, amelyekről összehasonlító kritikai elemzést mutatott be McCulloch (1997).

Kvantiliseken alapuló becsléseket dolgozott ki Fama és Roll (1971,1968), illetve McCulloch (1986). Fama és Roll a szimmetrikus esetre adtak kezdetleges becslést empirikus megfigyelések alapján. Becslésük egyszerűen számítható, de torzított. McCulloch kiegészítette Fama és Roll ötletét az általános esetre, eltüntette a torzítottságot, és mind a négy paraméterre konzisztens becslést adott. Ha az adatok stabil eloszlásból származnak, és a minta kellően nagy, akkor ez a módszer megbízható becslést szolgáltat. A módszer jelentős számítási igénnyel rendelkezik, illetve bizonyos segéd konstansokra is szükség van, amelyeknek a meghatározása nem egyértelmű. Szimulációs vizsgálatok alapján a McCulloch becslés pontossága kielégítő (Weron (1995)).

A maximum likelihood (ML) becslés a hagyományos módon nem alkalmazható, mert a sűrűségfüggvény nem ismert zárt alakban. A ML módszerrel való becsléshez Nolan (2001) dolgozott ki numerikus eljárást, amely a McCulloch által leírt kvantilis becslést használja közelítő kezdeti értéknek, majd



feltételes kvázi-Newton módszerrel maximalizálja a likelihood függvényt. A ML becslés ismert kedvező tulajdonságai, úgymint a konzisztencia és aszimptotikus normalitás a stabil eloszlások esetében is érvényesülnek. Ellenben számítási igénye jelentős, ahogy Weron (1995) fogalmaz, *”online valós idejű számításokra egyáltalán nem használható”*.

A karakterisztikus függvény közvetlenül is használható a szimmetrikus esetben, mert ebben az esetben a függvény valós függvény. A karakterisztikus függvény ismert, ezért sok szerző használja, kombinálja azt különböző módszerekkel, pl. momentumok módszere, ML módszer. Az empirikus karakterisztikus függvényt használja Press (1972) minimális távolságon alapuló becslésekhez. A karakterisztikus függvényen alapuló regressziós módszert mutatott be Koutrouvelis (1980), majd ennek a módszernek a javítását Kogon és Williams (1998).

A stabil paraméterek becslésére a bemutatott módszereken kívül még számos megközelítés ismert. A következő szakaszban részletesen ismertetem a dolgozatomban alkalmazott becslési eljárást, amely szintén saját eredmény.

### 3 A PIT paraméterbecslési eljárás

Az M-becslések csoportjába tartozó robusztus statisztikai technikát mutatam be szimmetrikus stabil eloszlások paraméterbecslésére, az  $1 < \alpha < 2$  esetre a Csenedes (2013) dolgozatban. A módszer szimulációs vizsgálatok alapján hasonló tulajdonságokkal (variancia, MSE érték) rendelkezik, mint a szakirodalomban ismert módszerek, Csenedes és Fegyverneki (2014). Használatának előnye, hogy könnyen implementálható, és megbízható eredményt ad, valamint a módszer futásidőben nem használ numerikus integrálást, így gyorsabb, mint a ML módszer. Az eljárás implementálásához szükséges összes függvény közelítése rendelkezésre áll.

Az M-becslések (maximum likelihood típusú becslések) a  $\sum -\log f(x_i)$  loglikelihood függvény helyett a  $\sum \rho(x_i)$  függvényt minimalizálják, ahol  $\rho$  egy alkalmas függvény,  $x_i$  mintaelemek. Legyen  $\psi(x) = d\rho(x)/dx$  függvény a  $\rho$  függvény deriváltja, ekkor a minimalizálás differenciálással és az  $\sum \psi(x_i) = 0$  egyenlet megoldásával valósítható meg. A  $\rho$  illetve  $\psi$  függvények megválasztása különböző becsléseket eredményez, Huber (1964).

Ismert  $\alpha$  paraméter esetén a stabil eloszlásból származó minta hely és skálaparaméterének együttes becslésére használható a Huber (1981) által definiált két változós M-becslés. A becslési eljárást Fegyverneki (2003) alapján mutatom be. Legyenek  $x_1, x_2, \dots, x_n$  megfigyelések, melyek az  $F$  eloszlásból származnak. Legyen  $F_0((x - T)/S) = F(x)$ , azaz  $F$  és  $F_0$  azonos típusú,  $F_0$  az eloszlástípus kitüntetett tagja, és az  $S$  skála és  $T$  helyparamétert  $F_0$ -hoz képest definiáljuk. A hely és skálaparaméter  $(T, S)$  együttes M-becslése  $(T_n, S_n)$  a következő egyenletrendszer megoldása:

$$\sum \psi\left(\frac{x_i - T_n}{S_n}\right) = 0,$$

$$\sum \psi^2 \left( \frac{x_i - T_n}{S_n} \right) = (n-1)\mathcal{B},$$

ahol  $\psi$  alkalmas súlyfüggvény,  $\mathcal{B}$  egy konstans jelöl, melynek értéke  $1/12$ , ha a mintaelemek eloszlása éppen  $F_0$ , és

$$\mathcal{B} = D_{F_\xi}^2(\psi(\xi)),$$

egyébként. A fenti egyenletrendszer felírásához a Probability Integral Transformation (PIT) technikát és a momentumok módszerét használjuk.

Az egyenletrendszer iteratív algoritmussal, az ún. ping-pong módszerrel oldható meg. A módosított Newton-módszer alapján az alábbi két egyenletet felváltva oldjuk meg: az első egyenletből kapott helyparamétert a másodikba helyettesítve új skálaparaméter értékhez jutunk, aztán ezt felhasználva ismét az első egyenletet számítjuk ki. A kívánt pontosság eléréséig ismételjük a lépéseket.

A helyparaméter közelítése:

$$T_n^{(m+1)} = T_n^{(m)} + \frac{1}{n} S_n^{(m)} \sum_{i=1}^n \psi \left( \frac{x_i - T_n^{(m)}}{S_n^{(m)}} \right),$$

A skálaparaméter közelítése:

$$[S_n^{(m+1)}]^2 = \frac{1}{(n-1)\mathcal{B}} \sum_{i=1}^n \psi^2 \left( \frac{x_i - T_n^{(m+1)}}{S_n^{(m)}} \right) [S_n^{(m)}]^2.$$

A  $\psi$  súlyfüggvény:

$$\psi(x) = F_0(x) - \frac{1}{2}. \quad (16)$$

A kezdeti értékek:

$$\begin{aligned} T_n^{(0)} &= \text{med}\{x_i\}, \\ S_n^{(0)} &= C \cdot MAD, \end{aligned}$$

ahol  $\text{med}\{x_i\}$  jelöli a mediánt,  $MAD$  jelöli a medián abszolút eltérést  $MAD = \text{med}\{|x_i - \text{med}\{x_i\}|\}$ ,  $S_n^{(m)}$  és  $T_n^{(m)}$  az  $S$  skála- és  $T$  helyparaméter aktuális becslései az  $m$ -edik iterációban. A  $C$  konstans értéke  $C = F_0^{-1}(3/4)$ , amelyet a kezdeti becslés torzítatlansága miatt alkalmazunk ( $F_0$  szimmetrikus eloszlás).

A ping-pong módszer segítségével rögzített  $\alpha$  esetén, azaz ha  $F_0 = F_{0,\alpha}$  ismert, a hely- és skálaparaméter becsülhető. Ha az alakparamétert is a mintából becsüljük, akkor  $F_{0,\alpha}$  nem ismert. A becslési eljárásban az  $F_{0,\alpha}$  eloszlásra a  $\psi$  függvény illetve a  $\mathcal{B}$  függvény számításakor van szükség. Mivel az  $F_{0,\alpha}$  nem ismert, a stabil eloszlások családjának két ismert szimmetrikus tagját, a normális eloszlást ( $\alpha = 2$ ), és a Cauchy-eloszlást ( $\alpha = 1$ ) használjuk a  $\psi$  függvényben (16) a skálaparaméter meghatározásához. Tehát, a skálaparaméter becslését mind a két ismert eloszlásfüggvény használatával előállítjuk.

A  $\mathcal{B}$  konstans szintén tartalmazza a  $\psi$  függvényt, illetve függ az  $\alpha$  paramétertől az integrandus miatt is, ezért legyen  $\mathcal{B}(\alpha)$  a továbbiakban az  $\alpha$

paraméter függvénye. Helyettesítsük be a normális és a Cauchy-eloszlást a  $\mathcal{B}(\alpha)$  függvényekbe:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi} \arctan x\right)^2 dF_{\alpha} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi} \arctan x\right)^2 f_{\alpha}(x) dx = \mathcal{B}_1(\alpha),$$

ha  $F_0$  a standard Cauchy eloszlás, és

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\Phi(x) - \frac{1}{2}\right)^2 dF_{\alpha} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\Phi(x) - \frac{1}{2}\right)^2 f_{\alpha}(x) dx = \mathcal{B}_2(\alpha),$$

ha  $F_0$  standard normális. A  $\mathcal{B}_1$  és  $\mathcal{B}_2$  függvényeket előzetesen racionális törtfüggvénnyel közelítettem a numerikus integrálás elkerülése, és ezáltal az algoritmus gyorsítása miatt (Csendes (2013)).

A skálaparaméter meghatározása a  $\mathcal{B}(\alpha)$  függvény miatt az ismeretlen  $\alpha$  paramétertől függ. Ha tetszőleges  $\alpha$  értéket választanánk az  $[1, 2]$  intervallumból a  $\gamma$  paraméter becsléséhez, akkor a becslés torzított lenne, mivel nem a megfelelő  $F_{0,\alpha}$ -t alkalmaztuk. A minta valódi  $\alpha$  paramétere esetén ez a torzítottság eltűnik, a  $\mathcal{B}$  és  $\psi$  függvényekben lévő torzítottság kiegyenlíti egymást.

A valódi  $\hat{\alpha}$  paraméter becslés meghatározásához felhasználjuk a Cauchy és a normális eloszlással számított skálaparaméter becsléseket. Ha  $\alpha$ -t folytonosan változtatjuk az  $[1, 2]$  intervallumon (rögzített  $F_{0,\alpha}$  esetén), akkor a skálaparaméter becslések  $\alpha$  monoton növekvő, konkáv függvényét adják. Ha mind a két ismert eloszlásfüggvény esetén kiszámítjuk a skálaparamétereket, akkor két monoton növekvő, konkáv görbét kapunk, melyeknek a metszéspontja éppen a minta valódi  $\alpha$  paraméterénél van. A metszéspont meghatározásához válasszuk a kezdeti értékeket  $\alpha = 1$  és  $\alpha = 2$ -ként, és határozzuk meg a skálaparaméter értékeket ezekhez a kezdeti  $\alpha$  paraméterekhez. Ezután intervallumfelezéssel közelíthető a két görbe metszéspontja tetszőleges pontossággal.

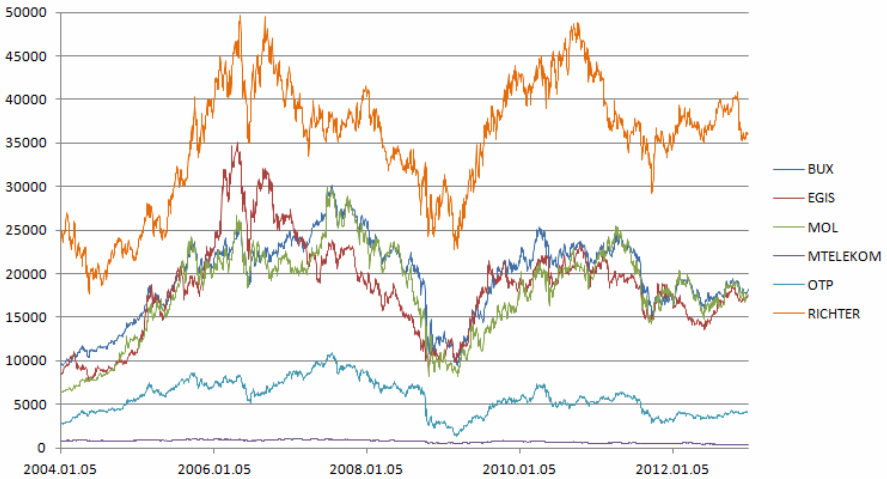
A PIT módszerrel való becslés könnyen implementálható, és rendelkezik a robusztus statisztikában ismert V-robusztus, B-robusztus, kvalitatív robusztus (lásd Huber (1981)) tulajdonságokkal. Kevésbé érzékeny az outlierekre, és megbízható eredményt ad. Vannak azonban korlátai is: csak abban az esetben használható, amikor a ferdeségi paraméter értéke nulla, mert a skálaparaméter közelítések meghatározásánál a módszer az ismert eloszlásfüggvényű Cauchy és a normális eloszlásra támaszkodik, amelyek szimmetrikusak. A módszer csak az  $1 < \alpha < 2$  paraméter értékekre működik, mert az algoritmusban használt függvényközelítéseket csak erre a paraméter tartományra határoztam meg. Bár numerikusan  $\alpha < 1$  -re is kiszámítható lenne a  $\mathcal{B}$  függvény, ebben az esetben a stabil eloszlás várható értéke nem véges. A portfólió optimalizálási feladatban a várható hozamnak léteznie kell, tehát gyakorlati szempontból az a tartomány kevésbé fontos, amely esetén nem létezik a várható érték.

Ha az  $\alpha$  paraméter közel esik valamelyik végponthoz, és a minta kicsi, akkor előfordulhat, hogy a két skálaparaméter görbének nincsen metszéspontja az  $(1, 2)$  intervallumon. Ennek oka a véletlen minták generálásánál

szerepet játszó véletlen hatás. Ilyenkor a módszer nem ad érvényes becslést az alakparaméterre. Szimulációk alapján ez 50-100 elemű minták esetén az ismétlések 1-6%-ánál, 400 elemű mintáknál viszont már egyáltalán nem fordult elő.

## 4 Eredmények

A dolgozatomban vizsgált adatsorok részvények napi záróár adatait tartalmazza 2004.01.01 és 2012.12.31 között. Az adatok forrása a *www.portfolio.hu* weboldal. A vizsgált részvények: OTP, Richter, Egis, Magyar Telekom, MOL, valamint a BUX Budapesti Értéktőzsde hivatalos indexe. Abban az esetben, amikor az adatsorból hiányzott az aznapi záróár, az árfolyamváltozást az előző napi meglévő adatból számítottam. Az 1. ábra a napi záróár adatokat mutatja.

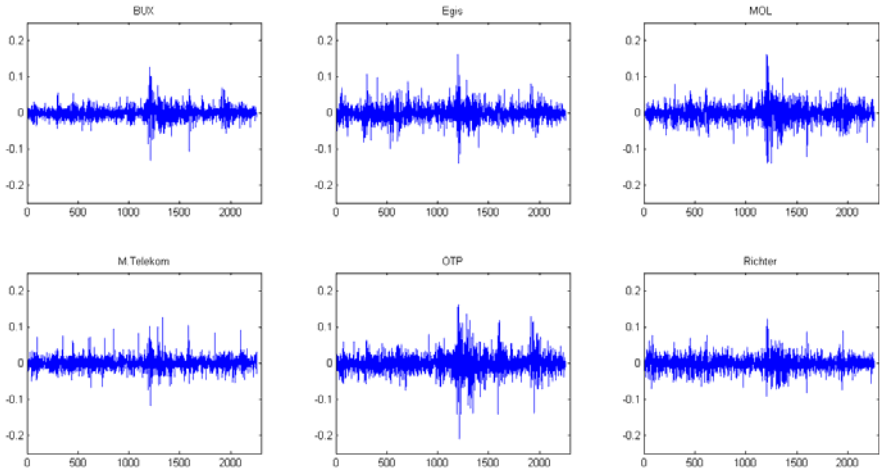


1. ábra. A részvények napi záróárainak alakulása a vizsgált időszakban

A részvényenkénti adatsorokból a (14) formula alapján meghatároztam a napi logaritmikus hozamokat, melyeket a 2. ábra mutat. A hozamok ábráján megfigyelhető a pénzügyi válság hatására az ún. *volatility clustering* jelenség, azaz látszik, hogy a válság kirobbanását követő időben sokkal volatilisabbak lettek a részvények, mindegyik részvény ára drasztikus ingadozásnak volt kitéve.

Feltételeztem, hogy a napi árfolyamadatokból képzett minta független, azonos eloszlásból származik. A részvényenkénti adatsorokat két változóra bontottam páros-páratlan sorszám alapján, és  $\chi^2$  teszttel vizsgáltam a két változó függetlenségét. A teszt nem utasította el a függetlenséget 95%-os szignifikancia szinten abban az esetben, amikor a felosztás intervallumainak száma 2-3 volt, de több intervallumra osztás esetén már igen. A függetlenséget

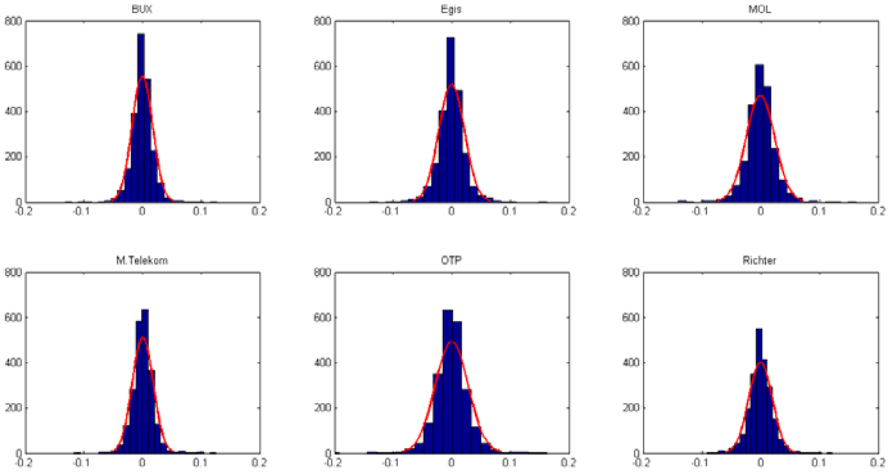
a vizsgálat második felében bemutatott mozgóablakok esetén is teszteltem, az 50 elemű ablakoknál általában teljesült a függetlenség kritériuma. A vizsgálat eredményeit terjedelmi okokból nem részleteztem.



2. ábra. Logaritmikus hozamok

A logaritmikus hozamok eloszlásának vizsgálatához gyakorisági hisztogramon (3. ábra) ábrázoltam az adatokat. A hisztogramokon láthatóak a hozam- adatokra illesztett normális eloszlások görbéi is. A hisztogramokból kitűnik, hogy a normális modell nem illeszthető az adatokra, azok eloszlása inkább heavy-tailed eloszlást követ.

Meghatároztam a PIT becsléssel a minták  $\hat{\alpha}$  alak-,  $\hat{\delta}$  hely- és  $\hat{\gamma}$  skálaparaméter becsléseit a szimmetria feltételezése mellett. A számított paraméter- értékeket mutatja az 1. táblázat. Az eredmények szerint az OTP és az Egis valamivel kockázatosabbnak bizonyult, a Richter, Mol és M. Telekom papírjai egy kicsivel stabilabbak, kevésbé kockázatosak. A  $\gamma$  paraméter értéke az OTP esetében a legmagasabb,  $\gamma = 0.0211$ , ami arra utal, hogy a vizsgált papírok közül az OTP-re volt legnagyobb hatása a pénzügyi válságnak.



