HIDAK LESZABÁSI FOLYAMATOK KÉT ELVILEG KÜLÖNBÖZŐ MODELLJE KÖZÖTT[1]

HARALD DYCKHOFF
Rajna-Vesztfáliai Egyetem, NSZK

Leszabási folyamatok modellezésére két elvi megközelítés létezik: a szokásos és jól ismert modell egy fokozatban, egyidejűleg több vágással, és az úgynevezett "egy-vágásos" modell több fokozatban végrehajtott vágásokkal. Knolmayernek a mérlegegyenletek eliminációjára vonatkozó módszerét felhasználva megmutatjuk, hogy ezek – bizonyos feltételek mellett ekvivalens – különböző megfogalmazások teljes választékának szélsőséges esetei.

1. A két elvileg különböző megközelítés

Mivel leszabási folyamatok modellezésére mindkét elvileg különböző megközelítés jól ismert az irodalomból (pl. [1], [2], [3], [7]), elegendő őket illusztrálni a következő kisméretű példán ([4] 856.o., vö. [1] 1097.o.):

Példa: A raktárban tárolt 9, 6 és 5 egységnyi hosszúságú és hosszegységenként rendre 10, 7 és 6 pénzegység árú anyagot fel kell darabolni oly módon, hogy a 20 db 4 egység , 10 db 3 egység és 20 db 2 egység hosszúságú anyag iránti igényt kielégítsük úgy, hogy a raktárból felhasznált anyagok árösszege minimális legyen.

A feldarabolandó raktári hosszak és a rendelt hosszak halmazát jelöljék az $S = \{9,6,5\}$ és a $D = \{4,3,2\}$ halmazok. A maradék darabokat értéktelen hulladéknak tekintjük, következésképpen csak olyan szabásminták érdekesek számunkra, amelyekben legfeljebb egyetlen 1 egység hosszúságú darab a maradék ("effektív partíciók" [2]). Ezek az 1. táblázatban láthatók kézenfekvő jelöléssel. (Ennek a cikknek a céljaira nem szükséges a "minta" és "partíció" fogalmak [2]-beli megkülönböztetése.)

1. táblázat: A szokásos modell szabásmintái

1. $\langle 9:4+4+1\rangle$	6. $\langle 9:3+2+2+2\rangle$	11. $\langle 6:2+2+2\rangle$
2. $\langle 9:4+3+2\rangle$	7. $\langle 9:2+2+2+2+1\rangle$	12. $\langle 5:4+1\rangle$
3. $\langle 9:4+2+2+1\rangle$	8. $\langle 6:4+2\rangle$	13. $\langle 5:3+2\rangle$
4. $\langle 9:3+3+3\rangle$	9. $\langle 6:3+3\rangle$	14. $\langle 5:2+2+1\rangle$
5. $\langle 9:3+3+2+1\rangle$	10. $\langle 6:3+2+1\rangle$	

[1]Fordította: Varró Zoltán, JPTE Közgazdaságtudományi Kar

Legyen

- v_j a j-edik minta ismétlési tényezője, azaz ennyi darabot vágunk el a j-edik minta szerint;
- x_g a g egység hosszúságú darabok inputja, azaz ennyi g hosszúságú anyagot darabolunk fel;
- y_g a g egység hosszúságú darabok outputja, azaz ennyi g hosszúságú anyag keletkezik a szabásmintáknak nagyobb hosszúságú darabokra való alkalmazása esetén.

Világos, hogy $x_g = 0 \quad g \notin S = \{9,6,5\}$ és $y_g = 0 \quad g \notin \{4,3,2,1\}$ esetén. Hangsúlyozzuk, hogy ez csak az 1. táblázat mintáira érvényes, és nem általában. A szokásos modell, amelyet itt "alternatív számítás"-nak nevezünk, a következőképpen írható:

