TÖBBSZINTŰ TERMELÉSI–KÉSZLETEZÉSI MODELLEK HEURISZTIKÁI

KNUT RICHTER – VÖRÖS JÓZSEF
Chemnitzi Műszaki Egyetem – Janus Pannonius Tudományegyetem

A tanulmány a többszintű termelési-készletezési modellt vizsgálja újrarendelés megengedésével. (Újrarendelés lehetőségéről akkor beszélünk, amikor a keresletet jelentkezése időpontjában a termék hiánya miatt nem lehet kielégíteni, de ennek kielégítését a termelő – a megrendelő egyetértésével (pl. árcsökkentés ellenében) – későbbi időpontban vállalja, vagy többletköltség árán vállalja az igény azonnali kielégítését.) A problémára egy dinamikus programozási algoritmust és néhány heurisztikát definiál, majd numerikus összehasonlítást végez. Végül egy termodinamikusan motivált heurisztikát fejleszt ki, mely jobb eredményt mutat az előzőeknél.

1. Bevezetés

Az anyagszükséglettervezési (MRP) rendszernek a termeléstervezésben történő használata jelentősen megnövelte az érdeklődést a többszintű döntéshozás témája iránt. Egy többszintű termelési–készletezési rendszerben egy termék termelése néhány más komponenst igényel, majd ő maga is komponensévé válik egy másik, – de egyetlen – terméknek. Az ilyet összeszerelő termelési–készletezési rendszernek nevezzük. (Lásd 1. ábra.)

Az összeszerelő termelési rendszerre CROWSTON és WAGNER (1973), AFENTAKIS és társai (1984), (1986), valamint ROSLING (1986) dolgoztak ki hatékony, optimális megoldást adó algoritmusokat. Gyakorlati szempontból ugyanakkor a területnek egy igen fontos ága a heurisztika. A legegyszerűbb elgondolások egyike, hogy az egyszintű, a dinamikus sorozatnagyság megállapítására kidolgozott heurisztikákat szintenként alkalmazzuk. Azonban ezen eljárások szuboptimalitása nyilvánvaló, hiszen mellőzik a szintek közötti összefüggéseket. A szintek közötti összefüggések érzékeltetésé céljából BLACKBURN és MILLEN (1982) az input költségadatokat módosították. Azt is megállapították, hogy a vizsgálatokat elegendő a sorozatgépes rendszerre elvégezni, mivel a termelési rendszer mélysége s nem szélessége a döntő (a sorozatgépes rendszer olyan összeszerelő rendszer, ahol nemcsak az utód termékek száma egy, hanem az elődök száma is egy (lásd 2. ábra)). Ebből kiindulva, a tanulmány csak a sorozatgépes rendszerrel foglalkozik, ugyanakkor a kifejlesztett heurisztikák az összeszerelő rendszerre is alkalmazhatók.

1. ábra: Egy összeszerelő rendszer

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[d] & & {} \arrow[d] \\ (1) \arrow[dr] & & (2) \arrow[dl] \\ & (3) \arrow[d] & \\ & d & \end{tikzcd}$$

2. ábra: Egy sorozatgépes rendszer

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ (1) \\ \downarrow \\ (2) \\ \downarrow \\ (3) \\ \downarrow \\ d \end{array}$$

ZANGWILL (1969), LOVE (1972), CHAND (1983) és ZANGWILL (1986) dolgoztak ki hatékony dinamikus programozási eljárást, illetve érdekes eredményeket sorozatgépes, dinamikus rendszerekre. LAMBRECHT és társai (1981), és GRAVES (1981) pedig kitűnő tulajdonságú többszintes heurisztikákat fejlesztettek ki.

A tanulmány lényegi vonása, hogy az említett cikkektől eltérően az újrarendelést megengedi, ami egyúttal azt jelenti, hogy a kereslet átrendezésére – bizonyos költségek árán – lehetőség nyílik. A többszintű termelési–készletezési rendszerek újrarendelési problémája már korábbi tanulmányokban is előfordult. Elsőként TAHA és SKEITH (1970) tanulmányát kell megemlíteni, akik statikus és determinisztikus keresleti adatsorra dolgoztak ki eljárást. ZANGWILL algoritmusát módosítva JOHNSON és MONTGOMERY (1974) adtak dinamikus programozási eljárást az esetre. Magának az algoritmusnak a korrektsége azonban vitatható, továbbá nem tartalmazza LOVE-nak az algoritmust gyorsító elképzeléseit.

A tanulmány második fejezete egy dinamikus programozási eljárást definiál, a harmadik fejezet pedig az újrarendelés esetére módosított heurisztikákat írja le, és közli a tesztelési eredményeket. A negyedik fejezet egy új heurisztikát fejleszt ki, a befejező ötödik rész a következtetéseket adja.

2. A többszintű sorozatgépes termelési-készletezési rendszer újrarendelés lehetőségével

A probléma általános leírásának megfelelően (lásd CHAND (1983)), azt tételezzük fel, hogy M termelőberendezés áll sorozatban, és az $(m+1)$-edik termelőberendezés inputja az m-edik egység outputja. Az első egységnél a nyersanyagok korlátlanul állnak rendelkezésünkre, míg az M-ediken a késztermékek készülnek, melyeket a fogyasztói igények kielégítésére használnak. Valamennyi egységnél létezhetnek készletek, és feltesszük még, hogy a termelési ráta végtelen, tehát a megrendelt mennyiség azonnal rendelkezésünkre áll. Valamennyi szinten egységnyi termeléshez egységnyi inputra van szükség. A kereslet újrarendelése csak a késztermékek (M-edik) szintjén lehetséges.