3. ábra. A részvények hozama logaritmusos modell szerint

Mivel a volatilisabb időszakokban az árfolyam változások átlaga eltávolodhat nullától, a logaritmusos hozam és a (13) formula alapján definiált százalékos hozam ebben az időszakban eltérhet. A stabil paramétereket a százalékos hozamok esetén is meghatároztam, azonban az eredmények alapján a teljes vizsgált időszakban megfigyelt eloszlás paramétereiben ez a különbség nem jelent számottevő változást. A dolgozat eredményeit a logaritmusos modellben ismertetem. A (13) formula alapján számított százalékos hozamok eloszlásának becsült paramétereit mutatja a 2. táblázat.

A STABLE programmal számított paraméter becslések eredményeit tartalmazza a 3. táblázat. Az egyes részvények alakparaméterére a két módszerrel nagyon hasonló eredményt kaptam. A STABLE programmal számított  $\alpha$  paraméter értékek minden esetben egy kicsivel (kb. 1-2 századdal) alacsonyabbak, de kockázatosság szempontjából ugyanaz a sorrend alakul ki. A  $\beta$  ferdeségi paraméter értéke minden részvény esetén nullához közeli, a leginkább szimmetrikus árfolyamú papír az Egis ( $\beta = -0.0037$ ) és az M. Telekom ( $\beta = -0.0070$ ). A skála és helyparaméter becslések is hasonlóan alakultak mindkét módszerrel.

Részvény	$\hat{\alpha}$	$\hat{\gamma}$	$\hat{\delta}$
BUX	1.738710	0.013422	0.000371
EGIS	1.688192	0.016257	0.000356
MOL	1.732882	0.018634	0.000324
MTELEKOM	1.749846	0.013878	-0.000163
OTP	1.701002	0.021068	0.000409
RICHTER	1.764326	0.016072	0.000178

1. táblázat. A PIT módszerrel számított alak-  $\hat{\alpha}$ , hely-  $\hat{\delta}$  és skála-  $\hat{\gamma}$  paraméter becslések a logaritmusos modell szerint

Részvény	$\hat{\alpha}$	$\hat{\gamma}$	$\hat{\delta}$
BUX	1.738707	0.013425	0.000418
EGIS	1.688284	0.016265	0.000426
MOL	1.731482	0.018630	0.000414
MTELEKOM	1.749941	0.013877	-0.000114
OTP	1.702944	0.021094	0.000526
RICHTER	1.762995	0.016065	0.000244

2. táblázat. A PIT módszerrel számított alak-  $\hat{\alpha}$ , hely-  $\hat{\delta}$  és skála-  $\hat{\gamma}$  paraméter becslések a százalékban kifejezett modell szerint

Részvény	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\gamma}$	$\hat{\delta}$
BUX	1.7246	-0.0322	0.00991	0.00043
EGIS	1.6623	-0.0037	0.01212	0.00042
MOL	1.7211	0.0323	0.01376	0.00018
MTELEKOM	1.7359	-0.0070	0.01016	-0.00005
OTP	1.6904	-0.0852	0.01554	0.00080
RICHTER	1.7458	0.0721	0.01184	0.00012

3. táblázat. A STABLE programmal számított alak-  $\hat{\alpha}$ , ferdeségi-  $\hat{\beta}$ , hely-  $\hat{\delta}$  és skála-  $\hat{\gamma}$  paraméter becslések a logaritmikussal szembeállított modell szerint

Részvény	átlag	medián	szórás	MAD
BUX	0.000286	0.000531	0.017436	0.012381
EGIS	0.000327	0.000000	0.021753	0.015366
MOL	0.000448	0.000000	0.024080	0.017187
MTELEKOM	-0.000341	0.000000	0.017790	0.012699
OTP	0.000182	0.000160	0.028241	0.019900
RICHTER	0.000171	0.000000	0.019769	0.014426

4. táblázat. A hely- és skálaparaméter robusztus és normális eloszlás szerinti becslései a logaritmikussal szembeállított hozamokból

A hely és skálaparaméternek kiszámíthatók a robusztus becslései úgy, mint a medián és a medián abszolút eltérés (Median Absolute Deviation, MAD), illetve a normális modellből kiindulva megbecsülhető az átlag és szórás is. Ezeket a becsléseket tartalmazza a 4. táblázat. Az OTP és Egis részvényekre a magas skálaparaméter érték mellett magas szórást és MAD értéket kaptam, ami összhangban van az alacsonyabb  $\alpha$  paraméterrel. Valamint az alakparaméter alapján stabilabb, kevésbé kockázatos Richternél és M. Telekomnál a szórás és MAD is alacsonyabban alakult. A medián három részvélynél (Egis, Mol, M. Telekom) is nulla lett, és a többi esetben is nagyon közeli a nullához, így a STABLE program  $\beta$  becslésével is összevetve a szimmetria mellett szóló eredményt kaptam.

A mintának a becslött stabil paraméterű eloszláshoz való illeszkedését Kolmogorov-Smirnov próbával és  $\chi^2$  goodness-of-fit tesztekkel értékeltem. Az 5. táblázat a normalitás hipotézise és a becslött  $\alpha$ -stabil eloszláshoz való  $\chi^2$  illeszkedés vizsgálat eredményét mutatja. A próbákat a MATLAB szoftvercsomag *chi2gof* függvényével végeztem el. A táblázatban a tesztstatistika értékét, a hozzá tartozó p-értéket, valamint a szabadsági fokot tüntettem fel. Az intervallumok száma mind a két esetben kezdetben 10 volt, de a normális nullhipotézis esetében össze kellett vonni intervallumokat. A normális eloszlás esetében a becslött paraméterek száma 2, a stabil eloszlás esetében 4, így a

kritikus értékek 95%-os megbízhatósági szinten  $\chi_5^2 = 11.0705$ , illetve  $\chi_3^2 = 7.8147$  és  $\chi_2^2 = 5.9915$ . A teszt elvégzéséhez a hipotetikus stabil eloszlásfüggvények értékeit egy tizedenként vett  $\alpha = 1, \alpha = 1.1, \dots, \alpha = 2$  nagy elemszámú véletlen minták generálásával a minták percentiliseiből határoztam meg. A  $\chi^2$  teszt során a PIT módszerrel becsült  $\alpha$  paramétert kerekítettem az egy tizedesjegy pontos  $\alpha$  értékhez, és ehhez a hipotetikus eloszláshoz képest vizsgáltam az illeszkedést. Az elvégzett illeszkedés vizsgálat tesztek alapján azt mondhatjuk, hogy a stabil modellt több részvény esetében elfogadhatónak értékelték a tesztek, míg a normalitást egyértelműen el kell utasítanunk.

Részvény	$N_0$ : normális eloszlás			$N_0$ : stabil eloszlás		
	p-érték	tesztstat.	sz. fok	p-érték	tesztstat.	sz. fok
BUX	0.0000	52.2043	2	0.0259	12.7440	5
EGIS	0.0000	121.2358	2	0.0025	18.3700	5
MOL	0.0000	103.3843	2	0.1052	9.0975	5
MTELEKOM	0.0000	51.7739	2	0.0001	26.9211	5
OTP	0.0000	108.4685	2	0.5204	4.2039	5
RICHTER	0.0000	82.8593	3	0.0001	25.7553	5

5. táblázat. A  $\chi^2$  próba eredményei a logaritmus hozamokra

Részvény	Normális eloszlás		Stabil eloszlás	
	p-érték	tesztstat.	p-érték	tesztstat.
BUX	0.0000	0.0566	0.7804	0.0138
EGIS	0.0000	0.0658	0.2179	0.0221
MOL	0.0000	0.0585	0.8810	0.0123
MTELEKOM	0.0000	0.0563	0.0460	0.0288
OTP	0.0000	0.0641	0.8693	0.0125
RICHTER	0.0002	0.0455	0.2748	0.0209

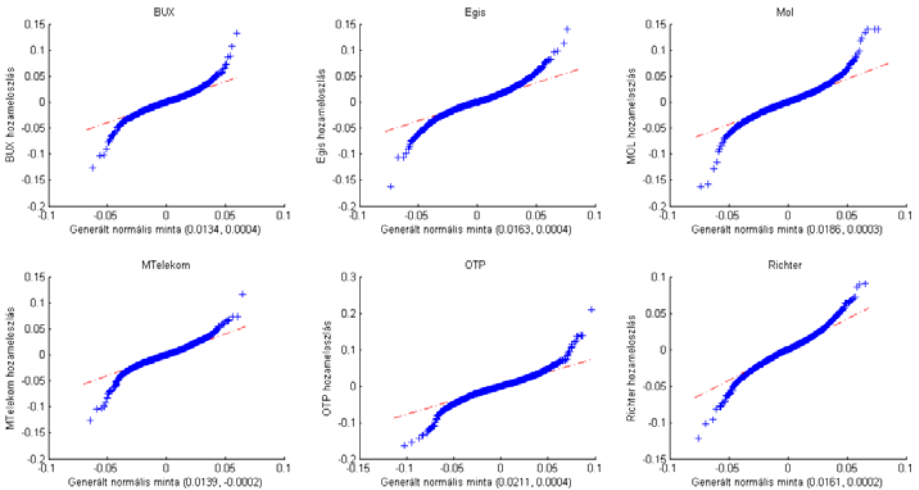
6. táblázat. A Kolmogorov-Smirnov próba eredményei a logaritmus hozamokra

A 6. táblázat tartalmazza az elvégzett Kolmogorov-Smirnov tesztek p-értékeit és a tesztstatisztika értékeit. A 95%-os megbízhatósági szinthez tartozó kritikus érték a normális nullhipotézis esetén 0.00258, míg stabil eloszlású nullhipotézis esetére nem ismert a teszt aszimptotikus viselkedése. A stabil nullhipotézis esetében a p-értékek a normális eloszlásra ismert aszimptotikus eredmények alapján kerültek meghatározásra. A tesztek a MATLAB *kstest* függvényével végeztem el. Az eredményekből kitűnik, hogy a hipotetikus  $\alpha$ -stabil eloszlásoktól való eltérés minden esetben kisebb, mint a normális eloszlástól való eltérés, és a teszt csak egy esetben (MTelekom) utasította el a stabil nullhipotézist.

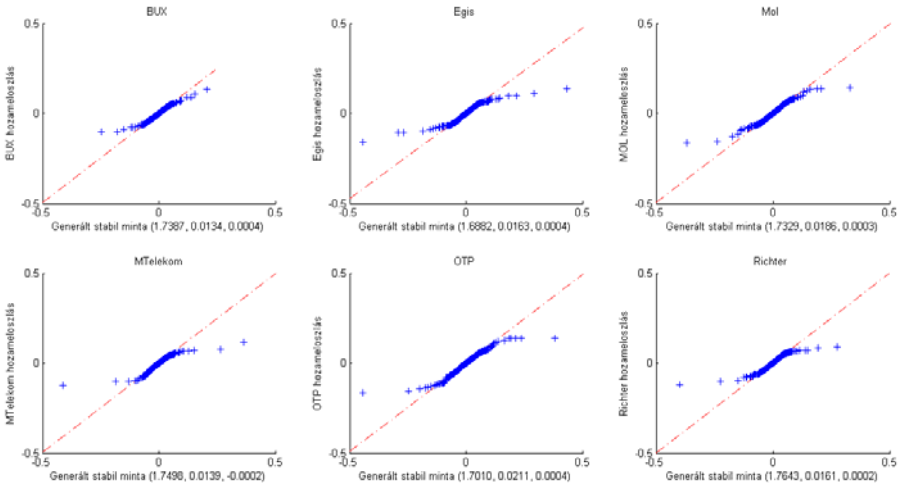
A hozamok empirikus eloszlásfüggvényét a normális eloszláshoz (4. ábra), illetve a becsült  $\alpha$  paraméterű stabil eloszláshoz (5. ábra) illetve ún. q-q ábrán ábrázoltam. A q-q ábra a megfigyelt és az elméleti, hipotetikus percentilis értékeket ábrázolja. Ha az illeszkedés megfelelő, azaz a hipotézisbeli és az empirikus eloszlás egyezik, akkor a pontok egy egyeneshez illeszkednek. Az elméleti eloszlásokat 10 000 elemű véletlen minták generálásával állítottam elő. Az ábrákon látható, hogy a normális eloszlás illesztése nem megfelelő, az eloszlás szélein jelentős eltérések figyelhetők meg az egyenestől.



Az 5. ábrán kevesebb pont tér el az egyenestől az eloszlás széleinél, tehát grafikusan is a várakozásnak megfelelő eredményt kaptam.



4. ábra. Q-Q ábrák a logaritmusos hozamok empirikus eloszlása és a normális eloszlás között (zárójelben a generált minta szórás és átlag paraméterei)

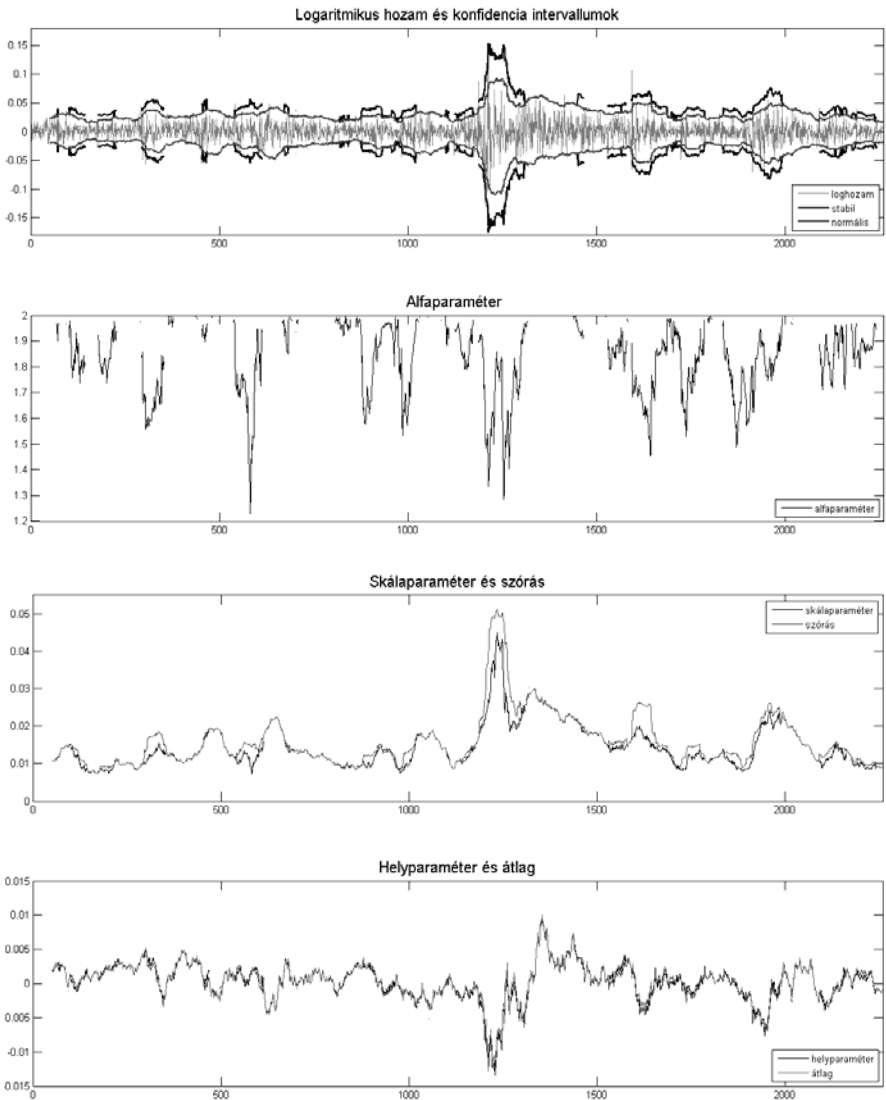


5. ábra. Q-Q ábrák a logaritmusos hozamok empirikus eloszlása és a becsült stabil eloszlás között (zárójelben a generált minta  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  paraméterei)

Elemzésem második felében azt vizsgáltam, hogyan alkalmazhatók az eredmények előrejelzésre. Ehhez változtatható méretű mozgóablakot készítettem, és ábrázoltam, hogyan változtak a paraméterek a vizsgált időperiódusban. Arra a kérdésre is próbáltam választ adni, hogy a 2008–2009-es pénzügyi válság hatása hogyan mutatkozott meg a hozamok eloszlásában. Az elkészült ábrák közül a BUX index ábráját mutatom be.

A 6. ábrán 50 elemű mozgóablak segítségével becsültem a paramétereket, és ábrázoltam a paraméterek változását az időben. Ez az ablakméret megfele-

lően kicsi ahhoz, hogy a változások gyorsan érvényesüljenek a becslésértékekben. Hátránya viszont, hogy előfordult olyan eset, amikor a paraméterek nem voltak meghatározhatók a PIT becsléssel az alacsony mintaelemszám miatt. A első ábra mutatja a logaritmusos hozam adatokat, 95%-os konfidencia intervallummal a normális eloszlás és a becült stabil eloszlás alapján. A második ábra az  $\alpha$  paramétert, a harmadik a skálaparamétert és a szórást, a negyedik a helyparamétert és az átlagot mutatja.



6. ábra. Konfidenciaintervallum normális és stabil eloszlás alapján  $n = 50$ , BUX teljes időszak

A pénzügyi válság hatása az ábra közepén, kb. az 1200. megfigyeléstől kezdődően látható. Az  $\alpha$  paraméter értéke nagyon meredeken csökkent: a

legalacsonyabb értékek 1.3 körüliek voltak. Hasonlóan alakult az OTP és az Egis hozameloszlásának  $\alpha$  paramétere, míg a többi vizsgált papírnál az alakparaméter nem csökkent kiugróan. Az  $\alpha$  paraméter becslése gyorsan változik, ebben közrejátszhat a becslési eljárás érzékenysége egy-egy nagyon extrém megfigyelésre, bár ez az érzékenység jóval kisebb, mint a hagyományos módszerek esetében.

A vizsgált időszakban megfigyelhető volt mindegyik részvélynél a szórás illetve a skálaparaméter növekedése a válság évében, és ezzel egyidejűleg a helyparaméter (azaz a hozam várható értékének) csökkenése. A skálaparaméter, illetve szórás értékének emelkedése nem volt hosszú távú, rövid idő alatt visszaálltak a 2008 előtti skála és szórás értékek. A stabil modellel becsült skálaparaméter általában alacsonyabb, mint a normális eloszlásból becsült szórás értéke. Azokban az időszakokban a legjelentősebb az eltérés amikor az alakparaméter jelentősen csökkent. Tehát minél inkább közelítünk a véges szórású esethez ( $\alpha = 2$ ), annál inkább érvényes a normális modell, míg ha az alakparaméter csökken, úgy válik az árfolyam volatilisabbé, és emelkednek a szóródást leíró paraméterek értékei.

