

ELŐSZÓ

A termelés menedzsment a termelési folyamatot érintő elemek racionális irányításával foglalkozik, a nyersanyagok beszerzésétől kezdve, egészen a késztermékeknek a fogyasztókhoz történő juttatásáig. Célként azt kívánjuk, hogy a késztermékek a kívánt időben, mennyiségben és minőségben a megrendelőkhoz jussanak, a lehető leghatékonyabb módon. Erre a folyamatra a vállalat szakmai vezetésének képessége, termelő berendezéseinek kapacitása, készletezési rendszere, a szállítási, információs rendszere, a munkaerő-állománya gyakorolja a legnagyobb hatást. Vagyis, a termelés menedzsmenthez igen sok témakör tartozik, tervezési aspektusból átfogja a stratégiai, taktikai és operatív szintet, módszertani szempontból pedig az operációkutatás szinte valamennyi ágát.

A menedzsmenttudományoknak a termelés menedzsment valószínűleg az egyik legfejlődőképebb ága. A rendszeresen megtartott konferenciák, műhelyviták, az alkalmanként rendezett szemináriumok (Budapest, Igls, Mannheim), a számos publikáció jól bizonyítja mindezt. Bár műhelyvitánk nem akar és nem tud riválisa lenni ezen színvonalas rendezvényeknek, mégis reméljük, hogy a Janus Pannonius Tudományegyetem Közgazdaságtudományi karán 1988. szeptember 6–9 között megtartott szeminárium jellegénél fogva lehetőséget kínált a színvonalas munkára, és hozzátett valamit a termelés menedzsment egy-két olyan érdekes részterületéhez, mint beruházások tervezése, egy- és többszintű dinamikus sorozatnagyság-problémák, termelésstervezés és -ütemezés és anyaggazdálkodás. Emellett a szeminárium egy másik célja, hogy bátorítsa a mikroorientált témákat a makro által jelentősen dominált hazai közgazdasági kutatásokban, és ajánljon témákat a hazánkban most beinduló menedzszerképzés számára.

A szeminárium előtt a résztvevők elküldték dolgozataikat, melyeket megcserélünk egymás között, így a szemináriumon elhangzott előadásokkal együtt, jó lehetőség nyílt a vitára. Az elhangzott előadások az alábbiak voltak:

Sven Axsater (Luleai Egyetem, Svédország): Anyagszükséglet-tervezési versus Kanban (JIT) rendszerek

Martin Boeselt (Jénai Egyetem, NSZK): Minőségellenőrzés egy üvegyárban

Valerie Belton (Strathclyde Egyetem, Skócia) és **Stephen Vickers**: A többcélú döntéshozás vizuális interaktív módszerei

Danyi Pál és **Gyetzván Ferenc** (JPTE): A többcélú hozzárendelési feladat szuboptimális megoldásairól

Harald Dyckhoff (Rajna-Vesztfáliai Egyetem, NSZK): Hidak a leszábási folyamatok két, elvileg különböző modellje között

József Dzierchciarz (Oskar Lange Közgazdasági Akadémia, Lengyelország): Változó és valószínűség koefficiensű modellek longitudinális adatokra

- Hans Eidinger** (Rostocki Egyetem, NDK): A Warnow-83 modell közgazdasági értékelése
- Tony Flowerdew** (Kenti Egyetem, Anglia): Termelési információk közgazdaságtana
- Ewa Konarzewska-Gubała** (Oskar Lange Közgazdasági Akadémia, Lengyelország): Gyártelepítési tervek többkritériumos analízise
- J. Kriens** (Tilburgi Egyetem, Hollandia) és **J. Lieshout**: Megjegyzések a Markowitz-féle portfólió kiválasztási módszerről
- Knut Richter** (Chemnitzi Egyetem, NDK): A termelési-készletezési modellek stabilitásáról
- Temesi József** (BKE): A szubjektív információ szerepe a többkritériumos problémamegoldásban
- Terlaky Tamás** (ELTE) és **Wéber Gábor** (SZKFI): A benzinkeverés matematikai programozási modelljéről
- Guntram Scheithauer** és **Johannes Terno** (Drezdai Egyetem, NDK): A guillotine vágási problémák megoldása
- Varga József** (JPTE): Autoregresszív folyamatok Bayes-féle előrejelzése
- Varró Zoltán** (JPTE): A nem ortogonális leszábási és pakolási feladatok egy megközelítése
- Vastag Gyula** (MKKE): A számítógéppel irányított gyártás tervezése Magyarországon
- Vörös József** (JPTE): Többszintű termelési-készletezési modellek heurisztikái
- Marino Widmer** és **Philippe Solot** (Lausanni Egyetem, Svájc): A flexibilis gyártási rendszerek problémái

Az előadások anyagát karunk a „Workshop on Production Management” című kiadványban angol nyelven megjelentette, a kiadványból lektorálás után elfogadott dolgozatokat kapja kézhez most az olvasó magyar nyelven.

Szemináriumunk nem jöhetett volna létre néhány baranyai vállalat és szervezet hathatós anyagi támogatása nélkül. Ugyancsak nagyra értékeljük az OTKA 353. pályázata alapján igénybe vett támogatást. Külön köszönetünket fejezzük ki Martos Bélának, hogy segítette, figyelemmel kísérte a szeminárium vitáját, nyitó előadásával növelte annak színvonalát, és előkészítette ezen különszám megjelenését. Ugyancsak hálás köszönettel tartozunk Király Júliának, aki kitartó szorgalommal elemezte az eredeti angol nyelvű verziót, és aktívan segítette a különszám megjelenését.

Vörös József
egyetemi docens

V-I-S-A: VIZUÁLIS INTERAKTÍV MODELL A TÖBBTÉNYEZŐS DÖNTÉSEK TÁMOGATÁSÁRA¹

VALERIE BELTON – STEPHEN VICKERS

Strathclyde Egyetem, Glasgow, Skócia – Kenti Egyetem, Canterbury, Anglia

Bár a vizuális interaktív modellezés (Visual Interactive Modelling – VIM) már majdnem egy évtizede az operációkutatási eszköztár részévé vált, a többtényezős döntéstámogatással (Multiple Criteria Decision Aid – MCDA) foglalkozók közössége mindmostánig nem fogadta be, annak ellenére, hogy ugyanez a kutatógárda erősen hangsúlyozza a döntéstámogatás interaktív módszereinek szerepét. Ez bizonyos mértékig nem meglepő, mivel az MCDA, maga is viszonylag újonnan kifejlesztett kutatási terület lévén, leginkább a módszertan fejlesztésével foglalkozik, sőt, az irodalom gyors áttekintéséből arra a következtetésre juthatunk, hogy növekvő mértékben elbonyolítják a dolgok matematizálását, ahelyett, hogy az alkalmazásokkal és a kapcsolódó területek – mint például a pszichológia, a vezetési információs rendszerek (Management Information Systems – MIS), a döntéstámogató rendszerek (Decision Support Systems – DSS) – összefogásával foglalkoznának. Nincs szándékunkban kétségbevonni, hogy léteznek ezirányú kutatások is, s még kevésbé azt, hogy nem ez a hozzáállás hatja át az MCDA művelőinek minden munkáját. Ennek ellenére, ha az MCDA el akarja kerülni azt, hogy eszközök steril gyűjteményévé váljon, akkor az erőfeszítéseket arra kell fordítani, hogy ezeket a módszereket vonzóvá tegyük az operációkutatás, a MIS, a DSS, vagy bármely más kutatási ág területén dolgozó gyakorlati alkalmazók, illetve végső soron a döntéshozók számára. A VIM széles körű sikere egy fontos lehetőséget jelez, és a VIM olyan terület, amellyel az MCDA aktív kutatói közül is sokan kezdtek el foglalkozni (KORHONEN 1988, BELTON – VICKERS 1988, BRANS – MARESCAL 1988, PASTIJN 1988, NEVES és társai 1988).

Tanulmányunkat a vizuális interaktív modellezés általános fogalmainak és a többtényezős döntéstámogatásban való jelentőségének rövid tárgyalásával kezdjük. A következő részben a vizuális és interaktív információ megjelenítés jelenlegi helyzetét tekintjük át az MCDA területén. Ezután a V-I-S-A leírása következik, egy olyan programé, amely egy egyszerű többtényezős értékfüggvény számszerűsítését segíti, elegyítve ezt egy vizuális interaktív érzékenységvizsgálattal. A program használatát az egyetemi hallgatók kiselőadásainak értékelése példáján mutatjuk be. Az utolsó részben a vizuális interaktív összetevőnek, mint a döntéshozás fejlesztésének és a felhasználó befogadási készségnövelő eszközének hatékonyságértékelési problémájával foglalkozunk. Röviden érintünk egy hasonló típusú munkát, és egy hatékonyságvizsgálati felvetést bocsátunk vitára.

¹Fordította Temesi József, Budapesti Közgazdaságtudományi Egyetem

Vizuális interaktív modellezés

A vizuális interaktív modellezést Bell (1986) úgy írja le, mint ami „... egy olyan folyamat, amelyik szemléletes párbeszédés modellét épít fel és használ azért, hogy kiderítse a döntéshozók számára lényeges vonatkozásokat. A VIM modellnek három lényeges összetevője van: egy matematikai modell, a modell adott állapotának vizuális megjelenítése és az interakció, amelynek révén a modell állapotának valamilyen megváltoztatását engedjük meg.”

A vizuális modellek két típusát különböztetjük meg: a reprezentációs modellt és az ikonszerűen ábrázolt grafikus modellt. Az előbbi a megszokott grafikus ábrázolásokat használja fel, például oszlopdigramokat, gráfokat, kördiagramokat, és ezek segítségével mutatja be a matematikai modellből nyert információkat. Bell (1986) megjegyzi, hogy az OR szakértők szemszögéből a grafikus megjelenítés modelljei nem mások, mint az OR modellezés végrehajtó eszközei; és azt is hozzáteszi, hogy gyakran a szóbanforgó modell nem is tart érdeklődésre számot annak következtében, hogy a DSS vagy a MIS specialisták körében ezek a vizuális modellek szélesebb körben ismertek. Az ikonszerű grafikus megjelenítésnél a valós rendszert szimbolikus formában ábrázoljuk. A legmegszokottabb alkalmazási terület a vizuális interaktív szimuláció (Visual Interactive Simulation - VIS), amelyik kiterjedten használ képi ábrázolást. Egy másik ismert alkalmazás a Gantt diagramot és a hálózatokat felhasználó project management, vagy a döntési fákat alkalmazó döntéselemzés.

A VIM leggyakrabban idézett előnyei az alábbiak:

- (a) Fejlett párbeszéd a döntéshozó és az elemző között
- (b) Kevesebb hiba a modellépítésben
- (c) Felhasználó-barát modell
- (d) Az alkalmazás nagyobb valószínűsége
- (e) A döntéshozó könnyebben elfogadja a modellt
- (f) A modellek és az eredmények könnyebb magyarázata

Lényeges hátrányként szokták megemlíteni a modell kifejlesztésére fordítandó időt és a hatékony képernyők megtervezésének bonyolultságát, amelyek végső soron a rendszer költségességében tükröződnek.

Az elérhető szoftverek inkább azt teszik lehetővé, hogy egy elemző szakember vizuális interaktív modelleket konstruáljon reprezentációs vagy ikonszerű formában, és kevésbé alkalmasak arra, hogy a döntéshozó közvetlenül elemezhesse velük saját speciális problémáját. Az ilyen szoftverek a Symphony-hoz és a Framework-höz hasonló általános célú programcsomagoktól, amelyek jól összekapcsolják a grafikus megjelenítést az egyszerű modellekkel és változatos felhasználási területeken alkalmazhatók, a See Why, Hocus és Optik-szerű VIS-modellek kifejlesztésére használatos speciális eszközökig terjednek, amelyeket szinte kizárólag gyakorló operációkutatók alkalmaznak.

VIM a többtényezős döntéstámogatáshoz?

Mi a fentiek következménye az MCDA-val foglalkozó kutatókra nézve? Bekerülhet-e a VIM az MCDA elemző szakember eszköztárába? Felülmúlják-e a lehetséges előnyök a potenciálisan felmerülő hátrányokat?

Ha a VIM fentebbi definícióját vesszük, akkor a VIM könnyen integrálható a többtényezős döntéstámogatásba: tetszőleges megközelítés esetében, a komplexitás legkülönbözőbb fokain létezik egy matematikai modell; az MCDA zömében központi szerepet játszanak a modell állapotváltozásaira vezető kölcsönkapcsolatok; végül a modell állapota gyakran vizuálisan megjeleníthető. Még jobban alátámasztja ezt az MCDA-nak az a tulajdonsága, hogy hangsúlyozza az értékek és az értékítéletek összekapcsolását, amit nagyon jól jellemez Bellnek (1986) a VIM alkalmazhatóságáról szóló kijelentése: „A VIM azokon a területeken is értékes lehet, ahol egyértelmű optimális megoldást kapunk, de ott látszik a leghasznosabbnak, ahol a problémák nem jól struktúrááltak, és az elemző szakembernek az a célja, hogy beolvassza a döntéshozó tudását vagy tapasztalatát a problémamegoldás folyamatába...”. Ha az ember a VIM segítségével az MCDA növekvő elfogadottságát szeretné elérni, akkor a fentebb leírt előnyöket minden bizonnyal örömmel fogja üdvözölni.

De mi a helyzet a költségekkel? Úgy véljük, hogy legalábbis kezdetben az MCDA számára a VIM modellek a csigaház szerepét játsszák – az általános modellstruktúra és a VIM interface előre meghatározott, s így a szoftverfejlesztési idő zéró. Az elemző szakembernek csak a többtényezős döntéstámogatásban kell jártasnak lennie, a számítógépprogramozáshoz nem kell értenie. Mindössze az a feladata, hogy a speciális problémát formába öntse, beszeresse a megfelelő információkat és ezeket betáplálja a programba. Az érzékelhető költségek tehát csak a megfelelő szoftver beszerzéséből vagy kifejlesztéséből származnak.

Feltehetjük magunknak a kérdést, hogy vajon az MCDA-ban használt VIM csak egyszerű közvetítő eszköz, vagy több ennél? Az első nézőpont a Bell (1986) által a gondolkodás passzív VIM iskolájaként leírtaknak felel meg. A másik szélsőség, az aktív VIM iskola szerint a VIM fejleszteni tudja a problémamegoldás kifejezőképességét. Az az érzésünk – bár nem rendelkezünk idevágó bizonyítékokkal – hogy a VIM bekapcsolása az MCDA módszerekbe fejleszti a döntéshozó problémafelismerő képességét, és ennek következtében „fejlettebb” döntéshozáshoz vezet. Ezt a témát egy következő fejezet nagyobb mélységben tárja fel.

Vizuális és interaktív módszerek a többtényezős döntéstámogatásban

A számítógépes grafika alkalmazása az MCDA területén természetesen nem újdonság. Hasonlóképpen a döntéshozóval folytatott párbeszéd is jól megalapozott. Ennek ellenére, KORHONEN és kollégái munkájának kivételével (1985, 1986, 1988) a grafikus megjelenítés alkalmazása az MCDA területén nem éri el a kellő mértéket. Az alábbiakban röviden áttekintjük az interaktivitás és a grafika felhasználásának jelenlegi helyzetét.

A döntéshozóval folytatott párbeszéd általában a következő módokon történik:

Az információ interaktív megadása A döntéshozó az input adatok számszerűsítésére egy vizuálisan megjelenített skálát használ, illetve időnként visszacsatoljuk számára az általa kinyilvánított preferenciák konzisztenciáját, megadva neki a változtatás lehetőségét (mint például a hierarchikus elemző módszernél, SAATY, 1980).

A preferenciák progresszív kifejtése Ezt az eljárást az efficiens megoldások halmazának fokozatos feltérképezésére szokták felhasználni. A döntéshozót fel lehet kérni például arra, hogy a célok közötti helyettesítési háttérarányokra vonatkozó kérdésekre válaszoljon.

Visszacsatolás A döntéshozónak bemutatnak egy holisztikus preferencia-ítéletekből képzett értékfüggvényt, és megadják neki a lehetőséget a javítások kivitelezésére.

Érzékenységvizsgálat Ha már megkaptunk egy végeredményt, akkor az elemző vagy a döntéshozó megválaszthatja azokat a paramétereket, amelyekkel kapcsolatosan érzékenységvizsgálatot végzünk.

Azokat a standard grafikus képernyőket, amelyeket alkalmanként egyszerű interakciókra alkalmaznak, az alábbi módokon szokták felhasználni:

Információbevitel Gyakran alkalmaznak oszlopdiagramokat az alternatíváknak az egyes kritériumok szerinti értékelésének, vagy a kritériumok viszonylagos fontosságának megadására. Az oszlopok magasságának a beállítását a döntéshozó végzi.

Értékösvények Sok szerző vonaldiagramokat használ, amelyekre értékösvényként is szoktak hivatkozni. Ezek segítségével kis elemszámú alternatívahalmazok értékelései jeleníthetők meg. Lásd például SCHILLING – COHON, 1983, vagy STEUER, 1986. Ezt az egyszerű technikát sok többtényezős értékfüggvényt előállító programcsomagba beépítették. Ez a vizuális eszköz célszerűen alkalmazható a dominált és a nem dominált vagy a közel-dominált alternatívák azonosítására.

Értékfüggvények A vonaldiagramokat itt arra használják fel, hogy az értékfüggvényt egyváltozós függvények együtteseként állítsák elő. Ezt a közelítést alkalmazza például a Prefcalc (JACQUET-LAGREZE) és a POLICY, a társadalmi értékítéletek elmélete (HAMMOND és mások, 1977) fogalmi rendszerének megjelenítésére kifejlesztett program.

Hierarchikus struktúra Azoknál a módszereknél, ahol a kritériumok hierarchiája alapján egy hierarchikus értékfüggvényt állítanak elő, a képernyőn mindezt egy fastruktúrával ábrázolják. Ilyen például a Hiview (PHILIPS és mások), és az Expert Choice (SAATY és FORMAN).

Érzékenységvizsgálat A többtényezős értékfüggvények egydimenziós érzékenységvizsgálatának bemutatására vonaldiagramokat használ például a Hiview és a V-I-S-A (BELTON és VICKERS) valamint az Expert Choice.

Leképezések A közömbösségi információkból (RIVETT, 1977) vagy a preferenciákból (G. ROY) nyert többváltozós adatok a többdimenziós skálázási eljárásokban gyakran kétdimenziós ábrákba tömöríthetők. Az ábra távolságadataiból a preferenciák hasonlóságára lehet következtetni.

Osztályozó gráfok Az osztályozó eljárások egyik outputja az Electre-ben (B. ROY) és a Promethee-ben (BRANS és MARESHCAL) egy osztályozó gráf. Az osztályokba sorolás megjelenítésének ez az egyik leghatékonyabb módja, bár a számítógépes megvalósítás nem túl egyszerű.

Mint korábban említettük, az MCDA területén egyetlen valódi vizuális interaktív módszerről tud a szakirodalom, ezt KORHONEN fejlesztette ki (1986, 1988). Ez a program a többcélú lineáris programozási feladatot oldja meg egy látványos grafikai interface segítségével, amelyik lehetővé teszi a felhasználónak, hogy feltérképezze az efficiens megoldások halmazát, és az összes célérték egyidejű megváltoztatásának hatását is bemutatja.

V-I-S-A – Vizuális interaktív érzékenységvizsgálati módszer a többtényezős döntéstámogatáshoz

Ebben a részben a diszkrét alternatívák közötti választás többcélú modelljének vizuális interaktív érzékenységvizsgálati módszerét tárgyaljuk.

A V-I-S-A kifejlesztésének indítékai

Ennek a munkának az indítéka az egyszerű többtényezős értékfüggvény modell fentebb leírt típusú (BELTON, 1986) egydimenziós elemzési lehetőségeit meghaladó érzékenységvizsgálati eszköz kifejlesztésének igénye volt. Az egyszerű többcélú modell bőséges döntéshozatali tapasztalatai (BELTON, 1985) egy olyan igényt jeleztek, amelyik a döntéshozótól összegyűjtött információk elemzésének bonyolultabb érzékenységvizsgálata és annak hatékony megjelenítése iránt jelentkezett. Még a kevés kritériumot tartalmazó modellekben is hatalmas mennyiségű információ halmozódik fel egy teljes, többdimenziós érzékenységvizsgálat során, és az elemző szakembernek az a problémája, hogy milyen módon tudja kiválogatni a döntéshozó számára hasznos információkat. A meglévő szoftverek nem képesek arra, hogy ezt analitikusan elvégezzék, és ha ad hoc módon állunk neki a dolognak, az nagyon időrabló folyamat, arról nem is beszélve, hogy a döntéshozó édeklődése eközben lankad, és az az érzése támad, hogy az elemzési folyamat kicsúszott az ellenőrzése

alól. A bemutatásra kerülő módszer ezeknek a problémáknak a leküzdését kísérli meg, interaktív grafika alkalmazásával.

A modell

A szóbanforgó modell a BELTON-nál (1985) leírt egyszerű többtényezős értékfüggvény. A döntéshozó által meghatározott kritériumok hierarchiájára vonatkoztatott, jól definiált alternatívák értékelésére használható. Ha a hierarchia egyetlen szintből áll, a modell a következő:

$$V_i = \sum_j w_j x_{ij} \quad (1)$$

ahol

V_i az i -edik alternatíva összetett értékelése,

w_j a j -edik kritérium súlya,

x_{ij} az i -edik alternatívának a j -edik kritérium szerinti értékelése.

Többszintű kritériumhierarchia esetére a kiterjesztés értelemszerű. Definiáljuk a kritériumok egy családját, amely az azonos felmenőkkel rendelkező kritériumok egy halmaza. Minden kritériumot a család többi tagjához viszonyított súllyal látunk el. Azoknak a kritériumoknak a súlya, amelyeknek a családon belül leszármazottai vannak, a megfelelő kritérium összes leszármazottainak az aggregált súlyával egyenlő. Az alternatívákat a végső kritériumok, azaz a leszármazottakkal már nem rendelkező kritériumok szerint értékeljük, és ezeket az eredményeket alulról felfelé összesítjük.

A döntéshozóval együttműködő szakemberé a felelősség abban a tekintetben, hogy vajon a problémának megfelelő modellt alkalmazták-e, jól struktúrálták-e a problémát és hogy az x_{ij} és w_j kezdeti értékeket helyesen állapították-e meg. A program jelenlegi változata ezekben a vonatkozásokban nem nyújt segítséget. A további fejlesztés során egy interaktív grafikus eljárást és egy páros összehasonlításokat felhasználó input rutint fogunk a modellbe beépíteni. Az adatbevitel egy menürendszer segítségével történik, amelyik új kritériumok és alternatívák csatolását engedi meg, és viszonylag könnyen megváltoztathatjuk a meglévő értékeket, vagy törölhetjük a modell egyes részeit.

A rendszer felhasznál néhányat az előzőekben leírt grafikus lehetőségek közül, nevezetesen az értékösvényeket és az egydimenziós érzékenységvizsgálatot. Azt, hogy mindez milyen módon történik, a következő részben tárgyaljuk. A rendszer újdonsága az interaktív érzékenységvizsgálat. Elvileg ez nagyon egyszerű. Megengedi a felhasználónak, hogy bármely kritériumcsaládon belül a kritériumsúlyok megoszlása tetszőleges változásának a végső eredményre kifejtett hatását interaktív módon megvizsgálja. Erről részletesebb magyarázatot nyújt a következő fejezet példája.

A V-I-S-A felhasználása

A rendszer még új és korai lenne a vizuális interaktív összetevő hatását értékelni. A hatékonyság kérdéséről a következő részben lesz szó. A rendszert a potenciális felhasználók – elemzési szakértők és gyakorlati szakemberek – széles körének mutattuk be. Az első reakció a nagyfokú érdeklődés volt, és azonnal elkezdődött a project-ek vizsgálatát célzó felhasználás. A rendszer hatékony és a képzeletet megmozgató eszköznek bizonyult továbbá az egyetem alsóbb évfolyamain a többcélú modellezés tanításában. A Canterbury-i University of Kent DEC VAX számítógépén egy 60 diákból álló csoport is sikeresen használta a rendszert. A diákok zöme jelentős mértékben kihasználta az interaktív elemzési lehetőséget, néhányan csak mechanikusan, de nagy számban alkotó módon. Abban reménykedünk, hogy ez a fajta oktatás hasznosnak fog bizonyulni azok számára, akik a továbbiakban a vezetéstudományban tevékenykednek majd, és azokra is a szokásos kézikönyveknél nagyobb hatása lesz, akik az általános vezetés és szervezés területén fognak dolgozni.

A programot egy olyan alkalmazás keretén belül mutatjuk be, amelyet a rendszer egyik alkotója készített hallgatói csoportok kiselőadásainak értékelésére. Az előadások témája az operációkutatási folyóiratokban és könyvekben az utóbbi időben megjelent kombinatorikus optimalizálási publikációkra vonatkozott. Ez az előadás szolgált a diákok félévi munkájának értékelésére. A három vizsgáztató véleményén kívül a diákoknak egymást is értékelni kellett, egy kritériumrendszer segítségével. A vizsgáztatók által kidolgozott kritériumhierarchia, amelyet a végső előadás előtt a diákok is megvitattak, a következő volt:

Szervezés

Időbeosztás

Munkamegosztás

Tartalom

Meggyőző-e a közlés?

Fenntartja-e a hallgatóság érdeklődését?

Könnyen megérthető-e?

Kivitelezés

Vizuális eszközök használata

Megfelelő-e a sebesség?

Jól érthető-e a beszéd?

Az előadó hozzáállása

Mindegyik résztvevőnek osztályoznia kellett a meghallgatott hét előadást egy 0-tól (rossz) 10-ig (kitűnő) terjedő skálán, minden kritérium szerint. A vizuális interaktív megjelenítés oszlopdiagramok segítségével történik. A felső oszlopdiagramok a modell egy adott helyzetéhez tartozó összegzett alternatívaértékeléseket mutatják. Az alsó oszlopdiagram a kiválasztott családon belüli súlyviszony eloszlást

mutatja be. A klaviatúra bizonyos billentyűi segítségével a felhasználó kiválaszthat egy speciális kritériumot és megváltoztathatja a hozzátartozó súlyt. Minden más súly a normalizálás szerint változik, és a relatív értékelések lesznek láthatók. Az összéértékelés megváltozása az újra kirajzolódó oszlopdiagramokon azonnal követhető. A működés sebessége az alkalmazott géptípustól függ. A felhasználó megjelenítheti a kritériumsúlyokat és az összéértékelés aktuális helyzetét a képernyőn, kérheti a modellt jelenlegi állapotát a nyomtatóra, választhatja azt, hogy megőrzi az értékek jelenlegi rendszerét, vagy visszatérhet az induló értékrendszerhez.