Jelölje D_t a t-edik periódusban a végtermék iránti keresletet, ez valamennyi periódusban ismert mennyiség; $t \in \langle 1, T \rangle$, ahol $\langle a, b \rangle = \{a, a+1, \ldots, b\}$. Jelölje X_{mt} a termelés volumenét az m-edik egységnél a t-edik periódusban, ennek költségét pedig $C_{mt}(X_{mt}), m \in \langle 1, M \rangle, t \in \langle 1, T \rangle$. I_{mt} az m-edik egységnél a készletszintet jelöli a t-edik periódus végén, melynek költsége $H_{mt}(I_{mt})$ lesz, $t \in \langle 1, T \rangle$, $m \in \langle 1, M-1 \rangle$. Az M-edik szintre $H_t^+(I_t^+)$, illetve $H_t^-(I_t^-)$ a készletezési, illetve újrarendelési költséget jelöli a t-edik periódusban. Ekkor a többszintű termelési–készletezési probléma az alábbi módon modellezhető:

$$min \sum_{t=1}^{T} \left(\sum_{m=1}^{M-1} (C_{mt}(X_{mt}) + H_{mt}(I_{mt})) + C_{Mt}(X_{Mt}) + H_t^+(I_t^+) + H_t^-(I_t^-) \right) \tag{1a}$$

$$I_{mt} = I_{m,t-1} + X_{mt} - X_{m+1,t}, \quad m \in \langle 1, M \rangle, \quad t \in \langle 1, T \rangle \tag{1b}$$

$$X_{M+1,t} = D_t, \quad t \in \langle 1, T \rangle \tag{1c}$$

$$I_{m0} = I_{mT} = 0, \quad X_{mt} \geq 0, \quad m \in \langle 1, M \rangle, \quad t \in \langle 1, T \rangle \tag{1d}$$

$$I_{mt} \geq 0, \quad m \in \langle 1, M-1 \rangle, \quad t \in \langle 1, T \rangle \tag{1e}$$

$$I_{Mt} = I_t^+ - I_t^-, \quad I_t^+ \geq 0, \; I_t^- \geq 0, \quad t \in \langle 1, T \rangle \tag{1f}$$

Az (1) feladat egy egyetlen forrásponttal rendelkező hálózatként is reprezentálható (lásd 3. ábra). ZANGWILL (1968) megmutatta, hogy ha a C és H függvények konkávak, akkor (1)-nek létezik olyan optimális megoldása, melynek extremális folyama van, vagyis egy belső pontnak legfeljebb egy pozitív inputja van. Ez azt jelenti, hogy létezik olyan optimális megoldás, melyre:

$$I_{m,t-1} X_{mt} = 0, \; m \in \langle 1, M-1 \rangle, \; t \in \langle 1, T \rangle$$

és

$$I_{t-1}^+ I_t^- = 0, \; X_{Mt} I_t^- = 0, \; X_{Mt} I_{t-1}^+ = 0 \quad t \in \langle 1, T \rangle.$$

3. ábra: A dinamikus sorozatgépes rendszer újrarendeléssel

$$\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[d, "\sum D_t"] & \\
{} \arrow[d, "X_{11}"] & (0) \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d, "X_{12}"] & {} \arrow[d, "X_{13}"] \\
(11) \arrow[r, "I_{11}"] \arrow[d, "X_{21}"] & (12) \arrow[r, "I_{12}"] \arrow[d, "X_{22}"] & (13) \arrow[d, "X_{23}"] \\
(21) \arrow[r, "I_{21}"] \arrow[d, "X_{31}"] & (22) \arrow[r, "I_{22}"] \arrow[d, "X_{32}"] & (23) \arrow[d, "X_{33}"] \\
(31) \arrow[r, shift left, "I_1^+"] \arrow[d] & (32) \arrow[l, shift left, "I_1^-"] \arrow[r, shift left, "I_2^+"] \arrow[d] & (33) \arrow[l, shift left, "I_2^-"] \arrow[d] \\
D_1 & D_2 & D_3
\end{tikzcd}$$

A Zangwill-féle tulajdonságnak van néhány érdekes következménye, melyeket a következőkben foglalhatunk össze:

1. Következmény: *Ha egy pontba vezető él a D_k-ból szállít pozitív mennyiséget, akkor a teljes D_k mennyiséget szállítja, $k \in \langle 1, T \rangle$.*

2. Következmény: *Ha z, mint az (mt) pont (m =szint, t =periódus) inputja tartalmazza D_k-t, $k < t$, akkor tartalmazza D_t-t is.*

3. Következmény: *Ha z az (mt) pont inputja, akkor*

$$z = \sum_{r=l}^{k} D_r \qquad 1 \leq l \leq k, \quad t \leq k \leq T$$

Bizonyítás: Tételezzük fel, hogy z tartalmazza D_j-t és D_{j+h}-t, $j \leq T-2$, $h \geq \max\{2, t-1\}$ és $j+h \leq T$, de nem tartalmazza D_{j+r}-t, $1 \leq r < h$, továbbá, hogy z' mint az $(m't')$ pont inputja tartalmazza D_{j+r}-t. Ekkor léteznének egymást keresztező folyamok, mely ellentmond a Zangwill-féle tulajdonságnak.