## 5 Összefoglalás

Dolgozatomban bemutattam a stabil eloszláscsalád legfontosabb tulajdonságait, az ismert stabil pénzügyi modelleket, és a paraméter becslésére kidolgozott eljárásokat. A stabil eloszlások használata a pénzügyi modellezésben hosszú múltra tekint vissza, és az elméleti megalapozottsága széles körű, de az eloszláscsalád gyakorlati problémákban való alkalmazhatóságát nagyban nehezíti a zárt alakban ismert sűrűség- és eloszlásfüggvény hiánya, valamint a roppant számításigényes algoritmusok. Az olyan új statisztikai módszerek kidolgozása, melyek egyszerűen használhatóak, ezért időszerű és aktuális feladat.

Az általam kidolgozott PIT becslés szimmetrikus stabil eloszlások paraméterbecslésére ad megbízható, nagy pontosságú eredményt. A módszer a robusztus M-becslések családjába tartozik, és megfelelő statisztikai tulajdonságokkal rendelkezik. Az algoritmus és a szükséges függvényközelítések rendelkezésre állnak, ezért az eljárás könnyen implementálható. Jelen dolgozatomban igazoltam a PIT becslés gyakorlati feladatokban való alkalmazhatóságát.

Cikkemben a Budapesti Értéktőzsde legjelentősebb részvényeinek árfolyamváltozásait vizsgáltam a 2004-2012 közötti időszakban a logaritmikus hozamok eloszlásán keresztül. A hozameloszlások paramétereit a PIT becsléssel és a STABLE szoftver segítségével számítottam ki. Vizsgáltam a hozamok eloszlásának illeszkedését a normális, és a becsült paraméterű stabil eloszláshoz. Az elvégzett  $\chi^2$  és Kolmogorov-Smirnov tesztek alapján elutasítottam a normális modell használatát. A hozamok eloszlására konfidencia intervallumokat adtam, melyek korlátozott előrejelzési lehetőséget is biztosítanak.

## Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Dr. Fegyverneki Sándornak a dolgozat elkészítésében nyújtott segítségével, valamint ismeretlen lektoraimnak az észrevételeikért és hasznos tanácsaikért.

## Irodalom

1. Adler, J. R., Feldman, R. E., Taqqu, M. S., (Editors), *A Practical Guide to Heavy Tails: Statistical Techniques and Applications*, Birkhauser, Boston (1998).
2. Borak, Sz., Härdle, W., Weron, R., Stable Distributions. SFB 649 Discussion Papers, SFB649DP2005-008, Humboldt University, Berlin, Germany (2005).
3. Bradley, B. O., Taqqu, M. S., Financial Risk and Heavy Tails, in *Handbook of Heavy-tailed Distributions in Finance*, (ed. Rachev, S. T.), North-Holland (2003) 35–103.
4. Csenedes, Cs., Joint Robust Parameter Estimation for Symmetric Stable Distributions. *Journal of Statistical and Econometric Methods* **2**(2) (2013) 85–106.
5. Csenedes, Cs., Fegyverneki, S., Parameter Estimation for Symmetric Stable Distributions by Probability Integral Transformation. *Applied Information Science, Engineering and Technology, Topics in Intelligent Engineering and Informatics* **7** (2014) 1–18 DOI: 10.1007/978-3-319-01919-2.
6. Fama, E. F., Portfolio Analysis in Stable Paretian Markets. *Manage. Sci.* **11** (1965) 404–419.
7. Fama, E. F., Roll, R., Parameter Estimates of Symmetric Stable Distributions. *J. Amer. Statist. Assoc.* **66** (1971) 331–338.
8. Fama, E. F., Roll, R., Some Properties of Symmetric Stable Distributions. *Journal of the American Statistical Association* **63** (1968) 817–836.
9. Fegyverneki, S., Robust Estimators and Probability Integral Transformations. *Math. Comput. Modelling* **38** (2003) 803–814.
10. Gáll, J., Pap, Gy., *Bevezetés a hasznosság alapú portfólió-menedzsmentbe*, egyetemi jegyzet, mobiDIÁK könyvtár, Debreceni Egyetem (2004).
11. Gnedenko, B. V., Kolmogorov, A. N., *Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables*, Addison-Wesley, Cambridge, MA. (1954).
12. Hampel, F. R., Ronchetti, E. M., Rousseeuw, P. J., Stahel, W. A., *Robust Statistics – The Approach Based on Influence Functions*, Wiley, New York (1986).
13. Hill, B. M., A Simple General Approach to Inference about the Tail of a Distribution. *Ann. Stat.* **3** (1975) 1163–1174.
14. Huber, P. J., *Robust Statistics*, Wiley, New York (1981).
15. Huber, P. J., Robust Estimation of a Location Parameter, *Ann. Math. Statist.* **35** (1964) 73–101.
16. Janecs kó, B., Idősor-modellezés és opcióárazás csonkolt Levy-eloszlással. *Közgazdasági Szemle*, **47** (2000) 899–917.
17. Kogon, S. M., Williams, D. B. Characteristic function based estimation of stable parameters, in Adler, R., Feldman, R., Taqqu, M., (eds.), *A Practical Guide to Heavy Tails: Statistical Techniques and Applications*, Birkhauser, Boston (1998) 311–335.

18. Koutrouvelis, I. A., Regression-type Estimation of the Parameters of Stable Laws. *J. Amer. Statist. Assoc.* **75** (1980) 918–928.
19. Levy, P., *Calcul des Probabilités*, Gauthier-Villars, Paris (1925).
20. Lintner, J., The Valuation of Risky Assets and the Selection of Risky Investment in Stock Portfolios and Capital Budgets. *Rev. Econ. Stat.* **47** (1965) 13–37.
21. Lukács, P., Portfólió optimalizálása várható hozam – variancia és várható hozam – CVaR módszerrel. *Vezetéstudomány* **35** (2) (2004) 34–41.
22. Lux, T., Varga, J., A Pareto hipotézis vizsgálata: értékpapírpiazi hozamok és az extrémális hozamok eloszlása. *Sigma* **27** (1996) 1–23.
23. Mandelbrot, B., The Variation of Certain Speculative Prices, *The Random Character of Stock Market Prices* (ed. Cootner, P. H.), Cambridge, The M.I.T. Press (1964).
24. Markowitz, H., Portfolio Selection. *Journal of Finance* **7** (1952) 77–91.
25. McCulloch, J. H., Simple Consistent Estimators of Stable Distribution Parameters. *Commun. Statist. - Simula.* **15**(4) (1986) 1109–1136.
26. McCulloch, J. H., Measuring tail thickness to estimate the stable index alpha: a critique. *Journal of Business and Economical Statistics* **15** (1997) 74–81.
27. Mittnik, S., Rachev, S. T., Modeling Asset Returns with Alternative Stable Distributions. *Econometric Reviews* **12**(3) (1993) 261–330.
28. Nolan, J. P., Maximum Likelihood Estimation of Stable Parameters, in Barndorff-Nielsen, O. E. , Mikosch, T., and Resnick, S. I., (eds.), *Levy Processes: Theory and Applications*, Birkhäuser, Boston (2001) 379–400.
29. Nolan, J. P., Numerical Calculation of Stable Densities and Distribution Functions. *Comm. in Stat. - Stoch. Model.* **13** (1997) 759–774.
30. Nolan, J. P., stabil eloszláscsaláddal foglalkozó honlap: <http://academic2.american.edu/~jpnolan/stable/stable.html>
31. Palágyi, Z., Árfolyamingadozások és kockázatbecslés a Budapesti Értéktőzsdén, *Sigma* **30**(1-2) (1999) 27–33.
32. Palágyi, Z., Pénzügyi idősorok elemzése Levy-hatvány GARCH modellel, *Statisztikai Szemle* **81** (7) (2003) 571–587.
33. Press, S. J., *Applied Multivariate Analysis*, Holt, Rinehart & Winston, New York (1972).
34. Rachev, S. T. (ed.), *Handbook of Heavy-tailed Distributions in Finance*, North-Holland, Amsterdam, (2003).
35. Rachev, S. T., Mittnik, S., *Stable Paretian Models in Finance*, Wiley, New York (2000).
36. Samorodnitsky, G., Taqqu, M., *Stable Non-Gaussian Random Processes*, Chapman and Hall, New York (1994).
37. Sharpe, W. F., Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk. *Journal of Finance* **19** (1964) 425–442.
38. Uchaikin, V. V., Zolotarev, V. M., *Chance and Stability - Stable Distributions and their Applications*, VSP, Utrecht (1999).
39. Weron R., Performance of the Estimators of Stable Law Parameters. Hugo Steinhaus Center for Stochastic Methods, *Research Report HSC/95/1* (1995).
40. Zolotarev, V. M., *One-dimensional Stable Distributions*, Translations of Mathematical Monographs, **65**, American Mathematical Society, Providence (1986).

## ASSESSING ASSET RETURNS IN THE SYMMETRIC STABLE MODEL

In this study the basic characteristics of the stable distribution family, models of stable portfolio theory and parameter estimation methods are summarized. Usage of heavy-tailed distributions is widely accepted in financial modeling, thus the theoretical background is satisfactory. The distribution family has some property which is hard to handle in applications, e.g. the lack of known closed formula of the density and distribution function. Methods dealing with parameter estimation are unreliable, difficult to use or computationally very intensive. That's why research in that field is still conducive. A parameter estimation method for symmetric stable distributions is presented, based on Probability Integral Transformation (PIT). The estimation procedure is a robust M-estimate and it possesses good robust statistical properties. The method gives accurate and reliable results. The method is easy to implement, because the algorithm and all necessary function approximations are available. In the present study it is proven that the method can be applied in a practical application for real data sets. The logarithmic returns of some assets of Budapest Stock Exchange between 2004 and 2012 were modeled with symmetric stable distributions by PIT estimation procedure and STABLE software. The distribution of logreturns were fitted to normal and stable distributions. By  $\chi^2$  and Kolmogorov-Smirnov goodness-of-fit tests the normal model was rejected. Confidence intervals for the returns were also given which provide some sort of prediction.

# PÉNZ- ÉS TŐKEPIACI SZEREPLŐK GAZDASÁGI HATÁSÁNAK IGAZOLÁSA EGY TVP-VAR MODELL KERETÉBEN AZ EGYESÜLT ÁLLAMOK PÉLDÁJÁN <sup>1</sup>

ÁCS ATTILA

Az írás a pénz- és tőkepiaci szereplő brókerkereskedők gazdasági hatását vizsgálja az Egyesült Államok gazdaságára egy változó paraméterezésű VAR modellnek az alkalmazásával, és egyben a módszertan részletes ismertetését is nyújtja. Az eredmények a brókerkereskedők statisztikailag szignifikáns hatását mutatják nemcsak a reálgazdasági kibocsátásra, hanem az infláció és a 3 hónapos kötvényhozamok esetében is. Az M2 monetáris aggregátummal becsült VAR modellből kapott eredményekkel való összehasonlítás pedig azt mutatja, hogy a brókerkereskedőknek legalább akkora hatása van a makrogazdasági folyamatokra, mint a nominálisan ötször nagyobb M2 monetáris aggregátumnak. Az eredmények egyrészt a pénz- és tőkepiacok fejlesztésének a fontosságára hívják fel a figyelmet, másrészt figyelmeztetésként is szolgálnak, hogy a monetáris és makroprudenciális döntések során nem elégséges csupán a hagyományos makro és pénzintézeti adatokra támaszkodni, hanem tekintettel kell lenni a pénzügyi innovációra fogékonyabb pénz- és tőkepiaci szereplők mérlegadataira is.

*Kulcsszavak:* Bayes-i TVP VAR, brókerkereskedő, Gibbs mintavételezés. *Journal of Economic Literature (JEL) kód:* C11, C32, E51.

## Bevezetés

Az Egyesült Államok legfőbb pénz- és tőkepiaci szereplői a brókerkereskedő szervezetek (*broker-dealers*, inentől röviden csak brókerkereskedők), amely szervezetek makrogazdasági szerepére a 2008-ban kirobbant válság hívta fel a figyelmet. Annak fényében, hogy az általánosan elfogadott új-keynesi elveken nyugvó jegybanki makromodellek egyáltalán nem tartalmazznak a pénzkínálatra vonatkozó változót (Komáromi [2008]) – melyek szintén pénzintézeti mérlegadat jellegű monetáris változók (*counterparts of monetary aggregates*) – a brókerkereskedők szerepének mellőzöttsége egyáltalán nem meglepő.

A brókerkereskedők az ún. árnyék-bankrendszer (*shadow banking system*), vagy piaci-alapú (*market-based*) bankrendszernek a részei.<sup>2</sup> Ezek a spe-

<sup>1</sup>Beérkezett: 2014. november 5. E-mail: [acsacs@gmail.com](mailto:acsacs@gmail.com).

<sup>2</sup>A piaci-alapú intézetek közé tartoznak az állam-közeli ügynökségek (*Government Sponsored Enterprises, GSE*), a GSE jelzálog „pool”-ok (*GSE mortgage pool*), pénzügyi vállalkozások (*finance company*), az eszközfedeztetű értékpapír (*Asset Backed Security, ABS*) kibocsátók és a brókerkereskedők (*broker-dealers*) (Adria – Shin [2010]), akiket a szakirodalom számos esetben a befektetési bankokkal (*investment bank*) azonosít.

cializált pénzügyi intézetek lejárati, likviditási és hitel transzformációt hajtanak végre (a kereskedelmi bankokhoz hasonlóan) anélkül, hogy direkt hozzáférésük lenne az állami garanciákhoz (*public backstops*), a jegybank biztosította likviditási forrásokhoz és garanciákhoz. A befektetési tevékenységükhöz szükséges pénzügyi forrásokat alapvetően a pénz- és tőkepiacokról kölcsönzik, betéteket nem gyűjtenek. Az árnyék-bankrendszer az értékpapírosításra és az ún. „*wholesale*” (visszavásárlási megállapodások és pénzügyi kereskedelmi papírok) finanszírozási formára épül, melynek keretében a hitelfolyósítás folyamata értékpapír alapú kölcsönzések hétlépcsős sorozatává alakul (általánosságban). Ebből a hét lépésből három szakasz a brókerkereskedőkön keresztül történik (Pozsar *et al* [2010]).<sup>3</sup>

Az értékpapírosítás, és a tőke- és pénzpiacok biztosította finanszírozásra támaszkodó pénzügyi rendszer kialakulása párhuzamosan történt az amerikai lakásfinanszírozási rendszer átalakulásával, amely során a piaci-alapú intézetek folyamatosan átvették a vezető szerepet a hagyományos betétgyűjtő bankoktól. Az Egyesült Államokban a piaci-alapú intézetek 2007-re mintegy 7 000 milliárd dollárnyi jelzáloghitelt kezeltek, szemben a hagyományos intézetek 3 500 milliárdnyival, egyesített mérlegfőösszegük majdnem 17 000 milliárd, míg a hagyományos kereskedelmi banki mérlegfőösszeg 13 000 milliárd dollárt tett ki, és ezen belül a brókerkereskedők mintegy 3 000, míg a kereskedelmi bankok 10 000 milliárd dollárnyi eszközt kezeltek (Adria – Shin [2010]), ill. lásd Függelék 9. ábra).

A brókerkereskedők működésével Adrian–Shin számos tanulmányban foglalkozik, és egyik legfontosabb megállapításuk, hogy egy piaci alapú pénzügyi rendszerben igenis szükséges az aktív pénz- és tőkepiaci szerepet játszó befektetési bankok és brókerkereskedők aggregált mérlegeinek a figyelembevétele, és a likviditást a szóban forgó bankok összesített mérlegfőösszegeinek függvényében kell értelmezni (Adrian–Shin, [2009]). A brókerkereskedők a monetáris makromodellekben 2013-ban kezdtek szerepet kapni Adrian–Boyarchenko [2013] és Nuño–Thomas [2013] írásaiban. A monetáris elemzések másik klasszikus, vektor-autoregressziós (VAR) modelljeiben eddig viszont még nem igazán tűntek fel.

Korábbi tanulmányunkban<sup>4</sup> egy változatlan paraméterezésű VAR modellben már foglalkoztunk a brókerkereskedőkkel, és a kapott impulzus válaszfüggvények ökonometriai igazolását adták a brókerkereskedők statisztikailag szignifikáns makroökonómiai szerepéről. Az eredmények értelmében a brókerkereskedők mérlegfőösszege – eltérően a kereskedelmi bankok és az árnyék-

<sup>3</sup>Az árnyék-bankrendszer által végzett értékpapírosítás folyamata a nem-bank pénzügyi közvetítők láncolatán alapszik és a tradicionális banki hitelközvetítés vertikális fel-darabolásaként lehet elképzelni. Hét lépésre osztható: 1) kölcsönök keletkeztetése, 2) kölcsönök összegyűjtése, 3) kölcsönök átstrukturálása ABS-ekbe (*asset-backed securities*, eszközfedezetű értékpapír), 4) a keletkeztetett ABS-ek összegyűjtése (*warehousing*), 5) az összegyűjtött ABS-ek átstrukturálása CDO-kba (*collateralised debt obligation*, fedezett adósságkötelevény), 6) ABS-ek közvetítése, 7) az előző hat lépés finanszírozása. Ebből a hét lépésből a 3), 4) és az 5) szakasz a brókerkereskedőkön keresztül történik (Pozsar *et al* [2010])

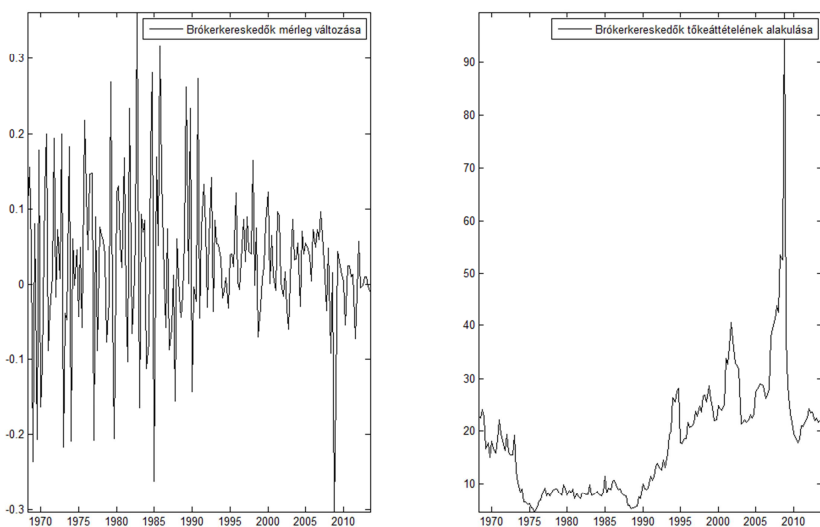
<sup>4</sup>Ács [2014].



bankrendszer összesített mérlegfőösszegétől – reál-kibocsátási szempontból nem semleges az Egyesült Államok esetében.

Ugyanakkor a VAR modellekből generált impulzus válaszfüggvények azt sejtetik, hogy a brókerkereskedőknek a reálgazdaságra gyakorolt hatása időben változó. Mindez egy olyan ökonometriai modell használatát teszi indokolttá, amely lehetővé teszi a modell paramétereinek, és lehetőség szerint a közöttük lévő kapcsolatnak az időbeli változását. Ezeknek megfelelően Primiceri [2005] Bayes-i megközelítésű VAR modellje kerül alkalmazásra, amely a modell paramétereinek és a hibatagok kovarianciamátrixának a változását, időben változó impulzus-válasz-függvények generálását, valamint a gazdaság strukturális változásának a nyomon követését teszi lehetővé. Továbbá, az időben változó kovariancia mátrix a változók közötti nem-lineáris kapcsolatok és a sokkok heteroszkedasztikus tulajdonságának a modellezésében segít.