Hatékony eszköze-e a VIM a többtényezős döntéstámogatásnak?

Hogyan tudjuk egy ilyen eszköz hatékonyságát értékelni? Először definiálnunk kell a hatékonyságot. A végső cél a döntéshozatal színvonalának emelése. Feltehetjük tehát a kérdést: tökéletesíti-e a VIM a döntéshozatali folyamatot? Mi legyen viszont az összehasonlítás alapja? Olyan többcélú rendszerekkel történjen-e az összehasonlítás, amelyeknek nincs vizuális interaktív érzékenységvizsgálatuk, de rendelkeznek statikus grafikával? A grafikával egyáltalán nem rendelkező modellekkel vessük össze a rendszert? Vagy olyan döntésekkel hasonlítsuk össze, amelyek nem használnak többcélú modellt? Mindezek a kérdések érdeklődésre tarthatnak számot, de mi az első kérdést szeretnénk megválaszolni, mivel hitünk szerint a modellhasználat mindenképpen növeli a döntéshozás színvonalát, és az az érzésünk, hogy az igazi összehasonlítás az, ha a grafika általános célú felhasználását és az interaktív grafikát vetjük egybe. A probléma tehát az, hogy egy olyan pótlólagos eszköz hatékonyságát kell értékelnünk, amelyik a már meglévő eszközök erejét növeli. Úgy látjuk, hogy ez a pótlólagos eszköz több, mintha csak az információmegjelenítés reprezentációs grafikai módszereinek egy alternatív formája lenne, mert elmozdulást jelent a VIM passzív módszereitől az aktív módszerek felé.

A hatékonyság akadémikus tárgyalásával itt akár végezhetnénk is. Mi azonban a hatékonyság egy tágabb értelmezését is meg szeretnénk vizsgálni. Ha valóban hatékonyan akarjuk fejleszteni a döntéshozatalt, akkor az eszközt használni is kell. Bell felmérést készített a VIM alkalmazásáról (1986), és a válaszok nagy lelkesedéssel szólnak a VIM sikeréről a döntéshozóval való kommunikáció megkönnyítése terén, és egyéb előnyöket is felsorolnak. Ha az MCDA a vezetéstudománnyal foglalkozó gyakorlati kutatók elfogadott eszközévé akar válni, akkor a sikernek ugyanezeket a kritériumait kell kielégítenie. Így tehát azt is meg kell kérdeznünk, hogy vajon a VIM komponensnek az MCDA modellbe integrálása a siker irányába visze bennünket?

Ez két igen különböző célkitűzés, bár mindkettőt ugyanazzal az eszközzel lehet elérni. Nem hisszük azt, hogy alapvetően ellentétesek lennének, bár megfigyelhető, hogy a felhasználót a csillogó grafikával bele lehet vinni egy gyenge elemzés vagy egy rosszul megválasztott közelítésmód eredményeinek elfogadásába. Ennek ellenére az éppen alkalmazott modellben való bizalom mellett a felhasználásnak a

face miatti megnövekedett valószínűsége nem mehet a döntés minőségének rovására és megfordítva. Az MCDA területén szerencsések vagyunk, hogy nem kell olyan tényezőkre figyelniünk, amikkel például a VIM szimuláció kerül szembe ezekben a vonatkozásokban. Nem kell amiatt aggódnunk, hogy a szemre vonzó megjelenítés arra csábítson egy felhasználót, hogy egy statisztikailag alá nem támasztott döntést elfogadjon. Sőt, még a szuboptimalitástól való félelmeket is félretehettük: a többcélú döntéseknél az „optimális” döntést a döntéshozó preferenciái határozzák meg, és ezáltal a döntéshozó által legjobbnak tartott választásról van szó. Ez viszont azt is jelenti, hogy nincs külső fogódzónk a döntés értékelésére, minőségének meghatározására.

Ha tehát a kétféle cél ellentéte nem ad okot aggodalomra, akkor arra összpontosíthatunk, hogy minél teljesebb mértékben megvakosíthassuk őket. A gyakorlati szakember szempontja az, hogy a „puding próbája az, ha megeszik”, de mi úgy véljük, hogy a tudósok szerepe a vezetői döntéstámogatás területének újításaival kapcsolatban hasonlóan fogható fel, mint egy hivatásos kóstolóé. Ez úgy valósulhat meg, ha a kísérleti kutatómunka és az empirikus megfigyelések ötvöződnek egymással. Az alábbiakban az ezen a területen folytatott célszerű kísérleti munka néhány problémáját tárgyaljuk, és javaslatot teszünk egy kísérleti eszközre annak reményében, hogy ezzel vitára ösztönözzük az olvasót.

Egy kísérleti program terve

Elképzelhetünk egy kísérleti szituációt, amelyben a döntéshozók különböző döntéstámogatási eszközöket választanak hasonló vagy majdnem azonos helyzetben, s ezzel a hatékonyság összehasonlító mérésére nyílik mód – a MIS területén rengeteg hasonló munkáról számol be a szakirodalom (DESANCTIS, 1984, BENBASAT - DEXTER, 1985), akárcsak az MCDA területén (HOBBS, 1985).

Az ilyesfajta munkák mindegyike azzal a feladattal kerül szembe, hogy találjon egy eléggé reális problémát, valamint olyan döntéshozókat, akik ebben a problémában járatosak és a részvételre is hajlandók. A hatékonysági mérték problémája is eléggé bonyolult ebben az esetben. Mint ahogy az előzőekben arról már volt szó, nincsenek külső kritériumaink a döntés „minőségének” megítélésére, és ezért olyan kritériumokat kell használnunk, amelyek a döntési folyamattal kapcsolatosak. Egyetértünk FRENCH (1986) értékelésével, miszerint a többcélú döntéshozatal támogatásának fő célja megkönnyíteni a döntéshozó számára a döntési problémára, illetve annak értelmezésére vonatkozó tanulási folyamatot. Az egyetlen elérhető objektív mérőszám az, hogy a döntéshozó mennyi időt szánt a program egyes részeire. Arra számítottunk, hogy a VIM eszköz hozzávétele megnöveli azt az időt, amit a döntéshozó a probléma feltérképezésével tölt, és az ehhez kapcsolódó feltételezés az, hogy ez a megnövekedett időtartam a probléma jobb megismeréséhez vezet, következésképpen pedig tökéletesebb döntéshez. Ennek a hipotézisnek természetes folyamánya a kérdés, hogy ha az elemzési időt rögzítjük, akkor a VIM elemzés hatékonyabb megis-

merési eszköz-e? A tanulás megítélésének kérdésével kerülünk szembe, speciálisan abban a formában, hogy a VIM elemzés milyen mértékben fejleszti a tanulást? Ez az egész vezetéstudomány egy alapvető problémája, és különösen bonyolult az MCDA és az OR egyéb, lágyabb megközelítési módjai esetében, ahol a modellezett rendszer inkább az értékelésekből és vélekedésekből áll össze, mint fizikai realitásból. Úgy véljük, hogy az erre a témára vonatkozó irodalom hiánya a tárgy bonyolultságával függ össze, és nem arról van szó, hogy a kérdés lényegtelen lenne.

A MIS területén az összehasonlító tanulmányok, amelyeket fentebb említettünk, az információmegjelenítés alternatív módszerei – például táblázatos vagy grafikus, színes vagy monokróm – hatékonyságának megállapítására koncentrálnak olyan helyzetekben, ahol a megjelenítés valamilyen külsődleges mértékkel, például pénzegységekben kifejezhető. A vizuális interaktív szimuláció területén megjelent néhány legutóbbi munka azokban a szituációkban vizsgálta a VIM modellekkel támogatott döntéshozatal minőségét, amikor az „optimális” megoldás a sorbanállási elmélet alapján ismert volt (O'KEEFE – PITT, 1988). Az eredmények egyáltalán nem bátorítók a VIS modellek alkotói számára! Az MCDA-ra vonatkozó munka számos kutatási irányról számol be: különböző MCDA modellek eredményeit hasonlították össze; összehasonlították intuitív, szakértői és a döntéshozó speciális tanulási folyamatára építő modellek eredményeit; és összehasonlítottak különböző előre specifikált hasznossági függvényekkel kapott interaktív modelleket. Ez a tanulmány egy sereg kritériumot tartalmaz az MCDA modellek érvényességének megítélésére, de nincs tanácsa arra vonatkozóan, hogyan lehet megbecsülni egy modell „értékét”.

Az a munka, amelyet a London School of Economics Döntéselemző Csoportja végzett a döntési konferenciákról (WOOLER, 1987), és a különböző bonyolultsági fokú struktúrák döntési problémáinak kezeléséről (HUMPHREYS és mások, 1987), sokkal fontosabb példái annak a kutatási típusnak, amit be szeretnénk mutatni. Ez a kutatás indexeket rendel a döntéshozó strukturáló és elemző munkájához.

Hosszú viták után az az álláspontunk alakult ki, hogy az egyetlen követhető út az akciókutatás. Ahhoz, hogy megállapíthassuk, a döntéshozó milyen módon használja az eszközt, meg kell figyelniünk azt, hogyan kezel vele valós problémákat. Természetesen ezt a közelítést sokféleképpen vihetjük végbe: a döntéshozó együtt dolgozhat egy szakképzett elemzővel, dolgozhat a döntéshozó egyedül és végül egy csoport is dolgozhat egy képzett elemző szakember irányításával. A csoportos tanulás természeténél fogva intenzívebb, mivel lehetőség van mások prioritásainak és elképzeléseinek interaktív tanulmányozására. Az elemző szakember jelenléte további torzítások forrása lehet: bár az eszköz hatékonyabb használatát képes biztosítani, de majdnem bizonyos, hogy valamilyen irányító funkciót is betölt. A személyiség szerepe és a személyek közötti interakció az elemző jelenlétében és a csoportos eljárásokban jelentőssé válik. Javaslatunk szerint a konzultációkhoz ki kell fejleszteni egy naplózó eszközt és kialakítani ennek használatát. Egyetlen döntéshozó esetén, akár jelen van a döntéstámogató szakember, akár nincs, a napló információt ad arról, hogy a döntéshozó mennyi időt töltött el az elemzés különböző

vonatkozásaival, és hogyan mozgott az alternatív információk és egyéb elemző képességek között. A csoportos eljárások naplózása már sokkal bonyolultabb feladat. A visszaidézés célja az, hogy rekonstruáljuk a döntéshozó gondolkodásmódját, azonosítani tudjuk azokat a pontokat, ahol problémái merültek fel, és hogyan oldotta meg azokat, valamint azonosítani tudjuk azokat a pontokat is, ahol lényeges ötletei voltak. A megvizsgálni kívánt hipotézis az, hogy a VIM jelleg több kérdés feltevésére ösztönöz, de a válaszok nem feltétlenül a VIM elemzés útján születnek. Kíváncsian várjuk mások véleményét erről a kísérleti eszközeiről.

Összefoglalás

Tanulmányunkban a vizuális interaktív modellezési munkát és a többtényezős döntéstámogatásra vonatkozó következményeit vizsgáltuk. A felhasználók növekvő bizalmában és a modell megértésében mutatkozó siker azt mutatja, hogy a VIM hatékonyan beépíthető az MCDA eszköztárába. Röviden áttekintettük a grafika alkalmazását és a VIM felhasználásának irányába mutató fejleményeket az MCDA területén, részletesebben is bemutatva a V-I-S-A módszert, egy olyan programot, amelyet a többtényezős értékfüggvény becslésére fejlesztettek ki, vizuális interaktív érzékenységvizsgálattal egybekapcsolva. A konklúziók között tárgyaljuk az ilyen eszközöknek a döntéshozás fejlesztése hatékonyságának megállapítására szolgáló vonatkozásait, azt tanácsolva, hogy ennek elérése céljából a módszert felhasználó tanulási folyamatot valós döntések közben megfigyelő eszközt kell kifejlesztünk, majd ennek segítségével visszaidézni a döntéshozási folyamatot. Az itt fellépő problémák központi szerepet játszanak az MCDABan és a lágy OR számos egyéb területén is, és azt reméljük, hogy egy vitát indítunk el az ilyen jellegű munkák szükségességéről és eszközeiről.

IRODALOM

1. P. C. BELL, Visual interactive modelling in 1986, in V. Belton and R. M. O'Keefe, Recent developments in operational research, Operational Research Society, 1986
2. V. BELTON, The use of a simple multi-criteria model to assist in selection from a shortlist, JORS, 1985
3. V. BELTON, A comparative study of methods for multiple criteria decision aid, PhD Thesis, Cambridge, 1986
4. V. BELTON – S. P. VICKERS, Use of a simple multi- attribute value function incorporating Visual Interactive Sensitivity Analysis for multiple criteria decision aid, paper presented at the third international summer school on MCDA, 1988
5. I. BENBASAT – A. S. DEXTER, An experimental evaluation of graphical and color enhanced presentation, Management Science, 1985

6. J. P. BRANS AND B. MARESCHAL, Bankadvisor, a Promethee method for industrial evaluation, Paper presented at the Mini Euro Conference on VIM, 1988
7. G. DESANCTIS, Computer graphics as decision aids: directions for research, Decision Science, 1984
8. S. FRENCH, Decision Theory, Wiley, 1986
9. K. R. HAMMOND – J. ROHRBAUGH – J. MUMPOWER – L. A. ADELMAN, Social Judgement Theory: applications in policy formulation, in M. F. Kaplan and S. Schwartz, Human judgement and decision processes in applied settings, Academic Press, 1977
10. B. F. HOBBS, Experiments in MCDM and what we can learn from them, in Y. Y. Haimes and V. Chankong, Decision making with multiple objectives, Springer Verlag, 1985
11. P. HUMPHREYS – AL OLDFIELD – J. ALLAN, Intuitive handling of decision problems: a five level empirical analysis, Decision Analysis Unit, London School of Economics, 1987
12. P. J. KORHONEN, Computer graphics for MCDM, in Y. Y. Haimes – V. Chankong, Decision making with multiple objectives, Springer Verlag, 1985
13. P. J. KORHONEN – J. LAAKSO, A visual interactive method for solving the multiple criteria problem, EJOR, 1986
14. P. J. KORHONEN – J. WALLENIUS, VIG - a visual and dynamic decision support system for multiple objective linear programming, Paper presented at the third international summer school on MCDA, 1988.
15. C. D. NEVES – J. M. NOGUEIRA – P. M. SANTOS, Multiple criteria decision aid: a visual interactive approach using Elektre and Orestre, Paper presented at the Mini Euro Conference on VIM, 1988
16. R. M. O'KEEFE – I. PITT, Cognitive style and the use of visual interactive models, Paper presented at the Mini Euro Conference on VIM, 1988
17. H. PASTIJN, An interactive ordinal multiple criteria decision making tool, Paper presented at the Mini Euro Conference on VIM, 1988
18. B. H. P. RIVETT, Multidimensional scaling for multiobjective policies, Omega, 1977
19. B. ROY, The Elektre methods, Paper presented at the third international summer school on MCDA, 1988
20. G. ROY, An application of multi-dimensional scaling to policy selection, University of Western Australia, School of Architecture, Paper 6009
21. T. L. SAATY, The analytic hierarchy process, McGraw Hill, 1980
22. D. SCHILLING – R. C. COHEN, An approach to the display and analysis of multiobjective problems, Socio Economic Planning Sciences, 1983

23. R. E. STEUER, Multiple criteria optimization: theory, computation and application, Wiley, 1986
24. S. WOOLER, Analysing decision conferences, Decision Analysis Unit, London School of Economics, 1987

ABSTRACT

In this paper we begin by discussing briefly the concepts of visual interactive modelling in general terms and their relevance to MCDA. The following section reviews the use of visual and interactive information displays in MCDA to date. We then describe VISA, a program to assist in the evaluation of a simple multiple attribute value function incorporating visual interactive sensitivity analysis, illustrating its use in the assessment of student presentations. In the final section we consider the problem of evaluating the effectiveness of the visual interactive component as a means of improving decision making and of increasing user acceptance. Previous work of a similar type is discussed briefly and a suggestion for a framework for investigation of effectiveness is put forward for discussion.

HIDAK LESZABÁSI FOLYAMATOK KÉT ELVILEG KÜLÖNBÖZŐ MODELLJE KÖZÖTT¹

HARALD DYCKHOFF

Rajna-Vesztfáliai Egyetem, NSZK

Leszabási folyamatok modellezésére két elvi megközelítés létezik: a szokásos és jól ismert modell egy fokozatban, egyidejűleg több vágással, és az úgynevezett "egy-vágásos" modell több fokozatban végrehajtott vágásokkal. Knolmayernek a mérlegegyenletek eliminációjára vonatkozó módszerét felhasználva megmutatjuk, hogy ezek – bizonyos feltételek mellett ekvivalens – különböző megfogalmazások teljes választékának szélsőséges esetei.

1. A két elvileg különböző megközelítés

Mivel leszabási folyamatok modellezésére mindkét elvileg különböző megközelítés jól ismert az irodalomból (pl. [1], [2], [3], [7]), elegendő őket illusztrálni a következő kisméretű példán ([4] 856.o., vö. [1] 1097.o.):

Példa: A raktárban tárolt 9, 6 és 5 egységnyi hosszúságú és hosszegységenként rendre 10, 7 és 6 pénzegység árú anyagot fel kell darabolni oly módon, hogy a 20 db 4 egység, 10 db 3 egység és 20 db 2 egység hosszúságú anyag iránti igényt kielégítsük úgy, hogy a raktárból felhasznált anyagok árösszege minimális legyen.

A feldarabolandó raktári hosszak és a rendelt hosszak halmazát jelöljük az $S = \{9, 6, 5\}$ és a $D = \{4, 3, 2\}$ halmazok. A maradék darabokat értéktelen hulladéknak tekintjük, következésképpen csak olyan szabásminták érdekesek számunkra, amelyekben legfeljebb egyetlen 1 egység hosszúságú darab a maradék ("effektív partíciók" [2]). Ezek az 1. táblázatban láthatók kézenfekvő jelöléssel. (Ennek a cikknek a céljaira nem szükséges a "minta" és "partíció" fogalmak [2]-beli megkülönböztetése.)

1. táblázat: A szokásos modell szabásmintái

- | | | |
|--|--|-------------------------------------|
| 1. $\langle 9 : 4 + 4 + 1 \rangle$ | 6. $\langle 9 : 3 + 2 + 2 + 2 \rangle$ | 11. $\langle 6 : 2 + 2 + 2 \rangle$ |
| 2. $\langle 9 : 4 + 3 + 2 \rangle$ | 7. $\langle 9 : 2 + 2 + 2 + 2 + 1 \rangle$ | 12. $\langle 5 : 4 + 1 \rangle$ |
| 3. $\langle 9 : 4 + 2 + 2 + 1 \rangle$ | 8. $\langle 6 : 4 + 2 \rangle$ | 13. $\langle 5 : 3 + 2 \rangle$ |
| 4. $\langle 9 : 3 + 3 + 3 \rangle$ | 9. $\langle 6 : 3 + 3 \rangle$ | 14. $\langle 5 : 2 + 2 + 1 \rangle$ |
| 5. $\langle 9 : 3 + 3 + 2 + 1 \rangle$ | 10. $\langle 6 : 3 + 2 + 1 \rangle$ | |

¹Fordította: Varró Zoltán, JPTE Közgazdaságtudományi Kar

Legyen

v_j a j -edik minta ismétlési tényezője, azaz ennyi darabot vágunk el a j -edik minta szerint;

x_g a g egység hosszúságú darabok inputja, azaz ennyi g hosszúságú anyagot darabolunk fel;

y_g a g egység hosszúságú darabok outputja, azaz ennyi g hosszúságú anyag keletkezik a szabásmintáknak nagyobb hosszúságú darabokra való alkalmazása esetén.

Világos, hogy $x_g = 0 \quad g \notin S = \{9, 6, 5\}$ és $y_g = 0 \quad g \notin \{4, 3, 2, 1\}$ esetén. Hangsúlyozzuk, hogy ez csak az 1. táblázat mintáira érvényes, és nem általában. A szokásos modell, amelyet itt "alternatív számítás"-nak nevezünk, a következőképpen írható:

(1) Alternatív számítás (szokásos modell)

$$C = 10x_9 + 7x_6 + 6x_5 \rightarrow \min \quad (1a)$$

$$\begin{aligned} x_9 &= v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 + v_7 \\ x_6 &= v_8 + v_9 + v_{10} + v_{11} \\ x_5 &= v_{12} + v_{13} + v_{14} \end{aligned} \quad (1b)$$

$$\begin{aligned} y_4 &= 2v_1 + v_2 + v_3 + v_8 + v_{12} \\ y_3 &= v_2 + 3v_4 + 2v_5 + v_6 + 2v_9 + v_{10} + v_{13} \\ y_2 &= v_2 + 2v_3 + v_5 + 3v_6 + 4v_7 + v_8 + v_{10} + 3v_{11} + v_{13} + 2v_{14} \\ y_1 &= v_1 + v_3 + v_5 + v_7 + v_{10} + v_{12} + v_{14} \end{aligned} \quad (1c)$$

$$y_4 \geq 20, \quad y_3 \geq 10, \quad y_2 \geq 20 \quad (1d)$$

$$v_j \geq 0 \quad \text{és integer, } j = 1, \dots, 14. \quad (1e)$$

A célfüggvény (1a) mutatja, hogy a felhasznált anyagok árösszegét minimalizáljuk. Az (1b) és (1c) egyenletek rendre az input és output mérlegegyenletek. Az (1d) egyenlőtlenségek rögzítik a 4, 3 és 2 egység hosszúságú darabok iránti keresletéből fakadó alsó korlátokat. Az (1e) feltétel miatt az egyes mintákat csak nemnegatív egész számszor lehet alkalmazni. (Számítási okokból az egészértékűségi kikötést kezdetben gyakran elhagyják, és csak később veszik figyelembe egy kerekítési eljárás beiktatásával.)

A szokásos megközelítés egy szabásmintája egy olyan tevékenységet reprezentál, amellyel egy raktári hosszúságú darabot egyszerre több darabra vágunk – amelyek legtöbbje rendelt hossz – feltételezve, hogy korlátlan számú kést használhatunk az egyfokozatú leszábsai folyamatban. Ezzel ellentétben – képzeletben – a másik elvi

megközelítés alapja egy többfokozatú leszabási folyamat, amelyben egyetlen késsel korlátlan számú vágást hajthatunk végre, az ún. "egy-vágásokat" [1] (vagy "bináris vágásokat" [6]). Ezek olyan egyszerű struktúrájú tevékenységek, amelyek egy input hosszúságú darabot két output hosszúságú darabra vágnak. (Két- és többdimenziós problémákra történő általánosítást lásd [2]-ben.) Rendszerint csak azok az egy-vágások érdekesek, amelyeknél legfeljebb egyik darab nem rendelt hossz. Ennek a maradék darabnak a hossza nagyobb is lehet mint a rendelt hosszak és így tovább darabolható. Ezért a raktári hosszak mellett más, a legkisebb rendelt hosszúságú darabnál hosszabb darabok is szolgálhatnak inputként egy-vágások számára.

Kisméretű példánkban a lényeges input és output hosszak rendre

$$I = \{9, 7, 6, 5, 4, 3\} \quad \text{és} \quad K = \{7, \dots, 1\}.$$

A megfelelő egy-vágások listája a 2. táblázatban látható. Mivel az egy-vágások speciális minták, ezért ugyanazokat a szimbólumokat alkalmazhatjuk, mint az előbb, hogy megfogalmazzuk a megfelelő "egy-vágásos modellt", amelyet itt "lépéenkénti számításnak" is nevezünk.

2. táblázat: Lényeges egy-vágások

1. $\langle 9 : 7 + 2 \rangle$	4. $\langle 7 : 5 + 2 \rangle$	7. $\langle 6 : 3 + 3 \rangle$	10. $\langle 4 : 3 + 1 \rangle$
2. $\langle 9 : 6 + 3 \rangle$	5. $\langle 7 : 4 + 3 \rangle$	8. $\langle 5 : 4 + 1 \rangle$	11. $\langle 4 : 2 + 2 \rangle$
3. $\langle 9 : 5 + 4 \rangle$	6. $\langle 6 : 4 + 2 \rangle$	9. $\langle 5 : 3 + 2 \rangle$	12. $\langle 3 : 2 + 1 \rangle$

(2) Lépéenkénti számítás (egy-vágásos modell)

$$C = -10z_9 - 7z_6 - 6z_5 \rightarrow \min \quad (2a)$$

$$\begin{array}{lll} x_9 = v_1 + v_2 + v_3 & x_7 = v_4 + v_5 & x_6 = v_6 + v_7 \\ x_5 = v_8 + v_9 & x_4 = v_{10} + v_{11} & x_3 = v_{12} \end{array} \quad (2b)$$

$$\begin{array}{ll} y_7 = v_1 & y_6 = v_2 \\ y_5 = v_3 + v_4 & y_4 = v_3 + v_5 + v_6 + v_8 \\ y_3 = v_2 + v_5 + 2v_7 + v_9 + v_{10} & y_2 = v_1 + v_4 + v_6 + v_9 + 2v_{11} + v_{12} \\ y_1 = v_8 + v_{10} + v_{12} & \end{array} \quad (2c)$$

$$\begin{array}{llll} z_9 = -x_9 & z_7 = y_7 - x_7 & z_6 = y_6 - x_6 & z_5 = y_5 - x_5 \\ z_4 = y_4 - x_4 & z_3 = y_3 - x_3 & z_2 = y_2 & z_1 = y_1 \end{array} \quad (2d)$$

$$z_7 = 0, \quad z_6 \leq 0, \quad z_5 \leq 0, \quad z_4 \geq 20, \quad z_3 \geq 10, \quad z_2 \geq 20 \quad (2e)$$

$$v_j \geq 0 \quad \text{és} \quad \text{integer}, \quad j = 1, \dots, 12. \quad (2f)$$

A fő különbség a szokásos megközelítéssel szemben abból a tényből adódik, hogy a leszábási folyamat során bizonyos hosszak mind input, mind output hosszként előfordulhatnak. Ez a közbenső hosszak $L = I \cap K = \{7, 6, 5, 4, 3\}$ halmaza. Ezekre a g hosszakra csupán az y_g (bruttó) output és x_g (bruttó) input z_g különbsége, azaz a (2d) egyenletek által definiált nettó output a lényeges. Csak a raktári hosszak nettó inputja, azaz $-z_9$, $-z_6$ és $-z_5$ jelent költséget ennek a példának a (2a) célfüggvényében. Analóg módon csak a rendelt hosszak nettó outputja, azaz z_4 , z_3 és z_2 alkalmas a (2e) keresleti feltételek kielégítésére. Ezek egyenesen következnek a szokásos modellel való összehasonlításból. Alapvető változások a szabásminták különböző definíciójából származnak, amelyből a (2e) alatti újabb három feltétel adódik. Ez annak tulajdonítható, hogy az 1. táblázat nem tartalmaz olyan mintákat, amelyekben 7, 6 és 5 hosszúságú maradék darabok szerepelnek. Következésképpen ahhoz, hogy ekvivalens modelleket kapjunk, ezeket a mintákat is figyelembe kell venni, azaz kibővíteni az 1. táblázatot és az alternatív számítási modellt, vagy korlátozzuk a 7, 6 és 5 közbenső hosszak nettó outputját a lépésenkénti számítást illetően.