Tekintsük most az (1) alatti problémát egy, az irodalomban igen széles körben használt költségfüggvénnyel:

$$C_{mt}(X_{mt}) = \begin{cases} S_m + P_m X_{mt}, & \text{ha } X_{mt} > 0 \\ 0, & \text{ha } X_{mt} = 0 \end{cases} \qquad m \in \langle 1, M \rangle \quad t \in \langle 1, T \rangle$$

$$H_{mt}(I_{mt}) = h_m I_{mt} \qquad m \in \langle 1, M-1 \rangle \quad t \in \langle 1, T \rangle$$

és $H_t^+(I_t^+) = h_M I_t^+ \qquad H_t^-(I_t^-) = \pi I_t^- \qquad m \in \langle 1, M \rangle \quad t \in \langle 1, T \rangle$

Definíció: *Egy termelési terv gyűrűztetett, ha X_{mt} pozitivitása maga után vonja $X_{m+1,t}$ pozitivitását.*

1. Lemma: *Az (1) feladatnak létezik optimális gyűrűztetett termelési terve.*

A tétel bizonyítása teljesen megegyezik LOVE (1972) bizonyításával.

A fenti összefüggések alapján a következőkben egy dinamikus programozási algoritmust definiálunk (1) megoldására. Jelölje $C(t)$ a t periódusos probléma optimális megoldásához tartozó célértéket, míg $\alpha(l,t)$ az l-től a t-ig terjedő periódusok igényei kielégítésének minimális költségét azzal a feltétellel, hogy $(l-1)$ és t szomszédos regenerációs pontok. (A j-edik periódust regenerációs pontnak tekintjük, ha $I_{mj}=0$ minden $m \in \langle 1, M\rangle$-re.) Ekkor:

$$C(t) = \min_{l}\{C(l,t) = C(l-1) + \alpha(l,t)\} \tag{2}$$

minden $t \in \langle 1, T\rangle$, $l \in \langle 1, t\rangle$-re és $C(0) = 0$.

Jelölje $C(i,j,l,t)$ az i-től az M-ig terjedő szinteken felmerülő költségek minimumát, amikoris az l-től a t-ig terjedő periódusok igényét elégítjük ki és az i-edik egységnél a j-edik periódus elején $\sum_{r=l}^{t} D_r$ termék áll rendelkezésre. Ekkor

$$\alpha(l,t) = S_1 + \min_{j\epsilon(l,t)}\{C(1,j,l,t)\}$$

$i < M$-re, és $C(i,j,l,t)$ a következőképpen kalkulálható:

$$C(i,j,l,t) = \min\{h_i \sum_{r=l}^{t} D_r + C(i,j+1,l,t),$$

$$\min_{k\epsilon(j,t)}\{S_{i+1} + C(i+1,j,l,k) + h_i(k+1-j) \sum_{r=k+1}^{t} D_r + C(i,k+1,k+1,t)\}\}$$

ahol $C(i,j,t+1,t) = \sum_{t+1}^{t} = 0$

$i = M$ esetén

$$C(M,j,j,j) = 0, \text{ és } C(M,j,l,t) = \pi \sum_{r=1}^{j-1} D_r(j-r) + h_M \sum_{r=j+1}^{t} D_r(r-j)$$

3. Néhány heurisztika újrarendelés esetével

A tanulmány három szekvenciálisan alkalmazott – a WAGNER-WHITIN, a SILVER-MEAL, a BITRAN és társai (1984) által definiált úgynevezett előre lépegető –, és egy többszintű (melyet LAMBRECHT és társai (1981) dolgoztak ki) heurisztikával foglalkozik. Ezekre sorjában a WW, SM, FH, és ML jelölésekkel hivatkozunk.

Az újrarendelés esetére módosított Wagner–Whitin féle dinamikus programozási algoritmus jól ismert az irodalomból (lásd ZANGWILL (1966), (1969)). Esetünkben ez az algoritmus az utolsó (késztermék) szintre az alábbi módon definiálható: legyenek j és k szomszédos regenerációs pontok (tehát $I_{Mj} = 0$ és $I_{Mk} = 0$), és

$$D_{jk}(t) = \pi \sum_{r=j+1}^{t} D_r(t-r) + h_M \sum_{r=t}^{k} D_r(r-t)$$

és

$$G_{jk} = S_M + \min_{j<t\leq k}\{D_{jk}(t)\}$$

minden $k \in \langle 1, T\rangle$-ra és $j \in \langle 0, k-1\rangle$-re. Jelölje F_k az első k periódus igényei kielégítésének minimális költségét, feltéve, hogy k regenerációs pont. Ekkor az

$$F_0 = 0, \qquad F_k = \min_{0\leq j<k}\{F_j + G_{jk}\} \tag{3}$$

egyenletrendszer megoldása az M-edik szint szuboptimális megoldását adja. Az M-edik szintnek ez a szuboptimális termelési terve az $(M-1)$-edik szint keresleti adatsorát képezi, de G_{jk} definiciójában az M-től kisebb szinteken az újrarendelés esetét természetesen mellőzzük.