(1) Alternatív számítás (szokásos modell)

$$C = 10x_9 + 7x_6 + 6x_5 \longrightarrow \min \tag{1a}$$

$$\begin{aligned} x_9 &= v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 + v_7 \\ x_6 &= v_8 + v_9 + v_{10} + v_{11} \\ x_5 &= v_{12} + v_{13} + v_{14} \end{aligned} \tag{1b}$$

$$\begin{aligned} y_4 &= 2v_1 + v_2 + v_3 + v_8 + v_{12} \\ y_3 &= v_2 + 3v_4 + 2v_5 + v_6 + 2v_9 + v_{10} + v_{13} \\ y_2 &= v_2 + 2v_3 + v_5 + 3v_6 + 4v_7 + v_8 + v_{10} + 3v_{11} + v_{13} + 2v_{14} \\ y_1 &= v_1 + v_3 + v_5 + v_7 + v_{10} + v_{12} + v_{14} \end{aligned} \tag{1c}$$

$$y_4 \geq 20, \quad y_3 \geq 10, \quad y_2 \geq 20 \tag{1d}$$

$$v_j \geq 0 \quad \text{és integer}, \quad j = 1, \ldots, 14. \tag{1e}$$

A célfüggvény (1a) mutatja, hogy a felhasznált anyagok árösszegét minimalizáljuk. Az (1b) és (1c) egyenletek rendre az input és output mérlegegyenletek. Az (1d) egyenlőtlenségek rögzítik a 4, 3 és 2 egység hosszúságú darabok iránti keresletéből fakadó alsó korlátokat. Az (1e) feltétel miatt az egyes mintákat csak nemnegatív egész számszor lehet alkalmazni. (Számítási okokból az egészértékűségi kikötést kezdetben gyakran elhagyják, és csak később veszik figyelembe egy kerekítési eljárás beiktatásával.)

A szokásos megközelítés egy szabásmintája egy olyan tevékenységet reprezentál, amellyel egy raktári hosszúságú darabot egyszerre több darabra vágunk – amelyek legtöbbje rendelt hossz – feltételezve, hogy korlátlan számú kést használhatunk az egyfokozatú leszabási folyamatban. Ezzel ellentétben – képzeletben – a másik elvi megközelítés alapja egy többfokozatú leszabási folyamat, amelyben egyetlen késsel korlátlan számú vágást hajthatunk végre, az ún. "egy-vágásokat" [1] (vagy "bináris vágásokat" [6]). Ezek olyan egyszerű struktúrájú tevékenységek, amelyek egy input hosszúságú darabot két output hosszúságú darabra vágnak. (Két- és többdimenziós problémákra történő általánosítást lásd [2]-ben.) Rendszerint csak azok az egy-vágások érdekesek, amelyeknél legfeljebb egyik darab nem rendelt hossz. Ennek a maradék darabnak a hossza nagyobb is lehet mint a rendelt hosszak és így tovább darabolható. Ezért a raktári hosszak mellett más, a legkisebb rendelt hosszúságú darabnál hosszabb darabok is szolgálhatnak inputként egy-vágások számára.

Kisméretű példánkban a lényeges input és output hosszak rendre

$$I = \{9, 7, 6, 5, 4, 3\} \quad \text{és} \quad K = \{7, \ldots, 1\}.$$

A megfelelő egy-vágások listája a 2. táblázatban látható. Mivel az egy-vágások speciális minták, ezért ugyanazokat a szimbólumokat alkalmazhatjuk, mint az előbb, hogy megfogalmazzuk a megfelelő "egy-vágásos modellt", amelyet itt "lépésenkénti számításnak" is nevezünk.

2. táblázat: Lényeges egy-vágások

1. $\langle 9 : 7 + 2 \rangle$	4. $\langle 7 : 5 + 2 \rangle$	7. $\langle 6 : 3 + 3 \rangle$	10. $\langle 4 : 3 + 1 \rangle$
2. $\langle 9 : 6 + 3 \rangle$	5. $\langle 7 : 4 + 3 \rangle$	8. $\langle 5 : 4 + 1 \rangle$	11. $\langle 4 : 2 + 2 \rangle$
3. $\langle 9 : 5 + 4 \rangle$	6. $\langle 6 : 4 + 2 \rangle$	9. $\langle 5 : 3 + 2 \rangle$	12. $\langle 3 : 2 + 1 \rangle$