2. Más ekvivalens megfogalmazások

A két modell ekvivalens abban az értelemben, hogy ugyanazokat a termelési (vágási) lehetőségeket teszik lehetővé, és ugyanazt a célt követik. Ezen kívül több ekvivalens megfogalmazás létezik. Hogy ezt megmutassuk, az egy-vágásos modellt a bruttó inputra és bruttó outputra vonatkozó x_g és y_g változók eliminálásával egyszerűsítjük. Ez nem változtatja meg a (2a), (2e) és (2f) feltételeket, míg (2b-d) nyolc egyenletté sűrűsödik, amelyek a $g \in G = \{9, 7, 6, \dots, 1\}$ hosszak input/output mérlegeire vonatkoznak. A v_j ismétlési tényezők indexeit célszerű úgy megváltoztatni, hogy közvetlenül interpretálhatók legyenek. Így például v_{954} a $\langle 9 : 5 + 4 \rangle$ minta gyakoriságát írja le, azaz azoknak a 9 egység hosszúságú daraboknak a számát, amelyeket 5 és 4 hosszúságú darabokra vágunk szét.

(3) Az egy-vágásos modell (2b-d) egyszerűsített mérlegei

$$\begin{aligned}
 -z_9 &= v_{972} + v_{963} + v_{954} \\
 z_7 &= v_{972} - v_{752} - v_{743} \\
 z_6 &= v_{963} - v_{642} - v_{633} \\
 z_5 &= v_{954} + v_{752} - v_{541} - v_{532} \\
 z_4 &= v_{954} + v_{743} + v_{642} + v_{541} - v_{431} - v_{422} \\
 z_3 &= v_{963} + v_{743} + 2v_{633} + v_{532} + v_{431} - v_{321} \\
 z_2 &= v_{972} + v_{752} + v_{642} + v_{532} + 2v_{422} + v_{321} \\
 z_1 &= v_{541} + v_{431} + v_{321}
 \end{aligned}$$

Mivel (2e)-ben $z_7 = 0$, ezért a 9 és 2 hosszak mérlegegyenleteiben elvégezhetjük a $v_{972} = v_{752} + v_{743}$ helyettesítést. Ezáltal a v_{752} és v_{743} szimbólumok új jelentést nyernek. Ezek már nem egy-vágásokat írnak le, hanem "két-vágásokat", azaz összetettebb szabásmintákat. Ezért helyettük két új szimbólumot vezetünk be, mégpedig $v_{9522} := v_{752}$ és $v_{9432} := v_{743}$, és ezáltal egy új, de ekvivalens megfogalmazáshoz jutunk.

(4) A 7 hosszúságot nem tartalmazó transzformált mérlegegyenletek

$$\begin{aligned} -z_9 &= v_{963} + v_{954} + v_{9522} + v_{9432} \\ z_6 &= v_{963} - v_{642} - v_{633} \\ z_5 &= v_{954} + v_{9522} - v_{541} - v_{532} \\ z_4 &= v_{954} + v_{9432} + v_{642} + v_{541} - v_{431} - v_{422} \\ z_3 &= v_{963} + v_{9432} + 2v_{633} + v_{532} + v_{431} - v_{321} \\ z_2 &= 2v_{9522} + v_{9432} + v_{642} + v_{532} + 2v_{422} + v_{321} \\ z_1 &= v_{541} + v_{431} + v_{321} \end{aligned}$$

Az egyenletek és a változók száma az új rendszerben eggyel csökkent. Eltekintve a z_9 változó nettó outputra vonatkozó triviális helyettesítésétől a mérlegegyenletek változók helyettesítésével történő további transzformációja nem látszik lehetségesnek. Mégis alkalmazhatjuk Knolmayernek [5] lineáris programozási feladatok mérlegfeltételeinek – azaz olyan egyenleteinek, amelynek a jobboldala zéró – kiküszöbölésére vonatkozó módszerét. A 7 hosszúságra vonatkozó mérlegfeltétel kiküszöbölése ezzel a módszerrel ugyanazt az eredményt adja, mint fent. Továbbá gyümölcsözően alkalmazható a

$$s_6 + v_{963} - v_{642} - v_{633} = 0$$

mérlegfeltétel kiküszöbölésére, amely megkapható az s_6 eltérésváltozó bevezetésével, amelyre (2e) miatt $s_6 = -z_6 \geq 0$. Knolmayer módszere megköveteli, hogy minden pozitív előjelű nemnegatív változót a mérlegfeltételben kombináljunk minden negatív előjelű nemnegatív változóval abból a célból, hogy az új (kombinált) tevékenységeket definiáljuk. Ebben az esetben ez a $v_{6.642}$, $v_{6.633}$, $v_{963.642}$, $v_{963.633}$ új változókhoz vezet, amelyek kapcsolata a régi négy változóval a következő:

$$\begin{aligned} s_6 &:= v_{6.642} + v_{6.633} & v_{642} &:= v_{6.642} + v_{963.642} \\ v_{963} &:= v_{963.642} + v_{963.633} & v_{633} &:= v_{6.633} + v_{963.633} \end{aligned}$$

Behelyettesítve a (4) mérlegegyenletekbe azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
 -z_9 &= (v_{963.642} + v_{9432}) + v_{963.633} + v_{954} + v_{9522} \\
 -z_6 &= v_{6.642} + v_{6.633} \\
 z_5 &= v_{954} + v_{9522} - v_{541} - v_{532} \\
 z_4 &= (v_{963.642} + v_{9432}) + v_{954} + v_{6.642} + v_{541} - v_{431} - v_{422} \\
 z_3 &= (v_{963.642} + v_{9432}) + 3v_{963.633} + 2v_{633} + v_{532} + v_{431} - v_{321} \\
 z_2 &= (v_{963.642} + v_{9432}) + 2v_{9522} + v_{6.642} + v_{532} + 2v_{422} + v_{321} \\
 z_1 &= v_{541} + v_{431} + v_{321}
 \end{aligned}$$

Látható, hogy a $v_{963.642}$ és v_{9432} változók lineárisan függők, tehát közülük egyik törölhető. Továbbá az ismétlési tényezők együtthatóinak interpretációja a következő új definíciókhoz vezet:

$$v_{9333} := v_{963.633}, \quad v_{642} := v_{6.642}, \quad v_{633} := v_{6.633}$$

és így a mérlegegyenletek következő új rendszerét kapjuk:

(5) A 7 és 6 közötti hosszakat nem tartalmazó transzformált mérlegegyenletek

$$\begin{aligned}
 -z_9 &= v_{954} + v_{9522} + v_{9432} + v_{9333} \\
 -z_6 &= v_{642} + v_{633} \\
 z_5 &= v_{954} + v_{9522} - v_{541} - v_{532} \\
 z_4 &= v_{954} + v_{9432} + v_{642} + v_{541} - v_{431} - v_{422} \\
 z_3 &= v_{9432} + 3v_{9333} + 2v_{633} + v_{532} + v_{431} - v_{321} \\
 z_2 &= 2v_{9522} + v_{9432} + v_{642} + v_{532} + 2v_{422} + v_{321} \\
 z_1 &= v_{541} + v_{431} + v_{321}
 \end{aligned}$$

A (2.a) célfüggvénnyel, valamint a (2e) és (2f) feltételekkel ez a leszabási feladat egy új modellje, amely ekvivalens az előzőekben leírt másikkal. Lényeges, hogy Knolmayer módszere megőrzi a változókra vonatkozó nemnegativitási és egészértékűségi feltételeket. Az ismétlési tényezők nemnegativitása következtében a (2e)-beli $z_6 \leq 0$ feltétel most a megfelelő mérlegegyenletből következik. Ez $z_5 \leq 0$ -ra nem érvényes. Ugyanúgy folytathatjuk, mint az előbb, bevezetjük az $s_5 = -z_5$ eltérésváltozót és Knolmayer módszerével elimináljuk a megfelelő

$$s_5 + v_{954} + v_{9522} - v_{541} - v_{532} = 0$$

mérlegegyenletet. Az új változók $v_{5.541}$, $v_{5.532}$, $v_{954.541}$, $v_{954.532}$, $v_{9522.541}$ és $v_{9522.532}$, amelyek az alábbi kapcsolatban vannak a régiekkel:

$$\begin{aligned}
 s_5 &:= v_{5.541} + v_{5.532} & v_{541} &:= v_{5.541} + v_{954.541} + v_{9522.541} \\
 v_{954} &:= v_{954.541} + v_{954.532} & v_{532} &:= v_{5.532} + v_{954.532} + v_{9522.532} \\
 v_{9522} &:= v_{9522.541} + v_{9522.532}
 \end{aligned}$$

Behelyettesítve az (5) mérlegegyenletekbe, majd törölve a $v_{954,532}$ változót v_{9432} -vel való lineáris függősége miatt és bevezetve a

$$\begin{aligned} v_{9441} &:= v_{954,541}, & v_{94221} &:= v_{9522,541}, & v_{93222} &:= v_{9522,532}, \\ v_{541} &:= v_{5,541}, & v_{532} &:= v_{5,532} \end{aligned}$$

jelöléseket a következő ekvivalens modellhez jutunk:

(6) A 7, 6 és 5 közbülső hosszakat nem tartalmazó transzformált mérlegegyenletek

$$\begin{aligned} -z_9 &= v_{9441} + v_{9432} + v_{94221} + v_{9333} + v_{93222} \\ -z_6 &= v_{642} + v_{633} \\ -z_5 &= v_{541} + v_{532} \\ z_4 &= 2v_{9441} + v_{9432} + v_{94221} + v_{642} + v_{541} - v_{431} - v_{422} \\ z_3 &= v_{9432} + 3v_{9333} + v_{93222} + 2v_{633} + v_{532} + v_{431} - v_{321} \\ z_2 &= v_{9432} + 2v_{94221} + 3v_{93222} + v_{642} + v_{532} + 2v_{422} + v_{321} \\ z_1 &= v_{9441} + v_{94221} + v_{541} + v_{431} + v_{321} \end{aligned}$$

Már csak két közbülső hossz maradt, a 4 és a 3. A következő eliminációs lépésben a 4-et választjuk, és felírjuk a

$$2v_{9441} + v_{9432} + v_{94221} + v_{642} + v_{541} - v_{431} - v_{422} - z_4 = 0$$

mérlegegyenletet, amelyben minden változó nemnegatív (2f) miatt, és mivel $z_4 \geq 20$ (2e)-ben. Ha bevezetjük az 5×3 új változót az $5+3=8$ régi helyett a

$$\begin{aligned} v_{9441} &:= v_{9441,431} + v_{9441,422} + v_{9441,4} \\ v_{9432} &:= v_{9432,431} + v_{9432,422} + v_{9432,4} \\ v_{94221} &:= v_{94221,431} + v_{94221,432} + v_{94221,4} \\ v_{642} &:= v_{642,431} + v_{642,422} + v_{642,4} \\ v_{541} &:= v_{541,431} + v_{541,422} + v_{541,4} \\ v_{431} &:= 2v_{9441,431} + v_{9432,431} + v_{94221,431} + v_{642,431} + v_{541,431} \\ v_{422} &:= 2v_{9441,422} + v_{9432,422} + v_{94221,422} + v_{642,422} + v_{541,422} \\ z_4 &:= 2v_{9441,4} + v_{9432,4} + v_{94221,4} + v_{642,4} + v_{541,4} \end{aligned}$$

egyenlőségekkel, akkor transzformálhatjuk a (6) mérlegegyenleteket. Az új egyenletek jobban olvashatók az alábbi helyettesítések után:

$$\begin{aligned} v_{9441} &:= v_{9441,4}, & v_{9432} &:= v_{9432,4}, & v_{94221} &:= v_{94221,4} \\ v_{642} &:= v_{642,4}, & v_{541} &:= v_{541,4} \\ v_{93321} &:= v_{9432,431}, & v_{93222} &:= v_{9432,422} + v_{93222} \\ v_{922221} &:= v_{9441,422} + v_{94221,422} \\ v_{6321} &:= v_{642,431}, & v_{6222} &:= v_{642,422}, & v_{5221} &:= v_{541,422} \\ v_{933111} &:= v_{9441,431}, & v_{932211} &:= v_{94221,431}, & v_{5311} &:= v_{541,431} \end{aligned}$$

(7) A 7, 6, 5 és 4 közbülső hosszakat nem tartalmazó transzformált mérlegegyenletek

$$\begin{aligned}
 -z_9 &= v_{9441} + v_{9432} + v_{94221} + v_{9333} + v_{93321} + v_{93222} + v_{922221} \\
 &\quad (+v_{933111} + v_{932211}) \\
 -z_6 &= v_{642} + v_{633} + v_{6321} + v_{6222} \\
 -z_5 &= v_{541} + v_{532} + v_{5221} (+v_{5311}) \\
 z_4 &= 2v_{9441} + v_{9432} + v_{94221} + v_{642} + v_{541} \\
 z_3 &= v_{9432} + 3v_{9333} + 2v_{93321} + v_{93222} + 2v_{633} + v_{6321} + v_{532} - v_{321} \\
 &\quad (+2v_{933111} + v_{932211} + v_{5311}) \\
 z_2 &= v_{9432} + 2v_{94221} + v_{93321} + 3v_{93222} + 4v_{922221} + v_{642} + v_{6321} + 3v_{6222} + \\
 &\quad v_{532} + 2v_{5221} + v_{321} (+2v_{93221}) \\
 z_1 &= v_{9441} + v_{94221} + v_{93321} + v_{922221} + v_{6321} + v_{541} + v_{5221} + v_{321} \\
 &\quad (+3v_{933111} + 2v_{932211} + 2v_{5311})
 \end{aligned}$$

A $(9 : 3 + 3 + 1 + 1 + 1)$, $(9 : 3 + 2 + 2 + 1 + 1)$ és $(5 : 3 + 1 + 1)$ szabásminták nem hatékonyak, mivel egynél több 1 hosszúságú maradék hosszát eredményeznek, ami szükségtelen hulladékot jelent. Ezért ezek zárójelben vannak. A (7) modellben egyedül a 3 közbülső hossz szerepel. Ha a megfelelő mérlegfeltételt az előzőkhöz hasonlóan elimináljuk (tekintetbe véve, hogy $z_3 \geq 0$), akkor az utolsó ekvivalens megfogalmazáshoz jutunk, amelyben már nincsenek közbülső hosszak.

(8) Közbülső hosszt nem tartalmazó transzformált mérlegegyenletek

$$\begin{aligned}
 x_9 := z_9 &= v_{9441} + v_{9432} + v_{94221} + v_{9333} + v_{93321} + v_{93222} + v_{922221} + \\
 &\quad (v_{933111} + v_{932211} + v_{9222111} + v_{92211111}) \\
 x_6 := -z_6 &= v_{642} + v_{633} + v_{6321} + v_{6222} (+v_{62211}) \\
 x_5 := -z_5 &= v_{541} + v_{532} + v_{5221} (+v_{5311} + v_{52111}) \\
 y_4 := z_4 &= 2v_{9441} + v_{9432} + v_{94221} + v_{642} + v_{541} \\
 y_3 := z_3 &= v_{9432} + 3v_{9333} + 2v_{93321} + 2v_{93222} + 2v_{633} + v_{6321} + v_{532} \\
 &\quad (+2v_{933111} + v_{932211} + v_{5311}) \\
 y_2 := z_2 &= v_{9432} + 2v_{94221} + v_{93321} + 3v_{93222} + 4v_{922221} + v_{642} + \\
 &\quad v_{6321} + 3v_{6222} + v_{532} + 2v_{5221} + \\
 &\quad (2v_{93221} + 3v_{9222111} + 2v_{92211111} + 2v_{62211} + v_{52111}) \\
 y_1 := z_1 &= v_{9441} + v_{94221} + v_{93321} + v_{922221} + v_{6321} + v_{541} + v_{5221} + \\
 &\quad (3v_{933111} + 2v_{932211} + 3v_{9222111} + 5v_{92211111} + 2v_{62211} + \\
 &\quad 2v_{5311} + 3v_{52111})
 \end{aligned}$$

Mivel a zárójelben szereplő ismétlési tényezők megfelelnek a nem effektív szabásmintáknak, ezért a mérlegegyenleteknek ez megfogalmazása ekvivalens a szokásos Alternatív számítás (1b-c) egyenleteivel a hatékony vágás tekintetében. Az egyenletek azonosak, ha a nem hatékony mintákat elhagyjuk.

3. Következtetések

A példa azt illusztrálja, hogy az egy vágásos modellek ("Lépésenkénti számítás") hogyan transzformálhatók a megfelelő több vágásos modellbe a közbülső (azaz inputként és outputként is előforduló) hosszak lépésről-lépésre történő eliminációjával, míg el nem érjük a közbülső hosszak nélküli szokásos megfogalmazást ("Alternatív számítás"). Mindezek a modellek, azaz mind a két szélsőséges megfogalmazás és a közbülsők is ekvivalensek a leírt termelési lehetőségek tekintetében. A nem hatékony minták elhagyása a hatékony termelési lehetőségeket nem befolyásolja [2]. Továbbá, a transzformációs folyamat felszínre hozza mindkét elvi megközelítés néhány implicit feltételezését, főképpen azokat, amelyek nem rendelt hosszúságú maradék darabok. Mivel Knolmayer [5] módszere bármely mérlegegyenleteket tartalmazó LP feladatra alkalmazható, a fenti feltételezés általában teljesül, még több dimenziós leszábási feladatra is.

IRODALOM

1. DYCKHOFF, H. (1981), A new linear programming approach to the cutting stock problem; in: *Operation Research* 29, pp. 1092-1104.
2. DYCKHOFF, H. (1988), Production theoretic foundation of cutting and related processes; in: G. Fandel, H. Dyckhoff, J. Reese (eds.), *Essays on Production Theory and Management*, Springer, Berlin et al. (to appear).
3. DYCKHOFF, H. - H. GERLING (1988), Trim loss and inventory planning in a small textile firm; in: G. Fandel, H. Dyckhoff, J. Reese (eds.), *Essays on Production Theory and Management*, Springer, Berlin et al. (to appear).
4. GILMORE, P. C. - R. E. GOMORY (1961), A linear programming approach to the cutting stock problem; in: *Operation Research* 9, pp. 849-859.
5. KNOLMAYER, G. (1981), Computational experiments in the formulation of linear product-mix and non-convex production-investment models; in: *Computers & Operations Research* 9, pp. 207-219.
6. RAO, M. R. (1976), On the cutting stock problem; in: *Journal of the Computer Society of India* 7, pp. 35-39.
7. STADTLER, H. (1988), A comparison of two optimization procedures for 1-1 1/2 - dimensional cutting stock problems; in: *OR Spektrum* 10 (to appear).

ABSTRACT

There exist two principal approaches for modelling cutting stock processes: the usual and well-known model with multicuts in single-stage cutting and the so-called "one-cut

model" with multi-stage cutting. Using a method of Knolmayer for the elimination of balance equations it is shown that both are the extremes of a whole variety of different formulations which are equivalent under certain conditions.

GYÁRTELEPÍTÉSI TERVEK TÖBBKRITÉRIUMOS ANALÍZISE¹

EWA KONARZEWSKA-GUBALA

Oskar Lange Közgazdasági Akadémia, Lengyelország

Az alapvető kérdés, ami gyártelepítéssel kapcsolatban a gyakorlatban felvetődik, „Milyen jó gyárunk telepítési terve?”. Módszertanilag ez egy többkritériumos értékelési probléma. A kérdés megválaszolására ebben a cikkben PC-re kidolgozott, többkritériumos döntéselőkészítés (MCDM) céljaira használható módszert javasolunk. A módszer lényege a döntési alternatívák (telepítési tervek) ütköztetésében rejlik, melyeket kardinális és ordinális kritériumok alapján értékelünk, kétféle referencia objektum felhasználásával, nevezetesen: az ún. „kívánatos” és a „nem elfogadható” változatok segítségével (MCDM modell bipoláris referencia rendszerrel). A módszer alkalmazását egy esettanulmány segítségével reprezentáljuk.

1. Bevezetés

Napjainkra nyilvánvalóvá vált, hogy a különböző tevékenységek összehasonlítása előnyösségük alapján, a kivitelezhető alternatívák megítélése és az optimális megoldás megkeresése döntési problémákban sok esetben nem megvalósítható egy kritérium vagy egy célfüggvény alkalmazásával. Ez az oka annak, hogy a vezetéstudomány, az operációkutatás és a közgazdaságtan számos ágának szakirodalmában a figyelem a diszkrét többkritériumos, vagy a folytonos többcélfüggvényes programozási modellek, mint a modern döntéshozási folyamat eszközei felé fordult. A kompromisszum, vagy a kielégítő megoldás koncepciója az optimalitás hagyományos koncepciójának figyelemre méltó versenytársává vált.

A „legjobb” kompromisszum keresése során a legtöbb többcélfüggvényes módszer kihasználja a „legjobb” geometriai definícióját. Az „ideális pont koncepció” és általánosabb változata, a „referenciapont koncepció” a szakirodalomban igen sok helyen megjelenik (lásd pl. 10. fejezet [11]-ben és [1]-ben).

A referencia célkoncepció a döntéshozó preferenciáinak rendezéséhez a céltérben értelmezett pontokat (halmazt) használ, amelyek a döntéshozó által kitűzött, elérendő (vagy kielégítő) szintet reprezentálják. Ez a távolságon alapuló megközelítés nem igényli sem a döntéshozó preferenciáinak explicit kifejezését vagy meghatározását, sem az egymásnak ellentmondó célok közötti kapcsolatok, arányok explicit számzerű megfogalmazását.

¹Fordította: Gyetván Ferenc, JPTE Közgazdaságtudományi Kar

Mindezek ellenére a modellek többségét elsősorban folytonos problémák kiszámú kvantitatív kritérium alapján történő megoldására dolgozták ki. Sőt mi több, ezek a modellek általában nem veszik figyelembe azt a lehetőséget, hogy a döntéshozó preferenciáit nem csak a pozitív referencia megoldás halmaz, hanem a negatív, ún. „anti-ideális” megoldáshalmaz is befolyásolja. Bár az ideálshoz a lehető legközelebbi megoldás nem azonos az „anti-ideálistól” a lehető legtávolabbi megoldással (a kompromisszumos megoldások halmazai különbözők, [11], p. 330), mindkét koncepció ugyanazon döntéselőkészítő analízis szimmetrikusan kapcsolódó változatának tekinthető és inkább vagylagosan használatos, semmint párhuzamosan [1], p. 305.

A leíró döntési modellekből következik, hogy a siker (S) elérésére és a kudarc (N) elkerülésére való törekvés nem teljesen szimmetrikus szerepet kap. A két motiváció (S és N) külön-külön befolyásolja a döntést, nemcsak $S-N$ különbségük révén (lásd [7], p. 49). Az elmondottak miatt vezettük be a már korábbi közleményeinkben ([3], [4]) is bemutatott bipoláris referenciarendszer koncepcióját.

Az analízis lényege abban áll, hogy a döntési változatokat, melyeket egyébként kardinális és ordinális kritériumok alapján értékelnünk, nem hasonlítjuk egymáshoz. E helyett, az alternatívákat a két referenciaobjektummal, a kívánatos és a nem elfogadható megoldással mérjük össze, így minden alternatívához egy „pozíció” vektort rendelünk. A vektor két komponense egymástól függetlenül értékeli a siker elérésének és a kudarc elkerülésének mértékét.

Szerintünk a közgazdaságtan számos területén vannak olyan döntési problémák, amelyek a fentiekben vázolt elvek, módszerek felhasználásával oldhatók, sőt inkább oldandók meg. A gyártelepítési tervek ezen problémák közé tartoznak. A 2. fejezetben megpróbáljuk igazolni ezt az állítást és megalkotni a többkritériumos tervezésmódot bipoláris referenciarendszerrel, egy jellemző példa segítségével. Az elemzési folyamat főbb lépéseit a 3. fejezetben részletezzük. Ezeket szintén számszerű példával illusztráljuk. A 4. fejezet a mintapélda eredményeivel és a kiindulási probléma újraelemzési lehetőségei még általánosabb specifikációjával teszi teljessé gondolatmenetünket.

2. A probléma megfogalmazása. Egy jellemző példa

A berendezések, munkaterületek telepítése, elhelyezése, elrendezése elkerülhetetlen probléma ipari üzemekben. Így azután a kérdés nem az, „Legyen-e telepítés?”, hanem sokkal inkább az, „Milyen jó a telepítési tervünk?” (R: MUTHER [6], p. 3). Erre a válasz talán sokkal fontosabb, mint bármilyen más kérdés. Amikor a „gyártelepítés” terminológiát használjuk, hol a meglévő struktúrát, hol a tervet értjük rajta. Mindkét esetben azonban ugyanazon értékelési problémával kerülünk szembe. Természetesen többkritériumos értékelési, illetve többcélűfüggvényes döntési feladatról van szó. R. Muther „Gyártelepítés a gyakorlatban” című klasszikus művében 15 célfüggvényt sorol fel. A legfontosabbak elvek formájában vannak megfogal-

mazva. A gyártelepítési tervek értékelésének hat alapelve a következő ([6], p. 7-8):

- 1) Az átfogó integráció elve
- 2) A minimális anyagmozgatás elve
- 3) A folyamatosság, a soronkövetkezőség elve
- 4) A minimális tér, a maximális térkihasználás elve
- 5) A munkáselégedettség és biztonság elve
- 6) A rugalmasság elve

Általánosan fogalmazva, azt a „telepítési tervet” keressük, amelyet adott előírt produktum esetén a leggazdaságosabb működtetni, és emellett biztonságos és sikerélményt nyújtó a dolgozók számára. Pontosabban, pl. a minimális anyagmozgatás elve szerint „az a telepítés a legjobb, amely minden mást változatlanak tekintve a lehető legkisebb anyagmozgatással jár” ([6]. p. 7). Egy másik, pl. a rugalmasság elve szerint „az a telepítés a legjobb, amely minden mást változatlanak tekintve, minimális költséggel és kényelmetlenséggel átrendezhető” ([6], p. 8).