A módosított SM-nél az M-edik szinten, ha j regenerációs pont, a következő regenerációs pont a $(j+n+1)$-edik, $n = 0, 1, 2, \ldots$ periódusban lesz, ahol n az a legkisebb egész, melyre $f(n+1) - f(n) > 0$, ahol

$$f(n) = \frac{G_{jk}}{n+1} \qquad (k = j+n+1) \tag{4}$$

A (4) által adott termelési terv lesz az $(M-1)$-edik szint keresleti adatsora és így tovább, míg az első szinthez el nem érünk. Természetesen az $m < M$ szinteken az

$$f(n) = \frac{S_m + h_m \sum_{r=j+1}^{k} D_r(r-j)}{n+1}$$

kifejezést használjuk, mely mellőzi az újrarendelési lehetőséget.

Hasonló módon, mikor az FH-t alkalmazzuk, amennyiben az M-edik szinten j regenerációs pont, a következő $(j+n+1)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ lesz, ahol n az a legnagyobb nemnegatív egész, melyre

$$\min_{j<t\leq k}\{D_{jk}(t)\} < S_M \qquad (k = j+n+1) \tag{5}$$

Az ML egyszerűségének fenntartása érdekében újrarendelést csak regenerációs pont és termelő periódus között engedünk meg (egy periódust termelő periódusnak nevezünk, ha $X_{1t} > 0$). Legyen $(k-1)$ egy regenerációs periódus, és a periódust követő első termelési periódus a k. Az ML minden termelő egységre (szintre) periódusonként definiál egy koefficienst, mely jelzi, hogy vajon a költségek csökkennek-e, ha a k-adik periódusban indított sorozathoz hozzáfűzzük D_i-t, $i > k$. Ha az i-re definiált összes koefficiens negativ, $(i-1)$ regenerációs pont lesz, és az eljárás elölről kezdődik.

A használt koefficiensek az alábbiak:

$$u_{ji} = \sum_{r=1}^{j} S_r - C_{i-1} - h_j D_i(i-k), \quad i = k+1, k+2, \ldots, \qquad j \leq \min\{j^0, M\} \quad (6)$$

$$u_{ji} = u_{j-1,i} + S_j - (h_j - h_{j-1}) D_i (i - p_j), \qquad j = j^0+1, \ldots, M; \quad i = k+2, \ldots \quad (7)$$

és

$$u_{M+1,i} = \begin{cases} \sum_{r=1}^{M} S_r - C_{i-1} - \pi \sum_{r=k}^{i-1} D_r & \text{ha } j^0 = M+1 \\ -\infty & \text{máskülönben} \end{cases}, \quad i = k+1, \ldots \quad (8)$$

ahol

C_{i-1} = a k és az $(i-1)$ periódusok közötti kumulatív raktározási költség

p_j = azon utolsó periódus indexe, amikor a j-edik szinten a termelés szintje pozitiv

j^0 = utolsó szint (termelő egység), melyre $p_j = k$, vagy $M+1$.

A (6) koefficiens az újrarendelésből eredő esetleges megtakarításokat méri; a 4. ábra mutatja ezt az esetet.

Így az ML egy partikuláris $(k-1)$ regenerációs pontra az alábbi:

1. lépés: Legyen $\hat{k} = k$, $A = \{1, 2, \ldots, M+1\}$, $i = \hat{k}+1$; $C_k = 0$; $j^0 = M+1$; $p_j = \hat{k}$ minden j-re.

2. lépés: Számoljuk ki az $u_{ji}, j = 1, \ldots, M+1$ értékeket (6)-(8) felhasználásával. Ha $u_{ji} < 0$ minden j-re, akkor a 4. lépés következik, máskülönben tovább a 3. lépésre.

3. lépés: Definiálja j^*-t az $u_{j^*,i} = \max_j \{u_{ji}\}$ előírás, és aktualizáljuk a szóbanforgó termelési terv indexeit, valamint p_j-t és $\hat{k}$-t. Ha $j^* \in A$ akkor $j^0 = j^*$ és $A = \{1, 2, \ldots, j^0\}$; máskülönben j^0 és A változatlanul marad. Legyen $i = i+1$ és térjünk vissza a 2. lépéshez ha $i < T+1$, másként Stop.

4. lépés: Ha $i \neq T$ akkor $(i-1)$ új regenerációs pont lesz, így $k = i$ lesz, és visszatérünk az 1. lépéshez. Ha $i = T$, akkor T termelő periódus lesz és Stop.