(2) Lépésenkénti számítás (egy-vágásos modell)

$$C = -10z_9 - 7z_6 - 6z_5 \longrightarrow \min \tag{2a}$$

$$\begin{array}{lll} x_9 = v_1 + v_2 + v_3 & x_7 = v_4 + v_5 & x_6 = v_6 + v_7 \\ x_5 = v_8 + v_9 & x_4 = v_{10} + v_{11} & x_3 = v_{12} \end{array} \tag{2b}$$

$$\begin{array}{ll} y_7 = v_1 & y_6 = v_2 \\ y_5 = v_3 + v_4 & y_4 = v_3 + v_5 + v_6 + v_8 \\ y_3 = v_2 + v_5 + 2v_7 + v_9 + v_{10} & y_2 = v_1 + v_4 + v_6 + v_9 + 2v_{11} + v_{12} \\ y_1 = v_8 + v_{10} + v_{12} & \end{array} \tag{2c}$$

$$\begin{array}{llll} z_9 = -x_9 & z_7 = y_7 - x_7 & z_6 = y_6 - x_6 & z_5 = y_5 - x_5 \\ z_4 = y_4 - x_4 & z_3 = y_3 - x_3 & z_2 = y_2 & z_1 = y_1 \end{array} \tag{2d}$$

$$z_7 = 0, \qquad z_6 \leq 0, \qquad z_5 \leq 0, \qquad z_4 \geq 20, \qquad z_3 \geq 10, \qquad z_2 \geq 20 \tag{2e}$$

$$v_j \geq 0 \quad \text{és integer}, \quad j = 1, \ldots, 12. \tag{2f}$$

A fő különbség a szokásos megközelítéssel szemben abból a tényből adódik, hogy a leszabási folyamat során bizonyos hosszak mind input, mind output hosszként előfordulhatnak. Ez a közbenső hosszak $L = I \cap K = \{7, 6, 5, 4, 3\}$ halmaza. Ezekre a g hosszakra csupán az y_g (bruttó) output és x_g (bruttó) input z_g különbsége, azaz a (2d) egyenletek által definiált nettó output a lényeges. Csak a raktári hosszak nettó inputja, azaz $-z_9, -z_6$ és $-z_5$ jelent költséget ennek a példának a (2a) célfüggvényében. Analóg módon csak a rendelt hosszak nettó outputja, azaz z_4, z_3 és z_2 alkalmas a (2e) keresleti feltételek kielégítésére. Ezek egyenesen következnek a szokásos modellel való összehasonlításból. Alapvető változások a szabásminták különböző definiciójából származnak , amelyből a (2e) alatti újabb három feltétel adódik. Ez annak tulajdonítható, hogy az 1. táblázat nem tartalmaz olyan mintákat, amelyekben 7, 6 és 5 hosszúságú maradék darabok szerepelnek. Következésképpen ahhoz, hogy ekvivalens modelleket kapjunk, ezeket a mintákat is figyelembe kell venni, azaz kibővíteni az 1. táblázatot és az alternatív számításos modellt, vagy korlátozzuk a 7, 6 és 5 közbenső hosszak nettó outputját a lépésenkénti számítást illetően.

2. Más ekvivalens megfogalmazások

A két modell ekvivalens abban az értelemben, hogy ugyanazokat a termelési (vágási) lehetőségeket teszik lehetővé, és ugyanazt a célt követik. Ezen kívül több ekvivalens megfogalmazás létezik. Hogy ezt megmutassuk, az egy-vágásos modellt a bruttó inputra és bruttó outputra vonatkozó x_g és y_g változók eliminálásával egyszerűsítjük. Ez nem változtatja meg a (2a), (2e) és (2f) feltételeket, míg (2b–d) nyolc egyenletté sűrűsödik, amelyek a $g \in G = \{9, 7, 6, \ldots, 1\}$ hosszak input/output mérlegeire vonatkoznak. A v_j ismétlési tényezők indexeit célszerű úgy megváltoztatni, hogy közvetlenül interpretálhatók legyenek. Így például v_{954} a $(9 : 5 + 4)$ minta gyakoriságát írja le, azaz azoknak a 9 egység hosszúságú darabok-nak a számát, amelyeket 5 és 4 hosszúságú darabokra vágunk szét.

(3) Az egy-vágásos modell (2b–d) egyszerűsített mérlegei

$$\begin{aligned}
-z_9 &= v_{972} + v_{963} + v_{954} \\
z_7 &= v_{972} - v_{752} - v_{743} \\
z_6 &= v_{963} - v_{642} - v_{633} \\
z_5 &= v_{954} + v_{752} - v_{541} - v_{532} \\
z_4 &= v_{954} + v_{743} + v_{642} + v_{541} - v_{431} - v_{422} \\
z_3 &= v_{963} + v_{743} + 2v_{633} + v_{532} + v_{431} - v_{321} \\
z_2 &= v_{972} + v_{752} + v_{642} + v_{532} + 2v_{422} + v_{321} \\
z_1 &= v_{541} + v_{431} + v_{321}
\end{aligned}$$

