Szigma, XXIII. (1992) 1–2.

A HATÉKONY ÉS RACIONÁLIS ELOSZTÁS (IN–) KONZISZTENCIÁJA: EGY AXIOMATIKUS MEGKÖZELÍTÉS[1]

FORGÓ FERENC
Budapesti Közgazdaságtudományi Egyetem

A nemzetközi közgazdasági irodalomban már hosszú ideje jelentős helyet foglal el különböző „etikai" kérdések tárgyalása. A teljesség igénye nélkül említjük meg RAWLS [3], SEN [4], ZAJAC [5], MOULIN [6] és KANG [7] munkáit. Ezekben a vizsgálat tárgya elsősorban a gazdasági „igazságosság", az „igazságos" elosztás, illetve ezek kapcsolata a gazdasági hatékonysággal.

A hazai közgazdasági irodalomban hosszú időn keresztül ez a kérdés fel sem merült. Az utóbbi időben azonban különböző formában és szinteken fogalmazódott meg egy olyan állítás, hogy a gazdasági hatékonyság és bizonyos értékek összessége, amelyeket a „szocialista gazdálkodás etikai elveinek" is neveznek, inkonzisztensek. Ennek legkitűnőbb példája KORNAI [1] könyvének „Hatékonyság és szocialista erkölcs" című fejezete, amelyben nagyon meggyőzően érvel amellett, hogy „elkerülhetetlenül összeütközések keletkeznek egyfelől a hatékonyság feltételei, másfelől a szocialista gazdaság etikai elvei között".

Ebben a cikkben megfelelő absztrakciós szinten, a hatékonyságnak egy harmadik tényezővel, az elosztási racionalitással való kapcsolatát vizsgáljuk. Ez természetesen sokkal kevésbé ambiciózusabb vállalkozás, mintha a hatékonyság–igazságosság–racionalitás hármas kapcsolatát elemeznénk, de azt reméljük, hogy annak kimutatása, hogy a hatékonysági és racionalitási követelmények csak kivételes esetekben elégíthetők ki egyszerre, hozzájárul ennek a komplex problémának a jobb megértéséhez.

A hatékonyságot a klasszikus „lokális" módon értelmezzük, a lokálisan legnagyobb teljesítménynövekedést biztosító elosztást vesszük „hatékony" elosztásnak, a „racionalitást" pedig axiomatikus alapokra helyezzük.

A választott modell technikai apparátusa a költségallokációs modellek eszköztárára épül, a közgazdasági interpretáció és az alkalmazás azonban új.

A modell felépítése

Legyen G egy gazdasági egység (népgazdaság, vállalat, szövetkezet, család stb.), amelynek egy adott időszakban a „jövedelmét" (pl. nemzeti jövedelem, nyereség, családi összjövedelem) n „tag" (résztvevő) együttes tevékenysége (munkája) határozza meg. Ilyen tagok lehetnek vállalatok, brigádok, dolgozók, családtagok stb.

---

[1]Beérkezett: 1989. január 17.

Minden tag a saját tevékenységét különböző „intenzitással" végezheti. Az intenzitás szót itt nem a klasszikus, szűk értelemben használjuk, hanem a lehető legtágabban értelmezzük. Tulajdonképpen a színvonal szó megfelelőbb lenne azzal a megszorítással, hogy minden tag kontrollálni tudja saját tevékenységének színvonalát, pl. munkás esetében szakmai tudásának növelésével, figyelmesebb munkával, vállalat esetében jobb szervezéssel, okosabb döntésekkel.

Feltesszük, hogy minden tag tevékenységének intenzitása 0 és 1 között folytonosan változhat. Ha az i-ik tag tevékenységének intenzitása x_i $(i = 1, \ldots, n)$, akkor a G által elért jövedelem legyen $f(x_1, \ldots, x_n)$, ahol f folytonosan differenciálható függvény a $[0,1]^n$ n-dimenziós intervallumon.

A 0 szintet egy kiinduló intenzitásszintnek vesszük. Ekkor az $f(x)$ az x intenzitásnövekedéshez tartozó többletjövedelem (a későbbiekben egyszerűen csak jövedelem) és ennek az elosztásával foglalkozunk.

Ha az adott időszakban a tagok tevékenységének intenzitása a_i $(i = 1, \ldots, n)$ és a G egész $f(a_1, \ldots, a_n)$ jövedelmét fel akarja osztani tagjai között, felmerül a kérdés, hogyan tegye ezt. Két alapvető követelményt (követelményrendszert) szeretnénk kielégíteni: (a) a hatékonyságra ösztönzés és (b) a racionalitás követelményeit. Felmerül a kérdés, hogy létezik-e olyan szétosztási mechanizmus, amely ezeket az alkalmasan formalizált követelményeket egyszerre ki tudja elégíteni? Legelőször az f jövedelem függvényre teszünk további feltételeket.