4. ábra: Egy újrarendelési eset, melyet az ML figyelembe vesz

$$\begin{tikzcd}
 & & {} \arrow[d] \\
 & & (0) \arrow[d] \\
(1,k) & (1,k+1) & (1,k+2) \arrow[d] \\
(2,k) & (2,k+1) & (2,k+2) \arrow[d] \\
(3,k) \arrow[d] & (3,k+1) \arrow[l] \arrow[d] & (3,k+2) \arrow[l] \arrow[d] \\
D_k & D_{k+1} & D_{k+2}
\end{tikzcd}$$

5. ábra: Az ML által nem tekintett újrarendelési eset

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[d] & & \\
(0) \arrow[d] & & \\
(1,k) \arrow[d] & (1,k+1) & (1,k+2) \\
(2,k) \arrow[d] \arrow[r] & (2,k+1) \arrow[r] & (2,k+2) \arrow[d] \\
(3,k) \arrow[d] & (3,k+1) \arrow[d] & (3,k+2) \arrow[l] \arrow[d] \\
D_k & D_{k+1} & D_{k+2}
\end{tikzcd}$$

6. ábra: Egy, a (6) által értékelt eset ($j^0 = 2$, $i = k + 2$, $j = 1$)

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & \downarrow & & & & \\
 & & (0) & & & & \\
 & & \downarrow\Downarrow & & & & \\
(1,k) & & (1,\hat{k}) & \Longrightarrow & (1,\hat{k}+1) & \Longrightarrow & (1,\hat{k}+2) \\
 & & \downarrow & & & & \Downarrow \\
(2,k) & & (2,\hat{k}) & \longrightarrow & (2,\hat{k}+1) & & (2,\hat{k}+2) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \Downarrow \\
(3,k) & \longleftarrow & (3,\hat{k}) & & (3,\hat{k}+1) & & (3,\hat{k}+2) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \Downarrow \\
D_k & & D_{\hat{k}} & & D_{\hat{k}+1} & & D_{\hat{k}+2}
\end{array}
$$

7. ábra: Egy, a (7) által értékelt alternativa ($j^0 = 1$, $i = k + 2$, $j = 2$)

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & \downarrow & & & & \\
 & & (0) & & & & \\
 & & \downarrow\Downarrow & & & & \\
(1,k) & & (1,\hat{k}) & \overset{\Longrightarrow}{\longrightarrow} & (1,\hat{k}+1) & & (1,\hat{k}+2) \\
 & & \downarrow & & \downarrow\Downarrow & & \\
(2,k) & & (2,\hat{k}) & & (2,\hat{k}+1) & \Longrightarrow & (2,\hat{k}+2) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \Downarrow \\
(3,k) & \longleftarrow & (3,\hat{k}) & & (3,\hat{k}+1) & & (3,\hat{k}+2) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \Downarrow \\
D_k & & D_{\hat{k}} & & D_{\hat{k}+1} & & D_{\hat{k}+2}
\end{array}
$$

Fontos megemlíteni, hogy a sorozatnagyság heurisztikák a kereslet pozitivitását feltételezik az első periódusban. Azonban az M-től kisebb szinteken a keresleti adatsor mindig a következő szint termelési terve, mellyel kapcsolatban előfordulhat, hogy az zéró az első periódusban. Ezért az

$$X_{mt} = 0, \quad m \in \langle 1, M-1 \rangle; \quad t \in \langle 0, t^* - 1 \rangle$$

ahol t^* az a legkisebb index melyre $X_{Mt^*} > 0$, előírás szükséges.

A teszt példákban az inputokat a következők szerint generáltuk: a keresleti adatsorokat a $[0, 200]$ intervallumból választottuk véletlenszerűen egyenletes eloszlást feltételezve; hasonló módon jártunk el a fix költségek és a raktározási költségek esetében, amikoris a fix költségeket a $\{150, 300, 600, 1500\}$, a lépcsős raktározási költségeket a $\{0.1, 0.5, 1.0, 2.0\}$ halmazból választottuk. (Az m-edik szint lépcsős raktározási költsége $= h_m - h_{m-1}$.) A $h_1 = 1$ értékadással költségválasztási eljárásunk – az összehasonlíthatóság céljából – megegyezik a BLACKBURN–MILLEN (1982) tanulmányban definiált költségstruktúrákkal. Az újrarendelési fajlagos költségre mindig $\pi = h_M + 0.5$.

Valamennyi partikuláris M és T értékre 400 feladatot oldottunk meg, és mindegyik feladatot mindegyik heurisztikával. Az eredményeket az 1. tábla foglalja össze.

1. táblázat: Az (M, T) párokhoz tartozó átlagos %-os veszteség az optimalitásban

Eljárás	(2,3)	(2,5)	(2,10)	(3,3)	(3,5)	(3,10)	(5,3)	(5,5)	(5,7)	(5,10)
WW	2	3	3	4	4	7	8	15	17	19
SM	4	9	7	7	13	14	13	26	24	26
FH	3	7	6	6	9	10	11	20	22	23
ML	8	12	8	8	9	9	12	15	17	12

Az 1. tábla alapján megállapítható, hogy nagyobb méretű problémák megoldásához az ML javasolható, és az ML teljesítményét csak kisméretű feladatok esetében múlják felül más heurisztikák; mindemellett az ML számítási ideje igen kedvező. A legnagyobb méretű feladat esetében egy feladat futási ideje IBM XT-n kevesebb, mint egy másodperc, ha az SM, FH, vagy ML módszereket használjuk, 3 másodpercet igényel a WW, míg 21 másodpercet az optimális eljárás. A szekvenciális eljárások közül viszont a WW-nek van a legjobb teljesítménye, de az FH nem rosszabb lényegesen. Érdekes adalék, hogy – compilert nem használva – a WW időfogyasztása mintegy ötször nagyobb, mint az FH-é. Mindezen ismeret a később kifejlesztendő heurisztikánk alakításánál játszik fontos szerepet. Egy heurisztika értékelésénél a legrosszabb eredmény sem lehet közömbös: ezen feljegyzéseket a 2. tábla tartalmazza. Az első és második táblában közölt eredmények szoros hasonlóságot mutatnak.