Nagy valószínűséggel lehetetlen minden célt egyszerre elérni. Különböző telepítési tervek különböző módon fognak megfelelni a követelményeknek, minthogy a tervező szakemberek szempontjai különbözőek voltak. Mindazonáltal a döntéshozó egyes tervek jónak, másokat rossznak fog itélni.

A „jó” telepítési terv kialakításának előzőekben is említett elvei ezen probléma esetében a „tudásbázis” részét képezik. Ez lehetővé teszi a döntéshozó számára, hogy megfogalmazza magának azt, ami kívánatos, és azt, ami nem elfogadható. A „tudásbázis” egy másik része a döntéshozó tapasztalata pl. meglévő, működő gyárak üzemeltetésében. Más, többé-kevésbé határozatlan, többé-kevésbé szubjektív elemek szintén szerepelni fognak. A vizsgált probléma esetében a célalternatívák a döntéshozó személyes preferenciáival kombinált tudásbázisa figyelembevételére igen egyszerű és kényelmes módszernek tűnik, ha bizonyos valóságos vagy fiktív telepítési terveket ezen „holisztikus tudásbázis” (vagy ésszerűség) reprezentációjának fogadjuk el.

Az 1. fejezetben részben bemutatott leíró döntésmélet új eredményeinek figyelembevételével kétfajta referenciatelepítési terv definiálását javasoljuk: a „jó” és a „rossz” értékelésű változatokét. Ezek képezik a bipoláris referenciarendszert értékelési feladatunkban.

Feltételezhetjük, hogy a döntéshozó szeretné tudni a „Milyen jó gyárunk telepítési terve?” kérdésre a választ, éppen annak javítása érdekében. Ezért szakembereivel különböző tervezeteket dolgoztat ki. Bármilyen változás az adott struktúrában pótlólagos költségeket és termelési zavarokat okoz. Így az előnyöknek kétségteleneknek kell lenniük.

Módszertani szempontból kevés döntési alternatívánk és sok (kvantitatív és kvalitatív) értékelési kritériumunk van. Ez utóbbi jellemvonás tervezési munkák kezdeti szakaszában tipikus. Emellett az értékelendő alternatívák közötti kapcsolatok nem érdekesek számunkra. Célunk összhang megteremtése ezek közül bármelyik, és a döntéshozó követelményei között, melyet a termelési tervek bipoláris referenciarend-

szere reprezentál. Más szavakkal, a speciális döntéstámogató eszköz a vizsgált tervnek az elfogadott referenciarendszer két pólusához viszonyított „helyzete” meghatározásához szükséges. Ilyen döntéstámogató eljárást már korábbi közleményeinkben javasoltunk [3], [4].

Az eljárás alapgondolata és főbb lépései a következő fejezetben szerepelnek, és egy jellemző gyártelepítési probléma többkritériumos döntéselőkészítő analizisének számszerű példája illusztrálja az eljárás lényegét.

Általános esetben a bipoláris referenciarendszerre alapozott MCDM modell megkonstruálása a következő elemek meghatározását jelenti:

- a döntési alternatívák véges $O = \{o_i\}$ halmaza;
- a $K = \{f_j\}$, $f_j(o_i) : O \rightarrow E_j$ értékelő kritériumok halmaza, ahol E_j kardinális vagy ordinális vagy bináris skála;
- a $P = [p_j]$, $\sum p_j = 1$ halmaz, a kritériumok relatív fontosságának súlyai;
- a bipoláris referencia célrendszer $R = \{r_i\}$ két véges halmaz formájában: „jó” $D = \{d_h\}$ és „rossz” $Z = \{z_k\}$ úgy, hogy $D \cup Z = R$, $D \cap Z = \emptyset$;
- a z küszöbérték az ELECTRE II módszer alapján számított sorbarendező indikátorok előállításához úgy, hogy $\min p_j \leq z \leq 1$.

Mintapéllda: A mintapéldában a „Milyen jó gyárunk telepítési terve?” kérdésre kell válaszolnunk, adott esetben gépipari összeszerelő üzemrész egy meglévő és három javasolt fiktív telepítési terve, mint döntési alternatívák elemzése útján (az adatok esettanulmány eredményén alapulnak). Jelöljük az értékelt tervek halmazát a következőképpen:

$$O = \{o_1(\text{meglévő}), o_2, o_3, o_4\}$$

Minden tervet 12 kritérium alapján értékeltünk, amelyeket a döntéshozó segítségével határoztunk meg.

Ezek közül hét szigorúan kvantitatív:

- f_1 = a belső anyagmozgatás távolságának csökkenése [%]: maximalizálandó;
- f_2 = az adminisztrációs és közvetett munka (ellenőrzés, információ, adatközlés, szállítás stb. növekedése [%]: minimalizálandó;
- f_4 = a területkihasználás [arány]: maximalizálandó;
- f_5 = a műveleti blokkok és a karbantartó terület közötti átlagos távolság [m (méter)]: minimalizálandó;
- f_7 = a blokkok közötti hetenkénti szállítási egységek maximális száma: minimalizálandó;

f_8 = a blokkok közötti hetenkénti szállítási egységek átlagos száma: minimalizálendő;

f_9 = a munkahelyek, a kiszolgáló helyek és a raktárak közötti átlagos távolság [m]: minimalizálendő.

Négy ordinális kritérium van:

f_3 = a munkahelyek ellenőrzöttségének jósága (jó, kielégítő, nem kielégítő): maximalizálendő;

f_6 = a munkahelybővítés költségeinek szintje (alacsony, közepes, magas, nagyon magas): minimalizálendő;

f_{10} = a szerelő üzembrész és a raktárak integrációjának szintje (jó, kielégítő, nem kielégítő): maximalizálendő;

f_{11} = a vibráció, zaj szintje az adminisztratív munkahelyeken (alacsony, közepes, magas, nagyon magas): minimalizálendő;

Egy bináris kritérium van:

f_{12} = figyelembe veszi-e a telepítési terv a meglévő épületeket? (igen, nem). Az előnyös válasz: igen.

Ezek után, a döntéshozó jelzései alapján a referenciaobjektumok két halmazát azonosítjuk: a „jó” D és a „rossz” Z változatok halmazait.

A „jó” halmazba három változatot soroltunk:

$$D = \{d_h\}, \quad h = 1, 2, 3$$

A „rossz” halmazba négy fiktív változat került:

$$Z = \{z_k\}, \quad k = 1, 2, 3, 4$$

Az összes objektumot, vagyis a vizsgált o_i tervváltozatokat és a d_h, z_k referenciaobjektumokat a 12 kritérium szerint kiértékeljük. Az értékelés eredménye, a pozíciómátrix az 1. táblázatban látható. A küszöbérték $z = 0.5$, a kritériumok súlyozására a következő vektort fogadtuk el:

$$P = [0.20, 0.04, 0.04, 0.05, 0.05, 0.15, 0.07, 0.07, 0.04, 0.05, 0.04, 0.20]$$

1. táblázat: Kritériumértékelések

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}
o_1	0.0	8.3	K	2.12	98	A	457	185	126	J	A	I
o_2	5.0	0.0	K	2.79	97	N	457	185	126	J	M	I
o_3	53.3	8.3	J	1.45	71	K	1112	303	60	K		N
o_4	33.6	8.3	J	1.79	112	M	548	235	97	K	K	I
d_1	5.0	0.0	K	2.00	100	A	460	225	80	J	A	I
d_2	30.0	0.0	K	2.50	80	M	750	375	80	J	A	I
d_3	30.0	0.0	J	2.50	80	A	750	375	80	J	A	N
z_1	5.0	10.0	N	1.50	100	M	750	450	118	N	M	I
z_2	5.0	10.0	N	2.50	80	M	750	450	118	K	K	I
z_3	20.0	10.0	N	1.50	100	N	1050	450	118	N	M	I
z_4	0.0	10.0	N	2.50	80	A	460	450	118	N	K	I

3. Az analízis alap gondolata és fázisai

Az általunk javasolt analitikus eljárás célja az o_i döntési változatok összevetése az $R = D \cup Z$ bipolaris referenciarendszer elemeivel a vizsgált változatok referenciarendszerhez viszonyított helyzetének meghatározása érdekében. Formálisan az összehasonlítás az $O \times R$ halmazon értelmezett bináris leképezés definiálását jelenti. A modellfeltételek (a változatok véges halmaza, kvantitatív és kvalitatív kritériumok) és a sorbarendezés speciális tulajdonságai tették szükségessé, hogy ezt a fajta bináris relációt használjuk.

A sorbarendező struktúrát a többkritériumos analízis francia iskolája vezette be. Az itt használatos terminológia „az egyik alternatíva felülmúlja a másikat” azt jelenti, hogy az előbbi legalább olyan jó, mint az utóbbi, vagy az előbbi kedvező volta figyelembe véve a rendelkezésre álló információkat, megnyugtatónak ítéltetett (lásd ROY [8], [9]).

A preferencia és a közömbösség klasszikus kapcsolata mellett egy rendezési elv lehetővé teszi a szakember számára, hogy olyan változatokat is összehasonlítsa, amelyeket a döntéshozó nem hajlandó, vagy nem tudja, hogy hogyan kell összehasonlítani.

A kapcsolódó modellben az $O \times R$ halmazon értelmezett rendezési transzformáció a vektoros kritérium-értékelésen alapul. Minthogy ez az információ gyakran a preferenciastruktúra bizonytalanságának és kétértelműségének okozója, bevezetjük az ún. „fuzzy rendezési elv” fogalmát, mely a páronkénti összehasonlítás valósághibb képét adja, mint a determinisztikus struktúra.

1. definíció: Az $X \times Y$ halmazon definiált $d : X \times Y \rightarrow [0, 1]$ „fuzzy” sorbarendezési relációt tagfüggvénynek nevezzük, melynek $d(x, y)$ értékei bármely két

$x \in X$ és $y \in Y$ elem közötti kapcsolat erősségét jelzik abban az értelemben, hogy „ x kedvezőbb, mint y ”.

2. *definíció:* Vezessük be a következő jelöléseket: $d(o_i, r_t) = d_{it}^+$, $d(r_t, o_i) = d_{it}^-$. A d_{it}^+ és d_{it}^- értékeket o_i -nak r_t -re, ill. r_t -nek o_i -ra vonatkozó rendezési indikátorának nevezzük.

A definiált összefüggések és a döntéshozó által feltételezett döntési paraméterek lehetővé teszik a tervezett összevetést. Ezt három szakaszban tehetjük meg.

I. szakasz: Az o_i objektumok összehasonlítása az $R = D \cup Z$ referenciarendszer elemeivel

A. *A rendezési indikátorok meghatározása.* Az összehasonlítást az $O = \{o_i\}$ halmaz elemei és az $R = \{r_t\}$ halmaz elemei között tesszük, nem vizsgáljuk a O -ban és az R -ben a belső viszonyokat.

Minden (o_i, r_t) pár esetében az „ o_i felülmúlja r_t -t” definíciójú hipotézist vizsgáljuk meg (hasonlóan az „ r_t felülmúlja o_i ” hipotézist is).

Az ELECTRE II módszer szerint a hipotézist elfogadjuk, ha két tesztet kiáll: az összhang tesztet és az ellentmondásmentességi tesztet (lásd [8]). Ebből a célból minden (o_i, r_t) párhoz számítsuk ki a következő három számot:

$$P^+(o_i, r_t) = \sum p_{j+} \quad j^+ \in \{j : f_j(o_i) > f_j(r_t)\}$$

$$P^-(o_i, r_t) = \sum p_{j-} \quad j^- \in \{j : f_j(o_i) < f_j(r_t)\}$$

$$P^=(o_i, r_t) = \sum p_{j=} \quad j^= \in \{j : f_j(o_i) = f_j(r_t)\}$$

Az összhangteszt akkor teljesül az (o_i, r_t) párra, ha

$$P^+(o_i, r_t) + \min p_j > P^-(o_i, r_t)$$

Az ellentmondásmentességi teszt akkor teljesül az (o_i, r_t) párra, ha

$$(f_j(o_i), f_j(r_t)) \notin N_j \quad \forall j \in J^-$$

ahol $N_j \subset E_j \times E_j$ a nem elfogadható ellentmondások halmaza a j -edik kritériumra vonatkozóan.

Ha mindkét teszt teljesül valamely (o_i, r_t) párra, az o_i objektum d_{it}^+ rendezési indikátora az r_t referenciaobjektumra vonatkozólag a következőképpen számítható ki:

$$d_{it}^+ = P^+ + P^=$$

Példa: Mintapéldánkban az (o_i, r_t) és (r_t, o_i) párok rendezési indikátorainak az értékeit mutatja a 2. és a 3. táblázat.

2. táblázat: Összehasonlítás a „jó” változatokkal

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	p^+	p^-	d^+	d^-
(o_1, d_1)	-	-	=	+	+	=	+	+	-	=	=	=	.24	.28	.72	.76
(o_1, d_2)	-	-	=	-	-	+	+	+	-	=	=	=	.29	.38	.00	.71
(o_1, d_3)	-	-	-	-	-	=	+	+	-	=	=	+	.34	.42	.00	.66
(o_2, d_1)	=	=	=	+	+	-	+	+	-	=	-	=	.24	.23	.77	.76
(o_2, d_2)	-	=	=	+	-	-	+	+	-	=	-	=	.19	.46	.00	.81
(o_2, d_3)	-	=	-	+	-	-	+	+	-	=	-	+	.39	.52	.00	.81
(o_3, d_1)	+	-	+	-	+	-	-	-	+	-	+	-	.37	.63	.00	.63
(o_3, d_2)	+	-	+	-	+	+	-	+	+	-	+	-	.59	.41	.59	.00
(o_3, d_3)	+	-	=	-	+	-	-	+	+	-	+	=	.40	.36	.64	.60
(o_4, d_1)	+	-	+	-	-	-	-	-	-	-	-	=	.24	.56	.00	.86
(o_4, d_2)	+	-	+	-	-	=	+	+	-	-	-	=	.36	.27	.79	.00
(o_4, d_3)	+	-	=	-	-	-	+	+	-	-	-	+	.54	.42	.58	.00

3. táblázat: Összehasonlítás a „rossz” változatokkal

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	d^+	d^-
(o_1, z_1)	-	+	+	+	+	+	+	+	-	+	+	=	.76	.00
(o_1, z_2)	-	+	+	-	-	+	+	+	-	+	+	+	.66	.00
(o_1, z_3)	-	+	+	+	+	+	+	+	-	+	+	=	.76	.00
(o_1, z_4)	=	+	+	-	-	=	+	+	-	+	+	+	.86	.00
(o_2, z_1)	=	+	+	+	+	-	+	+	-	+	=	=	.81	.00
(o_2, z_2)	=	+	+	+	-	-	+	+	-	+	-	+	.72	.00
(o_2, z_3)	-	+	+	+	+	=	+	+	-	+	=	=	.76	.00
(o_2, z_4)	+	+	+	+	-	-	+	+	-	+	-	+	.72	.00
(o_3, z_1)	+	+	+	-	+	+	-	+	+	+	+	-	.68	.00
(o_3, z_2)	+	+	+	-	+	+	-	+	+	=	+	=	.88	.00
(o_3, z_3)	+	+	+	-	+	+	-	+	+	+	+	-	.68	.00
(o_3, z_4)	+	+	+	-	+	-	-	+	+	+	+	=	.73	.00
(o_4, z_1)	+	+	+	+	-	=	+	+	+	+	+	=	.95	.00
(o_4, z_2)	+	+	+	-	-	=	+	+	+	=	=	+	.90	.00
(o_4, z_3)	+	+	+	+	-	+	+	+	+	+	+	=	.95	.00
(o_4, z_4)	+	+	+	-	-	-	-	+	+	+	=	+	.68	.00

B. A preferenciastruktúra meghatározása. Legyen $s = z - \min p_j$ az új küszöbérték. A d_{ii}^+ és d_{ii}^- rendezési indikátorok és az s küszöbérték segítségével definiáljuk a következő bináris relációkat:

– preferálja „ \succ ”

$$o_i \succ r_i \Leftrightarrow d_{ii}^+ > s \wedge d_{ii}^- = 0$$

$$r_i \succ o_i \Leftrightarrow d_{ii}^+ = 0 \wedge d_{ii}^- > s$$

– indifferens „ \simeq ”

$$o_i \simeq r_i \Leftrightarrow d_{ii}^+ > s \wedge d_{ii}^- > s$$

– nem összehasonlítható „!”

$$o_i ! r_i \Leftrightarrow (d_{ii}^+ < s \wedge d_{ii}^- < s) \vee (d_{ii}^+ < s \wedge d_{ii}^- = 0) \vee (d_{ii}^+ = 0 \wedge d_{ii}^- < s) \vee (d_{ii}^+ = 0 \wedge d_{ii}^- = 0)$$

II. szakasz: Az o_i objektumok összehasonlítása a „jó” halmazzal (D) és a „rossz” halmazzal (Z)

A. Az o_i összehasonlítása a „jó” $D = \{d_h\}$ halmazzal. Minden o_i objektumhoz meghatározzuk a d_S számot, mely a „siker elérésének a fokát” mutatja:

- 1) Ha $\exists h : o_i \succ d_h \vee o_i \simeq d_h$ akkor $d_S = d_{iD}^+ = \max_h \cdot d_{ih}^+$, ahol $h^* = \{h : o_i \succ d_h \vee o_i \simeq d_h\}$
- 2) Ha $\nexists h : o_i \succ d_h \vee o_i \simeq d_h$ és $\exists h : d_h \succ o_i$ akkor $d_S = d_{iD}^- = \min_h d_{ih}^-$
- 3) Egyébként o_i nem összehasonlítható a D halmazzal: $d_S = d_{iD}^+ = d_{iD}^- = 0$

Példa: A négy terv összevetése a „jó” tervek halmazával azt adja, hogy a második tervet jellemzi a siker elérésének a legnagyobb foka:

$$o_1 : d_S = d_{iD}^+ = \max_h \cdot d_{ih} = 0.72$$

$$o_2 : d_S = d_{iD}^+ = \max_h \cdot d_{ih} = 0.77$$

$$o_3 : d_S = d_{iD}^+ = \max_h \cdot d_{ih} = 0.64$$

$$o_4 : d_S = d_{iD}^+ = \max_h \cdot d_{ih} = 0.73$$

B. Az o_i összehasonlítása a „rossz” $Z = \{z_k\}$ halmazzal. Minden o_i objektumhoz meghatározzuk a d_N számot, mely a „kudarc elkerülésének a fokát” mutatja:

- 1) Ha $\exists k : z_k \succ o_i \vee z_k \simeq o_i$ akkor $d_N = d_{iZ}^- = \max_k \cdot d_{ik}^-$, ahol $k^* = \{k : z_k \succ o_i \vee z_k \simeq o_i\}$
- 2) Ha $\nexists k : z_k \succ o_i \vee z_k \simeq o_i$ és $\exists k : o_i \succ z_k$ akkor $d_N = d_{iZ}^+ = \min_k d_{ik}^+$

3) Egyébként o_i nem összehasonlítható a D halmazzal: $d_N = d_{iZ}^- = d_{iZ}^+ = 0$

Példa: A négy terv összevetése a „rossz” tervek halmazával azt adja, hogy a második tervet jellemzi a legnagyobb szám, amely a kudarc elkerülésének a mértékét mutatja:

$$o_1 : d_N = d_{iZ}^+ = \min_k d_{ik} = 0.66$$

$$o_2 : d_N = d_{iZ}^+ = \min_k d_{ik} = 0.72$$

$$o_3 : d_N = d_{iZ}^+ = \min_k d_{ik} = 0.68$$

$$o_4 : d_N = d_{iZ}^+ = \min_k d_{ik} = 0.68$$

III. szakasz: Az o_i objektumok pozíciójának meghatározása a (D, Z) bipoláris referenciarendszerre vonatkozóan

Az első és második lépés eredményeként minden o_i alternatíva jellemezhető a $[d_S, d_N]$ vektor segítségével. Összegezzük az o_i objektumok lehetséges állapotait:

$$\begin{array}{lll} d_{iD}^+ > 0 & d_{iD}^- > 0 & d_{iD}^+ = d_{iD}^- = 0 \\ d_{iZ}^- > 0 & (0) & (1) & (2) \\ d_{iZ}^+ > 0 & (3) & (4) & (5) \\ d_{iZ}^- = d_{iZ}^+ = 0 & (6) & (7) & (8) \end{array}$$

Az o_i objektumok lehetséges állapotai: (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7), (8). Mivel $D \cap Z = \emptyset$, a (0) állapot nem fordulhat elő.

Példa: Az alternatívák „pozícióját” a bipoláris referenciarendszerre vonatkozóan az alábbi vektorok mutatják:

$$o_1 : [d_S = 0.72, d_N = 0.66] \quad (3)\text{-as állapot}$$

$$o_2 : [d_S = 0.77, d_N = 0.72] \quad (3)\text{-as állapot}$$

$$o_3 : [d_S = 0.64, d_N = 0.68] \quad (3)\text{-as állapot}$$

$$o_4 : [d_S = 0.73, d_N = 0.68] \quad (3)\text{-as állapot}$$

Minden tekintetbe vett alternatíva összehasonlítható az elfogadott referenciarendszer elemeivel a választott döntési paraméterek (súlyok, a legalacsonyabb sorbarendezési küszöbérték) mellett. Ezen alternatívák közül lehet kiválasztani a végső megoldást.

4. Az analízis befejezése és újramegzése

Az előzőekben leírt összehasonlítás eredményeként minden egyes objektumra a

$$[d_S > 0, d_N > 0] \quad (1)$$

formátumú vektorban meghatározott jellemzőt kaptunk ($d_S = 1$ és $d_N = 1$ értékek a leginkább óhajtottak). Az (1)-es, (3)-as vagy (4)-es állapotú alternatívák a vizsgált

bipoláris referenciarendszerre vonatkozóan egyforma „pozícióval” rendelkeznek. A végső döntés meghozatala a döntéshozó feladata.

Mintapéldánkban az eredmények azt mutatják, hogy az egyetlen valószínű alternatíva (o_1) közel olyan jó, mint a javítása céljából kifejlesztett bármelyik változat. Figyelembe véve a d_S és d_N fuzzy természetét, az o_2 alternatíva dominanciája nem szignifikáns. Azonban a modell általános koncepciója és a d_S és d_N komponensek konstrukciós elve különösen az alábbi esetek fellépésének lehetőségét foglalja magába:

a) az értékelt terv nem összehasonlítható vagy a „jó” tervekkel – (2)-es és (5)-ös állapot –, és ekkor $d_S = 0$, vagy a „rossz” tervekkel – (6)-os és (7)-es állapot –, és ekkor $d_N = 0$.

b) az értékelt terv nem összehasonlítható a bipoláris referenciarendszer egyik szegmensével sem – (8)-as állapot –, és ekkor $d_S = d_N = 0$.

Más szavakkal a következő tervjellelmzők lehetségesek:

$$[d_S = 0, d_N > 0] \quad \text{vagy} \quad [d_S > 0, d_N = 0] \quad (2)$$

$$[d_S = 0, d_N = 0] \quad (3)$$

Hivatkozva a mintapéldánkra, a döntési paraméterek, pl. a küszöbérték bizonyos megváltoztatása (a még szigorúbb $z = 0.8$ vagy $z = 0.9$ értékre), a tervek értékelésében a (2)-es vagy még inkább a (3)-as állapotot eredményezi.

Figyeljük meg, hogy az elemzésben elfogadott referenciarendszer visszatükrözi (vagy vissza kellene tükröznie) a döntéshozó preferenciáit, elvárásait, a megoldás kívánatos minőségi jellemzőit, valamint az elkerülendő hibákat. Ez az egyik alapvető modell-követelmény, mely az alábbi következtetéshez vezet: azok az alternatívák, melyek nem összevethetők a referenciarendszerrel, nem vehetők figyelembe a döntéshozó által a végső választási folyamatban. Ekkor, ha bizonyos alternatívákat a (2)-es vagy (3)-as értékelés jellemez, az eljárás befejezése az lehet, hogy az alternatívák között egy végső összehasonlítást javasolunk csak az (1)-es értékeléssel.

Ugyanakkor alternatív módon javasolni lehet a döntéshozónak az elfogadott döntési paraméterek fölülvizsgálatát, illetve megváltoztatását, és el lehet végezni a probléma újbóli analizálását pl. módosított küszöbérték- vagy ellentmondásmentességi teszt segítségével.

Tegyük fel, hogy egy alternatíva nem összehasonlítható a referenciarendszerrel, bár a legalacsonyabb küszöbértéket ($z = 0.5$) elfogadtuk. Ez azt bizonyítja, hogy az ellentmondásmentességi teszt nem teljesül (lásd a 3. fejezetet). Ha bármiféle ellentmondásosság áll fenn, az alternatívák összehasonlíthatósága bizonyos esetekben a kritériumok súlyainak megváltoztatásával elérhető.

Nyilvánvaló, hogy az itt javasolt újraelemzés a döntéshozónak abban az esetben ajánlott, ha a tekintett összes alternatívát a (2)-es vagy a (3)-as állapot jellemzi. Ebben az esetben a lehetséges paraméterek módosításai érinthetik a referenciacélok halmazait és a kritériumértékelést is.

Ha a döntéshozó nem alkalmazza az újraanalízálás lehetőségét, vagy annak eredménye negatív (azaz az összes alternatíva még mindig nem összehasonlítható az elfogadott bipoláris referenciarendszerrel), akkor a döntési alternatívák halmazának újbóli meghatározása tanácsolható. Hogy a döntéshozó figyelmét felhívjuk erre a szükségességre, ezt tartja a szerző a fent javasolt és PC-n implementált (lásd [5]) döntéstámogató eszköz fontos előnyének.