Mivel (2e)-ben $z_7 = 0$, ezért a 9 és 2 hosszak mérlegegyenleteiben elvégezhetjük a $v_{972} = v_{752} + v_{743}$ helyettesítést. Ezáltal a v_{752} és v_{743} szimbólumok új jelentést nyernek. Ezek már nem egy-vágásokat írnak le, hanem "két-vágásokat", azaz összetettebb szabásmintákat. Ezért helyettük két új szimbólumot vezetünk be, mégpedig $v_{9522} := v_{752}$ és $v_{9432} := v_{743}$, és ezáltal egy új, de ekvivalens megfogalmazáshoz jutunk.

(4) A 7 hosszúságot nem tartalmazó transzformált mérlegegyenletek

$$
\begin{aligned}
-z_9 &= v_{963} + v_{954} + v_{9522} + v_{9432} \\
z_6 &= v_{963} - v_{642} - v_{633} \\
z_5 &= v_{954} + v_{9522} - v_{541} - v_{532} \\
z_4 &= v_{954} + v_{9432} + v_{642} + v_{541} - v_{431} - v_{422} \\
z_3 &= v_{963} + v_{9432} + 2v_{633} + v_{532} + v_{431} - v_{321} \\
z_2 &= 2v_{9522} + v_{9432} + v_{642} + v_{532} + 2v_{422} + v_{321} \\
z_1 &= v_{541} + v_{431} + v_{321}
\end{aligned}
$$

Az egyenletek és a változók száma az új rendszerben eggyel csökkent. Eltekintve a z_g változó nettó outputra vonatkozó triviális helyettesítésétől a mérlegegyenletek változók helyettesítésével történő további transzformációja nem látszik lehetségesnek. Mégis alkalmazhatjuk Knolmayernek [5] lineáris programozási feladatok mérlegfeltételeinek – azaz olyan egyenleteinek, amelynek a jobboldala zéró – kiküszöbölésére vonatkozó módszerét. A 7 hosszúságra vonatkozó mérlegfeltétel kiküszöbölése ezzel a módszerrel ugyanazt az eredményt adja, mint fent. Továbbá gyümölcsözően alkalmazható a

$$s_6 + v_{963} - v_{642} - v_{633} = 0$$

mérlegfeltétel kiküszöbölésére, amely megkapható az s_6 eltérésváltozó bevezetésével, amelyre (2e) miatt $s_6 = -z_6 \geq 0$. Knolmayer módszere megköveteli, hogy minden pozitív előjelű nemnegatív változót a mérlegfeltételben kombináljunk minden negatív előjelű nemnegatív változóval abból a célból, hogy az új (kombinált) tevékenységeket definiáljuk. Ebben az esetben ez a $v_{6.642}, v_{6.633}, v_{963.642}, v_{963.633}$ új változókhoz vezet, amelyek kapcsolata a régi négy változóval a következő:

$$
\begin{aligned}
s_6 &:= v_{6.642} + v_{6.633} & \qquad v_{642} &:= v_{6.642} + v_{963.642} \\
v_{963} &:= v_{963.642} + v_{963.633} & \qquad v_{633} &:= v_{6.633} + v_{963.633}
\end{aligned}
$$

Behelyettesítve a (4) mérlegegyenletekbe azt kapjuk, hogy

$$
\begin{aligned}
-z_9 &= (v_{963.642} + v_{9432}) + v_{963.633} + v_{954} + v_{9522} \\
-z_6 &= v_{6.642} + v_{6.633} \\
z_5 &= v_{954} + v_{9522} - v_{541} - v_{532} \\
z_4 &= (v_{963.642} + v_{9432}) + v_{954} + v_{6.642} + v_{541} - v_{431} - v_{422} \\
z_3 &= (v_{963.642} + v_{9432}) + 3v_{963.633} + 2v_{633} + v_{532} + v_{431} - v_{321} \\
z_2 &= (v_{963.642} + v_{9432}) + 2v_{9522} + v_{6.642} + v_{532} + 2v_{422} + v_{321} \\
z_1 &= v_{541} + v_{431} + v_{321}
\end{aligned}
$$

Látható, hogy a $v_{963.642}$ és v_{9432} változók lineárisan függők, tehát közülük egyik törölhető. Továbbá az ismétlési tényezők együtthatóinak interpretációja a következő új definiciókhoz vezet:

$$v_{9333} := v_{963.633}, \qquad v_{642} := v_{6.642}, \qquad v_{633} := v_{6.633}$$