2. táblázat: Az (M,T) párokhoz tartozó legnagyobb optimalitási veszteség

Eljárás	$(2,3)$	$(2,5)$	$(2,7)$	$(2,10)$	$(3,3)$	$(3,5)$	$(3,7)$	$(3,10)$	$(5,3)$	$(5,5)$	$(5,10)$
WW	29	35	28	22	37	54	37	34	56	55	54
SM	47	54	50	68	57	58	59	47	78	83	82
FH	31	40	40	38	57	73	41	34	68	60	69
ML	61	65	62	60	52	50	49	42	52	50	52

Habár az FH módszerrel kapcsolatban nem ismeretesek numerikus eredmények még az újrarendelés lehetőségének mellőzésével sem, megállapíthatjuk, hogy a heurisztikák lényegesen rosszabb viselkedést mutatnak az esetenkénti negatív raktárkészlet megengedésével (újrarendelés esete), mint anélkül. Azonban, a már említett BLACKBURN–MILLEN (1982) tanulmány alapján ismert, hogy a szekvenciális heurisztikák teljesítménye lényegesen növekszik, ha a szintek közötti összefüggést figyelembe véve az input költségadatokat megfelelően módosítjuk. Hogy miként kell az input adatokat módosítani újrarendelési lehetőség figyelembe vételével, a CHAND – VŐRÖS (1989) tanulmány ad betekintést ehhez.

A következő fejezet célja, hogy kidolgozzon olyan egyszerű – tehát a gyakorlati követelménynek számítástechnikailag eleget tevő – heurisztikát, mely jobb eredmények elérésére alkalmas, mint az irodalomból jól ismert megközelítések egyszerű adaptációja.

4. Egy termodinamikusan motivált heurisztika

A szekvenciális heurisztikák javítása céljából egy termodinamikusan motivált heurisztikát (TH-t) fejlesztünk ki és tesztelünk le. Ez a megközelítés elsősorban a kombinatorikus optimalizálási problémák megoldásánál járt sikerrel (lásd BURKARD és RENDL (1983), CHAMS és társai (1987)), s ezen eredmények bátorítottak az adaptáció elkészítésére.

A termodinamikusan motivált heurisztika alapötlete, hogy egy lehetséges megoldásból véletlenszerűen egy új lehetséges megoldást generál és összehasonlítja a két megoldás célfüggvényértékét. Ha az új megoldás célfüggvényértéke rosszabb, nem biztos, hogy eldobjuk ezen megoldást; ez egy újabb véletlen számtól függ. Minél több probálgatást végzünk, annál nagyobb a valószínűsége, hogy jó megoldást kapunk. Ezért a termodinamikus elképzelés (mely egyébként a fizika hőkiegyenlítődési elvéből fakad) akkor számíthat elsősorban sikerre, ha az új lehetséges megoldások generálását, valamint a hozzátartozó célfüggvényérték kiszámítását igen rövid idő alatt el lehet végezni.

Ezen gondolatokat a többszintű dinamikus sorozatnagyság problémájához adaptálva, a TH-t az alábbi módon definiáljuk:

1. lépés: Legyen $u = U$ és $\alpha = 0$, ahol U pozitiv. Legyen $0 < A < 1$, és legyen R pozitív egész. Oldjuk meg a többszintű problémát FH-val és legyen a megoldás X_{mt}-vel, illetve I_{mt}-vel reprezentálva, míg a terv költsége z_x-szel.

2. lépés: Legyen $e = 1$

3. *lépés:* Generáljunk két pozitív egész számot: m-t és t-t, $m \in \langle 1, M \rangle$, $t \in \langle 1, T-1 \rangle$. Ha $m = M$, akkor a 7. lépés következik.

4. lépés: Ha $X_{m+1,t+1} = 0$ vagy $X_{mj} = 0$ minden $j \in \langle 1, t \rangle$, akkor a 11. lépés következik.

5. lépés: Változtassuk meg a termelési tervet. Az új tervet jelölje Y, melyet az alábbiak szerint definiálunk: $Y_{jl} = X_{jl}$ minden $j \in \langle m, M \rangle$ – és $l \in \langle 1, T \rangle$- re, valamint $Y_{m,t+1} = I_{mt}$ és $Y_{mk} = X_{mk} - I_{mt}$, ahol k a $(t+1)$ előtti utolsó olyan periódus, melyre $X_{mk} > 0$, ha $X_{m,t+1} = 0$. Ha $X_{m,t+1} > 0$, akkor $Y_{m,t+1} = 0$ és $Y_{mk} = X_{mk} + X_{m,t+1}$. Ha $m = 1$, akkor a 9. lépés következik.