A paraméterek változását lehetővé tevő modellhasználatot támasztja alá két további megfigyelés is. Ha a brókerkereskedők eszközállomány-változás és tőkeáttétel idősorának az 1968 és 2012 közötti alakulására tekintünk az 1. ábrán, akkor alapvetően két dolog tűnik fel. Az egyik, hogy az 1990-es évek elejétől a mérlegváltozás oszcillációja jelentős mértékben csökkent, míg a tőkeáttétel az 1990-es évektől dinamikusan növekedett és a korábbi időszakot nem jellemző markáns változások is megfigyelhetők válságok idején (1994-es kötvény piaci, a 2001-es „dotcom” és a 2008-ban kirobbant válság). További érdekes fejlemény, hogy ekkortól honosodott meg a *Value-at-Risk* alkalmazása is a piaci kockázatok kezelésére.



1. ábra. A brókerkereskedők mérleg változása és tőkeáttételének alakulása 1968-2013 között

# 1 Módszertani összefoglaló

Primiceri [2005] Bayes-i megközelítésű VAR modelljében mind a modell-paraméterek, mind a hibatagok kovariancia-mátrixa időben változó. A gazdasági tényezők kapcsolatában bekövetkező (strukturális) változások modellezésének elengedhetetlen feltétele, hogy a változók hibatagjainak (innovációinak) a kovariancia-mátrixában az időbeli változását lehetővé tegyünk. Így nem csak a változók időben változó szimultán kapcsolatának a leírása válik lehetővé, hanem a változásokat ért sokkok (innovációk) heteroszkedasztikus változása is. A Bayes-i modellek becslésének egyik lehetséges módja a Gibbs mintavételezési eljárás. A módszer mind a paraméterek magas dimenziószámával, mind pedig a változók közötti lehetséges nem-lineáris kapcsolattal sikeresen birkózik meg, azáltal, hogy az eredeti becslési feladatot kisebb és egyszerűbb egységekre bontja fel a valószínűségfüggvény maximalása során.

A Gibbs mintavételezési<sup>5</sup> eljárás egy Markov-lánc Monte Carlo (Markov chain Monte Carlo (MCMC)) szimulációs eljárás, amely a paraméterek sokdimenziós együttes poszterior eloszlása helyett egy kevesebb dimenziószámmal rendelkező feltételes eloszlásból generál véletlen mintát. Az algoritmus az együttes és a peremeloszlást, a feltételes eloszlásokból történő ismételt mintavételezéssel becsüli, mely becslések a minta elemszámának a növekedésével exponenciálisan tartanak a valós eloszlás-paraméterekhez (Kim, Nelson [1999], 178-180. o.). A Bayes-i ökonometria a Gibbs féle szimulációs eljárásnak köszönhetően nemcsak a pontbecslések, hanem a pontbecsléseket övező bizonytalanság megjelenítéséhez is egy hatékony eljárás (Blake – Mumtaz [2012], 43. o.).

A becsülni kívánt VAR paramétereknek megfelelő konjugált prior eloszlást (a koefficienseknek normál, míg a VAR hibatagok kovariancia-mátrixának inverz-Wishart eloszlást) választva ugyan az együttes poszterior eloszlás analitikusan nem fejezhető ki, de a paraméterek feltételes poszterior eloszlása már igen. A mintaelemek generálása során pedig a Gibbs algoritmus felváltva húz VAR koefficienseket és varianciákat a feltételes normális- és inverz-Wishart poszterior eloszlásokból a Kálmán-szűrő és a Carter-Kohn algoritmus használatával. A Kálmán-szűrő alkalmazhatóságának a feltétele, hogy a modell egyenletei kifejezhetőek legyenek lineáris formában. A modellezés során pedig csak azokat a Gibbs mintavételezéssel szimulált mintaelemeket használjuk fel, melyek a Markov-lánc poszterior együttes eloszláshoz történő konvergálása után kerültek szimulálásra (Koop, Korobilis [2010]).

Az írás hátralévő részében az időben változó paraméterezésű, sztochasztikus VAR modell és becslésének fentebb bemutatott lépései kerülnek részletesebb ismertetésre, melyet a Függelék egészít ki. Az empiriai rész a brókerkereskedők reálgazdasági hatásával foglalkozik és mutatja be a becsült modell eredményeit.

---

<sup>5</sup>A Gibbs mintavételezés kitűnő magyar nyelvű leírását adja Várpalotai [2009].

## 1.1 A TVP VAR modell

Egy időben változó paraméterezésű  $k$ -ad rendű  $VAR(k)$  modell<sup>6</sup> a következőképpen írható

$$y_t = c_t + B_{1,t}y_{t-1} + B_{2,t}y_{t-2} + \dots + B_{k,t}y_{t-k} + \varepsilon_t \quad t = 1, \dots, T, \quad (1)$$

ahol  $y_t$  a modell változókat tartalmazó  $(n \times 1)$  vektor,  $c_t$  az időben változó konstansokat tartalmazó  $(n \times 1)$  vektor,  $B_{i,t}$ ,  $i = 1, \dots, k$  az időben változó autó-regressziós koefficienseket magába foglaló  $(n \times n)$  mátrix. Továbbá  $\varepsilon_t$  a heteroszkedasztikus sokkokat tartalmazó  $(n \times 1)$  vektor,  $E(\varepsilon_t) = 0$  és  $E(\varepsilon_t \varepsilon_\tau') = \Omega_t$  ha  $t = \tau$  és 0 egyébként.

Az (1) kifejezés jobb oldali  $(c_t, B_{1,t}, \dots, B_{k,t})$  koefficienseinek  $n \times (1 + kn)$  méretű  $B_t$  vektorba, és a jobb oldali modellváltozóinak  $X_t'$  mátrixba való rendezésével az időben változó  $VAR(k)$  modell a következő kompakt formába írható

$$y_t = X_t' B_t + \varepsilon_t. \quad (2)$$

A (2) kifejezésben az  $y_t$  mátrix a modellváltozók alkotta  $(tn \times 1)$  vektor,  $X_t' = I_n \otimes [1, y_{t-1}', \dots, y_{t-k}']$  a magyarázó változók alkotta  $tn \times (1 + kn)$  mátrix, ahol  $y_{t-i}'$   $(t \times n)$  mátrix,  $I_n$  egy  $(n \times n)$  egységmátrix,  $\otimes$  a Kronecker-szorzatot jelöli, valamint  $\varepsilon_t \sim N(0, \Omega_t \otimes I_T)$  (Koop–Korobilis [2010]).

A heteroszkedasztikus sokkok  $\Omega_t$  időben változó kovariancia mátrixáról feltételezzük, hogy egy  $(n \times n)$  szimmetrikus, pozitív definit mátrix, ezért a következő módon faktorálható:

$$A_t \Omega_t A_t' = \Sigma_t \Sigma_t', \quad (3)$$

ahol  $A_t$  az  $\alpha_{i-1, j-1, t}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$  elemek alkotta alsó háromszögmátrix, egyesekkel a főátlóban

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21,t} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ a_{31,t} & a_{32,t} & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ a_{n1,t} & a_{n2,t} & \dots & a_{nn-1,t} & 1 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

$\Sigma_t$  a  $\sigma_{i,t}$ ,  $i = 1, \dots, n$  elemek alkotta diagonális mátrix

$$\Sigma_t = \begin{pmatrix} \sigma_{1,t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_{2,t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{n,t} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Így az időben változó hibatag az  $\varepsilon_t = A_t^{-1} \Sigma_t u_t$  alakban írható, ahol  $u_t$  varianciája  $Var(u_t) = I_n$  (Primiceri [2005]). Az eddigiek felhasználásával a (2)

<sup>6</sup>A modell ismertetése szorosan követi Primiceri [2005] munkáját, így amennyiben más hivatkozás nem szerepel az adott bekezdésben, automatikusan az a hivatkozási forrás.

kifejezés a következőképpen írható:<sup>7</sup>

$$y_t = X_t' B_t + A_t^{-1} \Sigma_t u_t, \quad (6)$$

és a modellezési stratégia, hogy a (6) kifejezésben szereplő koefficienseket jellemző folyamatokat modellezzük. Az időben változó modell-koefficiensek dinamikáját kifejező egyenletek a következő módon írhatóak:

$$B_t = B_{t-1} + v_t, \quad (7)$$

$$\alpha_t = \alpha_{t-1} + \zeta_t, \quad (8)$$

$$\log \sigma_t = \log \sigma_{t-1} + \eta_t, \quad (9)$$

ahol  $\alpha_t$  az  $A_t$  mátrix egyesekből álló főátlója alatti nem-zéró elemek oszlopainak egymás alá rendezett  $n(n-1)/2 \times 1$  vektora,  $\sigma_t$  pedig a  $\Sigma_t$  diagonális elemeit tartalmazó vektor. A fentebbi kifejezések értelmében  $B_t$  és az  $\alpha_t$  vektor elemei bolyongási folyamatként vannak modellezve. A (9) kifejezés a sztochasztikus volatilitást modellezi, ahol a standard hibát reprezentáló  $\sigma_t$  elemek geometrikus bolyongási folyamatot követnek. Mivel a gyakorlatban véges időtávokban gondolkodunk, ezért a bolyongási folyamat feltételezése nem probléma, ugyanakkor lehetővé teszi a paraméterekben bekövetkező strukturális változások modellezését.<sup>8</sup>

A modell hibatagjairól (innovációiról) feltételezett azok együttesen normális eloszlása, amely a következő kovariancia mátrixszal írható le:

$$V = \text{Var} \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \\ \zeta_t \\ \eta_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W \end{pmatrix}, \quad (10)$$

ahol  $I_n$  az  $n$ -dimenziós egységmátrix és  $Q$ ,  $S$  és  $W$  pozitív definit mátrixok. Továbbá  $S$  egy blokkdiagonális mátrix, ahol az  $S_i$  blokkok dimenziója rendre  $(1 \times 1)$ ,  $(2 \times 2)$ ,  $\dots$ ,  $((n-1) \times (n-1))$ , a (4) kifejezésben megjelenített szimultán

<sup>7</sup>Általában a szakirodalomban az  $\varepsilon_t = P v_t$  kifejezéssel találkozni, ahol  $P$  az  $\Omega$  kovariancia-mátrix Cholesky dekompozíciójából kapott alsó háromszög mátrix, főátlójában az ortogonalizált  $v_t$  elemek szórásával. A (3) kifejezéshez hasonlóan, a  $D^{-1/2} = \Sigma_t$  és  $A = A^{-1}$  helyettesítésekkel,  $\Omega_t = A_t D A_t' = A_t D^{1/2} D^{1/2} A_t' = P P'$ , amiből a VAR hibatagokra az  $A^{-1} \varepsilon_t = u_t$  mátrixegyenlet és a  $v_t = P^{-1} \varepsilon_t = D^{-1/2} A^{-1} \varepsilon_t = D^{-1/2} u_t$  összefüggés írható fel. A kifejezésből jól látszódik, hogy az  $\varepsilon_t$  korrelált hibatagok nemcsak az  $A$  háromszögmátrixszal, hanem a hibatagok szórásával, a  $D$  diagonális mátrixszal is osztásra, standardizálásra kerülnek, és így  $v_t$  diagonális elemei a VAR hibatagok standard hibáit tartalmazza. Az impulzusfüggvények számítása során így az egységnyi standard hiba nagyságú sokkok hatásai kerülnek megjelenítésre (Hamilton [1994], 320-323.). A TVP-VAR-ban azonban  $\Sigma$  és  $A$  mátrix a modellezés szerves részét képezik, hiszen a hibatagok varianciája is időben változó.

<sup>8</sup>Ahogy Koop, Korobilis [2010] megjegyzi, a bolyongási folyamatként való modellezésnek, avagy az egységnyi nagyságú koefficiensek feltételezésének az előnye, hogy egyszerűíti a becslési folyamatot, hiszen a koefficienseken kívül a várható értéket ( $\mu$ ) sem kell becsülni. Ugyanakkor a bolyongási folyamat tulajdonságai miatt a szimuláció kezdő értékét nem lehet a várható értékre alapozni, hanem szubjektív vagy „gyakorló” mintára alapuló értéket kell neki választani.

kapcsolatoknak megfelelően. A blokk diagonálítás a becült paraméterek szimultán függetlenségét is biztosítja, amely feltételezés a statisztikai következtetést egyszerűsíti, mert lehetővé teszi, hogy a változók szimultán kapcsolatát leíró egyenletek paramétereinek Gibbs mintavételezését külön-külön, egyenletenként végezzük (Primiceri [2005]). Az előzőeknek megfelelően az  $S$  kovarianciamátrix 4 modellváltozó esetén a következő formában írható:

$$S \equiv \text{Var}(\zeta_t) = \begin{pmatrix} S_1 & 0_{1 \times 2} & 0_{1 \times 3} \\ 0_{2 \times 1} & S_2 & 0_{2 \times 3} \\ 0_{3 \times 1} & 0_{3 \times 2} & S_3 \end{pmatrix}, \quad (11)$$

$$S_1 \equiv \text{Var}(\zeta_{21,t}), S_2 \equiv \text{Var}([\zeta_{31,t}, \zeta_{32,t}]'), S_3 \equiv \text{Var}([\zeta_{41,t}, \zeta_{42,t}, \zeta_{43,t}]').$$

## 1.2 A prior eloszlások és a Kálmán-szűrő kezdő értékeinek a meghatározása

Primiceri [2005] modelljében koefficiensek és a kovarianciák kezdeti értékeiről feltételezett, hogy azok függetlenek egymástól.<sup>9</sup> A (7), (8) és (9) kifejezésekben a normális eloszlású  $v_t$ ,  $\zeta_t$ ,  $\eta_t$  hibatagok kovarianciamátrixainak prior eloszlásáról feltételezett, hogy független inverz Wishart eloszlásúak (amit többváltozós inverz gamma eloszlásként lehet elképzelni), a (10) és (11) kifejezés blokkdiagonális tulajdonságával összhangban. Az időben változó koefficiensek kezdeti értékeiről  $p(B_0)$ , a változók szimultán kapcsolatát leíró  $A_t$  mátrix  $p(\alpha_0)$  értékeiről és a  $p(\log \sigma_0)$  logaritmizált standard hibákról feltételezett, hogy normális eloszlást követnek. Ezek a feltételezések a (7), (8) és (9) kifejezésekkel együtt biztosítják, hogy  $p(B_0)$ ,  $p(\alpha_0)$ ,  $p(\log \sigma_0)$   $a$ -nak a  $Q$ ,  $W$ ,  $S$  kovarianciamátrixra vonatkozó feltételes eloszlása a szimuláció során végig normális eloszlást követ.<sup>10</sup>

A prior eloszlások kalibrálása, és egyben a Gibbs-mintavételezés során használt Kálmán-szűrő kezdő értékeinek a meghatározása, a rendelkezésünkre álló adatsor első  $T$  megfigyelése alkotta mintából számított változatlan paraméterezésű VAR modell szolgál:

$$B_0 \sim N(\hat{B}_{OLS}, 4V(\hat{B}_{OLS})),$$

$$A_0 \sim N(\hat{A}_{OLS}, 4V(\hat{A}_{OLS})),$$

$$\log \sigma_0 \sim N(\log \hat{\sigma}_{OLS}, 4I_n),$$

<sup>9</sup>Ennek megfelelően Koop, Korobilis [2010] a független normális-Wishart prior elnevezést használja az egymástól független VAR koefficiensek és VAR hibatagok kovarianciamátrix priorjára.

<sup>10</sup>Egy regressziós egyenlet esetén a koefficiensek konjugált priorja a normális eloszlás, azaz, a prior és a likelihood függvény kombinációjaként adódó poszterior szintén normális eloszlással rendelkezik (természetes konjugált prior esetén a prior eloszlás típusa megegyezik a likelihood eloszlásával is, és ekkor a poszterior analitikusan kifejezhető). A regressziós hibatag kovarianciájának (kovariancia inverzének) konjugált priorja a gamma (inverz gamma) eloszlás. A koefficienseknek a hibatag kovarianciájára vonatkozó feltételes poszterior eloszlása többváltozós normális eloszlású, míg a regressziós hibatag variációjának (kovariancia inverzének) a koefficiensekre vonatkozó feltételes poszterior eloszlása gamma (inverz gamma) eloszlású (magyar nyelven lásd: Várpalotai [2009]).

$$Q \sim IW(k_Q^2 \cdot TV(\hat{B}_{OLS}), T),$$

$$W \sim IW(k_W^2 \cdot 5I_n, 5),$$

$$S \sim IW(k_S^2 \cdot \dim(S_{i=1,2,3}) \cdot V(\hat{A}_{i=1,2,3 OLS}), 1 + \dim(S_{i=1,2,3})).$$

Azaz, a  $B_0$  koefficiens mátrix elemeinek a várható értékéke a VAR modellből kapott legkisebb négyzetes (OLS) pontbecslések ( $\hat{B}_{OLS}$ ), míg varianciája a VAR koefficiensnek varianciájának a négyszerese.<sup>11</sup> A modellváltozók szimultán kapcsolatát leíró  $A_0$  mátrix elemeinek a várható értékét a VAR hibatagok kovariancia mátrixának Cholesky felbontásából kapott normalizált<sup>12</sup> alsó háromszögmátrix inverzének, az egységnyi nagyságúra normalizált főátlója alatti elemei adják.<sup>13</sup> Az  $A_0$  mátrix elemeinek prior varianciáját pedig a normalizált inverz alsó háromszögmátrix elemei varianciájának a négyszerese adja. A variancia prior értékének ilyen módon való meghatározása önkényesnek tűnhet, de biztosítja, hogy minden elem jelentőségének megfelelően legyen figyelembe véve (Benati, Mumtaz [2006]). Ezek az értékek egyben a Gibbs mintavételezés kezdőértékéül is szolgálnak. A log  $\sigma_0$  esetében az eloszlás várható értéke a VAR hibatagok kovariancia mátrixának Cholesky felbontásából kapott alsó háromszögmátrix diagonális elemeinek a logaritmusá, míg a variancia mátrix prior értéke az  $n$ -dimenziós egységmátrix négyszerese.

A  $Q$ ,  $S_i$ ,  $W$  kovariancia mátrixok paramétereiről feltételezett azok egymástól való függetlensége, és prior értékeiknek független inverz Wishart eloszlása. A  $Q$  mátrix esetében a szabadságfok egyenlő a gyakorló minta méretével, míg az  $S_i$  és  $W$  mátrixok esetében a modellparaméterek prior eloszlásának a szabadságfoka eggyel nagyobb a megfelelő kovariancia mátrixok dimenziójánál,<sup>14</sup> azaz 5 a  $W$  és 2, 3, 4 az  $S_{i=1,2,3}$  kovariancia mátrixok esetében. A skálalaparaméterek pedig a megfelelő legkisebb négyzetes becslési eredményeknek a szabadságfokokkal vett többszöröse.<sup>15</sup>

A  $k_Q$ ,  $k_W$  és  $k_S$  értékek a becsülni kívánt paraméterek időbeli változásának a mértékéről fejeznek ki prior feltételezést. Ezek az értékek a  $k_Q$ ,  $k_W$  és  $k_S$  esetében sorra 0,05, 0,01 illetve 0,1.<sup>16</sup> A VAR modell szempontjából a  $Q$  mátrix prior eloszlásának a paraméterezése a legmeghatározóbb, hiszen

<sup>11</sup>Ezeket az értékeket hiperparamétereknek nevezi a szakirodalom.