F1. $f(0) = 0$, ami azt a követelményt fejezi ki, hogy ha mindenki a kiinduló intenzitásszinten tevékenykedik, akkor nem keletkezik többletjövedelem.

F2. $f'(0) \geq 0$, $f'(x) \neq 0$ minden $x \in [0,1]^n, x \neq \mathbf{1}$ esetén. Ez a feltétel azt jelenti, hogy egyetlen tag intenzitásnövekedése sem csökkenti az összjövedelmet és minden helyzetben (az $x = \mathbf{1}$ kivételével) lehet növelni az összjövedelmet.

A hatékonyságra ösztönzés követelménye. Az $a \in [0,1]^n$ intenzitásvektor kis környezetében (lokálisan) a relatív összjövedelem növekedés maximális legyen, vagyis a h elosztási arányvektor maximalizálja az $f'(a)h$ függvényt a $hh = 1$ normáló feltétel mellett, ahol $f'(a)$ az a helyen vett marginális jövedelemvektor.

Közismert, hogy ha $f'(a) \neq 0$ (ezt pedig az F2. feltétel biztosítja), akkor a hatékony elosztási arányvektor az $f'(a)$ pozitív konstansszorosa, vagyis a hatékonyság követelményének eleget tevő elosztási vektor a marginális jövedelmekkel, az összjövedelemhez való marginális hozzájárulással arányos:

$$\frac{f(a)}{f'(a)a} f'(a)$$

($f'(a)a > 0$ nyugodtan feltehető, az $f'(a)a = 0$ esetben nyilvánvalóan nem is létezik hatékony elosztás).

Ezen a ponton álljunk meg egy pillanatra. Itt, kissé burkoltan, azzal a feltevéssel éltünk, hogy az elosztási arányok ugyanolyan arányú intenzitásváltozást indukálnak. (Például ha az egyik tag kétszer annyit kap a jövedelemtöbbletből, mint a másik, akkor kétszer annyira van ösztönözve az intenzitása növelésére.) Ezért tehetünk tulajdonképpen egyenlőségjelet a hatékonyságra ösztönzés és a hatékony jövedelemnövelés közé.

A racionális elosztás követelményei. n-rendű elosztási problémának nevezzük az (f, a) párost, ahol a egy n-elemű intenzitásvektor, f pedig egy folytonosan deriválható jövedelemfüggvény. Jelölje P^n az összes n-rendű elosztási problémák halmazát, $P = \bigcup_{n\geq 1} P^n$ pedig valamennyi elosztási probléma halmazát.

Jövedelemelosztási eljárásnak nevezzük azt az $r : P \rightarrow \bigcup_{n\geq 1} \mathbb{R}^n$ függvényt, amely minden $(f, a) \in P^n$ párhoz egy $r(f, a) \in \mathbb{R}^n$ vektort (elosztást) rendel ($\mathbb{R}^n$ itt az n-dimenziós euklideszi teret jelöli).

Az $r_i(f, a)$ koordináta az i-ik tag egységnyi (maximális) intenzitású teljesítményére jutó jövedelmét jelenti, ($i = 1, \ldots, n$). Egy „racionális" jövedelemelosztási eljárástól megköveteljük a következőket.

K1. A megtermelt összjövedelmet pontosan ossza el (se többet, se kevesebbet $f(a)$-nál):

$$\sum_{i=1}^{n} r_i(f, a)a_i = f(a).$$

K2. A jövedelemelosztási eljárás legyen additív, vagyis

$$r(f, a) + r(g, a) = r(h, a) \quad \text{ha} \quad (f, a), (g, a) \in P^n \text{ és } h = f + g.$$

Ez a követelmény azt jelenti, hogy ha a jövedelemfüggvény két részjövedelem függvény összegéből tevődik össze (pl. a számításba vett időszak két egymást nem átfedő részidőszak egyesítése), akkor a jövedelemelosztási eljárást külön-külön alkalmazva a két részidőszakra és a két elosztást összegezve ugyanazt az elosztást kapjuk, mintha az eljárást rögtön az egész időszak jövedelemfüggvényére alkalmaztuk volna. Ez nagyon természetes, tulajdonképpen a könyvelési racionalitást megtestesítő követelmény. (Nemcsak részidőszakok, hanem különböző jövedelemfajták esetére is természetes ezen követelmény teljesülésének kívánalma.)