és így a mérlegegyenletek következő új rendszerét kapjuk:

(5) A 7 és 6 közbülső hosszakat nem tartalmazó transzformált mérlegegyenletek

$$
\begin{aligned}
-z_9 &= v_{954} + v_{9522} + v_{9432} + v_{9333} \\
-z_6 &= v_{642} + v_{633} \\
z_5 &= v_{954} + v_{9522} - v_{541} - v_{532} \\
z_4 &= v_{954} + v_{9432} + v_{642} + v_{541} - v_{431} - v_{422} \\
z_3 &= v_{9432} + 3v_{9333} + 2v_{633} + v_{532} + v_{431} - v_{321} \\
z_2 &= 2v_{9522} + v_{9432} + v_{642} + v_{532} + 2v_{422} + v_{321} \\
z_1 &= v_{541} + v_{431} + v_{321}
\end{aligned}
$$

A (2.a) célfüggvénnyel, valamint a (2e) és (2f) feltételekkel ez a leszabási feladat egy új modellje, amely ekvivalens az előzőkben leírt másikakkal. Lényeges, hogy Knolmayer módszere megőrzi a változókra vonatkozó nemnegativitási és egészértékűségi feltételeket. Az ismétlési tényezők nemnegativitása következtében a (2e)-beli $z_6 \leq 0$ feltétel most a megfelelő mérlegegyenletből következik. Ez $z_5 \leq 0$-ra nem érvényes. Ugyanúgy folytathatjuk, mint az előbb, bevezetjük az $s_5 = -z_5$ eltérésváltozót és Knolmayer módszerével elimináljük a megfelelő

$$s_5 + v_{954} + v_{9522} - v_{541} - v_{532} = 0$$

mérlegegyenletet. Az új változók $v_{5.541}, v_{5.532}, v_{954.541}, v_{954.532}, v_{9522.541}$ és $v_{9522.532}$, amelyek az alábbi kapcsolatban vannak a régiekkel:

$$
\begin{aligned}
s_5 &:= v_{5.541} + v_{5.532} & v_{541} &:= v_{5.541} + v_{954.541} + v_{9522.541} \\
v_{954} &:= v_{954.541} + v_{954.532} & v_{532} &:= v_{5.532} + v_{954.532} + v_{9522.532} \\
v_{9522} &:= v_{9522.541} + v_{9522.532}
\end{aligned}
$$

Behelyettesitve az (5) mérlegegyenletekbe, majd törölve a $v_{954.532}$ változót v_{9432}-vel való lineáris függősége miatt és bevezetve a

$$v_{9441} := v_{954.541}, \quad v_{94221} := v_{9522.541}, \quad v_{93222} := v_{9522.532},$$
$$v_{541} := v_{5.541}, \quad v_{532} := v_{5.532}$$

jelöléseket a következő ekvivalens modellhez jutunk:

(6) A 7, 6 és 5 közbülső hosszakat nem tartalmazó transzformált mérlegegyeneletek

$$\begin{aligned}
-z_9 &= v_{9441} + v_{9432} + v_{94221} + v_{9333} + v_{93222} \\
-z_6 &= v_{642} + v_{633} \\
-z_5 &= v_{541} + v_{532} \\
z_4 &= 2v_{9441} + v_{9432} + v_{94221} + v_{642} + v_{541} - v_{431} - v_{422} \\
z_3 &= v_{9432} + 3v_{9333} + v_{93222} + 2v_{633} + v_{532} + v_{431} - v_{321} \\
z_2 &= v_{9432} + 2v_{94221} + 3v_{93222} + v_{642} + v_{532} + 2v_{422} + v_{321} \\
z_1 &= v_{9441} + v_{94221} + v_{541} + v_{431} + v_{321}
\end{aligned}$$