<sup>12</sup>A Cholesky felbontásából kapott alsó (felső) háromszögmátrix normalizálása során a háromszögmátrix oszlopait (sorait) osztjuk a főátlóban található értékekkel (VAR hibatagok varianciájával), amely a főátlóbeli elemek egységnyi nagyságát eredményezi.

<sup>13</sup>Tekintve, hogy 4 változónk van, ezért a normalizált Cholesky felbontás elemeiből 3 darab  $(1 \times 1)$ ,  $(2 \times 2)$  és  $(3 \times 3)$  dimenziójú blokk mátrixot képzünk. A mátrixok elemei a Cholesky felbontás  $(2,1)$  majd  $(2,1)$ ,  $(3,1)$ ,  $(3,2)$  és végül  $(2,1)$ ,  $(3,1)$ ,  $(3,2)$ ,  $(4,1)$ ,  $(4,2)$ ,  $(4,3)$  helyen álló elemei, ami egy  $(8 \times 8)$  blokk-diagonális mátrixot eredményez.

<sup>14</sup>A szabadságfokok ilyen módon való megválasztása biztosítja, hogy az inverz Wishart eloszlás megfelelően definiált az  $S_i$ ,  $W$  mátrixok esetében. A  $Q$  kovariancia mátrix esetében pedig egy relatív szorosabb priorra van szükség, az időben változó paraméterek megfelelő módon való alakulásának a biztosításához (Primiceri [2005]).

<sup>15</sup>Mivel az inverz Wishart eloszlás esetén a skálalaparaméter a négyzetes hibatagok összegként értelmezhető (Primiceri [2005]).

<sup>16</sup>Az összehasonlítás kedvéért, ezek az értékek Primiceri [2005] 3 változós modellje esetében rendre 0,01, 0,01 illetve 0,1, és különösen a  $k_Q$ -nak tulajdonít kiemelkedő szerepet. Esetünkben a  $k_Q$  értéke érdemben nem befolyásolja az eredményeket.

egyszerre  $\{n(1+nk) \times (n(1+nk)+1)\}/2$  paraméter viselkedését, és emiatt a modell időbeli változását jelentősen befolyásoló tényező. A  $k_Q$ ,  $k_W$  és  $k_S$  priorok kapcsán Primiceri [2005] megemlíti, hogy azok nem az időbeli változást parametrizálják, hanem csupán az időbeli változást illető prior feltételezést fejezik ki.

### 1.3 A modell lineáris állapotteres felírása

A kiindulópont tehát a becsülendő változó paraméterezésű  $k$ -ad rendű  $VAR(k)$  modell állapotteres felírása, amit a (2) és a (7) egyenlet együttesen ad:

$$y_t = X_t' B_t + \varepsilon_t, \quad (2)$$

$$B_t = B_{t-1} + v_t, \quad (7)$$

ahol  $E(\varepsilon_t \varepsilon_t') = \Omega$  és  $E(v_t v_t') = Q$  ha  $t = \tau$  és 0 egyébként. A (7) kifejezés a bolyongási folyamatot követő állapotváltozó alakulását írja le, és a modell átmeneti- vagy állapotegyenletének (*Transition/State Equation*) nevezzük.<sup>17</sup> A (2) kifejezés a megfigyelési egyenlet (*Observation/Measurement Equation*), és a rendelkezésünkre álló, megfigyelt  $B_{t-1}$  változót köti a nem-megfigyelhető  $B_t$  állapotváltozóhoz az  $X_t'$  mátrixon keresztül.

A következő lineáris Gauss-féle állapotteres egyenletrendszerhez írjuk át a (6) kifejezést következő formába:

$$A_t(y_t - X_t' B_t) \equiv A_t \hat{y}_t = \Sigma_t u_t.$$

Felhasználva, hogy  $A_t$  alsó háromszög mátrix egyesekkel az átlójában,  $\hat{y}_t$  a következő formába írható:

$$\hat{y}_t = Z_t \alpha_t + \Sigma_t u_t, \quad (12)$$

ahol  $\hat{y}_t = [\hat{y}_{1,t}, \hat{y}_{2,t}, \hat{y}_{3,t}, \hat{y}_{4,t}]'$ ,  $Z_t$  ( $n \times n(n-1)/2$ ) dimenziójú blokk mátrix, és az  $\alpha_t$  a (8) kifejezésben definiált  $(n(n-1)/2 \times 1)$  dimenziójú koefficiens vektor az  $A_t$  mátrix egyesekből álló főátlója alatti nem-zéró elemeiből. Kiegészülve a (8)  $\alpha_t = \alpha_{t-1} + \zeta_t$  kifejezéssel, együttesen egy nem-lineáris állapotteres egyenletrendszert alkotnak. A változók szimultán kapcsolatát leíró (4) és (5) kifejezés felhasználásával a modell-koefficiensek dinamikáját kifejező egyenletek

<sup>17</sup>Minthogy  $B_t$  elemeiről feltételeztük, hogy bolyongási folyamatot követnek ezért a Függelék (17) képletében  $F = I_n$  egységmátrix (és  $\mu = 0$ ), ami a (7) kifejezésben elhagyható (lásd még 4. lábjegyzetet).

az alábbi formába írhatóak:<sup>18</sup>

$$\begin{aligned}\hat{y}_{1,t} &= \sigma_{1,t}u_{1,t}, \\ \hat{y}_{2,t} &= -a_{21,t}\hat{y}_{1,t} + \sigma_{2,t}u_{2,t}, \\ \hat{y}_{3,t} &= -a_{31,t}\hat{y}_{1,t} - a_{32,t}\hat{y}_{2,t} + \sigma_{3,t}u_{3,t}, \\ \hat{y}_{4,t} &= -a_{41,t}\hat{y}_{1,t} - a_{42,t}\hat{y}_{2,t} - a_{43,t}\hat{y}_{3,t} + \sigma_{4,t}u_{4,t}.\end{aligned}\tag{13}$$

Kiegészülve a feltételezéssel, hogy az egyes egyenletekhez tartozó  $a_{ij,t}$  koeficiensek egymástól függetlenek, a hibatagok varianciái a (11) kifejezéssel összhangban:  $VAR(\sigma_{2,t}u_{2,t}) = S_1$ ,  $VAR(\sigma_{3,t}u_{3,t}) = S_2$ ,  $VAR(\sigma_{4,t}u_{4,t}) = S_3$ , amelyből következik, hogy az egyenletek bal oldalán lévő  $\hat{y}_{i,t}$  függő változó és az egyenlet jobb oldalán szereplő  $a_{ij,t}$  koeficiensek együttesen normális eloszlásúak. Az egyenletek rekurzív rendszere pedig biztosítja, hogy az egyenletek bal oldalán lévő  $\hat{y}_{i,t}$  függő változó nem szerepel egyidejűleg a bal oldali magyarázó változók között, és  $\hat{y}_{i,t}$ -t ismertként lehet tekinteni  $\hat{y}_{i+1,t}$ -t kifejező egyenletben.

A harmadik lineáris Gauss-féle állapotteres egyenletrendszert az időben változó sztochasztikus variancia modellezéséhez használjuk. Tekintsük ismételt a (6) egyenletet, amely a következő formába írható:

$$A_t(y_t - X_t'B_t) \equiv y_t^* = \Sigma_t u_t.$$

A fentebbi egyenlet egy nem-lineáris megfigyelési egyenlet, amely könnyen átírható lineáris formába azáltal, hogy az egyenlet mindegyik elemének vesszük a négyzetét majd logaritmusát. Kiegészülve a (9) egyenlettel a következő állapotteres egyenletrendszert eredményezik:

$$y_t^{**} = 2h_t + e_t,\tag{14}$$

$$h_t = h_{t-1} + \eta_t,\tag{15}$$

ahol  $y_{it}^{**} = \log y_{it}^{*2} + c$ ,<sup>19</sup>  $e_{it} = \log u_{it}^2$ ,  $h_{it} = \log \sigma_{it}$ , és mivel  $e_{it}$ ,  $\eta_{it}$  hibatagok egymástól függetlenek, ezért korrelálatlanok is. A kapott egyenletrendszer lineáris, de a hibatagok a megfigyelési egyenletben  $\chi^2(1)$  eloszlásúak. Kim, Shephard és Chib [1998] módszerét használva a hibatagoknak a  $\chi^2$  eloszlása normális eloszlással közelíthető.

## 1.4 A Gibbs mintavételezési eljárás

Az egyenletrendszerek lineáris állapotteres átírása után az ismeretlen paraméterek a Kálmán-szűrő és a Carter-Kohn algoritmussal becsülhetőek (lásd

<sup>18</sup>A  $Z_t$  mátrix 4 változó esetén a következőképpen írható:

$$Z_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -y_{1,t} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -y_{1,t} & -y_{2,t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -y_{1,t} & -y_{2,t} & -y_{3,t} \end{pmatrix}$$

<sup>19</sup> $c = 0,001$  egy korrekciós tényező, és szerepe, hogy biztosítsa a becslés robusztusságát, tekintve, hogy  $(y_{it}^*)^2$  értéke igen kicsi tud lenni.



a Függelék részt).<sup>20</sup> A Kálmán-szűrő segítségével a közvetlenül nem megfigyelhető állapotváltozóra adunk becslést minden egyes időponthoz, az adig rendelkezésre álló információt felhasználva. Majd a Carter-Kohn algoritmus segítségével visszafele iterálva, az állapotváltozó eloszlásának a várható értékét és varianciáját számítjuk ki. A  $B_t$ ,  $A_t$ ,  $\Sigma_t$  paramétermátrixok ismeretében pedig a (10) kifejezésben szereplő  $Q$ ,  $S_t$ ,  $W$  kovariancia mátrixok az inverz Wishart eloszlásból generálhatóak.

A modellezés során csak azok a szimulált mintaelemek kerülnek felhasználásra, melyek a Markov-láncnak a poszterior együttes eloszláshoz történő konvergálása után kerültek szimulálásra. Hogy meggyőződjünk a Markov-láncnak a poszterior eloszláshoz való konvergáltságáról, annak a legegyszerűbb módja, ha a becsült paraméterek rekurzív középértékét ábrázoljuk. Amennyiben a Markov-lánc tényleg konvergált, akkor a középértékek egy konstans érték körül alakulnak. Ehhez kapcsolódó eljárás, ha a generált minta-szekvencia autókorrelációja kerül vizsgálat alá. Ha a Markov-lánc konvergenciája megvalósult, akkor a minta elemszámainak alacsony autókorrelációt kell mutatnia, egy konstans érték körül fluktuálva<sup>21</sup> (Blake–Mumtaz [2012]).

## 2 Eredmények

### 2.1 A becslési folyamat előkészítése

Az empiria részben a Bayes-i idősorlemzés „klasszikus” háromváltozós VAR modellje kerül kiegészítésre a brókerkereskedők aggregált mérlegfőösszegének az idősorával. A három standard idősor: a gazdaság kamatláb kondícióit kifejező változó, az árváltozás ütemét (1982–84=100 bázisidőszaki szezonálisan igazított fogyasztói bázisárindex) és a reálkibocsátás alakulását kifejező szezonálisan igazított reál GDP idősor (adatforrás: *Federal Reserve Bank of St. Louis*). Ehhez társul negyedikként a brókerkereskedők szezonálisan igazítatlan mérlegadat idősora (adatforrás: *Federal Reserve flow-of-funds* táblázat).<sup>22</sup> Az Egyesült Államok gazdaságának a kamatláb kondícióit kifejező változónak a 3 hónapos államkötvényhozam (adatforrás: *Federal Reserve Bank*) került kiválasztásra, mely sokkal relevánsabb gazdasági szempontból, mint például a jegybanki kamat.

Az idősorok az elvégzett tesztek alapján nagy valószínűséggel egységgyököt tartalmaznak.<sup>23</sup> Egységgyök jelenléte azonban nem jelent problémát a

<sup>20</sup>A sztochasztikus volatilitás szimulációjához egy másik alternatíva Jacquier és társai [2004] módszere a független Metropolis Hastings algoritmus használatával.

<sup>21</sup>A konvergencia tesztelésére egy formálisabb megoldást Geweke [1992] adott.

<sup>22</sup>Egy másik alternatíva a brókerkereskedők szezonálisan igazítatlan mérlegadat idősorának a fogyasztói bázisárindex idősorral vett hányadosa. A brókerkereskedők reál-mérlegadat idősoránk ily módon való számítása azonban adatkezelési aggályokat vet fel, különösen annak tekintetében, hogy egy szezonálisan igazítatlan és egy szezonálisan igazított adatsor hányadosát vesszük. A modelleredmények a brókerkereskedők reál idősorával is újra lettek futtatva, de azok érdemben nem változtak. A témával kapcsolatban lásd pl. Peterson–Tomek [2000].

<sup>23</sup>A 3 hónapos államkötvényhozam esetében az egységgyök jelenlétére vonatkozó null-hi-

Bayes-i megközelítés számára, amely a megfigyelt adatok alapján számítja a feltételes eloszlásokat – szemben az aszimptotikus eloszlásra épülő klasszikus ökonometriával (Koop et al. [2007], 297 o.).

Annak érdekében, hogy helyes elképzelésünk legyen a végső modell impulzusfüggvényei reprezentálta modell dinamika mértékéről és irányáról, először csak a modell koefficiensek időbeli változását lehetővé tevő homoszkedasztikus (a VAR hibatagok változatlan kovariancia mátrixával) két késleltetéses VAR modell kerül becslésre. Ennek a becslése során fontos figyelembe veendő tényező a VAR paraméterek kezdőértékeinek a meghatározásához használt gyakorló minta hossza, amely fontosságára Primiceri [2005] Sims [2000] írásán keresztül hívja fel a figyelmet. A brókerkereskedők időSORA többnyire exponenciálisan növekedett, de ez nem igaz az időSOR első tíz évére, amely stationáriusnak tűnik, és ezért nem is alkalmas a valós modelldinamika megragadására. Erre való tekintettel a VAR modell a priori paramétereinek a meghatározásakor az időSOROK első 40 és 80 adatát vettük figyelembe, és a modellt egy, illetve két késleltetés mellett is megbecsültük. A koefficiensek időbeli változását kifejező a priori paraméter  $k_Q$  értékének 0,05 lett választva (összhangban a később ismerttetendő heteroszkedasztikus VAR modellel).

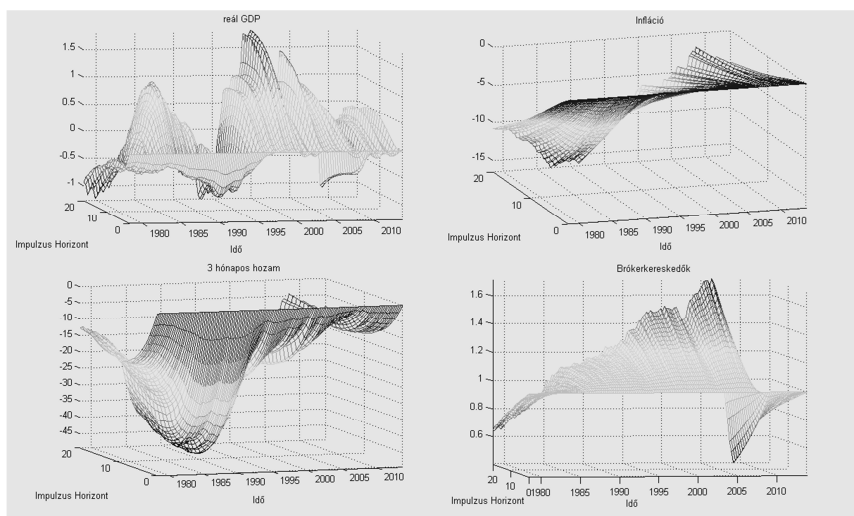
A 2. ábrán az egy késleltetéses, az a priori paramétereknek a meghatározásához az időSOROK első 40 adatát felhasználó VAR modellel kapott impulzus válaszfüggvények láthatóak. A válaszfüggvények 12 000 Gibbs iteráció utolsó 2000 szimulációja által biztosított mintából kerültek generálásra, és az iterációból kapott modellkoefficiensek az autókorrelációk vizsgálata alapján konvergáltaknak tűnnek. A vizsgált időhorizontra kapott impulzus válaszfüggvények a brókerkereskedők időben jelentős változó makroökonómiai szerepéről tanúskodnak. Mindegyik modellváltozó, de különösen a reálkibocsátás esetében a brókerkereskedők felől érkező sokkokra adott reakciók számottevő mértékű változását figyelhetjük meg.

A brókerkereskedők VAR egyenletének a hibatagjában bekövetkező egységnyi standard hiba nagyságú sokkra a reálkibocsátás negatív kezdeti irányú, de többnyire pozitív reakciót produkál. A fogyasztói árindex negatív reakciója első ránézésre zavarba ejtőnek tűnik; a mérlegnövekedés következtében és a kamatlábcsökkenés közepette inkább az infláció megnövekedését valószínűsíténénk. A magyarázat a brókerkereskedők előrettekintő magatartása lehet: helyesen anticipálva az infláció csökkenését, kamatsökkenésre számítanak és kamatozó eszközöket vásárolnak. A 3 hónapos államkötvényhozam reakciójának iránya is megfelelőnek tűnik a negatív tartományba: a mérlegek növekedésekor a brókerkereskedők generálta kereslet következtében csökken az értékpapírok kamattartalma. A reakciók mértéke a 3 hónapos kötvényhozam és a fogyasztói árindex esetében túlzottan tűnik a 80-as, 90-es években. Ennek okai valószínűleg az Egeszült Államokat ez idő tájt ért belső és külső

---

potézt nem lehet a teszteredmények alapján egyértelműen elvetni. Chiarella ([2006] 253. o.) szerint nincs semmilyen gazdasági ok, ami a kamatláb egységgyökös voltát alátámasztaná. A fogyasztói árindex, lévén, hogy bázisidőszaki adatsor, lineáris trendet tartalmaz. A lineáris trend figyelembevételével elvégzett egységgyök teszt alapján az egységgyök jelenléte nem vethető el. A reálkibocsátás és a brókerkereskedők esetében az egységgyök feltételezése teljesen megalapozottnak tűnik.

sokkok,<sup>24</sup> amire a brókerkereskedők a biztonságot jelentő államkötvények intenzív vásárlásával válaszolhattak. Ami pedig a brókerkereskedők válaszfüggvényeit illeti, azok a kezdeti sokk után a 90-es, 2000-es években a végtelenbe tartanak, aminek oka a mérlegadat exponenciális alakulása (lásd Függelék 9. ábra).