Ez utóbbi eshetőség, mely ismert a leíró döntési elméletben is (lásd [11], p. 135-137), egy új irányt nyit az MCDM kutatásában.

IRODALOM

1. L. DUCKSTAIN, F. SZIDAROVSKY (1986): Dynamic multiobjective optimization: A framework with application to regional water and mining management. *European J. of Oper. Research*, Vol. 24. No. 2, pp. 305-317
2. E. KONARZEWSKA-GUBALA (1980): Programowanie przy wielorakosci celow (Multiobjektive Programming). PWN, Warszawa
3. E. KONARZEWSKA-GUBALA (1986): On the use of bipolar reference objectives in multiple criteria decision making. Preprints of VII-th International Conference on MCDM, Kyoto, August 18-22, 1986, pp. 329-339
4. E. KONARZEWSKA-GUBALA (1987): On the use of bipolar reference objectives in multiple criteria decision making, in: Y. Savaragi, K. Inoue, H. Nakayama (eds): *Toward Interactive and Intelligent Decision Support Systems, Volume 1. Lecture Notes in Economics and Math. Systems*, Vol. 285, Springer Verlag, Berlin, pp. 132-141
5. E. KONARZEWSKA-GUBALA (1988): PC - Implementation of the Multicriteria Decision Analysis with Bipolar Reference System. Paper submitted at VIII-th International Conference on MCDM, Manchester, August 21-26.
6. R. MUTHER (1955): *Practical Plant Layout*, McGraw-Hill, New York
7. M. NOWAKOWSKA (1980): *Nowe idee w naukach spotecznych (New Ideas in the Social Science)*. Instytut Filozofii i Socjologii PAN, Ossolineum, Wroclaw
8. B. ROY (1974): Criteres multiples et modelisation des preferences (l'apport des relations de surclassement). *Revue d'Economie Politique*, No. 1
9. B. ROY (1976): Outranking and fuzzy outranking: a concept making operational partial order analysis, in: L. Raiffa, R. Keeny (eds.): *Decision Making with Multiple Conflicting Objectives*. IIASA, Vienna
10. A. P. WIERZIBICKI (1980): The use of reference objectives in multiobjective optimisation, in: G. Fandel and T. Gal (eds.): *Multiple Criteria Decision Making Theory and Application*. Springer Verlag, New York, pp. 468-487
11. M. ZELENY (1982): *Multiple Criteria Decision Making*. McGraw-Hill Book Company, New York

ABSTRACT

The fundamental question in the practical plant layout is: "How good is a layout we have?" Methodologically it is a multicriteria evaluation problem. The answer to this in the form of MCDM support analysis implemented on PC is proposed. The essence of the analysis consists in confrontation of the decision alternatives (layout projects), evaluated by cardinal or ordinal criteria to the two kinds of reference objects: desirable and non-acceptable ones (MCDM model with bipolar reference system). An illustrative example concerning the real case study is presented.

MEGJEGYZÉSEK MARKOWITZ PORTFOLIÓ KIVÁLASZTÁSI MÓDSZERÉVEL KAPCSOLATBAN¹

J. KRIENS – J. TH. VAN LIESHOUT
Tilburgi Egyetem, Őkonometria Tanszék

A tanulmány a Markowitz-féle kritikus vonal módszer érvényességének bizonyítását adja egy olyan esetre, mely általánosabb a Markowitz által vizsgált problémánál. Ezt követi a Markowitz-féle eset összes hatékony portfóliójának explicit származtatása pozitív definit kovariancia mátrix esetén. Felhasználva az így nyert kifejezéseket megmutatható, hogy a kritikus vonal a (μ, σ^2) síkban egy olyan függvény, mely nem szükségképpen differenciálható.

1. Bevezetés

Markowitz kritikus vonal módszerét az alábbi portfólió kiválasztási problémára fejlesztette ki: tételezzük fel, hogy egy beruházó b mennyiségű pénzt szeretne befektetni n különböző értékpapírba. Ha a j -edik értékpapírba $x^{(j)}$ mennyiséget investál, akkor

$$x^{(j)} \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \quad \text{és} \quad \sum_{j=1}^n x^{(j)} = b \quad (1)$$

Az $x' = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)})$ portfólió éves hozama az $r(x)$ valószínűségi változó $E(r(x)) = \mu(x)$ várható értékkel és $\sigma^2(r(x)) = \sigma^2(x)$ szórásnégyzettel. Az (1) alatti feltételek mellett továbbiak létezhetnek, melyek a lehetséges választásokat az $X \subset \mathbb{R}^n$ halmazra korlátozzák.

Definíció: Egy lehetséges portfólió hatékony, ha

- a) nem létezik lehetséges portfólió nagyobb vagy egyenlő várható értékű és kisebb szórásnégyzetű hozammal, és
- b) nem létezik lehetséges portfólió kisebb vagy egyenlő szórásnégyzetű és nagyobb várható értékű hozammal.

Ez azt jelenti, hogy az $x = \bar{x}$ portfólió akkor és csak akkor hatékony, ha megoldása mind a

¹Fordította: Vörös József, JPTE Közgazdaságtudományi Kar

$$\min_x \{ \sigma^2(x) \mid \mu(x) \geq \mu(\bar{x}), x \in X \} \quad (2)$$

mind a

$$\max_x \{ \mu(x) \mid \sigma^2(x) \leq \sigma^2(\bar{x}), x \in X \} \quad (3)$$

feladatnak.

Az összes hatékony portfólió és a nekik megfelelő (μ, σ^2) pontok meghatározására Markowitz egy algoritmust fejlesztett ki, amikor is $\mu(x)$ lineáris, $\sigma^2(x)$ kvadratikus, a feltételrendszer pedig lineáris. A második fejezetben megmutatjuk, hogy a tétel – mely alapját képezi ezen eljárásnak – érvényes jóval általánosabb esetekre is. Továbbá, a hatékony pontokat leíró függvény tulajdonságaira Markowitz tett ugyan utalásokat, de ezen görbe differenciálhatóságára tett kijelentései nem túlságosan explicitek. A harmadik fejezetben az összes hatékony portfólió explicit kifejezését megadjuk, és a differenciálhatósági tulajdonsággal kapcsolatban pontosabb megállapításokat teszünk.

2. Egy általános tétel a hatékony portfóliók kiszámításához

Tétel: Legyen

- i. az $X = \{x \mid h_i(x) \geq 0, i \in I\}$ – ahol I egy index halmaz, $h_i(x)$ konkáv és folytonosan differenciálható (abban az értelemben, hogy az összes parciális derivált létezik és azok folytonosak), X zárt és létezik belső pontja – a lehetséges portfóliók halmaza,
- ii. a $\mu(x)$ várható érték függvény konkáv és folytonosan differenciálható X -en,
- iii. a $\sigma^2(x)$ szórásnégyzet függvény differenciálható X -en,

akkor az $x = \bar{x}$ portfólió akkor és csak akkor hatékony, ha

létezik egy olyan $\gamma > 0$, hogy

$$\min_x \{ \sigma^2(x) - \gamma \mu(x) \mid x \in X \} = \sigma^2(\bar{x}) - \gamma \mu(\bar{x}), \quad (4)$$

vagy

$$\max_x \{ \mu(x) \mid \sigma^2(x) = \min_y \{ \sigma^2(y) \mid y \in X \} \} = \mu(\bar{x}), \quad (5)$$

vagy

$$\min_x \{ \sigma^2(x) \mid \mu(x) = \max_y \{ \mu(y) \mid y \in X \} \} = \sigma^2(\bar{x}). \quad (6)$$

Bizonyítás: Először az elégségességi tulajdonságot mutatjuk meg.

a) eset: Tételezzük fel, hogy \bar{x} nem hatékony; ez azt jelentené, hogy létezik egy olyan x^* , $x^* \neq \bar{x}$ portfólió, hogy

$$(\mu(x^*) \geq \mu(\bar{x}) \text{ és } \sigma^2(x^*) < \sigma^2(\bar{x})) \quad \text{vagy} \quad (\sigma^2(x^*) \leq \sigma^2(\bar{x}) \text{ és } \mu(x^*) > \mu(\bar{x})),$$

ezért

$$\sigma^2(x^*) - \gamma\mu(x^*) < \sigma^2(\bar{x}) - \gamma\mu(\bar{x}),$$

minden $\gamma > 0$ -ra, ellentmondva (4)-nek. Így \bar{x} -nak hatékonynak kell lennie.

Ezek után definiáljuk a

$$\sigma_{\min}^2 := \min\{\sigma^2(x) \mid x \in X\} \quad \text{és a} \quad \mu_{\max} := \max\{\mu(x) \mid x \in X\}$$

kifejezéseket.

b) eset: Ha $x = \bar{x}$ kielégíti (5)-t, akkor

$$\sigma^2(\bar{x}) = \sigma_{\min} \quad \text{és} \quad \mu(\bar{x}) = \max\{\mu(x) \mid \sigma^2(x) = \sigma_{\min}, x \in X\}.$$

Így $x = \bar{x}$ minimális szórásnégyzetű hatékony portfólió az X halmazon.

c) eset: Hasonló úton, a (6)-t kielégítő $x = \bar{x}$ maga után vonja, hogy

$$\mu(\bar{x}) = \mu_{\max}, \quad \text{és} \quad \sigma^2(\bar{x}) = \min\{\sigma^2(x) \mid \mu(x) = \mu_{\max}, x \in X\}.$$

Másszóval, $x = \bar{x}$ maximum várható értékű hatékony portfólió.

Másrészt, most bizonyítjuk, hogy a feltételek szükségesek. Ha $x = \bar{x}$ hatékony, akkor az megoldása mind (2), mind (3)-nak, tehát megoldása a

$$\max\{-\sigma^2(x) \mid \mu(x) - \mu(\bar{x}) \geq 0, x \in X\} \quad (7)$$

és a

$$\max\{\mu(x) \mid \sigma^2(\bar{x}) - \sigma^2(x) \geq 0, x \in X\} \quad (8)$$

feladatnak.

Mindkét feladathoz a Kuhn-Tucker tételt alkalmazzuk, mely elégséges optimalitási feltételeket biztosít a problémához. Ennek megfelelően, ha az $f(x)$ és $h_i(x)$ függvények folytonosan differenciálhatók és konkávak, a

$$\max_x \{f(x) \mid h_i(x) \geq 0, i = 1, \dots, l\} \quad (9)$$

feladatban $f(x)$ -nek globális maximuma van $x = \bar{x}$ -ben, ha léteznek olyan t_i , ($i = 1, \dots, l$) számok, hogy

$$\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^l t_i \nabla h_i(\bar{x}) = 0 \quad (10)$$

$$h_i(\bar{x}) \geq 0, \quad i = 1, \dots, l, \quad (11)$$

$$t_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, l, \quad (12)$$

$$\sum_{i=1}^l t_i h_i(\bar{x}) = 0. \quad (13)$$

A feltételek ugyancsak szükségesek, ha bizonyos regularitási feltétel teljesül. Mi a Slater-féle feltételt használjuk. Ennek megfelelően feltesszük, hogy a (9)-ben definiált feltételhalmaznak van belső pontja. Két esetet különböztetünk meg: 1) A Slater-féle feltétel teljesül, és 2) a Slater-féle feltétel nem teljesül.

1) Ha a Slater-féle feltételek teljesülnek, a (7) feladat esetében léteznek olyan γ_1 és t_{i1} ($i \in I$) számok, hogy (10) - (13) feltételek teljesülnek. Hasonló módon, a (8) feladattal kapcsolatban léteznek olyan γ_2 , t_{i2} , ($i \in I$) számok, hogy (10) - (13) feltételek teljesülnek.

Legyenek

$$\gamma := \frac{1 + \gamma_1}{1 + \gamma_2}, \quad t_i := \frac{1}{1 + \gamma_2} (t_{i1} + t_{i2}) \quad (i \in I)$$

Ekkor a két feltételhalmaz kombinálható, és úgy írható, hogy

$$-\nabla \sigma^2(\bar{x}) + \gamma \nabla \mu(\bar{x}) + \sum_{i \in I} t_i \nabla h_i(\bar{x}) = 0 \quad (14)$$

$$h_i(\bar{x}) \geq 0, \quad i \in I, \quad (15)$$

$$\gamma > 0, \quad t_i \geq 0, \quad i \in I, \quad (16)$$

$$\sum_{i \in I} t_i h_i(\bar{x}) = 0 \quad (17)$$

Ez viszont azt jelenti, hogy létezik egy olyan $\gamma > 0$, hogy $x = \bar{x}$ megoldása a

$$\max\{-\sigma^2(x) + \gamma \mu(x) \mid x \in X\}$$

feladatnak, mely viszont azonos (4)-gyel.

2) Ha a Slater-féle regularitási feltétel nem teljesül, akkor vagy a $\mu(x) - \mu(\bar{x}) \geq 0$ vagy a $\sigma^2(\bar{x}) - \sigma^2(x) \geq 0$ egyenletet megoldó halmaznak nincs belső pontja, mivel X -nek van belső pontja. Az első esetben $\mu(\bar{x})$ egyenlő $\mu(x)$ maximumával, tehát μ_{\max} -szal, a második esetben pedig $\sigma^2(\bar{x})$ egyenlő $\sigma^2(x)$ minimumával, tehát σ_{\min} -nel, és \bar{x} hatékony portfólió megoldása (5)-nek. Ha a $\sigma^2(x) = \sigma_{\min}$ egyenletnek egyértelmű megoldása van, a megfelelő hatékony portfólió megkeresése azonos (4) megoldásával a $\gamma = 0$ feltétel mellett. Hasonlóan, ha a $\mu(x) = \mu_{\max}$ egyenletnek egyértelmű megoldása van, a megfelelő hatékony portfólió megkeresése egyenlő (4) megoldásával γ megfelelően nagyra választott értéke mellett.

1. **Megjegyzés:** A tétel azt jelenti, hogy Markowitznak a hatékony portfóliók kiszámítására adott algoritmusát szintén alkalmazható, ha az $r(x)$ hozamfüggvény x -nek nem lineáris függvénye. A tőke-költségvetési döntések egyik példáját képezi ezen esetnek, amikor a beruházások hozama a beruházott összegnek konkáv függvénye (csökkenő hozadék elve). A helyzet különösen ilyen, amikor a tőke-költségvetési probléma likviditási feltételekkel bővített. Ekkor mind $r(x)$, mind a likviditási feltételből származó h_i feltételek x -nek nem lineáris függvényei.

3. A (μ, σ^2) hatékony pontok halmaza a Markowitz-féle esetben

Most a Markowitz-féle eredeti portfólió kiválasztási problémára összpontosítjuk figyelmünket. Tételezzük fel, hogy a j -edik értékpapírba fektetett egységnyi dollár éves hozama r_j és $E(r_j) = \mu_j$; az r_j -k kovariancia mátrixa pedig C . Ha $a' = (\mu_1, \dots, \mu_n)$, akkor

$$\mu(x) = a'x, \quad (18)$$

$$\sigma^2(x) = x'Cx. \quad (19)$$

A probléma feltételi rendszere lineáris:

$$Ax \leq b \quad (20)$$

$$x \geq 0 \quad (21)$$

Ha a lehetséges megoldások X halmazának van belső pontja, a hatékony portfóliók előállíthatók az előző fejezet tételének alkalmazásával, és ekkor (4) baloldala

$$\min_x \{x'Cx - \gamma a'x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$$

formát ölti.

A hatékony portfólióknak megfelelő $(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2)$ pontok alkotják a hatékony pontokat a (μ, σ^2) síkban, amit gyakran a probléma kritikus vonalának neveznek. Ha $\gamma = 0$ -val kezdünk, majd emeljük γ -t, különböző hatékony portfóliókat kapunk. γ speciális értékeire a bázisban változás áll be: tételezzük fel, hogy ezen speciális értékek $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ -k, és a megfelelő hatékony megoldásokat pedig az x_1, \dots, x_k vektorok reprezentálják. Az x_1, \dots, x_k -ből az x_{j_1}, \dots, x_{j_k} maximális számú vektor alsorozatot formáljuk, melyekre a (μ, σ^2) értékek már különbözőek. Ezen alsorozatot a sarokportfóliók halmazának nevezzük, melyekre

$$a'x_{j_i} < a'x_{j_{i+1}} \quad (22)$$

és

$$x'_{j_i} C x_{j_i} < x'_{j_{i+1}} C x_{j_{i+1}} \quad (23)$$

A (μ, σ^2) síkban a kritikus vonalnak a következő tulajdonságai vannak:

- (a) két szomszédos portfólió (μ, σ^2) pontjai között egy szigorúan konvex parabola található
 (b) ezen szegmensben a

$$\left[\frac{d\sigma^2}{d\mu} \right]_{(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2)} = \bar{\gamma} \quad (24)$$

összefüggés érvényesül,

- (c) pozitív definit C esetében a kritikus vonal mindegyik pontja (azaz minden x_h hatékony portfólió) kielégíti az

$$x_h = f + d\gamma \quad (25)$$

feltételt, ahol f és d konstans vektorok és explicite kifejezhetők; mitöbb $\mu(x_h)$ γ -nak lineáris függvénye zérótól különböző koefficienssekkel.

Csak a (b) tulajdonság ismert az irodalomból (lásd MARKOWITZ (1956), vagy ZANGWILL (1969)). A következőkben az (a) és (c) tulajdonságok érvényességét bizonyítjuk.

Az (a) tulajdonság bizonyítása: Figyelmünket most a két szomszédos sarokportfólió közötti kritikus vonal egy részére fordítjuk, vagyis a hatékony portfóliókra, melyek konvex kombinációi ezen sarokportfólióknak. Az egyszerűség kedvéért ezen sarokportfóliókat nem x_j és x_{j+1} -gyel fogjuk jelölni, hanem x_i -vel és x_{i+1} -gyel.

A kritikus vonal ezen részének hatékony portfóliói az alábbi formában írhatók:

$$x = \alpha(x_i - x_{i+1}) + x_{i+1} \quad \alpha \in [0, 1]$$

(18) és (19) felhasználásával következik, hogy

$$\mu(x) = \alpha a'(x_i - x_{i+1}) + a'x_{i+1} \quad (26)$$

és

$$\sigma^2(x) = \alpha^2(x_i - x_{i+1})'C(x_i - x_{i+1}) + 2\alpha(x_i - x_{i+1})'Cx_{i+1} + x_{i+1}Cx_{i+1} \quad (27)$$

α -nak (26)-ból történő eliminálása és (27)-ben történő helyettesítése $\sigma^2(x)$ kvadratikus kifejezését adja, mely $\mu(x)$ -nek függvénye a $\mu^2(x)$ alábbi koefficiensével:

$$\frac{(x_i - x_{i+1})'C(x_i - x_{i+1})}{(a'(x_i - x_{i+1}))^2}$$

Ezen koefficiens pozitív, mert (22)-ből következik, hogy

$$(a'(x_i - x_{i+1}))^2 > 0,$$

és (23) az

$$(x_i - x_{i+1})'C(x_i - x_{i+1}) = \sigma^2(x_i - x_{i+1}) = \sigma^2(r(x_i) - r(x_{i+1})) \geq$$

$$\left(\sigma(r(x_i)) - \sigma(r(x_{i+1}))\right)^2 > 0$$

összefüggéshez vezet. Így közvetlenül adódik, hogy $\sigma^2(x)$ szigorúan konvex függvénye $\mu(x)$ -nek.

A (c) tulajdonság bizonyítása: Az $x = \bar{x}$, $\mu_{\min} < \mu(\bar{x}) < \mu_{\max}$ hatékony portfóliókhoz léteznek olyan γ és t_i , $i \in I$ számok, melyek kielégítik a (14)–(17) feltételeket. Ezen fejezet problémájára specializálódva, a (20) és (21) feltételek Lagrange-szoróit az $u' = (u_1, \dots, u_m)$, illetve a $v' = (v_1, \dots, v_n)$ kifejezésekben összegyűjtve, és (20)-hoz az y_1, \dots, y_m kiegészítő változókat hozzáadva, (14) és (15) a

$$-2Cx - A'u + v = -\gamma a \quad (28)$$

és

$$Ax + y = b, \quad x \geq 0 \quad (29)$$

feltételei rendszerre redukálódik.

Egy kifejezés, mely minden egyes hatékony portfólióra érvényes, a következőképpen származtatható: x bázisváltozóit jelöljük x_b -vel, valamint a , C és A megfelelő részeit a_b , C_b és A_b -vel, ekkor, amint azt az A függelékben megmutatjuk, x_b felírható, mint

$$x_b = f + d\gamma$$

ahol

$$f = C_{b1}^{-1} A'_{b1} (A_{b1} C_{b1}^{-1} A'_{b1})^{-1} b_1 \quad (30)$$

és

$$-d = \frac{1}{2} (C_{b1}^{-1} - C_{b1}^{-1} A'_{b1} (A_{b1} C_{b1}^{-1} A'_{b1})^{-1} A_{b1} C_{b1}^{-1}) a_1. \quad (31)$$

A (25) kifejezést (18)-ba és (19)-be helyettesítve kapjuk, hogy

$$\mu(x_b) = a'_1 f + a'_1 d\gamma \quad (32)$$

$$\sigma^2(x_b) = f' C_{b1} f + 2f' C_{b1} d\gamma + d' C_{b1} d\gamma^2. \quad (33)$$

Továbbá, a B függelék megmutatja, hogy

$$a'_1 d \neq 0 \quad (34)$$

valamennyi hatékony portfólió esetében.

2. Megjegyzés: Ha a C pozitív definit, a (32) és (33) formulákat használva megmutatható, hogy a kritikus vonal a (μ_{\min}, μ_{\max}) nyitott intervallumban nem szükségképpen differenciálható. Evvel kapcsolatban Vörös (1987) a következő példát publikálta:

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 3 & 11 & 23 \\ -1 & 23 & 75 \end{pmatrix}, \quad A = (1, 1, 1), \quad b = (1).$$

Ezen feladat kritikus vonala nem differenciálható az $x' = (0, 1, 0)$ sarokportfoliónak megfelelő pontban. Ezen ponttól balra eső parabolaíven az x_1 és x_2 változók vannak a bázisban, jobbra pedig az x_2 és x_3 változók. A $\mu = 3, \sigma^2 = 11$ pontra vonatkozó baloldali és jobboldali deriváltakat a következőképpen származtathatjuk. Helyettesítsük az a, C^{-1} és A megfelelő részeit (32)- és (33)-ba, majd elimináljuk γ -t. Akkor látható, hogy

$$\lim_{\mu \uparrow 3} \frac{d\sigma^2}{d\mu} = 8, \quad \text{és} \quad \lim_{\mu \uparrow 3} \frac{d\sigma^2}{d\mu} = 12.$$

A függelék: A (25), (30) és (31) formulák bizonyítása

A kiegészítő jelölések mellőzésével a (28), (29) egyenleteket újraírjuk, hogy az x, y, u és v változókat megkapjuk:

x'	y'	u'	v'	
$-2C$	0	$-A'$	I	$-\gamma a$
A	I	0	0	b

(35)

(ahol most I egységmátrixot jelöl).

Legyen

$$z'_b = (x'_b, y'_b, u'_b, v'_b) \quad (36)$$

a hatékony portfólióhoz tartozó lehetséges bázismegoldás, ekkor (35) újraparticionálható:

x'_b	x'_n	y'_b	y'_n	u'_b	u'_n	v'_b	v'_n	
$-2C_{b1}$	$-2C_{n1}$	0	0	$-A'_{b1}$	$-A'_{b2}$	0	I	$-\gamma a_1$
$-2C_{b2}$	$-2C_{n2}$	0	0	$-A'_{n1}$	$-A'_{n2}$	I	0	$-\gamma a_2$
A_{b1}	A_{n1}	0	I	0	0	0	0	b_1
A_{b2}	A_{n2}	I	0	0	0	0	0	b_2

(37)

A $-2C$ és A mátrix a bázis illetve nem bázis változóknak, valamint az aktív illetve nem aktív korlátoknak megfelelően van particionálva (b = bázis n = nem bázis változók, 1=aktív, 2=nem aktív feltételek). A bázisvektorok mátrixa az alábbi:

$$B = \begin{pmatrix} -2C_{b1} & 0 & -A'_{b1} & 0 \\ -2C_{b2} & 0 & -A'_{n1} & I \\ A_{b1} & 0 & 0 & 0 \\ A_{b2} & I & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (38)$$

A számítások könnyítése céljából a sorokat és oszlopokat felcseréljük:

$$B_v = \begin{pmatrix} -2C_{b1} & -A'_{b1} & 0 & 0 \\ A_{b1} & 0 & 0 & 0 \\ -2C_{b2} & -A'_{n1} & I & 0 \\ A_{b2} & 0 & 0 & I \end{pmatrix} \quad (39)$$

A bázisváltozók értékei a következők:

$$z_{bv} = B_v^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ b_1 \\ 0 \\ b_2 \end{pmatrix} - \gamma B_v^{-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (40)$$

ahol $z'_{bv} = (x'_b, u'_b, v'_b, y'_b)$.

Annak céljából, hogy x -re explicit kifejezést nyerjünk, kiszámítjuk B^{-1} -t:

$$B_v^{-1} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -2C_{b1} & -A'_{b1} \\ A_{b1} & 0 \end{pmatrix} & 0 \\ - \begin{pmatrix} -2C_{b2} & -A'_{n1} \\ A_{b2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2C_{b1} & -A'_{b1} \\ A_{b1} & 0 \end{pmatrix}^{-1} & \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (41)$$

Mivel B_v -nek létezik inverze,

$$\begin{pmatrix} -2C_{b1} & -A'_{b1} \\ A_{b1} & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

létezik, és mert C pozitív definit, C^{-1} létezik és úgyszintén $(A_{b1}C_{b1}^{-1}A'_{b1})^{-1}$ (lásd HADLEY (1961), pp. 107-109). Így

$$\begin{pmatrix} -2C_{b1} & -A'_{b1} \\ A_{b1} & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \quad (42)$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}C_{b1}^{-1} + \frac{1}{2}C_{b1}^{-1}A'_{b1}(A_{b1}C_{b1}^{-1}A'_{b1})^{-1}A_{b1}C_{b1}^{-1} & C_{b1}^{-1}A'_{b1}(A_{b1}C_{b1}^{-1}A'_{b1})^{-1} \\ -(A_{b1}C_{b1}^{-1}A'_{b1})^{-1}A_{b1}C_{b1}^{-1} & -2(A_{b1}C_{b1}^{-1}A'_{b1})^{-1} \end{pmatrix}$$

(42)-nek (41)-ben történő helyettesítése és ennek (40)-ben való felhasználása eredményezi, hogy

$$x_b = C_{b1}^{-1}A'_{b1}(A_{b1}C_{b1}^{-1}A'_{b1})^{-1}b_1 + \gamma \left(\frac{1}{2}C_{b1}^{-1} - \frac{1}{2}C_{b1}^{-1}A'_{b1}(A_{b1}C_{b1}^{-1}A'_{b1})^{-1}A_{b1}C_{b1}^{-1} \right) a_1$$

és a (30), (31) jelölésekkel adódik az eredmény.