Már csak két közbülső hossz maradt, a 4 és a 3. A következő eliminációs lépésben a 4-et választjuk, és felírjuk a

$$2v_{9441} + v_{9432} + v_{94221} + v_{642} + v_{541} - v_{431} - v_{422} - z_4 = 0$$

mérlegegyenletet, amelyben minden változó nemnegatív (2f) miatt, és mivel $z_4 \geq 20$ (2e)-ben. Ha bevezetjük az 5×3 új változót az 5+3=8 régi helyett a

$$\begin{aligned}
v_{9441} &:= v_{9441.431} + v_{9441.422} + v_{9441.4} \\
v_{9432} &:= v_{9432.431} + v_{9432.422} + v_{9432.4} \\
v_{94221} &:= v_{94221.431} + v_{94221.432} + v_{94221.4} \\
v_{642} &:= v_{642.431} + v_{642.422} + v_{642.4} \\
v_{541} &:= v_{541.431} + v_{541.422} + v_{541.4} \\
v_{431} &:= 2v_{9441.431} + v_{9432.431} + v_{94221.431} + v_{642.431} + v_{541.431} \\
v_{422} &:= 2v_{9441.422} + v_{9432.422} + v_{94221.422} + v_{642.422} + v_{541.422} \\
z_4 &:= 2v_{9441.4} + v_{9432.4} + v_{94221.4} + v_{642.4} + v_{541.4}
\end{aligned}$$

egyenlőségekkel, akkor transzformálhatjuk a (6) mérlegegyenleteket. Az új egyenletek jobban olvashatók az alábbi helyettesítések után:

$$v_{9441} := v_{9441.4}, \quad v_{9432} := v_{9432.4}, \quad v_{94221} := v_{94221.4}$$
$$v_{642} := v_{642.4}, \quad v_{541} := v_{541.4}$$
$$v_{93321} := v_{9432.431}, \quad v_{93222} := v_{9432.422} + v_{93222}$$
$$v_{922221} := v_{9441.422} + v_{94221.422}$$
$$v_{6321} := v_{642.431}, \quad v_{6222} := v_{642.422}, \quad v_{5221} := v_{541.422}$$
$$v_{933111} := v_{9441.431}, \quad v_{932211} := v_{94221.431}, \quad v_{5311} := v_{541.431}$$

(7) A 7, 6, 5 és 4 közbülső hosszakat nem tartalmazó transzformált mérlegegyenletek

$$
\begin{aligned}
-z_9 &= v_{9441} + v_{9432} + v_{94221} + v_{9333} + v_{93321} + v_{93222} + v_{922221} \\
&\quad (+v_{933111} + v_{932211}) \\
-z_6 &= v_{642} + v_{633} + v_{6321} + v_{6222} \\
-z_5 &= v_{541} + v_{532} + v_{5221}\,(+v_{5311}) \\
z_4 &= 2v_{9441} + v_{9432} + v_{94221} + v_{642} + v_{541} \\
z_3 &= v_{9432} + 3v_{9333} + 2v_{93321} + v_{93222} + 2v_{633} + v_{6321} + v_{532} - v_{321} \\
&\quad (+2v_{933111} + v_{932211} + v_{5311}) \\
z_2 &= v_{9432} + 2v_{94221} + v_{93321} + 3v_{93222} + 4v_{922221} + v_{642} + v_{6321} + 3v_{6222} + \\
&\quad v_{532} + 2v_{5221} + v_{321}\,(+2v_{93221}) \\
z_1 &= v_{9441} + v_{94221} + v_{93321} + v_{922221} + v_{6321} + v_{541} + v_{5221} + v_{321} \\
&\quad (+3v_{933111} + 2v_{932211} + 2v_{5311})
\end{aligned}
$$

A $\langle 9:3+3+1+1+1\rangle, \langle 9:3+2+2+1+1\rangle$ és $\langle 5:3+1+1\rangle$ szabásminták nem hatékonyak, mivel egynél több 1 hosszúságú maradék hosszat eredményeznek, ami szükségtelen hulladékot jelent. Ezért ezek zárójelben vannak. A (7) modellben egyedül a 3 közbülső hossz szerepel. Ha a megfelelő mérlegfeltételt az előzőkhöz hasonlóan elimináljuk (tekintetbe véve, hogy $z_3 \geq 0$), akkor az utolsó ekvivalens megfogalmazáshoz jutunk, amelyben már nincsenek közbülső hosszak.