2. ábra. 1978 I. és 2013 III. negyedévé közötti időszakára becsült homoszkedasztikus TVP-VAR-ból kapott medián impulzus válaszfüggvények

A reakciók statisztikai szignifikanciájáról a 16 és 84 percentilis Bayes-i valószínűségi intervallummal együtt ábrázolt válaszfüggvények tájékoztatnak (nincsenek közzétéve). A reálkibocsátás esetében a reakciók statisztikailag nem szignifikánsak, míg a 3 hónapos hozam és a fogyasztói árindex reakciója folyamatosan szignifikánsnak bizonyulnak.<sup>25</sup>

## 2.2 A heteroszkedasztikus VAR modell becslése

Következőként a dolgozatban ismertetett heteroszkedasztikus VAR modellnek a becslésére kerül sor, amely használata különösen indokolt, ha pénzügyi jellegű változók (hozamok, brókerkereskedők mérlegadatai) közötti nem-lineáris kapcsolatokat illetve a sokkok heteroszkedasztikus tulajdonságát akarjuk figyelembe venni. A prior eloszlások és a Kálmán-szűrő kezdő értékeinek a meghatározásához a rendelkezésre álló idősoroknak az első tíz évét 1968-tól 1977-ig vettük figyelembe. A Gibbs iterációt 75 000 alkalommal ismételtük,

<sup>24</sup>Az amerikai takarékszövetkezetek (S&L) válsága a 80-90-es években, 1982-től a latin-amerikai adósság válság, 1987-es tőzsdei pánik, 1992-ben az európai ERM válság, és 1994-ben a mexikói válság.

<sup>25</sup>Összességében csak a két késleltetéses, az a priori paramétereknek a meghatározásához az idősorok első 80 adatát felhasználó VAR modell hozott változást: a reálkibocsátás esetében a reakciók statisztikailag szignifikánsá váltak, ugyanakkor a válaszfüggvények által adott reakciók vesztek változatosságukból.

amelyből az utolsó 25 000 szimulációnak csak minden tizedik elemét tartottuk meg, tekintettel a minta elemeinek lehetséges autókorrelációjára. A 2500 darabos mintából kapott modellkoefficiensek az autókorrelációk és a paraméterek rekurzív középértékeinek a vizsgálata alapján konvergáltak tűnnek (Függelék 10. ábra), amit megerősítenek a paraméterek Geweke [1992] diagnosztikai elemzései is.<sup>26</sup>

Primiceri [2005] már a két késleltetéses háromváltozós modellje esetében is felhívja a figyelmet arra, hogy a változók nagy számára való tekintettel, a paraméterek időbeli változásának a mértékét kifejező a priori paraméterek meghatározásakor rendkívüli körültekintéssel kell eljárni, ellenkező esetben könnyen „rosszul viselkedő” impulzusfüggvényeket kapunk.<sup>27</sup> Ez különösen igaz  $k_Q$  esetében, amely két késleltetés és négy változó esetén 666, míg egy késleltetés esetén „csak” 210 paraméter alakulását befolyásolja. Éppen ezen megfontolásból a VAR modell csak egy késleltetéses változata lett becslve,<sup>28</sup> és követvén a szakirodalmi gyakorlatot, Arratibel–Michaelis [2013], Franta et al. [2012],  $k_Q$  értékének 0,05 lett választva.<sup>29</sup> A paraméter értékének a meghatározásakor fontos, hogy a koefficienseknek megfelelő mértékű időbeli változást engedjünk meg, és a modell dinamika kerüljön modellezésre, ne pedig a véletlen sokkok (*outlier*-ek).

A változó paraméterezésű VAR modellből az 1978 I. és 2013 III. negyedév közötti időszakára kapott medián impulzus válaszfüggvényeket a 3. ábra mutatja, amelyek összességében jelentős hasonlóságot mutatnak a homoszke-dasztikus VAR modellből kapott válaszreakciókhoz. A reálkibocsátás esetében (3. ábra bal oldala) az ezredforduló környékén a kezdeti sokk hatása továbbra is tartósan bizonyul, ugyanakkor a modelldinamika nagyobb változatosságot mutat. Az infláció és a kötvényhozam (3. ábra jobb felső sarka, ill. bal alsó grafikonja) esetében is a kezdeti egységnyi standard hiba nagyságú sokk hatása tartósan bizonyul. A brókerkereskedők (3. ábra jobb alsó sarka) a saját VAR egyenletük hibatagjában bekövetkező sokkra a 80-as években átmeneti reakciót mutatnak, amely folyamatosan végtelenbe tartó, szétrobbanó hatással alakul, köszönhetően a mérlegadatuk exponenciális alakulásának (Függelék 9. ábra), amely egyben a folyamat hosszú távú fenntarthatatlanságáról is árulkodik.<sup>30</sup> Az impulzus válaszfüggvények eset-

<sup>26</sup>A modell becsléséhez Koop, Korobilis Matlab kódját használtuk, amely figyelembe veszi Del Negro – Primiceri [2013] módszertani észrevételeit. A Geweke [1992] statisztikák számításához LeSage [1999] kódját használtuk.

<sup>27</sup>Változatlan paraméterezésű modell hibatagjai kovariancia-mátrixának a Cholesky háromszög dekompozíciója során a változók sorrendiségének nincs különösebb jelentősége, mert a likelihood gyorsan dominálja a priort (a kovariancia-mátrix esetében). Időben változó paraméterek esetén, azonban nem egyértelmű ez a kapcsolat, így a modell a változók egy alternatív sorrendje mellett is becslésre került, ahol a brókerkereskedők mérlegadata a 3 hónapos kötvényhozammal helyet cserélt. Az eredmények nagyon hasonlóknak a 3. ábrán láthatókhöz.

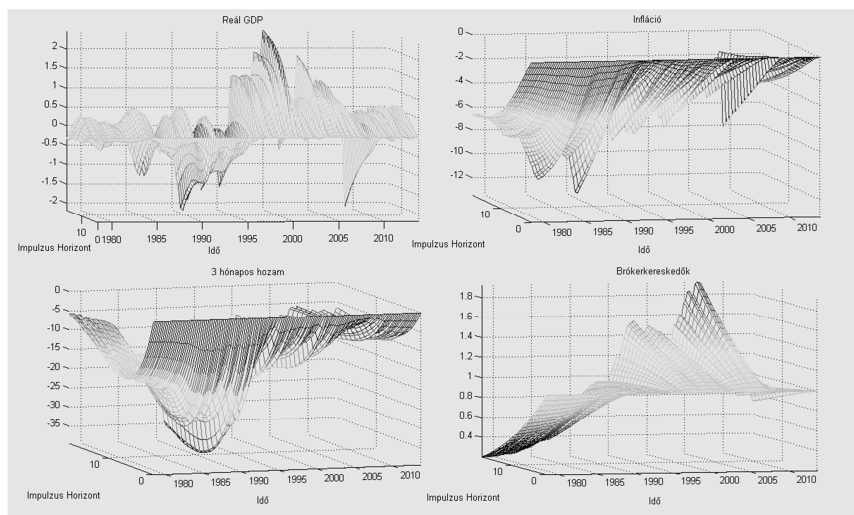
<sup>28</sup>Az eredmények lényegében változatlanok 2 késleltetés esetén.

<sup>29</sup>A modell a  $k_Q = 0,01$  érték mellett is becslésre került, de a fontosabb eredmények tekintetében nem hozott érdemi változást.

<sup>30</sup>A brókerkereskedők reál idősorával készült VAR modellből kapott impulzusfüggvények a 90-es, 2000-es években sem tartanak a végtelenbe, bár a reakció igen tartósan bizonyul.

leges rosszul viselkedésének oka, hogy az egyenleteken belül a koefficiensek összege egy, vagy ahhoz közeli, ami nem meglepő egységgyökös idősor-inputok esetében. Koop, Korobilis [2010] megjegyzi, hogy még egységgyök jelenlétének a hiányában is könnyen előfordulhat a jelenség.

A válaszfüggvények kapcsán jelentős a párhuzam az 1. ábra kapcsán tett megállapítással: 1990-es években a brókerkereskedők működésében jelentős változások történtek, és az impulzusfüggvények formája alapján ennek jelentős reálgazdasági hatása lehetett. Az ábrán egyértelműen kivehető, hogy a brókerkereskedőknek egyaránt szerepe volt a gazdasági fellendülésben és a rákövetkező válságban is. Az 1990-es években folyamatosan növekvő volt a brókerkereskedők hatása a reálgazdasági folyamatok alakulására, majd a 2008-as válság (lásd a negatív irányú válaszfüggvényt az ábrán) következtében ez a hatás az 1980-as éveket jellemző szintre csökkent. Mindezt megerősíti a modell koefficienseknek az alakulása is (Függelék 11. ábra, 4. oszlopa).<sup>31</sup>

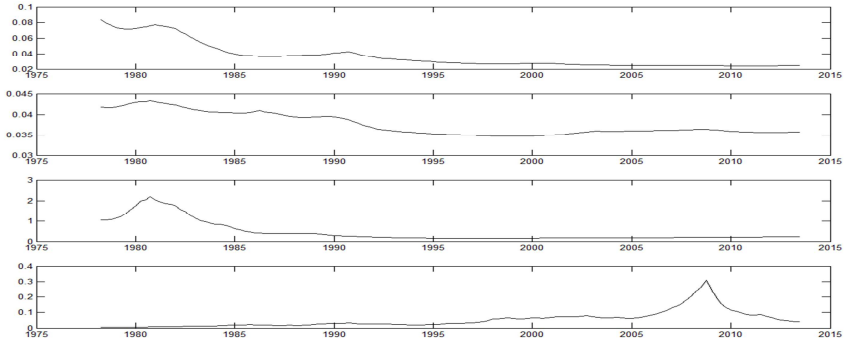


3. ábra. 1978 I. és 2013 III. negyedév közötti időszakra becsült heteroszkedasztikus TVP-VAR-ból kapott medián impulzus válaszfüggvények

A 4. ábrán a VAR egyenlet hibatagok időben változó standard hibáinak a poszterior várható értékeinek az alakulása látható. A „*great-moderation*” a brókerkereskedők felől érkező sokkok esetében is jól megfigyelhető az egyenletek hibatagjainak csökkenő varianciája révén mind a reál-kibocsátás, a fogyasztói árindex és a kötvényhozam esetében is.<sup>32</sup>

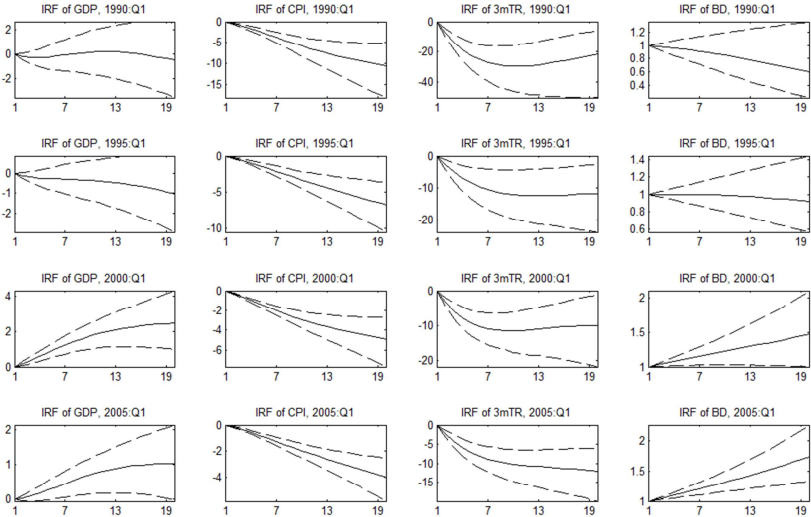
<sup>31</sup>Helytakarékosági szempontból nem lettek közzétéve, a szerzőtől azonban megkaphatóak.

<sup>32</sup>Amely jelenség a brókerkereskedők reál idősorával számított modellel az infláció esetében egyáltalán nem megfigyelhető meg.



4. ábra. A TVP-VAR egyenlet (reál-kibocsátás, 3 hónapos kötvényhozam, infláció, brókerkereskedők) hibatagok időben változó standard hibáinak a poszterior várható értékeinek alakulása

Az 5. és 6. ábrán a vizsgált időszak nyolc kiválasztott negyedévének medián impulzus válaszfüggvényeit láthatjuk 16 és 84 percentilis Bayes-i valószínűségi intervallumokkal. Az ábrák alapján a brókerkereskedőknek nemcsak a 3 hónapos kötvényhozamra és az infláció alakulására volt statisztikailag szignifikáns hatásuk a vizsgált időszakban, hanem a reálgazdaságra is 2000-es évek folyamán.

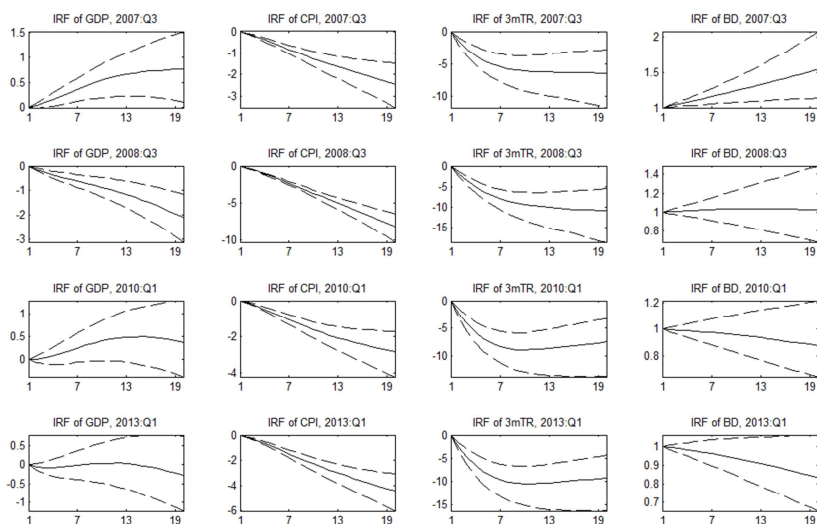


5. ábra. 1990, 1995, 2000 és 2005 I. negyedévének a heteroszkedasztikus TVP-VAR-ból kapott medián impulzus válaszfüggvényei a 16 és 84 percentilis Bayes-i valószínűségi intervallumokkal

A változó kovariancia-mátrixú heteroszkedasztikus VAR modell használata a homoszkedasztikus modellhez képest a válaszfüggvény reakciók összességében nem hozott jelentősebb változást. Ugyanakkor szűkebb Bayes-i valószínűségi intervallumokat és ebből kifolyólag több statisztikailag szignifikáns vá-

laszfüggvényt, és a reakciók nagyobb dinamikai részletességét eredményezte,<sup>33</sup> amely valószínűleg a pontosabb becslési eredményeknek köszönhető.

A brókerkereskedőknek nagy valószínűséggel nincs olyan mértékű és negatív hatása az inflációra, mint amit a válaszfüggvények alakulásából gondolnánk. Valószínűleg arról lehet szó, hogy a brókerkereskedők helyesen jelzik előre a fogyasztói árindex és vele együtt a rákövetkező jegybanki kamatlépések alakulását, amire alapozva kamatozó eszközöket vásárolnak, és a 3 hónapos hozam erőteljes negatív reakciója is ennek a várkozások szülte portfólió átrendezés hatását tükrözi.<sup>34</sup> Hasonló észrevétel fogalmazható meg a reálkibocsátás kapcsán látott reakciók esetében is. A forrásbevonó szektorok növekvő együttes kötvény- és részvénykibocsátási hajlandósága egyrészt jelzés a brókerkereskedőknek a javuló gazdasági konjunktúráról, másrészt a megvalósuló kibocsátások javítják a brókerkereskedők jövedelemtermelő képességét. Mindez a javuló gazdasági kilátásokkal együtt fokozza a brókerkereskedők (és ügyfelek) kockázatvállalási kedvét, kötvény- és részvényvásárlásra sarkalván őket, amely pro ciklikus visszacsatolással bír a kibocsátásokra és a befektetési eszközök áraira.



6. ábra. 2007, 2008 III. és 2010, 2013 I. negyedévének heteroszkedasztikus TVP-VAR-ból kapott medián impulzus válaszfüggvényei a 16 és 84 percentilis Bayes-i valószínűségi intervallumokkal

### 2.3 Előjel korlátozás

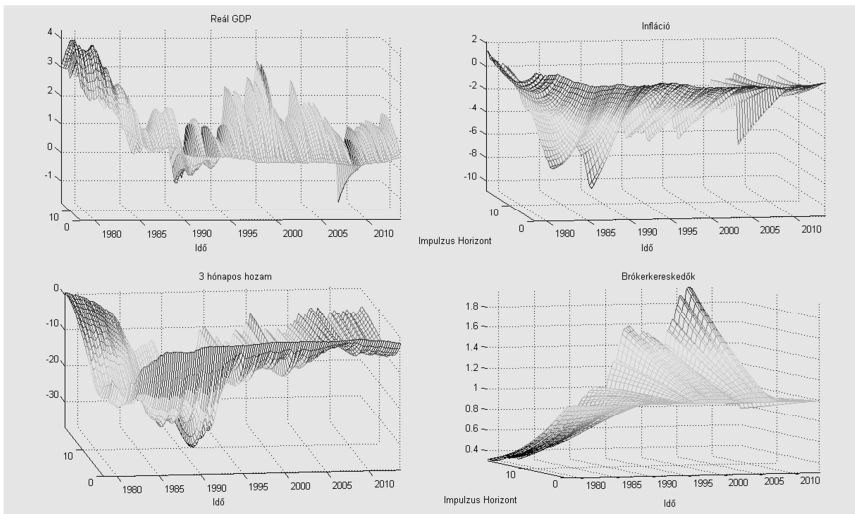
Tekintve, hogy a brókerkereskedők mérlegadataiban bekövetkező pozitív sokk leginkább egy monetáris politikai lazításra emlékeztet, ezért az előző VAR

<sup>33</sup>Ennek köszönhetően a 3. ábrán is kivehető, hogy a 3 hónapos kötvényhozam és az infláció esetében a brókerkereskedőknek 1987-ben és 1992-ben volt a legerősebb hatása.

<sup>34</sup>Igy egy következő megoldandó probléma a megfigyelt reakcióknak a dekomponálása a brókerkereskedők aktívabb tevékenysége okozta valós és a várakozások szülte előrettekintő hatására.

modellnek egy előjel korlátozott változatát is megbecsültük a következő korlátozó feltételekkel: feltételezzük, hogy a brókerkereskedők mérlegadatait ért pozitív irányú sokk hatására adott negyedéven belül a reálkibocsátás és az infláció pozitív, míg az 3 hónapos kötvényhozam negatív irányban reagál. Az előjel-korlátozás megvalósításához Rubio-Ramírez et al. [2010] módszerét használtuk.<sup>35</sup>

Az impulzusfüggvények előjel korlátozása során egy  $(n \times n)$   $K$  mátrixot generálunk standard normális eloszlásból ( $n$  a modellváltozók száma), aminek vesszük a  $K = QR$  faktorizációját, ahol  $R$  egy felső háromszögmátrix pozitív elemekkel a főátlóban<sup>36</sup> és  $Q$  ortonormált mátrix ( $Q'Q = I$ ). Ezután a  $Q$  azon sorában ellenőrizzük, hogy az elemek pozitív vagy negatív volta megfelel a megkívánt előjel korlátozásnak, ahányadik helyen áll a sokkolt változó a VAR modell változóinak a sorrendjében.<sup>37</sup> Az előjel megkötések teljesülése esetén vesszük a  $Q$  mátrix és a VAR hibatagok  $\Omega_t = C'C$  kovarianciamátrix Cholesky dekompozíciójának a  $QC$  szorzatát (ellenkező esetben új  $K$  mátrixot generálunk), amiből az impulzus válaszfüggvények már számíthatóak.