B függelék: A (34)-es formula bizonyítása

Felhasználjuk azt a tényt, hogy egy μ várható értékkel rendelkező portfólió megoldását adja a (7) alatti feladatnak, mely ebben az esetben a

$$\max\{-x'Cx\}$$

$$Ax \leq b$$

$$a'x \geq \mu$$

$$x \geq 0$$

feladatra redukálódik. Az u , v , és γ Lagrange szorzók és az y , y_{n+1} kiegészítő változók felhasználásával a Kuhn-Tucker feltételek az alábbiak:

$$-2Cx - A'u + a\gamma + v = 0 \quad (43)$$

$$Ax + y = b \quad (44)$$

$$a'x - y_{n+1} = \mu \quad (45)$$

$$x'v + y'u + y_{n+1}\gamma = 0, \quad x \geq 0, y \geq 0, y_{n+1} \geq 0, u \geq 0, v \geq 0$$

A γ -val kiegészített (36)-os vektor a (43), (44), (45) egyenletekre vonatkozóan bázismegoldást képez. Mint (39)-ben, hasonló módon újraprendezve, a bázis vektorok a

$$B_v^* = \begin{pmatrix} B_v & k \\ l & 0 \end{pmatrix}$$

formát öltik, ahol

$$l' = (a'_1, 0', 0', 0') \quad (46)$$

és

$$k' = (a'_1, 0', a'_2, 0') \quad (47)$$

Mivel B_v^* -nak létezik inverze, ugyanúgy létezik B_v^{-1} és $(l'B_v^{-1}k)^{-1}$ (lásd újra Hadley, (1961)). Most

$$(B_v^*)^{-1} = \begin{pmatrix} B_v^{-1} - B_v^{-1}k(l'B_v^{-1}k)^{-1}l'B_v^{-1} & B_v^{-1}k(l'B_v^{-1}k)^{-1} \\ (l'B_v^{-1}k)^{-1}l'B_v^{-1} & -(l'B_v^{-1}k)^{-1} \end{pmatrix}$$

(46)-, (41)-, és (47)-nek a $-(l'B_v^{-1}k)^{-1}$ -ben történő helyettesítése adja az

$$\frac{1}{2} \left(a'_1 (C_{b1}^{-1} - C_{b1}^{-1} A'_{b1} (A_{b1} C_{b1}^{-1} A'_{b1})^{-1} A_{b1} C_{b1}^{-1}) a_1 \right)^{-1}$$

kifejezést, mely, a konstans kivételével, (34) bal oldalának reciprokát adja.

IRODALOM

- HADLEY, G., (1961) : Linear Algebra, Addison-Wesley, Reading
- MARKOWITZ, H. M., (1956) : The Optimization of a Quadratic Function subject to Linear Constraints, Naval Research Logistic Quarterly, 3. pp. 111-133.
- MARKOWITZ, H. M., (1959) : Portfolio selection, John Wiley and Sons, New York

4. VÖRÖS, J., (1987) : The Explicit Derivation of the Efficient Portfolio Frontier in the Case of Degeneracy and General Singularity, *European Journal of Operational Research*, 32, pp. 302-310
5. ZANGWILL, W. J., (1969) : *Nonlinear Programming: A Unified Approach*, Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J.

ABSTRACT

A proof of the validity of Markowitz's critical line method is given for a more general situation than discussed by Markowitz. Next for the Markowitz case with a positive definite covariance matrix explicit expressions are derived for all efficient portfolios. Using these expressions it can be shown that the critical line in the (μ, σ^2) plane is a representation of a function not necessarily differentiable everywhere.

SZUBJEKTÍV INFORMÁCIÓK KEZELÉSE A TÖBBTÉNYEZŐS PROBLÉMÁK MEGOLDÁSÁBAN

TEMESI JÓZSEF

Budapesti Közgazdaságtudományi Egyetem

Dolgozatomban a többtényezős döntési problémák egy szűk osztályának, a lineáris hasznossági függvényt feltételező modellnek a keretein belül az interaktív döntési folyamatban fellépő elvek és követelmények operacionalizálásának egyes problémáival foglalkozom.

A többtényezős problémákat akkor tudjuk sikeresen megoldani, ha a választott módszer alkalmas a probléma szerkezetének feltárására, és ugyanakkor a döntéshozó szembeesíteni tudja preferenciáit az adatokból fakadó korlátozásokkal. Ebben a szemléletben a döntéshozó egy tanulási folyamat résztvevőjeként fejezheti ki preferenciáit és ítélni meg azok következményeit. Mivel általában nem tételezhetjük fel azt, hogy a döntéshozó pontosan és következetesen képes a preferenciák kinyilvánítására, ezért a kompromisszumos megoldáshoz vezető út legalább olyan fontos lehet, mint maga a végső döntés. A tanulmány első részében ezekről a kérdésekről lesz szó.

A második részben a már említett egyszerű modellben egy véges alternatívahalmaz összes lehetséges rendezése által meghatározott konvex poliéder különböző szemléletű felbontásait vizsgáljuk. Ezáltal meghatározhatjuk a kapcsolatot egyes döntési kérdésfelvetések (teljes rangsor, részleges rangsor, csoportosítás, a legjobb kiválasztása), és a hozzájuk tartozó paraméterter felbontás (súlyrendszerek) között, s bemutatunk egy olyan algoritmust, amelyik a modell feltevéseinek megfelelő problémák megoldásában a döntéshozót segíti.

I.

A többtényezős döntési problémák (véges számú diszkrét alternatíva közötti rangsorolás, választás, csoportosítás) alapkérdése a döntéshozó bekapcsolásának mikéntje a döntési folyamatba. Bár a szituáció elvileg hasonló a folytonos feladatoknál is – a módszerek nagy része azonos filozófia alkalmazása más környezetben –, itt most csak a véges, diszkrét esetre koncentrálnunk.

A többtényezős döntési problémánál a kiinduló feladat az alternatívák és a kritériumok megfogalmazása, majd általában az alternatívák kritériumonkénti értékeinek megadása következik. Ha a döntési folyamat egészét tekintjük, akkor ezen induló szakaszok eredményei a végleges döntést legalább annyira befolyásolják, mint a kiértékelő fázis. Ennek ellenére most eltekintünk az első három fázis során fellépő

problémáktól és azok kezelésétől. Ott lépünk be a döntési folyamatba, ahol az első szakaszok már lejátszódtak, és egy döntési mátrix áll rendelkezésünkre. Számos ilyen gyakorlati probléma létezik: telepítési variánsok meghatározása, termékfejlesztés, beruházások közötti választás, fogyasztói döntések, stb.

A többtényezős döntési problémák megoldási módszereinek specialitása, hogy nem nélkülözhetik a döntéshozó információit. Ezt könnyen beláthatjuk, ha figyelembe vesszük, hogy a többcélú döntési probléma megoldásához kétféle szemléletben közeledhetünk: kielégítésre törekedve vagy optimalizáló szemléletben.

A *kielégítésre törekvő* döntéshozatal definíció szerint magában hordja a döntéshozó részvételét. Többcélúság esetén az *optimalitás* általánosan elfogadott fogalma a Pareto-optimalitás. Racionális döntéshozó csak olyan megoldást választ, amelyhez nem talál minden értékelési tényező szerint azonosat és legalább egy komponensben jobbat. Folytonos esetben a Pareto optimális megoldások halmaza a legtrikább esetben áll egyetlen pontból, végtelen sok efficiens pontunk van, még ha ezek matematikai leírása nem is könnyű feladat. A diszkrét esetben is legtöbbször először a Pareto optimális halmazt – az egymással össze nem hasonlítható, nem dominált alternatívákat – kell meghatározni, majd ugyanaz a helyzet, mint a folytonos esetben: dönteni kell a Pareto hatékony alternatívák között.

Matematikai szempontból a Pareto optimális megoldások teljesen egyenértékűek. A többcélú döntési probléma megoldásához azonban általában azt feltételezzük, hogy a döntéshozó preferenciákkal rendelkezik az értékelési tényezőkre vonatkozóan, s ezeknek a preferenciáknak a megismerése révén tudunk a Pareto hatékony pontok közül választani.

Egyáltalán nem mindegy azonban, hogy a döntéshozó preferencia struktúrájáról milyen feltevéseink vannak: milyen információk megadását várhatjuk el a döntéshozótól, s hogyan kerülnek be ezek az információk a döntési folyamatba. Felmerül a kérdés: nem lehetséges-e valamilyen módon eltekinteni a konkrét döntéshozótól? Létezik-e a döntési mátrixszal kifejezett feladatnak döntéshozó-független vagy a döntéshozó szerepét a minimálisra szorító megoldása?

A többcélú döntési módszerek osztályozására nincs általánosan elfogadott séma. A besorolások többsége azonban eleve a döntéshozó bekapcsolásának tartalmán és mikéntjén alapul. CHANKONG és HAIMES [1] például a következő szempontok szerint különbözteti meg a módszereket:

- a döntéshozó bekapcsolásának terjedelme a megoldási folyamatba,
- az a mód, ahogyan a döntéshozót bekapcsoljuk,
- az információfajta, amit megkövetelhetünk tőle,
- az az eljárás, ahogyan az információkat feldolgozzuk.

HWANG és MASUD [2], majd ZELENY [3] egyszerűbben – és sokak által elfogadott módon – osztályoz.

1. A preferenciák progresszív kifejtésén alapuló módszerek alkotják az egyik csoportot. Ez azt feltételezi, hogy nem léteznek fix, önmagukban adott preferenciák, hanem csak a körülményektől behatárolt, fejlődő, változó preferenciapatternek, amelyek egy adott problémára vonatkoznak. Ezeket a döntéshozó egy önmaga számára is tanulságokkal járó – legtöbbször egy specialista segítségét is igénybe vevő – folyamatban tárja fel.
2. Az *a priori* preferencia kifejtés azt jelenti, hogy az előbbivel ellentétben az aktuális problémára vonatkozó információ a döntési helyzettől függetlenül, előre megadható. A preferenciák állandók és konzisztensek, a tanulási folyamat nem szignifikáns.
3. Vannak közelítések, amelyek sem előre, sem menet közben nem kérnek semmilyen lényeges preferencia-kifejtést. A preferenciák implicitek maradnak, a választást egyéb eszközök segítségével, a *megoldási folyamat végén* végezzük el.

Visszatérve kérdésfelvetésünkre: a döntéshozótól való teljes elvonatkoztatás ugyan képtelenség, de erről a kérdésről nem beszélhetünk általánosságban. A megoldás egészének szituáció-függőnek és probléma-függőnek kell lennie. Nem létezik többtényezős döntés „általában” és nem létezik univerzális megoldó módszer. Másként kell kezelnünk a problémát különböző helyzetekben – akár ugyanazzal a döntési mátrixszal is. Például nem gondolkozhatunk egyformán fogyasztói döntés vagy technológiai döntés esetén, még ha azonos termékkört vizsgálunk is.

Az egyes esetekben a lényegi különbség, és a fentebbi osztályozás alap gondolatát is jól kifejező kérdés, hogy mennyire „objektív” döntést szeretnénk elérni. Tekinthetjük úgy, hogy mindez megjeleníthető egy „objektivitási skálán”. Ennek a skálának az egyik végpontjául az az eset szolgál, amikor a döntéshozót maximálisan kielégítő alternatívát keressük. A másik végpont az az eset, amikor – a konkrét döntéshozó személyétől elvonatkoztatva – egy adott probléma „legjobb” megoldását keressük.

Az utóbbi esetre vonatkozóan az *axiomatizált eljárások* lehetnek a legcélravezetőbbek. Megkísérelhetjük a döntéshozó racionális viselkedésének szabályait axiómákban rögzíteni, és ezen az alapon felépíteni egy jól definiált eljárást. Egy másik lehetséges koncepció az, ha egy jól körülhatárolt probléma általános megoldási szabályait fektetjük le, és ezeket kielégítő módszereket konstruálunk.

A döntéshozatalnak ez az útja legtöbbször a priori információkat vagy utólagos értékelést kíván, de nem idegen tőle az interaktivitás sem. Általában valamiféle „automatizmus” szolgáltatja az eredményeket: például az ideális vagy utópia pont-ra épülő módszerek ide sorolhatók. Kijelölve az ideális pontot, a kompromisszumos megoldást – az egyes alternatívák relatív értékelésével együtt – automatikusan megkapjuk. Meg kell azonban jegyeznünk, hogy természetesen itt sem vagyunk mentesek a szubjektív elemektől: az ideális pont kiválasztásának szubjektív (vagy

axiomatizált) aspektusain túl a megoldás függ a metrika megválasztásától. A hasonló elveken működő módszerek tehát „objektivitási skálánk” egyik végpontjához közel helyezkednek el.

Ezekben a módszerekben is találunk azonban az innen eltávolító, legtöbbször interaktív alapon, azaz a döntéshozót menet közben bekapcsoló, ember – gép, vagy döntéshozó – döntéstámogató szakember párbeszéddel működőket: az „ideális áthelyezésével” operáló módszerek, referencia pont eljárások, interaktív többletanyaghasznossági módszerek, stb.

Jellemzőbb azonban a skála másik végpontján elhelyezkedő problémamegoldások *interaktív felépítése*. Ez a szélsőség a döntéshozó maximális kiszolgáltatását jelenti: addig „keresünk” vele együtt megoldásokat, míg valamelyiket el nem fogadja végső megoldásnak. Két vonatkozásban lehetnek megszorításaink.

Az egyik lényeges kérdés az, hogy milyen feltételezésekkel élünk a döntéshozó preferencia-struktúrájáról. Elvileg az a legegyszerűbb, ha feltételezzük a döntéshozó preferenciáit kifejező hasznossági függvény létezését. Ehhez a preferenciákra vonatkozóan elég szigorú kikötéseket kell tennünk. Amennyiben ezt a függvényt explicité tudjuk tenni, akkor a többcélú problémát visszavezettük egycélú optimalizálási feladatra. Az esetek többségében ez nehézségekbe ütközik, s ezért a hasznossági függvényt impliciten létezőnek feltételezve részleges információkat nyerünk róla a döntéshozóval folytatott kérdés-felelet sorozatok révén, s ezeket az információkat használjuk fel a legjobb megoldás kiválasztásához.

A döntéshozó preferenciái azonban nem feltétlenül felelnek meg szigorú feltételeinknek: nem teljesek, nem tranzitívak, inkonzisztensek is lehetnek. Az interaktív módszerek egy része elfogadja ezt a szituációt és a megoldási folyamatot egyben egy olyan tanulási folyamattá változtatja, ahol a döntéshozó az eljárás közben saját preferenciáival szembeesülve azokon is változtathat: ragaszkodik vagy nem ragaszkodik bizonyos elképzeléseihez, s eközben választja ki a legmegfelelőbb megoldást. Sok esetben ez a tanulási folyamat legalább olyan fontos, mint a problémamegoldás maga, mert az így elért eredmények későbbi döntésekben hasznosíthatók.

Valós feladatoknál általában nem „objektivitási skálánk” valamelyik végpontján vagyunk. A *döntéstámogató eljárások* célja éppen az, hogy megtaláljuk a helyes arányt az adott problémában benne rejlő objektív, és a döntéshozó preferenciáiból kialakuló szubjektív információk felhasználása között.

II.

Ez a rész azt a célt szolgálja, hogy egy egyszerű modellben illusztrálja a döntési problémák és a döntéshozói részvétel rugalmas kapcsolatát. Több hasonló közelítés is található az irodalomban (SRINIVASAN és SHOCKER [4], JACQUET-LAGREZE és SISKOS [5], BELTON és VICKERS [6]), a továbbiakban elsősorban KORNBLUTH [7] munkájára támaszkodunk.

Jelölje az r db n kritérium szerint értékelt alternatívát az $x_1, x_2, \dots, x_r \in \mathbb{R}^n$

vektor. Ha ezek között az alternatívák között megadunk egy preferenciasorrendet, akkor egyúttal megadtuk a kritériumok egy olyan értékelését (súlyrendszerét), amelyek ugyanezt a preferenciasorrendet realizálja. Az adott, j -edik preferenciarendezéshez tartozó súlyrendszerek egy $C^{(j)}$ halmaz elemei. Legyen a rendezés például az indexek növekvő sorrendjével egyező. Ekkor

$$C^{(j)} = \{c \mid c \geq 0, 1c = 1, cx_i \geq cx_{i+1}, i = 1, \dots, r-1\} \quad (1)$$

Az összes rendezések száma $r!$, azaz $j = 1, \dots, r!$. Az összes rendezésből emeljük ki azokat, amelyek lehetséges rendezések. Egy rendezést akkor tekintünk lehetségesnek, ha találunk olyan súlyrendszert, amelyre $C^{(j)} \neq \emptyset$.

Domináns egy rendezés, ha az $x_i - x_{i+1} \geq 0$ egyenlőtlenség teljesül minden i -re. Ha egy rendezés lehetséges, akkor nincs olyan i , amelyre $x_i - x_{i+1} < 0$ teljesülne.

Ha egy lehetséges rendezés nem domináns, akkor (1)-ben létezik legalább egy $(i, i+1)$ indexpár, amelyre az ott szereplő egyenlőtlenség egyenlőségként teljesül [7].

Megmutatható az is, hogy ha egy lehetséges rendezésünk van $(\dots, k, l, m, n, \dots)$ formában – ahol a zárójelben az egyes alternatívák indexeit soroljuk fel a preferenciasorrendnek megfelelően –, és (1)-ben az (l, m) indexpárhoz tartozó feltétel egyenlőségként teljesül, akkor a $(\dots, k, m, l, n, \dots)$ rendezés szintén lehetséges. Ha az egyik, illetve a másik rendezéshez tartozó súlyrendszerek halmazát $C^{(l)}$ illetve $C^{(m)}$ jelöli, akkor a két paraméterter közös határral rendelkezik.

A lehetséges rendezések súlyai egy olyan egybefüggő halmazt alkotnak, amelyeknek szomszédos elemei két vektor relatív helyzetében különböznek egymástól:

$$C = \sum_t C^{(t)} \quad (2)$$

ahol t végigfut a lehetséges rendezéseken. Az egyes halmazok konvex poliéderek.

Írjuk át az (1)-nek megfelelő rendszert a következő alakba:

$$K^{(j)}c \geq 0 \quad (3)$$

$$c \geq 0 \quad (4)$$

$$1c = 1 \quad (5)$$

ahol a $K^{(j)}$ mátrix sorai az egyes $x_i - x_{i+1}$ vektorkülönbségeket tartalmazzák a j -edik rendezés esetében.

A fentieknek megfelelően, ha a rendezés lehetséges, akkor legalább egy egyenlőtlenség egyenlőség formájában teljesül. Egyik lehetséges rendezésből a másikba úgy tudunk átlépni, hogy megkeressük a (3) aktív feltételeit és felírjuk az így kapott vektorcserének megfelelő új rendezést.

Kornbluth a fentieket felhasználva egy interaktív algoritmust épít fel. Az algoritmus célja egy lehetséges sorrendből lehetséges rendezések sorozatán keresztül eljutni egy a döntéshozó számára elfogadható sorrendhez, miközben a döntéshozónak csak

a szorosan teljesülő feltételekhez tartozó alternatívapárok relatív helyzetének elfogadhatóságáról kell nyilatkoznia.

Ezekre az egyszerű alapokra építve azonban jóval több lehetőségünk van, és ezek beépíthetők egy általánosabb algoritmus kereteibe, számítógépes döntéstámogatási céllal, a döntéshozó szubjektív információinak kezelésével.

- a) Megvizsgálhatunk egy már meghozott döntést. Ez analóg azzal, hogy egy adott preferenciasorrendhez súlyrendszert kívánunk meghatározni. Kérdés tehát, hogy a fenti értelemben egyáltalán lehetséges rendezést adott-e a döntés, s ha igen, akkor milyen implicit súlyrendszert foglalt magában. Ez a súlyrendszer szembesíthető a döntéshozónak a kritériumokra vonatkozó preferenciáival.
- b) Amennyiben egy adott rendezés nem lehetséges ($C^{(j)} = \emptyset$), megvizsgálhatjuk, milyen súlyrendszer esik hozzá a „legközelebb”. A válasz természetesen függ attól, hogy milyen metrikát használunk.

Mivel a súlyhalmaz üres, találunk legalább egy olyan vektorpárt, amelyre az

$$(x_i - x_{i+1})c < 0 \quad (6)$$

Keressük meg azokat a c vektorokat, amelyekre

$$F(c) = \max(x_{i+1} - x_i)c \quad (7)$$

minimális [8]. Ez a c vektor egy olyan értékelő rendszerként interpretálható, amely esetében a $C^{(j)}$ -hez tartozó preferenciarendezéssel szembeni legnagyobb inkompatibilitás a legkisebb. Egy ilyen c vektort numerikusan az alábbi lineáris programozási feladat megoldásával határozhatunk meg:

$$z \rightarrow \min \quad (8)$$

$$(x_i - x_{i+1})c \leq z \quad i = 1, \dots, r-1 \quad (9)$$

$$c \geq 0 \quad (10)$$

$$1c = 1 \quad (11)$$

- c) Valós döntési helyzetben interaktív módon (lásd Kornbluth algoritmusát) kialakíthatunk a döntéshozónak legjobban megfelelő rendezést/súlyrendszert.

Mindezekben az esetekben a teljes sorrendezéssel, vagyis rangsorolási problémával foglalkoztunk. Megelégedhetünk azonban azzal is, hogy csak sorrendben az első k alternatívát rendezzük, a fennmaradó $r - k$ alternatívát pedig nem feltétlenül: részleges rendezést hajtunk végre, amelynek speciális esete az, amikor csak arra

vagyunk kíváncsiak, hogy milyen súlyvektorok mellett foglalja el egy tetszőleges alternatíva az első helyet: ez a *kiválasztási probléma*.

Ha az m -edik alternatíva az első, akkor a súlyhalmaz $r - 1$ lineáris egyenlőtlen-séggel írható le:

$$C_m = \{c \mid c \geq 0, 1c = 1, cx_m \geq cx_k, m \neq k, k = 1, \dots, r\} \quad (12)$$

A C_m halmazok lefedik a teljes C halmazt, s ha a szempontok száma nem nagy, akkor a C felbontása szemléletesen is megadható.

Az így kapott maximálisan r darab tartomány tovább bontható, ha a második legjobb alternatíva kijelölését is elvégezzük az előbbivel analóg módon, és így tovább, azaz ily módon eljuthatunk a teljes sorrendezéshez.

Ha egy teljes rendezéshez tartozó $C^{(j)}$ halmazunk üres volt, felmerülhet az a kérdés is, hogy melyik az az értékelő vektor, amelyik a sor elejéről a maximális számú alternatívát sorbarendezi. Egy ilyen súlyrendszert kapunk az alábbi LP feladat megoldásával:

$$z \rightarrow \min \quad (13)$$

$$(x_{i+1} - x_i)c \leq z \quad i \leq k \quad (14)$$

$$(x_h - x_l)c \geq 0 \quad h \leq k, l > k \quad (15)$$

$$c \geq 0 \quad (16)$$

$$1c = 1 \quad (17)$$

Az a legnagyobb k , amelyre a fenti feladat optimális célfüggvényértéke 0, adja meg azon vektorok maximális számát (a sor elejéről), amelyeket egy értékelő vektorral még rendezni lehet úgy, hogy az első k darab alternatíva mindegyike megelőzi a fennmaradó $r - k$ alternatíva mindegyikét.

Csoportosítási probléma esetén nem érdekel bennünket, hogy az első k helyen lévő alternatíváknak mi az egymáshoz való viszonyuk, csak az érdekes, hogy a többieket megelőzzék. Ekkor a C tartományt legfeljebb $\binom{n}{k}$ résztartományra oszthatjuk, és egy résztartományon belül azok a súlyvektorok szerepelnek, amelyek alkalmazása mellett az adott k alternatíva megelőzi a többi $r - k$ alternatívát. Ezek a tartományok is konvex poliéderek, mivel az eddigiekhez hasonló módon véges számú lineáris egyenlőtlen-séggel lehet őket definiálni.

Az egyes problémák beépíthetők a Kornbluth-féle algoritmus módosított változatának elágazásaiba. Az algoritmus magva a következő:

1. Adott az r db alternatíva egy tetszőleges rendezése.

2. Képezzük a $K^{(j)}$ mátrixot a rendezésben résztvevő vektorok páronkénti különbségeiből. Minden $K^{(j)}$ -hez tartozik egy súlymeghatározásra szolgáló (3)–(5) egyenlőtlenségrendszer. Az egyenlőtlenségrendszerhez LP feladatok sorozatát konstruáljuk $kc \rightarrow \min$ célfüggvényekkel, ahol k a $K^{(j)}$ mátrix sorait jelenti egymás után.

Mivel általában $r \gg m$, ezért a duál feladatot oldjuk meg:

$$\varrho \rightarrow \max \quad (18)$$

$$\mu K^{(j)} + 1\varrho \leq k \quad (19)$$

$$\mu \geq 0 \quad (20)$$

A dualitási tételek értelmében ha (18)–(20) megoldásában $\varrho^* = 0$, akkor (3)-ban a k -t tartalmazó sor egyenlőség formájában teljesül. Sőt, ahol ebben a megoldásban μ_i szigorúan pozitív, a (3)-ban az a feltétel is egyenlőségként teljesül. Ez azért kényelmes, mert nem kell a duál feladatot $K^{(j)}$ minden sorára megoldani, a pozitív bázismegoldáshoz tartozó sorokat el lehet hagyni, s így alaposan le lehet csökkenteni a megoldandó lineáris programozási feladatok számát. Ezt a tényt fogja tükrözni az algoritmus következő két lépése.