(8) Közbülső hosszt nem tartalmazó transzformált mérlegegyenletek

$$
\begin{aligned}
x_9 &:= & z_9 &= v_{9441} + v_{9432} + v_{94221} + v_{9333} + v_{93321} + v_{93222} + v_{922221} + \\
&&&\quad (v_{933111} + v_{932211} + v_{9222111} + v_{92211111}) \\
x_6 &:= & -z_6 &= v_{642} + v_{633} + v_{6321} + v_{6222}\,(+v_{62211}) \\
x_5 &:= & -z_5 &= v_{541} + v_{532} + v_{5221}\,(+v_{5311} + v_{52111}) \\
y_4 &:= & z_4 &= 2v_{9441} + v_{9432} + v_{94221} + v_{642} + v_{541} \\
y_3 &:= & z_3 &= v_{9432} + 3v_{9333} + 2v_{93321} + 2v_{93222} + 2v_{633} + v_{6321} + v_{532} \\
&&&\quad (+2v_{933111} + v_{932211} + v_{5311} \\
y_2 &:= & z_2 &= v_{9432} + 2v_{94221} + v_{93321} + 3v_{93222} + 4v_{922221} + v_{642} + \\
&&&\quad v_{6321} + 3v_{6222} + v_{532} + 2v_{5221} + \\
&&&\quad (2v_{93221} + 3v_{9222111} + 2v_{92211111} + 2v_{62211} + v_{52111}) \\
y_1 &:= & z_1 &= v_{9441} + v_{94221} + v_{93321} + v_{922221} + v_{6321} + v_{541} + v_{5221} + \\
&&&\quad (3v_{933111} + 2v_{932211} + 3v_{9222111} + 5v_{92211111} + 2v_{62211} + \\
&&&\quad 2v_{5311} + 3v_{52111})
\end{aligned}
$$

Mivel a zárójelben szereplő ismétlési tényezők megfelelnek a nem effektív szabásmintáknak, ezért a mérlegegyenleteknek ez megfogalmazása ekvivalens a szokásos Alternatív számítás (1b–c) egyenleteivel a hatékony vágás tekintetében. Az egyenletek azonosak, ha a nem hatékony mintákat elhagyjuk.

3. Következtetések

A példa azt illusztrálja, hogy az egy vágásos modellek ("Lépésenkénti számítás") hogyan transzformálhatók a megfelelő több vágásos modellbe a közbülső (azaz inputként és outputként is előforduló) hosszak lépésről-lépésre történő eliminációjával, míg el nem érjük a közbülső hosszak nélküli szokásos megfogalmazást ("Alternatív számítás"). Mindezek a modellek, azaz mind a két szélsőséges megfogalmazás és a közbülsők is ekvivalensek a leírt termelési lehetőségek tekintetében. A nem hatékony minták elhagyása a hatékony termelési lehetőségeket nem befolyásolja [2]. Továbbá, a transzformációs folyamat felszínre hozza mindkét elvi megközelítés néhány implicit feltételezését, főképpen azokat, amelyek nem rendelt hosszúságú maradék darabok. Mivel Knolmayer [5] módszere bármely mérlegegyeneleteket tartalmazó LP feladatra alkalmazható, a fenti feltételezés általában teljesül, még több dimenziós leszabási feladatra is.

IRODALOM

1. DYCKHOFF, H. (1981), A new linear programming approach to the cutting stock problem; in: Operation Research 29, pp. 1092–1104.
2. DYCKHOFF, H. (1988), Production theoretic foundation of cutting and related processes; in: G. Fandel, H. Dyckhoff, J. Reese (eds.), Essays on Production Theory and Management, Springer, Berlin et al. (to appear).
3. DYCKHOFF, H. – H. GERLING (1988), Trim loss and inventory planning in a small textile firm; in: G. Fandel, H. Dyckhoff, J. Reese (eds.), Essays on Production Theory and Management, Springer, Berlin et al. (to appear).
4. GILMORE, P. C. – R. E. GOMORY (1961), A linear programming approach to the cutting stock problem; in: Operation Research 9, pp. 849–859.
5. KNOLMAYER, G. (1981), Computational experiments in the formulation of linear product-mix and non-convex production-investment models; in: Computers & Operations Research 9, pp. 207–219.
6. RAO, M. R. (1976), On the cutting stock problem; in: Journal of the Computer Society of India 7, pp. 35–39.
7. STADTLER, H. (1988), A comparison of two optimization procedures for 1-1 1/2 - dimensional cutting stock problems; in: OR Spektrum 10 (to appear).

ABSTRACT

There exist two principal approaches for modelling cutting stock processes: the usual and well-known model with multicuts in single-stage cutting and the socalled "one-cut

model" with multi-stage cutting. Using a method of Knolmayer for the elimination of balance equations it is shown that both are the extremes of a whole variety of different formulations which are equivalent under certain conditions.