K3. Tegyük fel, hogy az egész T időszakot két egymást át nem fedő T_1, T_2 részidőszakokra bontjuk és az első tagot formálisan két 1_1 illetve 1_2-vel jelölt taggal helyettesítjük a jövedelemelosztási problémában. Az 1_1 ugyanazt a munkát végzi, amit az első tag a T_1-ben, az 1_2 azt, amit az első tag a T_2-ben. Az összjövedelem így változatlan marad, de az első (eredeti) esetben egy n-dimenziós $(f, a) \in P^n$ jövedelemelosztási problémáról van szó, míg a másodikban egy $(g, b) \in P^{n+1}$ $n+1$-dimenziósról. Az első problémában a első komponense a b első két komponensének összege és $f(x) = g(y)$ mindig fennáll, ha

$$x \in [0, 1]^n,\ y \in [0, 1]^{n+1} \text{ és } x_1 = y_1 + y_2, x_i = y_{i+1}\ (2 \leq i \leq n)$$

A jövedelemelosztási eljárástól megköveteljük, hogy az első és második esetben kapott elosztás „gyakorlatilag" ugyanaz legyen, az elsőben az első tag ugyanannyit kapjon, mint a másodikban 1_1 és 1_2 összesen, a többiek pedig természetesen ugyanazt kapják mindkét esetben.

Ha ezt nemcsak összegre, hanem tetszőleges lineáris kombinációra is kiterjesztjük és megköveteljük, akkor azt mondjuk, hogy a jövedelemelosztási eljárás aggregáció–invariáns.

Formálisan és valamivel általánosabban:

Legyen A egy $m \times n$-es mátrix és az f összjövedelem függvény legyen az alábbi alakú

$$f(x) = g(Ax)$$

ahol g folytonosan differenciálható a $[0,1]$-en. Az r jövedelemelosztási eljárástól megköveteljük, hogy

$$r(f, a) = r(g, Aa)A$$

fennálljon.

K4. Azt mondjuk, hogy a jövedelemelosztási eljárás monoton, ha f nem csökkenő voltából következik, hogy $r(f, a) \geq 0$, ami azt a természetes követelményt fejezi ki, hogy ha egy tag intenzitásnövelése nem csökkenti az összjövedelmet, akkor tőle nem szabad jövedelmet elvonni.

Ezek után expliciten is meg tudjuk fogalmazni annak a feltételét, hogy a hatékony és igazságos elosztás egy a intenzitásszint mellett egybeessék. BILLERA és HEATH [2] egy költségallokációs modell keretében bebizonyították, hogy egy és csakis egy olyan költségszétosztási eljárás van, amely a K1–K4 követelményeket kielégíti és ez expliciten meg is adható. Minthogy tételünk bizonyításában – megváltoztatva a megváltoztatandókat – semmilyen lényeges szerepet nem játszik, hogy ott költségről és nem pedig jövedelemről van szó, eredményük az általunk tárgyalt jövedelemelosztási problémára is vonatkozik. BILLERA és HEATH nyomán a K1–K4 igazságossági követelményeket az

$$r(f, a) = \int_0^1 f'(ta)\, dt$$

úgynevezett „AUMANN-SHAPLEY-árak" elégítik ki. Így annak a feltétele, hogy a racionális és hatékony elosztás egybeessék az, hogy az

$$\int_0^1 f'(ta)\, dt = \frac{f(a)}{f'(a)a} f'(a) \tag{1}$$

egyenlőség fennálljon.

Láthatjuk, hogy a hatékony elosztás a marginális jövedelmek arányában, a racionális elosztás az „átlagos" marginális jövedelmek arányában történik (az átlagolás a 0-ról az a szintre való egyenletes felfutás ösvénye mentén történik).

Egy más oldalról megvilágítva: hatékony elosztás esetén az a szinten csak „előre tekintünk", nem érdekel bennünket, hogyan jutottunk oda, míg a racionális elosztásnál a 0-tól a-ig megtett út egésze érdekes.