7. ábra. 1978 I. és 2013 III. negyedév közötti időszakára becsült heteroszkedasztikus TVP-VAR-ból kapott előjel korlátozott medián impulzus válaszfüggvények

A kezdeti reakciók irányában korlátozott medián impulzus válaszfüggvényeket a 7. ábra mutatja az 1978 I. és 2013 III. negyedév közötti időszakra. A brókerkereskedők VAR egyenletének a hibatagjában bekövetkező egységnyi standard hiba nagyságú sokkjára adott válaszreakciók jelentős hasonlóságot

<sup>35</sup> Az előjel korlátozás programozásához Blake–Mumtaz [2010] Matlab kódját használtuk.

<sup>36</sup> Ha  $X$  invertálható, és  $R$  diagonális elemiről megköveteljük, hogy pozitívak legyenek, akkor a faktorizáció egyértelmű.

<sup>37</sup> Jelen esetben a sokkolt brókerkereskedők a VAR változóinak a sorrendjében a negyedik helyet foglalják el, így a  $Q$  mátrix negyedik sorában ellenőrizzük a megkívánt  $(+ + - +)$  előjel-korlátozás teljesülését.



mutatnak az előjel korlátozás nélküli esettel. Csupán a reálkibocsátás esetében figyelhető meg számottevő változás a vizsgált időszak elején és a 2008-as válság továbbra is egyértelműen beazonosítható. A reakciók megőrizték a korábban látott statisztikai szignifikanciájukat. A reálkibocsátásnak a sokkra adott statisztikailag szignifikáns válaszreakciója a 90-es évek és 2013 esetében is megfigyelhető egy rövid ideig, sőt a 2010-es év esetében az impulzus horizont teljes egészében.<sup>38</sup> Az eredmények alapján az előjel korlátozás során tett feltételezések nem igazolódnak vissza.

## 2.4 A modell becslése az M2 pénzügyi aggregátummal

Egy alternatív VAR modellt is becsültünk az M2 pénzügyi aggregátummal annak érdekében, hogy a brókerkereskedőre kapott statisztikai eredmények összehasonlíthatóvá váljanak. Az M2 aggregátum nemcsak általánosan használt makroökonómiai modellváltozó, hanem a jegybanki célok elérésének ismételt az eszköze, különösen az Egyesült Államokban. Az M2 pénzügyi aggregátum szezonálisan igazított időszora (adatforrás: *Federal Reserve*) a brókerkereskedők időszora helyett szerepel modellváltozóként, amely a változók sorrendiségében a harmadik helyre, a kötvényhozam elé került, tekintve, hogy az utóbbi gyorsabb reagálású változó, mint az M2 (bár a sorrendiségnek nincs hatása az eredményekre). A 8. ábrán látható impulzusfüggvények által megjelenített reakciók iránya legalább az impulzus horizont végén megfelel az intuíciónak által sugallt transzmissziós mechanizmusoknak a 80-as években: az M2 pénzaggregátumot ért pozitív irányú sokk – monetáris politikai lazítás – hatására a reálkibocsátás és az infláció pozitív, míg az 3 hónapos kötvényhozam negatív irányban alakul. A 90-es évektől azonban a brókerkereskedők esetében is látott reakcióirányokat láthatjuk viszont, amit a szakirodalom a „*price puzzle*” névvel illet: monetáris politikai lazításra az infláció csökken.<sup>39</sup>

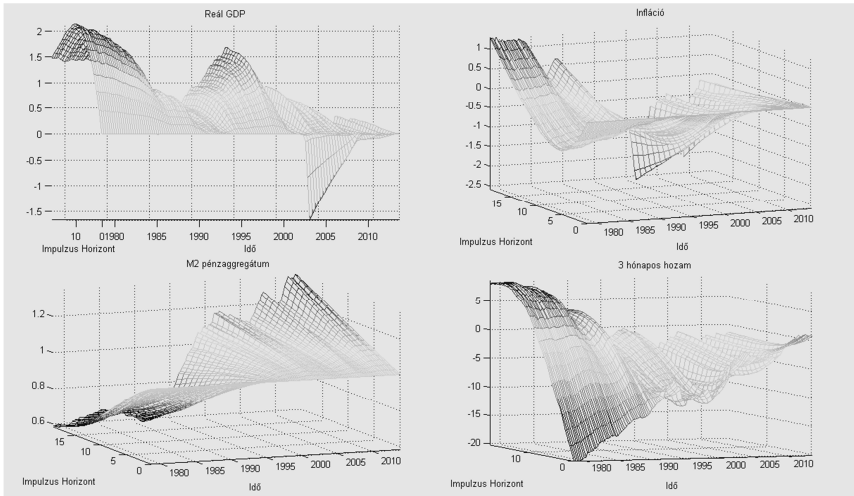
A 8. ábrán a reálkibocsátás impulzusfüggvényei az M2 aggregátum VAR egyenletének a hibatagjában bekövetkező egységnyi standard hiba nagyságú sokkjára nagyságrendileg a brókerkereskedők idősorával készült VAR impulzusfüggvények esetében látott válaszreakciók nagyságát produkálják, míg az infláció és a kötvényhozamok esetében csupán a töredékét. Mindez azért különösen érdekes, mert a brókerkereskedők összesített mérlegadata az M2 pénzaggregátum nagyságának csupán az egyötöde (a csúcs a 2007 második felében tapasztalt 43%-os érték volt).<sup>40</sup> Egy másik lényeges különbség a

<sup>38</sup>Helytakarékossági okokból a hasonló ábrák nem lettek közzétéve.

<sup>39</sup>Megjegyezendő, hogy a *price puzzle* a reál M2 (M2 aggregátumnak a fogyasztói bázisárindex időszorral vett hányadosa) idősorával készült modell esetén nem tapasztalható, az infláció a jó irányba reagál, azaz növekszik. Mindez igaz, ha csak nominális GDP és M2 idősorokat használunk, bár akkor a kötvényhozam mutat többnyire az intuíciónak ellentétes reakciókat. A *price puzzle* rejtélyének a megoldásához Castelnovo–Surico [2009] az inflációs várakozásokat megjelenítő idősor használatát javasolja.

<sup>40</sup>A reál M2-vel is nagyságrendileg hasonló eredményeket kapunk. Ugyanakkor a reakciók statisztikai szignifikanciáját illetően jelentős eltéréseket kapunk: a reál M2-t ért pozitív irányú sokk esetében a reakciók minden esetben szignifikánsan nullától különbözőek, még a 2013-as évre is (az eredmények a szerzőtől megkérhetőek). Az eltérések oka a már említett adatkezelésből fakadhat, és a nominális időszorral kapott eredményeket kell irányadónak

reakciók statisztikai szignifikanciáját illeti. Az M2 pénzaggregátum idősorával készült modell esetében a reál GDP reakciója 2008-tól folyamatosan nullához közeli, míg nullától szignifikánsan különböző reakciót a 2005-ig tartó periódusra mutat.<sup>41</sup> Az eredmények egyrészt a brókerkereskedők jelentős gazdasági szerepe mellett szólnak, másrészt jelzik, hogy a brókerkereskedők mérlegadata olyan információtartammal bír, amely hasznos lehet pontosabb gazdasági előrejelzések készítéséhez.



8. ábra. 1978 I. és 2013 III. negyedévi közötti időszakára becsült heteroszkedasztikus TVP-VAR-ból kapott előjel korlátozott medián impulzus válaszfüggvények

### 3 Összefoglalás

A brókerkereskedők összesített mérlegadat idősorát egy időben változó paraméterezésű VAR modellbe ágyazva az ökonometriai evidenciáját kaptuk az Egyesült Államok pénz- és tőkepiaci szereplőnek a gazdasági szerepéről. A VAR modellből kapott impulzusfüggvények a brókerkereskedők statisztikailag szignifikáns hatását mutatták a reálkibocsátásra a 90-es és a 2000-es években, ugyanakkor mindezzel párhuzamosan az is látható volt, ahogy eközben a mérlegadat alakulása egy fenntarthatatlan folyamatot követett. Az, hogy az M2 monetáris aggregátummal becsült VAR modellből generált impulzusfüggvények által megjelenített makroökonómiai hatás mértéke nem volt nagyobb, mint a brókerkereskedők mérlegadatának az idősorával becsült modell esetében, a brókerkereskedők jelentős makroökonómiai szerepéről árulkodik.

tekinteni.

<sup>41</sup>Az M2 aggregátummal közeli kapcsolatban levő kereskedelmi banki összesített mérlegfőösszeggel, illetve összesített hitelállománnyal (adatforrás *Federal Reserve flow-of-funds*) készült VAR modellek 2010-re már egy kis szignifikáns pozitív hatást mutatnak a reálkibocsátásra, ugyanakkor a hatás 0,1-es mértéke messze elmarad a brókerkereskedőké mögött.

Az eredmények alátámasztják a pénz- és tőkepiacok fejlesztésének a fontosságát, hiszen azok a gazdasági növekedés fontos hajtóerői lehetnek, illetve felhívják a figyelmet azok szigorúbb felügyeletének a fontosságára. A megfigyelések figyelmeztetésként szolgálnak a döntéshozóknak, hogy a monetáris politikai és makroprudenciális döntéseik során nem elégséges csupán a hagyományos makro és pénzügyi adatokra támaszkodni, hanem tekintettel kell lenniük a pénzügyi innovációra fogékonyabb pénz- és tőkepiaci szereplők mérlegadataira is. Továbbá az eredmények empiriailag igazolják egyrészt Borio és White-nak [2004] a pénzügyi egyensúlytalanságok kialakulását figyelmen kívül hagyó, kizárólag az inflációs célkövetésre fókuszáló monetáris politikát ért kritikai észrevételét, másrészt a jegybankok egyre hangsúlyosabb makroprudenciális figyelmét.

Persze az is lehetséges, hogy a brókerkereskedőknek nincs hatása az Egyesült Államok gazdasági folyamataira, csupán helyesen jelzik előre annak alakulását, és mérlegadataik alakulása a gazdasági fejleményekre adott portfólió átrendezések hatását tükrözi. Ez ellen szól azonban az előjel korlátozással becsült impulzus válaszfüggvények statisztikailag szignifikáns volta, amely a brókerkereskedők reprezentálta likviditási folyamatoknak a gazdasági relevanciájáról árulkodik. Akárhogy is legyen, a kapott eredmények alapján a brókerkereskedők aggregált mérlegadatának az információtartalma releváns a jövőbeli makoökonómiai folyamatok előrejelzéshez.

## 4 Függelék

### A Kálmán-szűrő algoritmus

A Kálmán-szűrő egy olyan rekurzív algoritmus, amely az állapotváltozók lineáris előrejelzését (projekcióját) szolgáltatja minden egyen időpontban, a becslési időpontig rendelkezésre álló információk függvényében. A kiinduló pont a becsülendő VAR modell állapotteres felírása, amely általánosságban a következő módon írható:<sup>42</sup>

$$y_t = H\beta_t + Ax_t + e_t, \quad (16)$$

$$\beta_t = \mu + F\beta_{t-1} + v_t, \quad (17)$$

ahol  $E(e_t e_t') = R^{43}$  és  $E(v_t v_t') = Q$ , ha  $t = \tau$  és 0 egyébként,  $e_t$  ( $n \times 1$ ) és  $v_t$  ( $k \times 1$ ) vektor. Valamint  $y_t$  a  $t$  időpontban megfigyelt változók ( $n \times 1$ ) vektora,  $\beta_t$  a nem megfigyelhető állapotváltozó ( $k \times 1$ ) vektora,  $H$  az  $y_t$  és  $\beta_t$  közötti kapcsolatot kifejező ( $n \times k$ ) mátrix,  $F$  mátrix dimenziója ( $k \times k$ ), illetve  $\mu$  ( $k \times 1$ ) vektor,  $x_t$  az exogén változók ( $r \times 1$ ) vektora  $A$  ( $n \times r$ ) koeficiens mátrixszal. Továbbá feltételezett, hogy az  $F$ ,  $Q$ ,  $H$ ,  $R$  és  $A$  mátrixok

<sup>42</sup>Tekintettel, hogy a modellezési feltevés szerint  $B_t$  elemei egy bolyongási folyamatot követnek,  $F$  végig elhagyható az összes egyenletből, hiszen  $F$  egy egységmátrix és nincs befolyással az eredményekre.

<sup>43</sup>Az 1.3. alfejezet (2) képletében az  $E(e_t e_t) = \Omega$  jelölést használtuk, követvén a szakirodalmi gyakorlatot.

értéke ismert. A (16) kifejezést a modell megfigyelési egyenletének (*Observation Equation*), míg (17)-et az átmeneti- vagy állapotegyenletének (*Transition/State Equation*) nevezzük, ahol  $B_t$  az állapotváltozó nem-megfigyelhető komponense,  $z_t$  pedig az exogén változó a hozzá tartozó  $A$  koefficiens mátrixszal. A megfigyelési egyenlet tehát a rendelkezésünkre álló, megfigyelt változót köti a nem-megfigyelhető állapotváltozóhoz (Hamilton [1994], 377. o.).

$$\beta_{t|t-1} = F\beta_{t-1|t-1}, \quad (18)$$

$$P_{t|t-1} = FP_{t-1|t-1}F' + Q, \quad (19)$$

$$\eta_{t|t-1} = y_t - y_{t-1} = y_t - H\beta_{t|t-1} - Ax_t, \quad (20)$$

$$f_{t|t-1} = HP_{t-1|t-1}H' + R, \quad (21)$$

$$K_t = P_{t|t-1}H'f_{t|t-1}^{-1}, \quad (22)$$

$$\beta_{t|t} = \beta_{t|t-1} + K_t\eta_{t|t-1}, \quad (23)$$

$$P_{t|t} = P_{t|t-1} - K_tHP_{t|t-1}. \quad (24)$$

Az első két kifejezés a becslő egyenlet, a (20) kifejezés az előrejelzési hiba, a (21) egyenlet az előrejelzési hiba varianciáját becsli, az (22) egyenlet a Kálmán „nyereség” egyenlet, a (23) és (24) egyenletek pedig az előrejelzések frissítésére szolgálnak a beérkező új adatok függvényében.

## A Carter-Kohn algoritmus

Általánosságban a Bayes-i megközelítés kerete között a regressziós  $\beta$  és  $\sigma^2$  paraméterek véletlen valószínűségi változóként vannak kezelve, a hozzájuk tartozó prior valószínűségi eloszlásokkal. A prior valószínűségi eloszlások a regressziós adatok ( $X$  és  $Y$ ) megfigyelése előtt a  $\beta$  és  $\sigma^2$  paraméterekről megfogalmazott kutatói feltételezést fejezik ki. Majd a rendelkezésre álló adatminta tartalmazta információ kombinálásra kerül a prior eloszlásokkal a Bayes-tétel használatával, és eredményezi a  $\beta$  és  $\sigma^2$  paraméterek eloszlásának a frissítését.

A Bayes-i megközelítésben a (17) egyenlet állapotváltozóján kívül az  $F$ ,  $Q$ ,  $H$ ,  $R$  és  $A$  mátrixok értékei is ismeretlen, véletlen változókként vannak tekintve. A  $\tilde{\beta}_T = [\beta_1, \dots, \beta_T]'$  állapotváltozó értékét az  $F$ ,  $Q$ ,  $H$ ,  $R$  és  $A$  mátrixokkal vett együttes valószínűségi eloszlásból kapjuk, és nem pedig  $\tilde{\beta}_T$ -nek az  $F$ ,  $Q$ ,  $H$ ,  $R$ ,  $A$  mátrixokra vonatkozó feltételes eloszlásából (ahogy az a klasszikus idősor analízis keretein belül történne) (bővebben: Kim, Nelson [1999], 171–189 o.).

Ekkor a Gibbs mintavételezést az teszi lehetővé, hogy  $\tilde{\beta}_T$  értékein kívül az  $F$ ,  $H$ ,  $A$  paraméter és a  $Q$ ,  $R$  kovarianciamátrixok értékeit is hiányzó adatként tekintjük. A mintavételezés alábbi két lépése addig kerül ismétlésre, míg a hiányzó értékek nem konvergálnak valós értékeikhez:

**1. lépés:** az  $F$ ,  $Q$ ,  $H$ ,  $R$ ,  $A$  mátrixoknak  $\tilde{\beta}_T$ -re és a megfigyelt adatokra vonatkozó feltételes értékeinek a generálása inverz Wishart eloszlásból.

**2. lépés:**  $\tilde{\beta}_T$ -nek az  $F$ ,  $Q$ ,  $H$ ,  $R$ ,  $A$  mátrixokra és a megfigyelt adatokra vonatkozó feltételes értékeinek a generálása normál eloszlásból.

Az első lépés  $\tilde{\beta}_T$  ismeretének a függvényében egyszerű, hiszen a (16) és (17) egyenlet immár két, egymástól független lineáris regresszió (mivel a hibatagjaik eleve függetlenek voltak egymástól). A második lépés végrehajtása pedig a Carter-Kohn algoritmus révén lehetséges, amely a teljes  $\beta_T$  vektort a  $p(\beta_T | F, Q, H, R, A, \tilde{y}_T)$  együttes poszterior eloszlásból generálja. Eltekintve  $F$ ,  $Q$ ,  $H$ ,  $R$ ,  $A$  mátrixoktól, az együttes eloszlás a következőképpen faktorizálható (Carter, Kohn [1994]):

$$p(\tilde{\beta}_T | \tilde{y}_T) = p(\beta_T | \tilde{y}_T) p(\tilde{\beta}_{T-1} | \beta_T, \tilde{y}_T), \quad (25)$$

ahol  $\tilde{y}_T = [y_1, \dots, y_T]'$ . Kihasználván  $\beta$  Markov-tulajdonságát, a (21) kifejezés a következőképpen írható:

$$p(\tilde{\beta}_T | \tilde{y}_T) = p(\beta_T | \tilde{y}_T) \prod_{t=1}^{T-1} p(\beta_t | \beta_{t+1}, \tilde{y}_t), \quad (26)$$

ahol a jobb oldali szorzat első tényezőjének eloszlása

$$p(\beta_T | \tilde{y}_T) \sim N(\beta_{T|T}, P_{T|T}), \quad (27)$$

ahol  $\beta_{T|T} = E(\beta_T | \tilde{y}_T)$  és  $P_{T|T} = Cov(\beta_T | \tilde{y}_T)$ , amely kifejezés révén a becsült állapotváltozót övező becslési bizonytalanságról is tájékoztat. Míg a (26) jobb oldalán álló második tényező eloszlása

$$p(\beta_t | \beta_{t+1}, \tilde{y}_t) \sim N(\beta_{t|t, \beta_{t+1}}, P_{t|t, \beta_{t+1}}), \quad (28)$$

ahol  $\beta_{t|t, \beta_{t+1}} = E(\beta_t | \beta_{t+1}, \tilde{y}_t) = E(\beta_t | \beta_{t+1}, \beta_{t|t})$  és  $P_{t|t, \beta_{t+1}} = Cov(\beta_t | \beta_{t+1}, \tilde{y}_t) = Cov(\beta_t | \beta_{t+1}, \beta_{t|t})$ . A (22) kifejezés értelmében  $\tilde{\beta}_T = [\beta_1, \dots, \beta_T]'$  vektor  $p(\beta_T | \tilde{y}_T)$  és  $p(\beta_t | \beta_{t+1}, \tilde{y}_t)$  feltételes eloszlásokból generálható. A (27) kifejezésben  $\beta_{T|T}$  és  $P_{T|T}$  a Kálmán-szűrő (24) és (24) frissítő egyenleteiből, míg a (28)-ban  $\beta_{t|t, \beta_{t+1}}$  és  $P_{t|t, \beta_{t+1}}$  szintén a Kálmán-szűrő frissítő egyenleteinek a felhasználásával származtathatóak (Kim–Nelson [1999], 189–193. o.):

$$\beta_{t|t, \beta_{t+1}} = \beta_{t|t} + P_{t|t} F' (F P_{t|t} F' + Q)^{-1} (\beta_{t+1} - F \beta_{t|t}), \quad (29)$$

$$P_{t|t, \beta_{t+1}} = P_{t|t} - P_{t|t} F' (F P_{t|t} F' + Q)^{-1} F P_{t|t}. \quad (30)$$

A Carter-Kohn algoritmus a (29) és (30) egyenletek időben visszafelé történő iterálása  $T-1$  periódustól az első periódusig, amely  $\tilde{\beta}_T = [\beta_1, \dots, \beta_T]'$  elemeit eredményezi. Ezek után a Gibbs mintavételezés 1. lépése kerül ismétlésre, hiszen a (13) kifejezésből a  $v_t$  hibatagok és  $Q$  kovariancia-mátrix azonnal adódnak (gyakorlatban történő alkalmazásáról és a lépésekről lásd: Blake, Mumtaz [2012]).