6. lépés: Az m-edik szint új tervének felhasználásával adjunk termelési tervet az $1, \ldots, m-1$ szintek számára FH módszerrel, majd a 9. lépés következik.

7. lépés: Ha $D_{t+1} = 0$, akkor a 11. lépés következik.

8. lépés: Legyen a a t előtti utolsó regenerációs pont, és legyen b a t utáni utolsó. Ha t regenerációs pont, módosítsuk az M-edik szint tervét úgy, hogy a és b legyenek szomszédos regenerációs pontok, és keressük meg a termelő periódust a és b között. Ha t nem regenációs pont, legyenek a és t, illetve t és b szomszédos regenerációs pontok, és mindkét intervallumban keressük meg a termelő periódusokat. Az M-edik szint termelési tervét használva adjuk meg az első $M-1$ szint termelési tervét FH segítségével. Jelölje Y_{jk} az új termelési tervet.

9. lépés: Jelölje z_y az új terv megvalósításának költségét. Ha $z_x > z_y$ akkor a 10. lépés következik. Ha nem, generáljuk a v véletlenszámot a $(0, 1)$ intervallumon egyenletes eloszlással. Ha $v < \exp((z_y - z_x)/u)$, akkor a 10. lépés következik, egyébként pedig a 11.

10. lépés: Legyen $X_{ij} = Y_{ij}$ minden i-re és j-re, legyen $z_x = z_y$ és $\alpha = 1$.

11. lépés: $e = e + 1$. Ha $e \leq R$, akkor a 3. lépés következik.

12. lépés: Ha $\alpha = 1$ akkor $\alpha = 0, u = uA$, és a 2. lépés következik.

13. lépés: Stop.

Az eljárás véges számú lépés után ér véget, mivel minden próba ciklus után amennyiben z_x értéke változik, az u paraméter értéke csökken. Így annak a valószínűsége, hogy egy rosszabb megoldást fogadunk el mint az aktuális célérték, csökken. A heurisztikával kapcsolatos általános tapasztalatoknak megfelelően, a mi számítási eredményeinkből is látható lesz, hogy a heurisztika teljesítménye nagymértékben függ R értékétől, de természetesen A értéke sem lehet közömbös. A TH tesztelése során öt költségstruktúrát generáltunk és mindegyiken belül húsz keresleti adatsort (a korábban definiált halmazokból). A számítási eredményeket a 3. tábla foglalja össze.

3. táblázat: Az (M,T) párokhoz tartozó átlagos %-os veszteség az optimalitásban

Eljárás	(2,3)	(2,5)	(2,7)	(2,10)	(3,3)	(3,5)	(3,7)	(3,10)	(5,3)	(5,5)	(5,10)
FH	3	14	12	7	12	11	13	11	6	21	19
TH	1	7	7	3	2	4	5	3	2	8	5

A 3. tábla adataiból kiolvasható, hogy TH sikeresen alkalmazható a többszintű sorozatnagyság meghatározásában még akkor is, amikor az újrarendelés lehetőségét megengedjük. Ez az eredmény azért fontos, mert az eddig legsikeresebbnek tekintett (lényegileg a korlátozás és szétválasztás elvére épülő) algoritmusok (AFENTAKIS és társai (1984), (1986)) is igen bonyolulttá válnak ebben az esetben. Annak ellenére, hogy az FH némileg rosszabb eredményt mutat fel, mint az előző futások során, TH eredményei kedvezőbbek valamennyi heurisztikáétól. Viszont meg kell jegyezni, hogy a TH időfogyasztása kisebb méretű feladatok esetén kedvezőtlenebb, futási ideje hosszabb, mint az optimális megoldást adó dinamikus programozásé. Azonban amikor T értéke nagy (=10) a dinamikus programozási idő harmadát igényli csak átlagosan. A TH előnyei még mutatósabbakká válnak, ha speciális input struktúrákat vizsgálunk: ZANGWILL (1987) egyik legutóbbi munkája segít ezek megkeresésében (összeszerelő üzemre lásd AXSATER és NUTTLE (1986)). ZANGWILL megállapította, hogy szimulált input adatok esetén a szintek 70 – 80%-a általában eliminálható. Ezen elimináló feltételeknek nem eleget téve a következő költségstruktúrát definiáljuk:

-	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$
$h_m =$	1	1.5	2	2.5	3
$S_m =$	1500	600	300	150	100

és $\pi = 3.5$. Ezek után száz keresleti adatsort generáltunk véletlenszerűen egyenletes eloszlás mellett a [0, 100] intervallumból és csak a tízperiódusos problémákat vizsgáltuk. Az eredményeket a 4. tábla foglalja össze.

4. táblázat: Az átlagos és maximális %-os veszteség az optimalitásban

Eljárás			$M=2$		$M=3$		$M=5$	
			átl.	max.	átl.	max.	átl.	max.
SM			23	53	26	62	37	76
TH	$R=MT/2$	$U=10$	9	46	9	28	17	52
		$U=100$	7	32	8	39	17	40
		$U=500$	9	42	9	47	11	52
	$R=MT$	$U=10$	3	35	3	33	15	43
		$U=100$	5	36	2	22	12	36
		$U=500$	3	39	3	41	5	35

A tábla adataiból látható, hogy míg a FH teljesítménye jelentősen csökkent, TH megtartotta figyelemre méltó eredményeit. Az is kiderül, hogy U értékei igen jelentős szerepet játszanak és megfelelően hozzá kell illeszteni a feladat jellegéhez (méret és költségek). U növekedésével természetesen a számítási idő is növekszik, de még $U = 500$ és $R = MT$ választásnál sem haladja meg az optimális megoldást adó algoritmus időfelhasználásának a felét (átlagosan tíz másodperc GWBASIC fordító használatával IBM XT-n).