A (18)–(20) rendszerben azért keressük az egyenlőség formájában teljesülő feltételeket, mert a lehetséges rendezések ismérve éppen az, hogy legalább egy szomszédos vektorpárra aktív feltételt találunk.

3. Megoldjuk a (18)–(20) feladatot. Ha az optimális megoldás zéró, akkor a $C^{(j)}$ -t határoló hipersíkot kaptunk. Amelyik μ_i pozitív, a hozzá tartozó i -edik egyenlőtlenség is aktív feltétel.

A k sorszámából és a μ_i -k indexeiből képezzük egy V indexhalmazt.

Ha a feladatnak nincs lehetséges megoldása, akkor az 1. alatti rendezés nem volt lehetséges rendezés.

4. A $K^{(j)}$ mátrix következő sorának sorszámát megnézzük az indexhalmazban. Ha V ezt az indexet tartalmazza, továbblépünk a következő sorra, mindaddig, amíg olyan indexet nem találunk, amelyik V -ben nem szerepel. Az így kiválasztott k -ra elvégezzük a 3. lépést. Ezt mindaddig folytatjuk, míg $K^{(j)}$ sorai el nem fogynak.

5. A $C^{(j)}$ halmaz egy olyan konvex poliéder, amelynek határait a V indexhalmazban lévő sorszámú egyenlőtlenségek adják meg. A $C^{(j)}$ extrémális pontjainak minden konvex lineáris kombinációja egy olyan súlyrendszert határoz meg, amelyik az 1. pontbeli rendezést szolgáltatja.

A döntéshozó megkapja a $C^{(j)}$ tartomány extrémális pontjait és a hozzátartozó rendezést. Ha ezt megfelelőnek találja, akkor az algoritmus véget ér. Ha nem tartja megfelelőnek, akkor megad egy vektorcserét – az aktív feltételek közül –, amely szerinte az előzőnél jobb rendezést jelent. Visszatérünk az első lépésre.

Vegyük észre, hogy a döntéshozónak együttesen kell megítélnie a súlyokat és az alternatívákat:

- ha van egy megfelelő rangsora, akkor elfogadható számára minden olyan súlyvektor, amelyik erre a rendezésre vezet,
- ha van egy elfogadható súlyvektora, akkor azt a rangsort is el kell fogadnia, amelyet ez a súlyvektor generál.

Az algoritmus előnye, hogy segítségével könnyen tudunk érzékenységvizsgálatot végezni. Néhány lehetőség:

- a) Mivel egy rendezéshez általában végtelen sok súlyrendszer tartozik, megvizsgálhatjuk, hogy *változatlan rendezés* mellett a súlyok mennyire rugalmasak. A módszer előnye, hogy azt is tudjuk, melyik súly milyen mértékű megváltoztatása „lendít át” egy új rendezésbe, és melyik az az új rendezés.
- b) Elemezhetjük azt is, hogy változatlan rangsor és változatlan súlyrendszer mellett melyik kritérium szerinti értékelések változhatnak és milyen határok között. Természetesen az ilyen elemzéseknél *ceteris paribus* érdemes vizsgálni, azaz a kritériumokat egy kivételével adott értéken rögzítve megnézzük, hogy milyen változtatásra van lehetőség a nem rögzített kritérium esetében.
- c) Megvizsgálható, hogy egy nem lehetséges rendezésből az értékelések milyen megváltozása vezet ki bennünket a legközelebbi lehetséges rendezésbe.

Az algoritmus 3. pontjából ágazhatunk el a $C^{(j)} = \emptyset$ esetben a (8)–(11) feladatbeli c vektor meghatározására.

A $K^{(j)}$ mátrix átalakításával (2. lépés) kezelni tudjuk a részleges rendezési és csoportosítási problémákat.

Mint láthatjuk, rugalmas módon tudunk alkalmazkodni a feladat és a döntéshozó specialitásaihoz. A módszer számítógépes megoldásánál olyan menürendszerben mozoghatunk, amelynek segítségével a súlymegítélések és az alternatívákra vonatkozó preferenciák megfelelő összhangja alakítható ki.

Lineáris hasznossági függvényt feltételező modellünk alkalmazásakor a következő lényegesebb megszorításokkal élünk:

- az alternatívák száma jóval nagyobb, mint a kritériumoké,
- minden kritériumnál a nagyobb érték jelent jobbat,

- az egyes kritériumok szerinti értékeléseket összehasonlítható alakra transzformáltuk,
- a döntéshozó véleményt tud alkotni egyes súlyokról és rendezésekről.

IRODALOM

1. CHANKONG, V. - HAIMES, Y. Y.: *Multiobjective Decision Making: Theory and Methodology*, North-Holland, 1983.
2. HWANG, CH.-L. - YOON, K.: *Multiple Attribute Decision Making. Methods and Applications*, Springer, 1981.
3. ZELENY, M.: *Multiple Criteria Decision Making*, McGraw Hill, 1982.
4. SRINIVASAN, V. - SHOCKER, A. D.: *Linear Programming Techniques for Multi-Dimensional Analysis of Preference*, *Psychometrika*, Vol 38. No.3. 1973.
5. JACQUET-LAGREZE, E. - SISKOS, J.: *Assessing a Set of Additive Utility Functions for Multicriteria Decision Making, the UTA Method*, *European Journal of Operational Research*, Vol. 10. No. 2., 1982.
6. BELTON, V. - VICKERS, S. P.: *Use of a Simple Multiattribute Value Function Incorporating Visual Interactive Sensitivity Analysis for MCDA*, Előadás a 3. nemzetközi MCDA nyári iskolán, 1988.
7. KORNBLUTH, J.: *Ranking with Multiple Objectives, a „Multiple Criteria Problem Solving” c. kötetben*, szerk. Zions, S., Springer, 1978.
8. FORGÓ, F. - TEMESI, J.: *Döntés több szempont figyelembevételével*, Tanulmány, kézirat, MKKE MSZI, Budapest, 1980.

ABSTRACT

In this paper we study how the principles to be required in an interactive decision process can be made operational in case of a narrow class of multiattribute decision problems assuming a simple linear utility model. In this approach the decision maker can judge his preferences and their consequences as a participant in a learning process. In the simple model to be chosen we can analyze the partition of a convex polyhedron determined by all the possible orderings in different aspects. So we can study the relationship between the decision problem (complete ranking, partial ranking, grouping, selecting the best) and the particular partition of the parameter space (space of weights).

AZ OPTIMÁLIS BENZINKEVERÉS EGY MATEMATIKAI MODELLJE

TERLAKY TAMÁS – WÉBER GÁBOR

*ELTE TTK Operációkutatási Tanszék – Magyar Szénhidrogénipari
Kutató-Fejlesztő Intézet*

Cikkünkben a Dunai Kőolajipari Vállalat (DKV) tartályparki benzinkeverését optimalizáló matematikai modellt közöljük. A benzinkeverési feladatban számos korlátozó tényezőt kellett figyelembe venni (tartályok száma, kapacitása, üzempacitások, igény, előkeverési kényszer). Néhány korlátozó tényezőtől (csőkapacitás) eltekintettünk, illetve a jelenlegi műszerezettség mellett követhetetlen folyamatokat (egy tartály egyidejű lefejtése és töltése különböző anyagokkal) leltottuk.

A korlátozásokat figyelembe véve, egy lényegében kétfázisú lineáris keverési modellt konstruáltunk. A két fázist egy interface program köti össze, amely az első fázis eredményéből elkészíti a második fázis input adatait. Az optimális keverést mindkét fázisban egy összetett – költség és büntetés – célfüggvény biztosítja.

1. Bevezetés

A keverési feladat az operációkutatás klasszikus feladatai közé tartozik. Az általunk ismert első-egzakt keverési modell CHAMES, COOPER, MELLON (1952)-től származik. Nagy gyakorlati hasznossága, sokoldalú alkalmazhatósága miatt a keverési modellek állandóan napirenden voltak és vannak. Így többek közt DANTZIG (1963) és HADLEY (1964) is több keverési modellt tárgyalt. Csak példaként említjük a kerozin keverési, betonkeverési, tápanyagkeverési feladatokat.

A matematikai statisztikában, az információelméletben is fontos helyet foglal el a különböző eloszlások eltéréseinek mérése, vizsgálata. Az eltérések legfontosabbjait CSISZÁR (1975) foglalta össze az úgynevezett f -eltérések családjába. Csiszár munkájára alapozva, KLAFSZKY-MAYER-TERLAKY a keverési feladat matematikai tulajdonságait a megoldási módszerek hatékonyságát összehasonlítva vizsgálta.

Mint már említettük (a teljesség igénye nélkül) számos keverési modellt konstruáltak az elmúlt évtizedekben. Cikkünk témája egy újabb keverési modell, melynek közlését azért tartjuk indokoltnak, mert egyidejűleg több keverést kell végrehajtani speciális műszaki adottságok között. Ennek a komplex keverési feladatnak egyetlen általunk ismert modell sem tesz eleget.

Végül, egy lényegében kétfázisú keverési modellt konstruáltunk, melyben a nem lineáris számításokat egy interface program végzi, az eltérések mérésére lineáris függvényt választottunk, illetve ahol szükséges volt, linearizáltuk az összefüggéseket.

Cikkünk felépítése a következő: A második fejezet a feladat műszaki- gazdasági korlátozásait, a probléma megfogalmazását tartalmazza. A harmadik fejezetben a feladat megoldásához, a készülő interaktív programrendszer üzemeltetéséhez szükséges adatbázist ismertetjük, míg végül a negyedik fejezetben a matematikai modellt ismertetjük.

2. Műszaki, technikai feltételek, a feladat megfogalmazása

A feladat lényege röviden az alábbiakban foglalható össze: Olyan modell és számítógépes program kidolgozása, mely akár naponta több alternatívában PC-n is hatékonyan megoldható, és

- a Dunai Kőolajipari Vállalat (DKV) termelési értékeit,
- a kiszállítási igényeket (ÁFOR, TVK, export),
- a műszaki adottságokat, korlátokat

figyelembe véve, optimális benzinkeverési recepteket szolgáltat. A kikevert benzinfajtáknak el kell érniük a szabványban előírt értékeket (minőségi alsó korlátok), és ezeket az értékeket a lehető legjobban kell közelíteni (felülről), ami a minimális „minőségi elajándékozást” biztosítja.

A feladat részletes megfogalmazása, műszaki korlátok

Az üzemekből vezetéseken (jelenleg nyolc) érkeznek a különböző szénhidrogén párlatok (mintegy harminc féle) a tartályokhoz. Ezek egy része már a csövekben keveredik, és így kerülnek tárolásra, illetve keverednek további komponensekkel.

Ebben a fázisban az anyagok három különböző típusú tartályba kerülnek. Az első típusba azok a tartályok tartoznak (egyedi tartályok), melyekben az értékes párlatok külön-külön kerülnek tárolásra. Ilyenek pl. a krakkbenzin, alkilátum, stb.

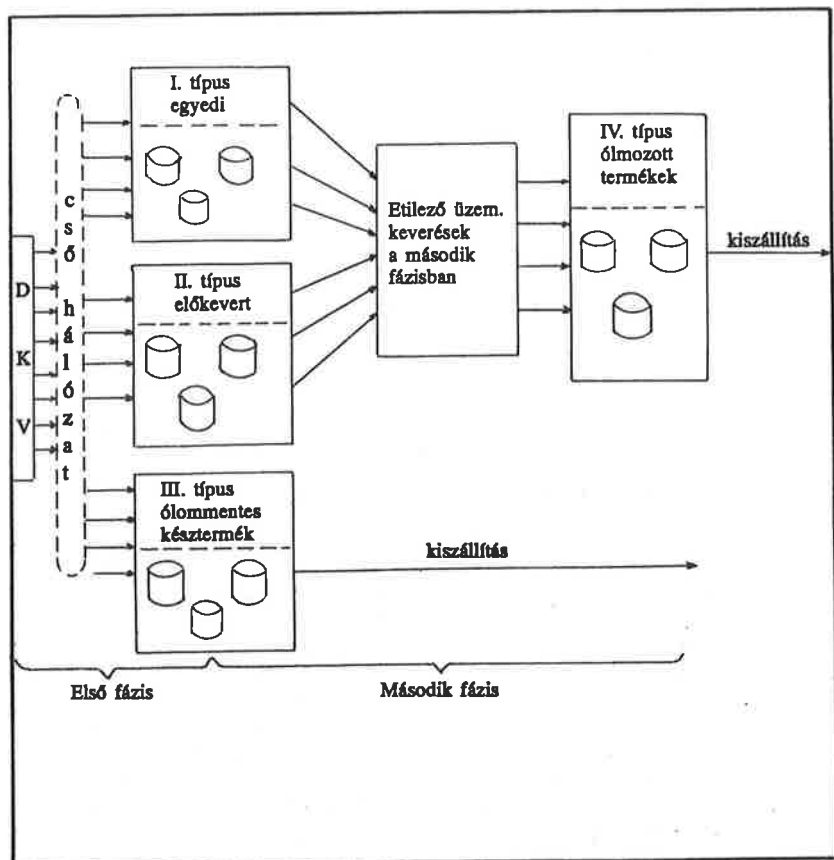
A második típusba azok a tartályok kerültek (előkeverő tartályok), melyekben a kevésbé értékes komponensek keverten tárolódnak. Itt természetesen további finomabb csoportosításra van szükség annak érdekében, hogy különböző minőségű keverőkomponenseket nyerjünk.

A harmadik típusba azok a tartályok kerültek, amelyekben közvetlenül, az üzemekből jövő párlatokból végterméket kevernek. Ezek a közvetlenül keverendő termékek az ólommentes benzinek és az ipari benzinek.

A második fázisban az előbb első és második típusba sorolt tartályokban előállt egyedi komponensekből, illetve előkevert elegyekből kell a késztermékeket kikeverni. Itt is, de az első fázis késztermékeinél is a minőségi paramétereket szabvány határozza meg. A második fázisban már csak ólmozott benzinek keletkeznek (soroljuk ezeket, illetve az itteni tartályokat a negyedik típusba).

Az anyagáramokat az egész rendszerben csövezeték-hálózaton keresztül számtalan szivattyú biztosítja, illetve tologatók állításával irányíthatók. Mivel mindenhol többszörös túlbiztosítás van, ezért az itt jelentkező korlátozásoktól eltekinthetünk.

A keverési folyamat sematikus ábrája az alábbi:



1. ábra

Megjegyezzük, hogy az első fázisban még minden komponens, termék ólommentes, az ólmozás a második fázisban, az etilező üzemben történik, amit a modell szempontjából (a folyadékábrától eltérően) tartályként kezelhetünk (ólom-tetraetil tartály).

A figyelembe veendő korlátok:

- a) Az üzemek termelése. Adott értéke, minden termelt párlatot el kell helyezni valamelyik tartályba.
- b) Csőhálózati kapcsolatok. Mi, mivel van összekötve. Bizonyos tartályok közötti összeköttetés nem megengedett.
- c) Cső- és szivattyúkapacitások. Mint kiderült, ettől eltekinthetünk, mivel a többszörös túlbiztosítás miatt nem jelent korlátot.
- d) Tartályméret. Tartályoknak nyilván van felső korlátja, de bizonyos tartályoknál minimális tartalom is elő van írva, így ezeknél alsó korlátokkal is számolni kell, illetve a tényleges készletet ennyivel csökkenteni kell.
- e) Tartálykészletek. A számítás kezdetekor a tartályban lévő anyag mennyisége, és jellemző minőségi paraméterei.
- f) Minőségi követelmények. A különböző benzinfajtákra a szabvány 13 jellemző minőségi paraméterre tartalmaz előírást.
- g) Igény. Különböző felhasználóktól beérkező mennyiségi és minőségi igények.
- h) Etilező üzem kapacitása. Az etilező üzemben keverik a benzinkomponensekhez az ólomtetraetilt, amivel többek közt az oktánszámot javítják. Ennek kapacitását a bekeverhető ólomtetraetil mennyiségén keresztül korlátozzuk.
- i) Egyidejűleg legfeljebb hat komponens keveredhet. Ez a feltétel a második fázisban amiatt lép fel, mivel az etilező üzembe hat csőnek van bekötése. Ennek figyelembevétele egyes diszkrét programozási feladatot eredményezne, ami esetünkben a nagy méretek miatt megoldhatatlanná tenné a feladatot PC-n. Továbbá, lehetséges a kevert tartályokba közvetlenül áttárolni anyagot, valamint KLAFSZKY, MAYER, TERLAKY (5) dolgozat tapasztalatai szerint a keverésben a komponensek jelentős hányada ténylegesen nem vesz részt, így ettől a feltételtől a továbbiakban eltekintettünk.
- j) Ólommentes benzin csak az első fázisban keveredhet. Műszaki oldalról nem garantálható az ólommentesség a második fázisban. Ezt a korlátot már a folyamatábrában is figyelembe vettük.
- k) Ólommentes benzin nem ólmozható, nem keverhető tovább a második fázisban.

- 1) Két fázisban történhet a keverés, az első fázisban előkeverés és az ólommentes termékek keverése történik, a második fázisban az ólmozott termékek keverhetők.

A feladat megfogalmazása

A fenti korlátozásokat figyelembe véve, a következő módon fogalmazható meg a feladat:

A cél olyan számítógépes modell, programrendszer kidolgozása, mely az adott termelési értékeket (a), készleteket (b) figyelembe véve szolgáltatja az optimális kétfázisú keverési programot, mely kielégíti az igényeket (f, g). Továbbá a keverési program eleget tesz a műszaki technikai feltételeknek (b, c, d, h), speciális követelményeknek (j, k) és a fenti feltételekből következő azon követelményeknek, hogy a keverést két fázisban optimalizálja.

3. Az adatbázis felépítése

Az adatbázis a feladat struktúrájának megfelelően, több részből tevődik össze. Tartalmazza az input, output adatokat, a minőségi paraméterek keverési egyenleteit, az anyagáramok optimális irányításához felhasznált (költség jellegű) célfüggvényértékeket, valamint a műszaki, hálózati korlátozásokat és kapacitásokat.

Az alábbi fő részekből és adatokból áll az adatbázis:

a) Tartályok

A feladatban előforduló tartályokat, műszaki paramétereit és a bennük lévő anyagok mennyiségi, minőségi jellemzőit, valamint a tartály felhasználási csoport szerinti besorolását tartalmazza:

- tartály azonosítója,
- kapacitás felső korlátja,
- kapacitás alsó korlátja,
- felhasználási cél (I., II., III., IV. típus),
- tartalmazott termék azonosítója,
- tartalmazott termék mennyisége,
- a termék 13 jellemző minőségi paramétere (figyelembe véve az egyes fázisoknak megfelelő változást).

b) Termelési (input) adatok (alapanyagok)

A finomítóból az adott időszak alatt a tartályparkba kerülő anyagok minőségi paramétereit tartalmazza:

- termék azonosítója (neve),
- termelt mennyiség,
- a termék 13 jellemző minőségi paramétere.

c) Igényadatok (késztermékek)

A kikeverendő termékekre ugyanazokat az adatokat tartalmazza, mint a b) a termelési adatokra.

- termék azonosítója (neve),
- igény mennyisége,
- a termék 13 jellemző minőségi paramétere.

d) Kapcsolatok mátrixai (I. és II. fázishoz)

Itt két mátrixot tárolunk a két fázisnak megfelelően, melyek leírják, hogy honnan hova áramolhatnak anyagok. A mátrix sorai a hova, oszlopai a honnan helyeknek felelnek meg (a szállítási feladathoz hasonlóan). Itt bizonyos átkötéseket műszaki okokból tiltani kellett. A szereplő cellákhoz célfüggvény-értékeket is rendeltünk, mely költségjellege miatt irányítja az anyagáramokat.

e) Keverési egyenletek mátrixai (I. és II. fázishoz)

Itt az egyes fázisokhoz tartozó azon egyenletek együttható mátrixait tároljuk, amelyek segítségével az egyes komponensek keveredésének eredményeként előálló keverékek minőségi paramétereit számolhatjuk ki. Ezek a keverési egyenletek a valódi keverési folyamat lineáris approximációi általában, ugyanis a lineárisan keveredő jellemzők (pl. aromás tartalom) mellett néhány minőségi jellemző (pl. ólomtartalom hatására az oktánszám) nem lineáris, hanem logaritmikus összefüggés szerint változik. Ennek lineáris közelítésével számolunk azért, hogy a modell megoldható legyen PC-n, a lineáris programozás keretein belül. Az általunk tekintett intervallumban a vizsgált lineáris approximáció jól közelíti a tényleges keveredési folyamatot. Ezt a közelítést tulajdonképpen javítja a kétfázisú keverés.

A fenti adatbázis adatait interaktív üzemmódban a felhasználó tartja karban, az időszakos futások során aktualizálja az input- (termelés), output- (igény) és készletadatokat. Továbbá, amikor szükséges, a keverési egyenletek együtthatóit és a kapcsolatok mátrixait is módosítja. Erre azonban csak ritkábban, új anyagok bevezetésekor vagy technológiai-műszaki átalakításkor van szükség.

4. A DKV benzinkeverésének matematikai modellje

A keverés, és így a keverési modell is kétfázisú. A két fázist egy interface program köti össze, amely biztosítja a két rész közti adatátvitelt, kiszámítja az előkevert tartályok minőségi jellemzőit. A második program futása után a modell záró lépése, hogy normálással kiszámítja a késztermékek pontos minőségi értékeit és tulajdonképpen egy egyszerű könyvelési művelettel a kikevert anyagokat a kiszállítási tartályokhoz rendeli.

Az első fázis

Jelölje I_1, I_2, I_3 az I., II., III. típusú tartályok indexhalmazait, és I_0 az input anyagokhoz rendelt indexek halmazát.

Változók:

- x_{ij} $i \in I_0, j \in I_1 \cup I_2 \cup I_3$ az i . alapanyagból a j . tartályba kerülő mennyiség,
 z_j $j \in I_1 \cup I_2 \cup I_3$ a j . tartály zárókészlete,
 $\pi_j^{(k)}$ $j \in I_3, k = 1, \dots, 13$ segédváltozók

Adatok:

- α_i $i \in I_0$ az i . alapanyag termelt mennyisége,
 k_j $j \in I_1 \cup I_2 \cup I_3$ a j . tartály kezdő készlete,
 l_j, h_j $j \in I_1 \cup I_2 \cup I_3$ az j . tartály kapacitásának alsó és felső korlátja,
 $m_j^{(k)}$ $j \in I_3, k = 1, \dots, 13$ a j . tartályhoz tartozó keverék k . minőségi paraméterhez tartozó keverési egyenletek együttható vektora,
 $u_j^{(k)}$ $j \in I_3, k = 1, \dots, 13$ a j . tartályra előírt k . minőségi paraméter értéke,
 c_{ij} $i \in I_0, j \in I_1 \cup I_2 \cup I_3$ az i - j . viszonylathoz hozzárendelt költségegyüttható,
 $t_j^{(k)}$ $j \in I_3, k = 1, \dots, 13$ a π_j segédváltozó súlyozó (büntető) faktora.

Feltételek:

$$\sum_{j \in I_1 \cup I_2 \cup I_3} x_{ij} = \alpha_i \quad i \in I_0 \quad (1)$$

$$\sum_{i \in I_0} x_{ij} + k_j - z_j = 0 \quad j \in I_1 \cup I_2 \cup I_3 \quad (2)$$

$$l_j \leq z_j \leq h_j \quad j \in I_1 \cup I_2 \cup I_3 \quad (3)$$

$$0 \leq x_{ij} \quad i \in I_0, j \in I_1 \cup I_2 \cup I_3 \quad (4)$$

$$m_j^{(k)} x_{.j} - \pi_j^{(k)} - u_j^{(k)} z_j = 0 \quad j \in I_3, k = 1, \dots, 13 \quad (5)$$

$$\pi_j^{(k)} \geq 0 \quad j \in I_3, k = 1, \dots, 13 \quad (6)$$

Cél:

$$cx + tp \rightarrow \min \quad (7)$$

ahol c, x, t, p a $c_{ij}, x_{ij}, t_j^{(k)}, \pi_j^{(k)}$ együtthatókból alkotott vektorokat, míg $x_{.j}$ az $(x_{ij})_{i \in I_0}$ vektort jelöli.

Az (1) egyenletek a termelési mérlegegyenletek, a (2) egyenletek a tartályok mérlegegyenletei, melyekhez (3) egyenlőtlenségek biztosítják a tartályok kapacitáskorlátainak betartását, illetve I_3 tartályaira l_j, h_j értékeinek a kiszállítási igény értékét megfelelően az igények kielégítését. A (4) nem negativitási feltételek tulajdonképpen csak az anyagáramlás irányát garantálják. A keverés szempontjából a legfontosabbak az (5) keverési egyenletek, melyek (6) feltételekkel együtt garantálják, hogy a keverés számított $m_j^{(k)} x_{.j}$ k -ik minőségi paramétere elérje az előírt minimális szintet.

Ezen a ponton rá kell mutatni, hogy a LEMKE (1965) dolgozatban közölt eltérések közül teljesen egyiket sem lehetett itt adaptálni, mivel a Kullback-Leibler és a Hellinger eltérés nem lineáris, a Pearson eltérés kvadratikus feladatra vezet, melyek PC-n az általunk vizsgált méretben megoldhatatlanok. Esetünkben ugyanis mintegy 30 alpanyag, 15 tartály és körülbelül 5×13 minőségi feltétel szerepel, ami körülbelül egy 100×400 méretű feladatot eredményez. Így a lineáris programozásra vezető Variáció és Szmirnov eltérés jöhetett csak szóba. Itt azonban nem egy cél közelítése, hanem felülről való közelítése a cél, így a minőségi korlátok mellé a felfelé való eltérés súlyozott büntetését választottuk, ami az eltérés súlyozott Variációs távolságával ekvivalens, miközben (5) és (6) feltételek garantálják a minőségi feltételek teljesülését.

A célfüggvényben szereplő c értékek az anyagáramlás irányának optimalizálását segítik elő, így a termékek a lehetőségek keretein belül a legértékesebb helyre kerülnek. A tp szorzat büntető függvény szerepét tölti be a $t_j^{(k)}$ súlyértékekkel különbözően büntetve az egyes minőségi eltéréseket.