## A Gibbs mintavételezés lépéseinek összefoglalása

A Gibbs mintavételezés a (2), (7), (12), (13), (14) és (15) kifejezések által reprezentált három darab állapotteres rendszerrel a következő lépéseket foglalja magába:

**0. lépés.**  $B_T$ ,  $A_T$ ,  $\Sigma_T$  és  $V(Q, S, W)$  mátrixok kezdőértékeinek a meghatározása.

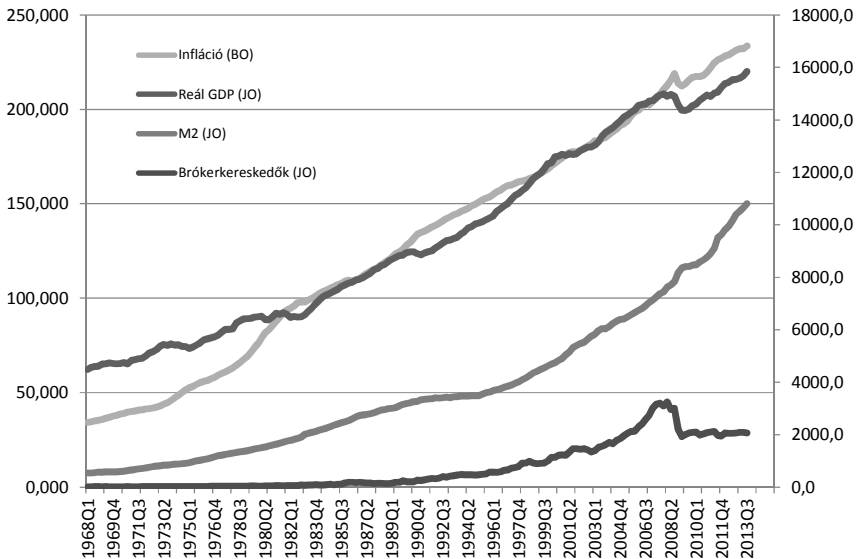
**1. lépés.**  $B_T$ ,  $A_T$ ,  $\Sigma_T$ -nek  $V$ -re vonatkozó feltételes szimulációja (Del Negro - Primiceri [2013]):  $p(B_T | Y_T, A_T, B_T, \Sigma_T, V)$ ,  $p(A_T | Y_T, B_T, \Sigma_T, V)$ ,  $p(s_T | Y_T, A_T, \Sigma_T, V)$ ,<sup>44</sup>  $p(\Sigma_T | Y_T, A_T, B_T, V, s)$ ,

**2. lépés.**  $Q$ ,  $S$ ,  $W$ -nek  $B_T$ ,  $A_T$ ,  $\Sigma_T$ -re vonatkozó feltételes szimulációja:

$$p(Q, W, S | Y_T, B_T, A_T, \Sigma_T) = p(Q | Y_T, B_T, A_T, \Sigma_T) \times p(W | Y_T, B_T, A_T, \Sigma_T) \times p(S_1 | Y_T, B_T, A_T, \Sigma_T) \times \dots \times p(S_{n-1} | Y_T, B_T, A_T, \Sigma_T).$$

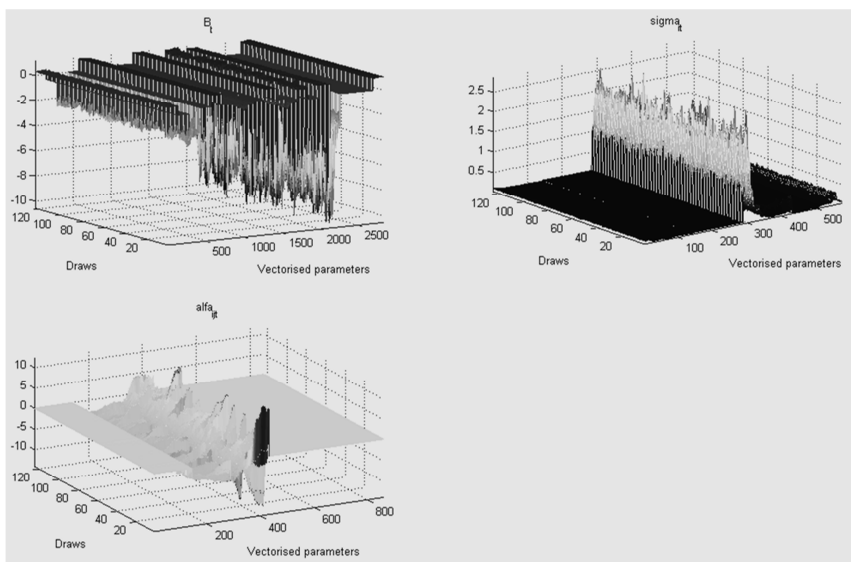
**3. lépés.** 1. és 2. lépés ismétlése.

## Ábrák

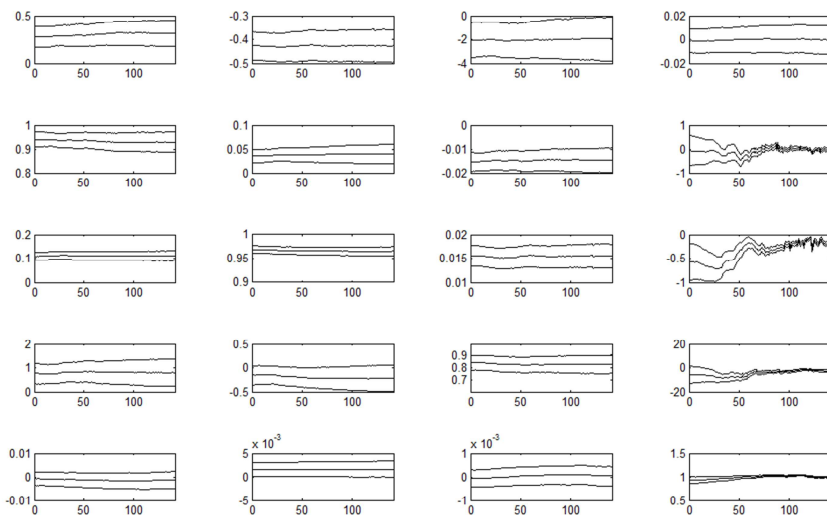


9. ábra. A fogyasztói árindex (bal oldali skála), a reálkibocsátás, M2 pénzágregátum és a brókerkereskedők mérlegének (jobb oldali skála) alakulása 1968-2013 között

<sup>44</sup>Ahol  $s^T$  a Kim, Shephard és Chib [1998] módszeréhez használt indikátor mátrix, a (14)-ben az  $e_t$  hibátág  $\chi^2$  eloszlásának normális eloszlással való közelítéséhez. Del Negro - Primiceri [2013] az  $s^T$  és  $\Sigma_T$  mintavételezésének a helytelen sorrendiségére hívták a figyelmet a korábbi szakirodalmi gyakorlatokban.



10. ábra. A vektorálisan rendezett  $B$ ,  $\alpha$ ,  $\sigma$  VAR paraméterek 2500 iterációjának húszasával számított várható értékeinek az alakulása (bővebben Benati-Mumtaz [2012])



11. ábra. A TVP VAR modell reál GDP, fogyasztói árindex, 3 hónapos kötvény hozam és brókerkereskedők koefficienseinek alakulása 1978-2013 között (legfelső sorban a konstanssal)

## Irodalom

1. Ács A. (2014): Pénzintézeti mérlegadatok monetáris politikai újraértelmezése, *Közgazdasági Szemle*. LXI. évf., 166–192. o.

2. Adrian, T. – Boyarchenko, N. (2013): Intermediary Leverage Cycles and Financial Stability, Federal Reserve Bank of New York, Staff Report No. 567.
3. Adrian, T. – Shin, H. S. (2009): Money, Liquidity, and Monetary Policy. Federal Reserve Bank of New York, Staff Reports, No. 360.
4. Adrian, T. – Shin, H. S. (2010): The Changing Nature of Financial Intermediation and the Financial Crisis of 2007–2009, Federal Reserve Bank of New York, Staff Reports.
5. Arratibel, O. – Michaelis, H. (2014): The Impact Of Monetary Policy And Exchange Rate Shocks In Poland: Evidence From A Time-Varying Var, European Central Bank, Working Paper, No. 1636.
6. Blake, A – Mumtaz, H. (2012): *CCBS Technical Handbook – No. 4, Applied Bayesian econometrics for central bankers*, Bank of England.
7. Borio, C. - White, W. (2004): *Whither monetary and financial stability? The implications of evolving policy regimes*, BIS Working Papers, No 147.
8. Carter, C. K. – Kohn R. (1994): On Gibbs sampling for state space models, *Biometrika* 81(3), 541–553.
9. Castelnuovo, E. – Surico, P. (2009): Monetary Policy, Inflation Expectations and the Price Puzzle, *The Economic Journal*, 120, 1262–1283.
10. Chiarella, C. (2006): *Quantitative and Empirical Analysis of Nonlinear Dynamic Macromodels*, Elsevier B. V.
11. Cogley, T. – Sargent, T. J. (2005): Drifts and volatilities: monetary policies and outcomes in the post WWII US, *Review of Economic Dynamics* 8, 262–302.
12. Del Negro, M. - Primiceri, G. (2013): *Time-Varying Structural Vector Autoregressions and Monetary Policy. A Corrigendum*, Federal Reserve Bank of New York, Staff Report No. 619.
13. Franta, M. – Horváth, R. – Rusnák, M. (2012): Evaluating Changes in the Monetary Transmission Mechanism in the Czech Republic, Institute of Economic Studies, Faculty of Social Sciences, Charles University in Prague, IES Working Paper: 11/2012
14. Geweke, J. (1992): Evaluating the accuracy of sampling-based approaches to the calculation of posterior moments, *Bayesian Statistics*, Vol. 4
15. Hamilton, J. D. (1994): *Time series analysis*. Princeton University Press, ISBN 0-691-04289-6.
16. Komáromi A. (2008): *A monetáris aggregátumok szerepe a monetáris politikában*, Magyar Nemzeti Bank, MNB-tanulmányok 71.
17. Jacquier, E. – Polson, N. – Rossi, P. (2004): Bayesian analysis of stochastic volatility models, *Journal of Business and Economic Statistics* 12, 371-418.
18. Kim, C-J. – Nelson, C. R. (1999): *State-space models with regime switching*, MIT Press, Cambridge, Massachusetts.
19. Kim, S., – Shephard, N. – Chib, S. (1998), Stochastic Volatility: Likelihood Inference and Comparison with ARCH Models, *Review of Economic Studies*, 65, 361-393.
20. Koop, G. – Korobilis, D. (2010): Bayesian Multivariate Time Series Methods for Empirical Macroeconomics, Foundations and Trends(R) in *Econometrics*, vol. 3(4), 267-358.
21. Koop, G. – Poirier, D. J. – Tobias J. L. (2007): *Bayesian Econometric Methods*, Cambridge University Press.



22. Lesage, J. P. (1999): *Applied Econometrics using MATLAB*, Department of Economics, University of Toledo.
23. Nuño, G. – Thomas, C. (2013): Bank Leverage Cycles, European Central Bank, Working Paper, NO 1524.
24. Peterson, W. – Tomek, H. (2000): Implications Of Deflating Commodity Prices For Time-Series Analysis, Conference on Applied Commodity Price Analysis, Forecasting, and Market Risk Management, Chicago, Illinois.
25. Pozsar, Z. – Adrian, T. – Ashcraft, A. – Boesky, H. (2010): Shadow Banking, Federal Reserve Bank of New York, Staff Report no. 458.
26. Primiceri, G. E. (2005): Time Varying Structural Vector Autoregressions and Monetary Policy. *Review of Economic Studies* 72(3), 821–852 o.
27. Rubio-Ramírez, J. – Waggoner, D. – Zha, T. (2010): Structural Vector Autoregressions: Theory of Identification and Algorithms for Inference, *Review of Economic Studies* 77(2), 665–696.
28. Sims C. A. (2000): Using a Likelihood Perspective to Sharpen Econometric Discourse: Three Examples, *Journal of Econometrics* 95(2), 443–462.
29. Várpalotai, V. (2009): Modern Bayes-i ökonometriai elemzések. Simasági priorok alkalmazása az üzleti ciklusok szinkronizációjának mérésére és az infláció előrejelzésére. PhD thesis, Budapesti Corvinus Egyetem, Közgazdaságtani Doktori Iskola.

#### EFFECT OF BROKER-DEALERS TO MACROECONOMIC VARIABLES – THE ROLE OF BROKER-DEALERS IN A TVP VAR SETTING

This paper examines broker-dealers effect on the US economy using Primiceri's [2005] time-varying parameter Bayesian VAR model and presents in detail the methodology. The results show that broker-dealers have a statistically significant effect on the real output. Estimating an alternative model with the M2 monetary aggregate and comparing the results show that broker-dealers effect on real GDP is similar in magnitude to that of the M2 monetary aggregate though its balance sheet is much smaller in size. The outcome highlights the importance of the finance and capital markets developments and serves as a warning against the sole use of the classical monetary data in the conduct of monetary and macroprudential policy.

## TÁRSASÁGI HÍREK

Beszámoló a GMT szakmai rendezvényéről és a Krekó Béla-díj átadásáról

„Módszertani eszközök alkalmazása a magyar gazdaság teljesítményének mérésére makroökonómiai, monetáris és vállalatgazdasági nézőpontból” címmel 2014. november 19-én a Corvinus Egyetemen zajlott le az a szakmai konferencia, ahol az egyes nézőpontokat (a cím szerinti sorrendben) Mellár Tamás, Király Júlia és Chikán Attila képviselte. A GMT tagjaiból és az örömtelen nagy számban megjelent fiatal egyetemi hallgatókból, kutatókból álló hallgatóság értő figyelemmel kísérte az előadók izgalmas gondolatait.

Mellár Tamás előadásának első részében a fontosabb makromutatókkal és az univerzális mutatók előnyeinek-hátrányainak bemutatásával foglalkozott, majd rátért az output gap meghatározásának módszertani kérdéseire, ezt a témakört a magyar output gap becslésének példájával illusztrálva. Konklúziója szerint ma még a sok-sok szóba jöhető makromutató közül a GDP és annak növekedése továbbra is domináns. Nagy a bizonytalanság az output gap becslése körül, jóllehet a módszerek sokat finomodtak. Az előadás második részében a foglalkoztatás és a termelékenység alakulását – egy aktuálisan izgalmas témát – elemzett. Véleménye szerint a foglalkoztatási statisztika módszertana nem tartott lépést a változásokkal. Az átlagtermelékenység csökkenésének valószínű oka a régi gazdasági szerkezet dinamizálása.

Király Júlia a magyar monetáris elemzés központjának a Magyar Nemzeti Bankot tekinti színvonalas eseti és rendszeres kiadványaival, amelyek nem kizárólag monetáris modellezés alapján készülnek. A makromodellezés válságkritikája kapcsán két nézetet említett meg: a módszertani túlhajszoltságot, illetve a valóság nem megfelelő leképezéséből adódó hibák lehetőségét. Saját válság-tanulságait több pontban foglalta össze, egyrészt a monetáris modellezés, másrészt a pénzügyi rendszer modellezői számára. Az előadás második felében a gazdaságelemzések előrejelzéseit készítő szakemberek, illetve a pénzügyi piacok, a pénzügyi közvetítőrendszer elemzői részére fogalmazott meg módszertani tanácsokat annak érdekében, hogy a modellek végeredményei a valós folyamatokat jobban tükrözve érdemi lehetőségeket nyújtsanak gazdaságpolitikai alternatívák kidolgozására.

Chikán Attila kiindulópontként a vállalati teljesítmény makroökonómiai beágyazottságáról beszélt, különböző vállalatelméletek, vállalati modellek mentén definiálva azt, hogy mit tekintünk egyáltalán vállalati teljesítménynek? Külön kitért a vállalati teljesítmény mérésének problémáira. A vállalati szintű jelzéstípusokat vizsgálva megemlítette a konjunktúraindexeket, az ökonometriai vizsgálatokat, valamint a strukturális elemzések és a magatartásvizsgálatok eredményeit. Mondanivalóját a nemzeti és vállalati versenyku-

tatás eredményeivel is alátámasztotta. Összegzésében azokat a nehézségeket emelte ki, amelyek elsősorban a hiányos elméleti háttérből, a nehézkes adathozzáférésekből, a szétszórt kutatási kapacitásokból adódnak. Véleménye szerint a vizsgálatok, elemzések gyakorlati relevanciája nagyobb, mint amennyi elméleti érdekességet tárnak fel.

Az érdeklődők az előadásokat a [www.gazdasagmodellezes.hu](http://www.gazdasagmodellezes.hu) honlap „Szakmai műhelyviták” menüpontjából tölthetik le.

A három előadás után került sor a 2014. évi Kerekó Béla-díj átadására. Temesi József elnök a Társaság nevében bejelentette, hogy 2014-ben a Társaság díját az oklevéllel és a névadó arcmását tartalmazó plakettel *Chikán Attila*, a Budapesti Corvinus Egyetem professzora kapja. Röviden méltatta azt a kiemelkedően eredményes tevékenységet, amelyet Chikán Attila az operációkutatás és a tágabb értelemben vett közgazdasági modellezés területén kifejtett mind az egyetemi oktatásban, mind pedig kutatómunkája során. Kiemelte a díjazottnak a Gazdaságmodellezési Társaságban és annak elődszervezetében évtizedeken keresztül átívelő sikeres és önzetlen tevékenységét, a szakma elismertetésében szerzett érdemeit, és a vezetői és kutatómunkája során a fiataloknak nyújtott állandó segítségét, amelyek mind olyan értéket képviselnek, amelyekre az Elnökség döntése meghozatalakor alapozhatott.

Chikán Attila a díjjal járó pénzüsszeget gazdaságmodellezési témákkal foglalkozó fiatal kutatók konferencia-részvételének támogatására ajánlotta fel.

Temesi József