Azt kell tehát vizsgálnunk, hogy az (1) egyenlőség milyen feltételek mellett áll, illetve nem áll fenn. E célból tovább egyszerűsítjük a modellünket és feltesszük, hogy az a intenzitásszint „elég közel" van a kiinduló 0 szinthez. Olyan közel, hogy az $f(x)$ jövedelemfüggvény jól közelíthető a 0 középpontú, az a vektort a belsejében tartalmazó környezetben egy kvadratikus függvénnyel. A továbbiakban ezzel a kvadratikus függvénnyel dolgozunk:

$$f(x) := Q(x) := px + xCx.$$

$Q(0) = 0$, és az F2. feltevés szerint

$$Q'(0) \doteq p \geq 0, \, p \neq 0$$

C nyugodtan vehető szimmetrikusnak és azt is feltesszük, hogy C definit (pozitív vagy negatív), s ilymódon $Q(x)$ vagy szigorúan konvex vagy szigorúan konkáv.

Nézzük meg, hogyan alakul az (1) egyenlőség most:

$$\int_0^1 f'(ta)\,dt = \int_0^1 p + (2Ca)t\,dt = p + Ca = \frac{f(a)}{f'(a)a} f'(a) = \frac{pa + aCa}{pa + 2aCa}(p + 2Ca)$$

Legyen $\lambda(a) = \dfrac{pa + aCa}{pa + 2aCa}$. Ekkor $p + Ca = \lambda(a)(p + 2Ca)$, amiből

$$(1 - 2\lambda(a))Ca = (\lambda(a) - 1)p.$$

Ha $\lambda(a) = 1$, akkor $Ca = 0$ kell legyen, ami $a \neq 0$ miatt nem lehet. $\lambda(a) = 1/2$ sem lehet $p \neq 0$ miatt. Így

$$a = \frac{\lambda(a) - 1}{1 - 2\lambda(a)} C^{-1} p$$

ami azt jelenti, hogy a a $Q(x)$ abszolút maximumpontjának (minimumpontjának) konstansszorosa.

Különböztessünk meg két esetet:

a) *Q konkáv.* Az (1) egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha 0 intenzitásszintről az a-ra való elmozdulás az „abszolút maximum" irányában történt. Az abszolút maximum nem „lokális" fogalom, s mint ilyen, általában nem látható előre, s így (1) fennállása csak „esetleges", „véletlen" lehet.

b) *Q konvex.* Az érvelés hasonló, ilyenkor az elmozdulás a lokálisan nem ismert abszolút minimumtól való eltávolodás irányában van, ami szintén csak esetleges lehet.

Az a) esetben nevezhetjük a jövedelemfüggvényt *degresszív*nek, míg a b)-ben *progresszív*nek, ha pedig $Q(x)$ lineáris, akkor *semleges*nek. Semleges, azonos struktúrában való fejlődés (intenzitásnövekedés) esetén könnyű látni, hogy (1) mindig fennáll, tehát a hatékony és racionális elosztás egybeesik. (Mindig ez a helyzet, ha az $f(x)$ jövedelemfüggvény homogén.) Gyorsuló vagy lassuló ütemű (progresszív, illetve degresszív jövedelemfüggvény) fejlődés esetében az azonos struktúrában való fejlődés általában (a kivételes, „véletlen" esettől eltekintve) nem a leghatékonyabb és így a hatékony és racionális elosztás nem eshet egybe, és így valamelyik elvnek a kizárólagos (vagy domináns) alkalmazása ilyenkor lehet leginkább feszültségek forrása.

IRODALOM

1. KORNAI JÁNOS: Ellentmondások és dilemmák. Magvető Kiadó, Budapest, 1983.
2. LOUIS J. BILLERA – DAVID C. HEATH: Allocation of shared costs: a set of axioms yielding a unique procedure. Mathematics of Operations Research, Vol 7, No. 1, 1982.
3. RAWLS, J.: A theory of justice (Cambridge, MA: Belknap Press of Harvard University), 1971.
4. SEN, A. K.: Labour allocation in a cooperative enterprise. Rev. Econom. Stud. 33, 1966, 361–371.
5. ZAJAC, E. E.: Perceived economic justice: the example of public utility regulation, in Cost allocation methods, principles, applications (ed. A. P. Young), North-Holland, Amsterdam, 1985, 119–153.
6. MOULIN, H.: Equal or proportional division of a surplus, and other methods. International Journal of Game Theory, 16, 1987, 161–186.
7. KANGS, S.: Fair distribution rule in a cooperative enterprise. Journal of Comparative Economics 12, 1988, 89–92.

(IN)CONSISTENCY OF THE EFFICIENT AND THE RATIONAL DISTRIBUTION: AN AXIOMATIC APPROACH

In this paper using cost-allocation techniques it is proved that in case of progressive and degressive income function there exists both efficient and rational distributing procedure. We define the efficiency in the classical „local" sense, and provide some expressive requirements for the concept of rationality.