5. Következtetések

A tanulmányban a többszintű dinamikus sorozatnagyság meghatározásával foglalkoztunk, amikor a késztermékek szintjén az újrarendelés lehetőségét megengedjük. A tanulmányban egy dinamikus programozási eljárást adtunk a probléma megoldására, majd néhány jólismert heurisztikát módosítottunk erre az esetre, és teszteltük őket. Az eredmények a következőkben foglalhatóak össze:

- az újrarendelés lehetőségével számolva az FH, SM, ML, és WW heurisztikák rosszabb teljesítményt nyújtanak, mint mikor a nemnegativitást a készletszintre kikötjük;
- a kifejlesztett, termodinamikusan motivált heurisztika jó eredményeket mutat, használata különösen ajánlott speciális költségstruktúra, valamint nagyméretű feladat esetében.

IRODALOM

1. AFENTAKIS, P., GAVISH, B. and KARMARKAR, U.: Computationally Efficient Optimal Solutions to the Lot-Sizing Problem in Multi-Stage Assembly System, M.Sci., 30(1984), 222 – 239
2. AFENTAKIS, P. and GAVISH, B.: Optimal Lot-Sizing Algorithms for Complex Product Structures, Op. Res. 34(2), (1986) 237–239
3. AXSATER, S. and NUTTLE, H.: Aggregating Items in Multi-Level Lot Sizing, Lecture Notes in Economics and Math. Systems. No. 226, Springer- Verlag, (1986)
4. BLACKBURN, J. and MILLEN, R.: Improved Heuristics for Multi Stage Requirements Planning Systems, M.Sci., 29(1983), 44–56
5. BURKARD, R. E. and RENDL, F.: A Thermodinamically Motivated Simulation Procedure for Combinatorial Optimizational Problems, EJOR, 17(1984), 169–174
6. CHAMS, M., HERTZ, A. and DE WERRA, D.: Some Experiments with Simulated Annealing for Coloring Graphs, EJOR, 32(1987), 260–266

7. CHAND, S.: Rollig Horizon Procedures for the Facilities in Series Inventory Model with Nested Schedules, M.Sci., 29(1983), 237–249

8. CHAND, S. – VÖRÖS, J.: Multi-Stage Lot Sizing Heuristics with Backlogging, Purdue University, Working Paper, 1989

9. GRAVES, S. C.: Multi Stage Lot Sizing: An Iterative Procedure, TIMS Studies in M.Sci. 16(1981), ed. L. B. Schwarz

10. JOHNSON and MONTGOMERY: Operation Research in Production Planning, Scheduling and Inventory Control, John-Wiley, (1974)

11. LAMBRECHT, M. R., VAN DER EECKEN, J. and VAN DER VEKEN, H.: Review of Optimal and Heuristic Methods for a Class of Facilities in Series Dynamic Lot Sizing Problems, TIMS Studies in M.Sci. 16(1981), ed. L. B. Schwarz

12. LOVE, S. F.: A Facilities in Series Inventory Model with Nested Schedules, M.Sci., 18(1972), 327–338

13. SILVER, E. A. and MEAL, H. C.: A Heuristic for Selecting Lot Size Quantities, Production and Inventory Management, 2nd Quarter (1973), 64–74

14. TAHA, H. A. and SKEITH, R. W.: The Economic Lot Sizes in Multi Stage Production Systems, AIIE Transactions, June 1970

15. WAGNER, M. H. and CROWSTON, W. B.: Dynamic Lot Size Models for Multi Stage Assembly Systems, M.Sci., 20.1(1973)

16. WAGNER, M. H. and WHITIN, T.: Dynamic Version of the Economic Lot Size Model, M.Sci., 5(1958), 89–96

17. ZANGWILL, W. I.: Minimum Concave Cost Flows in Certain Networks, M.Sci., 14(1968), 429–450

18. ZANGWILL, W. I.: A Backlogging Model and a Multi-Echelon Model of a Dynamic Economic Lot Size Production System – A Network Approach, M.Sci., 15(1969), 505–527

19. ZANGWILL, W. I.: A Deterministic Multi-Period Production Scheduling Model with Backlogging, M.Sci., 13.1(1966), 105–119

20. ZANGWILL, W. I.: Eliminating Inventory in a Series Facility Production Systems, M.Sci., 33.9(1987), 1150–1164

ABSTRACT

In this paper the multi-stage inventory model is analysed in backlogging case and a dynamic programming procedure is derived for the facilities in series inventory problem. Some heuristics are defined for the backlogging case and it is stated that these well-known heuristics exhibit worse results then in non-backlogging case. Finally a thermodinamically motivated heuristic is defined which shows better performance.