Interface

Mint az már bizonyára feltűnt, a II. típusú előkeverési tartályokhoz nem rendeltünk minőségi egyenleteket (az I. típusú tartályokhoz, mivel itt egyedi termékeket tárolunk, nem is szükségesek). Ennek oka, hogy ezekre nincsenek minőségi előírások, a keverék minőségét azonban a második fázisban már ismernünk kell. Így az interface program – a két fázis közötti közvetlen adatátvitelen túl – számítja a tartályokban (keletkezett) lévő anyagok minőségi paramétereit az $m_j^{(k)} x_{,j}/z_j$ képlet alapján. Így egyszerűen skalár szorzatok és normálás segítségével megkapjuk a kívánt minőségeket. Ezt akkor sem lenne célszerű a modellbe bevenni, ha tehetnénk, mivel csak a méretet növeli, de az optimálást nem befolyásolja. Ezen túl azért sem vehetjük ezt a számítást a modellbe, mivel a normálás miatt nem lineáris összefüggésről van szó, tehát még ha a méretkorlátok megengednék, akkor sem lenne alkalmazható a kétlépcsős LP modellek szokásos technikája.

Második fázis

A feladat mind szerkezetében, mind megoldási módjában analóg az első fázis feladatához. Jelölje I_4 a IV. típusú tartályok indexhalmazát. Legyen $I_1 = I_1 \cup \{(O)\}$, ahol O jelöli az etilező üzemhez hozzárendelt indexeket.

Változók:

- y_{ij} $i \in I_1 \cup I_2, j \in I_4$ az i . előkevert tartályból a j . késztermék tartályba kerülő mennyiség,
 x_j $j \in I_4$ a j . tartály zárókészlete,
 $\varrho_j^{(k)}$ $j \in I_4, k = 1, \dots, 13$ segédváltozó

Adatok:

- z_i $i \in I_1 \cup I_2$ az első fázisból számított zárókészlet, ami most induló készlet,
 k_j $j \in I_4$ a j . késztermék tartály kezdő készlete,
 l_j, h_j $j \in I_4$ a j . tartály kapacitásának alsó és felső korlátja, ill. az igény mennyisége
 $m_j^{(k)}$ $j \in I_4, k = 1, \dots, 13$ mint az első fázisban,
 $u_j^{(k)}$ $j \in I_4, k = 1, \dots, 13$ mint az első fázisban,
 d_{ij} $i \in I_1 \cup I_2, j \in I_4$ az i - j . viszonylathoz hozzárendelt költséggyűjtő,
 $s_j^{(k)}$ $j \in I_4, k = 1, \dots, 13$ a $\varrho_j^{(k)}$ segédváltozó súlyozó (büntető) faktora.

Feltételek:

$$\sum_{j \in I_4} y_{ij} \leq z_i \quad i \in I_1 \cup I_2 \quad (1')$$

$$\sum_{i \in I_1 \cup I_2} y_{ij} + k_j - \chi_j = 0 \quad j \in I_4 \quad (2')$$

$$l_j \leq \chi_j \leq h_j \quad j \in I_4 \quad (3')$$

$$0 \leq y_{ij} \quad i \in I_1 \cup I_2, j \in I_4 \quad (4')$$

$$m_j^{(k)} y_{.j} - \varrho_j^{(k)} - u_j^{(k)} \chi_j = 0 \quad j \in I_4, k = 1, \dots, 13 \quad (5')$$

$$\varrho_j^{(k)} \geq 0 \quad j \in I_4 \quad (6')$$

Cél:

$$dy + sr \rightarrow \min \quad (7')$$

ahol $d = (d_{ij})$, $y = (y_{ij})$, $s = (s_j^{(k)})$, $r = (\varrho_j^{(k)})$

Nilvánvaló most már, hogy az (1')–(7') feladat struktúrája lényegében azonos (1)–(7) feladatával, ezért a feltételek jelentését, az azokhoz fűzött magyarázatot nem ismételjük meg.

Megjegyezzük azonban, hogy (1') feltételek általában egyenlőtlenségek (1) egyenlőségekkel szemben, ugyanis az első fázisban a termelt mennyiséget el kell helyezni, itt azonban nem kötelező tovább keverni a tárolt mennyiséget. Ugyanis (3) egyenletek az első fázisban (I_3 -tól eltekintve) kapacitáskorlátokat, míg I_3 esetében és (3')-nál igényt jelentenek. Megjegyezzük továbbá, hogy (1–2) és (1'–2') feltételek lényegében egy felsőkorlátos szállítási feladat feltételrendszerét adják, az (5), illetve (5') feltételek miatt azonban ez a speciális struktúra nem használható ki feladatok megoldása során.

Végül, az egyes késztermékekből kikevert mennyiségeket, azok egy részét át kell tárolni a kiszállítási lehetőségeknek (igényeknek megfelelően, csövezeték, közúti, vasúti, uszályszállítás) speciálisan felszerelt tartályokba. Ez az optimalizálástól független, komoly matematikai eszközöket nem igénylő könyvelési feladat az adatbázisban, melyet a program automatikusan elvégezhet, illetve a felhasználó igényei szerint irányítja a tárolást.

Összefoglalva: Az optimális benzinkeverést egy adatbázisra épülő, az adatbázis adataiból a megfelelő LP feladatokat automatikusan generáló és azokat megoldó programrendszer biztosítja. Az első és második fázis egy-egy LP feladat generálása és megoldása az aktualizált termelési és igényadatok függvényében. Az LP feladatok a természetes alsó-felső korlát megkötéseken túl szállítási feladat és minőségi

keverési típusú feltételeket tartalmaznak. Az optimális keverést mindkét fázisban egy összetett célfüggvény biztosítja, amely egy költség típusú és egy büntetés (az előírt minőségtől való eltérést bünteti) típusú összetevőből áll. A két fázist összekötő interface program számítja az előkevert anyagok tényleges minőségi paramétereit. Az optimalizáló lépések után egyszerű könyvelési manőver a harmadik fázisban a kiszállítási helyekre szétosztani a kikevert késztermékeket.

A modell IBM/PC-AT gépen interaktív üzemmódban használható, a felhasználó tetszőleges fázisban beavatkozhat, az egyes fázisok külön is futtathatók, és a megfelelő korlátozó paraméterek bevezetésével egyedi keverésre is felhasználható.

IRODALOM

1. CHAMES A., COOPER W. W., MELLON, (1952): „Blending aveation gasolin – a study in programming interdependent activities in an integrated oil company”, *Econometrica*, 20., 35-159.
2. CSISZÁR I., (1975): „I-divergence geometry of probability distributions and minimization problems”, *Annales of Probability* 3, 146-156.
3. DANTZIG G. B., (1963): „Linear Programming and extensions” Princeton University Press, Princeton.
4. HADLEY G., (1962): „Linear Programming” Addison Wiley, Reading, Mass.
5. KLAFSZKY E., MAYER J., TERLAKY T.: „On mathematical programming models of mixing”, *EJOR* (to appear).
6. LEMKE C. E., (1965): „Bimatrix equilibrium points and mathematical programming”, *Management Science*, 11., 681-689.
7. RÉNYI A., (1962): „Wahrscheinlichkeitsrechnung mit einem Anlang über Informationstheorie”, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin.

ABSTRACT

A mathematical programming model for optimizing gasoline blending of Danubian Oil Work is presented in this paper. Several constraints not included in the classical blending problem are considered here. These include the number and capacity of tanks, production of the workshops, demand and preblending. In this model, we do not consider pipeline capacity constraints, since these constraints are always slack. It is assumed that a tank is not filled and not emptied simultaneously. Accordingly, a two phase blending model is constructed. The two phase is connected by an interface program which generates the input data for the second phase by computing quantitative and qualitative parameters of pre-mixed components. The optimal blending of gasolines is obtained by linear programming models with a composite cost and penalty objective.

AUTOREGRESSZÍV FOLYAMATOK ELŐREJELZÉSE BAYES-MÓDSZERREL

VARGA JÓZSEF

JPTE Közgazdaságtudományi Kar, Pécs

Az idősorok elemzésére és előrejelzésére szolgáló Box-Jenkins módszer számos előnyös tulajdonsága következtében általánosan elfogadott, és az egyes előrejelzési technikák összehasonlítására leggyakrabban alkalmazott eljárás. Hátránya azonban, hogy a paraméter becslések bizonytalanságát nem veszi figyelembe. Az itt bemutatásra kerülő, Bayes-módszeren alapuló eljárás alkalmas a paraméterbecslések bizonytalanságának modellezésére mind a becslési, mind pedig az előrejelzési szakaszban. Egy ARIMA modell Bayes-módszerrel történő paraméter-becslése általában nem nehéz feladat, az előrejelzések előállításában azonban számos nehézséggel jár, mivel zárt formulák híján közelítéseket kell alkalmaznunk. A paraméterhalmaz az együttes a posteriori eloszlásból kiválasztott véletlen minta, amelyet azután az idősor egy jövőbeli lefutásának szimulálására használunk fel.

1. Bevezetés

A Bayes-féle megközelítés alapvető eleme a Bayes-tétel, amelyet az irodalomban az inverz valószínűség tételének is neveznek. Ennek a tételnek a folytonos valószínűségi változókra vonatkozó alakját fogjuk a következőkben felhasználni. Jelölje $p(Y, \Phi)$ az Y véletlen megfigyelés vektor és az ugyancsak véletlenszerűnek feltételezett Φ paramétervektor együttes valószínűség sűrűségfüggvényét. A paramétervektor elemei egy modell együtthatói, a zavar tényezők varianciái és kovarianciái stb. lehetnek. A valószínűség sűrűségfüggvény a szokásos műveletek alkalmazásával így írható:

$$p(Y, \Phi) = p(Y|\Phi)p(\Phi) = p(\Phi|Y)p(Y) \quad (1)$$

ahonnan

$$p(\Phi|Y) = \frac{p(\Phi)p(Y|\Phi)}{p(Y)} \quad p(Y) \neq 0 \quad (2)$$

Az utóbbi kifejezésből pedig a következő adódik:

$p(\Phi|Y) \propto p(\Phi)p(Y|\Phi) \propto$ a priori valószínűség sűrűségfüggvény \times likelihood függvény, ahol \propto az arányosság jele, $p(\Phi|Y)$ a Φ paramétervektor a posteriori valószínűség sűrűségfüggvénye adott Y minta információ mellett, $p(\Phi)$ a Φ paramétervektor a priori valószínűség sűrűségfüggvénye, és $p(Y|\Phi)$ a Φ függvényének tekintett jól

ismert likelihood függvény. Láthatjuk, hogy a $p(\Phi|Y)$ együttes a posteriori sűrűség-függvény magába foglalja az összes a priori és mintabeli információt.

Az „inverz valószínűségi” problémák úgy jellemezhetők, hogy adatok állnak rendelkezésünkre, és az adatokban rejlő információ alapján próbálunk meg arra következtetni, hogy milyen véletlen folyamat generálta ezeket az adatokat. Ugyanakkor a „direkt valószínűségi” problémák esetében ismerjük a véletlen folyamatot, beleértve a folyamat paramétereinek értékét is, és ennek alapján valószínűségi állításokat fogalmazunk meg az ismert folyamat kimeneteivel vagy az általa előállított adatokkal kapcsolatban. Ebben a felfogásban a statisztika becslési problémái „inverz valószínűségi” problémáknak, míg számos, szerencsejátékokhoz fűződő probléma „direkt valószínűségi” problémának tekinthető.

Ha a priori információnk egy modell paramétereire vonatkozik, és ez az információ bizonytalan, az adatok elemzéséhez „diffúz” a priori valószínűség sűrűség-függvényt alkalmazunk. A különböző típusú a priori valószínűség sűrűségfüggvényekre vonatkozó elveket és megfontolásokat itt nem tárgyaljuk (ld. ZELLNER (1971)).

Sok esetben feladatunk az, hogy a rendelkezésünkre álló Y minta információ alapján következtessünk még meg nem figyelt értékekre. A Bayes-féle megközelítésben a még meg nem figyelt értékek valószínűség sűrűségfüggvénye, amely prediktív valószínűség sűrűségfüggvényként ismert, meghatározható a minta információ felhasználásával. Jelölje \tilde{Y} a még meg nem figyelt értékek vektorát. Az \tilde{Y} és a Φ paramétervektor együttes sűrűségfüggvénye adott Y minta információ mellett

$$p(\tilde{Y}, \Phi|Y) = p(\tilde{Y}|\Phi, Y) p(\Phi|Y) \quad (3)$$

A $p(\tilde{Y}|Y)$ prediktív valószínűség sűrűségfüggvény előállítására céljából csupán az előző egyenlet jobb oldalát kell integrálnunk Φ szerint, azaz

$$p(\tilde{Y}|Y) = \int_{R_*} p(\tilde{Y}, \Phi|Y) d\Phi = \int_{R_*} p(\tilde{Y}|\Phi, Y) p(\Phi|Y) d\Phi \quad (4)$$

2. Idősorok előrejelzése Bayes-módszerrel

Az autoregresszív-integrált mozgóátlag (ARIMA) modell osztály az egyváltozós idősorok modellezésére és előrejelzésére megfelelő, flexibilis parametrikus formákat szolgáltat. A Bayes-féle megközelítés szempontjából azonban a Box-Jenkins módszer nélkülöz egy fontos jellemzőt, a paraméterbecslés bizonytalansága modellezési lehetőségét. Az itt bemutatandó eljárások lehetővé teszik ennek a bizonytalanságnak a modellezését mind a becslési, mind pedig az előrejelzési szakaszban. Bár az ARIMA modellek paramétereinek Bayes-módszerrel történő becslése viszonylag könnyű, az előrejelzések előállítására azonban nehézségekbe ütközik. A több periódusú előrejelzések esetében a prediktív sűrűségfüggvény nem írható kényelmesen

kezelhető, zárt alakba, ezért közelítő módszerek szükségesek. Még csak kevés működőképes, Bayes-technikán alapuló alkalmazás ismert az előrejelzés területén, bár az ARMA modellek paramétereire szolgáló Bayes-típusú eljárásokról már az 1960-as években jelentek meg publikációk. Ennek oka rendkívül egyszerű, a becslésből az előrejelzésbe történő átmenet számos technikai nehézséget jelent. MONAHAN (1983) „teljesen Bayes-típusú” megközelítést alkalmaz, az elemzést azonban a kettőnél több paramétert nem tartalmazó modellekre korlátozta, ami a fent említett nehézségeket jelzi. BLOOMFIELD (1972) és BAILLIE (1979) az ARIMA modell paraméter becslésekor fellépő bizonytalanság kiegyenlítését vizsgálták. PENTIKAINEN és RANTALA (1979) szimulációs módszert alkalmaztak annak az időpontnak a becslésére, amikor az idősor eléri egy korlátot. Ebben a dolgozatban az előrejelzéssel kapcsolatos, fent említett problémákat Bayes-féle nézőpontból közelítjük meg. A paraméterértékek bizonytalanságát automatikusan beépítjük a szimulációs eljárásba.

3. Autoregresszív modell paramétereinek becslése

Tekintsük a következő p -edrendű autoregresszív folyamatot:

$$y_t = \Phi_0 + \Phi_1 y_{t-1} + \dots + \Phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t \quad (t = 1, 2, \dots, T) \quad (5)$$

ZELLNER (1971) megmutatta, hogy a

$$\Pi(\Phi_0, \dots, \Phi_p, \tau) \propto 1/\tau \quad (6)$$

a priori eloszlás esetén az $Y = (y_{1-p}, \dots, y_0, y_1, \dots, y_T)$ megfigyelt értékek mellett a $\Phi = (\Phi_0, \dots, \Phi_p)$ eloszlása a megfigyelt értékek és τ mint feltétel mellett normális eloszlás, a τ hiba a posteriori eloszlása pedig gamma eloszlás. Pontosabban:

$$(\Phi|\tau, Y) \sim N(\hat{\Phi}, [\tau D]^{-1}) \equiv \Pi(\Phi|\tau, Y) \quad (7)$$

illetve

$$(\tau|Y) \sim \Gamma(r/2, 2/S(\hat{\Phi})) = \Pi(\tau|Y) \quad (8)$$

$$D = \begin{pmatrix} T & y_{t-1} & y_{t-2} & \dots & y_{t-p} \\ y_{t-1} & y_{t-1}^2 & y_{t-1}y_{t-2} & \dots & y_{t-1}y_{t-p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{t-p} & y_{t-p}y_{t-1} & y_{t-p}y_{t-2} & \dots & y_{t-p}^2 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\hat{\Phi} = \begin{pmatrix} \hat{\Phi}_0 \\ \hat{\Phi}_1 \\ \vdots \\ \hat{\Phi}_p \end{pmatrix} = D^{-1} \begin{pmatrix} \sum y_t \\ \sum y_{t-1}y_t \\ \vdots \\ \sum y_{t-p}y_t \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$S = \sum_{t=1}^T (y_t - \hat{\Phi}_0 - \hat{\Phi}_1 y_{t-1} - \dots - \hat{\Phi}_p y_{t-p})^2 \quad (11)$$

$r = T - (p+1)$ és a D mátrix elemeiben az összegzés határai megegyeznek a (11)-beli határokkal.

A (6) eloszlás kis súlyt fektet az elemzést végző, a priori ismereteire, vagyis az a priori ismereteket elfedik az adatok. Informatív a priori eloszlást is alkalmazhatunk, amely nagyobb súlyt helyez a szakember szubjektív véleményére. A (6) típusú diffúz a priori eloszlás alkalmazásakor a paraméterek valószínűségeloszlást alkotnak, és a legvalószínűbb értékek megegyeznek a hagyományos legkisebb négyzetek módszerével adódó értékekkel. Ha ezt a módszert össze akarjuk hasonlítani a nem Bayes-féle közelítésekkel, akkor diffúz a priori eloszlást kell alkalmaznunk. Az (5) modell a paraméterekben lineáris. Ez a linearitás azonban eltűnik, ha mozgóátlag kifejezések kerülnek a modellbe. Ez azt jelenti, hogy nem lehetséges megfelelő zárt kifejezéseket nyerni a paraméterek a posteriori eloszlására. Előrejelzés esetén azonban már az egyszerű autoregresszív modellekben is eltűnik ez a linearitás. Például, amikor három lépéses előrejelzéseket állítunk elő a

$$y_{T+3} = \Phi_0 + \Phi_1 y_{T+2} + \Phi_2 y_{T+1} + \varepsilon_{T+3} \quad (12)$$

modell segítségével, a (12) jobb oldalának kifejezései a valószínűségi változók szorzatait tartalmazzák, ezáltal a prediktív eloszlás nem lesz standard alakú.

4. A prediktív eloszlás szimulálása

Az idősor előrejelzett értékeit a jövőbeli megfigyelések sűrűségfüggvénye segítségével állítjuk elő. Az n -lépéses előrejelzés előállításához szükséges a

$$p(y_{T+1}, \dots, y_{T+n} | Y) = \int f(y_{T+1}, \dots, y_{T+n}, \Phi_0, \dots, \Phi_p, \tau | Y) d\Phi d\tau = \int f(y_{T+1}, \dots, y_{T+n}, | \Phi, \tau, Y) \Pi(\Phi | \tau, Y) d\Phi d\tau \quad (13)$$

prediktív eloszlás ismerete, ahol $-\infty < \Phi_i < +\infty$ ($i = 1, 2, \dots, p$), $\tau > 0$.

A p -edrendű autoregresszív $AR(p)$ folyamat esetén az egy lépéses prediktív eloszlás Student-féle t eloszlás $T - (p + 1)$ szabadságfokkal. Ennek alapján az együttes eloszlás a feltételes sűrűségfüggvények szorzataként írható. Ez az eredmény kiterjeszhető az n -lépéses előrejelzésre az alábbiak szerint:

$$p(y_{T+1}, \dots, y_{T+n} | Y) = \prod_{k=1}^n p(y_{T+k} | y_{1-p}, \dots, y_{T+n-1}) \quad (14)$$

Tehát az együttes eloszlás n számú egyváltozós t eloszlás szorzataként fejezhető ki, azonban az előrejelzések előállítására nehéz, mert t eloszlások szorzata nem feltétlenül írható zárt alakba.

CHOW (1974) a több periódusú prediktív eloszlás várható érték vektorának és kovariancia mátrixának kiszámítására együttes előrejelzési momentumokat ad meg. Másodrendű modellel előállított

$$y_{T+3} = \Phi_0 + \Phi_1 y_{T+2} + \Phi_2 y_{T+1} + \varepsilon_{T+3}$$

három lépéses előrejelzés CHOW eredménye alapján

$$y_{T+3} = \Phi_0(1 + \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_1^2) + \Phi_1(\Phi_1^2 + 2\Phi_2)y_T + \Phi_1^2(1 + \Phi_2)y_{T-1} + (\Phi_1^2 + \Phi_2)\varepsilon_{T+1} + \Phi_1\varepsilon_{T+2} + \varepsilon_{T+3} \quad (15)$$

szerint adható meg. A (14) és (15) összefüggések a Bayes-közelítés idősorokra történő alkalmazásának nehézségét mutatják. Ezért általában valamilyen típusú közelítés alkalmazása szükséges az előrejelzési szakaszban. Az itt bemutatandó közelítés a prediktív eloszlás szimuláció útján történő meghatározása, mellőzve az eloszlás analitikus alakjának meghatározására irányuló próbálkozásokat.

A (13) összefüggés a prediktív sűrűségfüggvény olyan jellemzését adja, amelynek alapján Monte-Carlo módszer alkalmazásával lehetővé válik az integrál közelítő meghatározása.

A folyamat minden egyes jövőbeli $y_{T+1}, y_{T+2}, \dots, y_{T+n}$ lefutásának előállítása három lépésben történik:

- 1. Véletlenszerűen kiválasztjuk (8)-ban leírt τ gamma eloszlású valószínűségi változó egy lehetséges értékét.
- 2. Az együttes a posteriori eloszlás alapján véletlenszerűen kiválasztunk egy Φ_0, \dots, Φ_p paraméterhalmazt.
- 3. Szimulálunk egy n periódus hosszúságú utat az 1. és 2. lépésekben kiválasztott paraméterek felhasználásával.

A szimulált utak elegendően nagy elemszámú halmaza a folyamat T időpont utáni lehetséges realizációinak egy mintája. Ezt a mintát azután sokféleképpen használhatjuk fel a folyamat jövőbeli lefutásának jellemzésére.

Példaként egy iparcikkáruház szezonálisan kiegyenlített negyedéves forgalom adatait vizsgáltuk. Az 1970. első negyedétől 1981. negyedik negyedévéig terjedő adatok alapján történt a modell identifikálása és a paraméterek becslése. (Lásd az 1. táblázatot.) A prediktív eloszlást a következő három évre állítottuk elő, vagyis 1982. első negyedétől 1984. negyedik negyedévéig. 5000 lefutást állítottunk elő a fent bemutatott háromlépéses algoritmus alapján. Az eredményt a prediktív eloszlás néhány kiválasztott percentilisével jellemeztük. A mediánt, az 5, 25, 75 és 95 percentiliseket mutatja a 2. táblázat a különböző előrejelzési időpontokban.

1. táblázat: Egy iparcikk-áruház forgalmának negyedéves, szezonálisan kiigazított adatai és az előrejelzések átlagértékei (millió Ft-ban)

Év	Negyedév				Éves átlag
	1.	2.	3.	4.	
1970	3.322	3.175	3.144	3.167	3.202
1971	3.026	3.055	3.175	3.108	3.091
1972	3.709	4.212	4.599	4.435	4.239
1973	5.251	5.251	5.369	5.295	5.291
1974	5.133	5.013	4.984	4.746	4.969
1975	4.390	4.332	4.301	4.272	4.324
1976	4.450	4.568	5.013	4.999	4.757
1977	7.238	7.802	7.505	7.548	7.523
1978	6.793	6.646	6.691	6.860	6.817
1979	6.646	6.319	6.141	5.903	6.252
1980	5.518	5.340	5.311	5.191	5.340
1981	5.102	5.133	5.162	5.222	5.155
minta átl.	5.048	5.070	5.139	5.062	5.080
1982	5.458	6.675	6.793	6.675	6.400
1983	6.526	6.562	6.524	7.443	6.764
1984	7.778	8.339	8.445	9.280	8.460

2. táblázat: A prediktív eloszlás percentilisei
5000 szimulált lefutás alapján

Év	Negyed- év	Percentilisek				
		5	25	medián	75	95
1982	1	4.82	5.07	5.29	5.42	5.73
1982	2	4.51	4.98	5.31	5.66	6.14
1982	3	4.26	4.86	5.38	5.80	6.51
1982	4	3.96	4.83	5.40	5.96	6.82
1983	1	3.74	4.76	5.42	6.13	7.14
1983	2	3.52	4.63	5.43	6.19	7.37
1983	3	3.36	4.61	5.44	6.24	7.52
1983	4	3.24	4.59	5.46	6.27	7.63
1984	1	3.19	4.57	5.48	6.32	7.74
1984	2	3.06	4.55	5.49	6.34	7.86
1984	3	3.04	4.54	5.49	6.34	7.86
1984	4	3.02	4.52	5.50	6.36	7.93

A másodrendű autoregresszív modell megfelelően írja le a forgalom alakulásának folyamatát az 1970–1981 közötti periódusban, mivel a minta autokorreláció függvénye konzisztens a másodrendű autoregresszív modellel. A feltételezett modell:

$$y_t = \Phi_0 + \Phi_1 y_{t-1} + \Phi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t \quad t = 1, 2, \dots, 46 \quad (16)$$

ahol $\varepsilon_t \sim N(0, \tau^{-1})$ és függetlenek, a Φ_0, Φ_1, Φ_2 és τ paraméterek a

$$\Pi(\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \tau) \propto 1/\tau \quad \tau > 0, \quad -\infty < \Phi_i < +\infty \quad (i = 1, 2, 3) \quad (17)$$

a priori eloszlást követik, az $y_{-1} = 3.332$ és $y_0 = 3.175$ adatok a számítás induló értékei.

A (7)–(11) egyenletek felhasználásával

$$(\tau|Y) \sim \Gamma(43/2, 2/14.1525) = \Gamma(21.5, 0.1413)$$

$$(\Phi|\tau, Y) \sim N(\hat{\Phi}, [\tau D]^{-1}) =$$

$$N \left(\begin{pmatrix} 0.554 \\ 1.151 \\ -0.323 \end{pmatrix}, \tau^{-1} \begin{pmatrix} 0.3702 & -0.0518 & -0.0164 \\ -0.0518 & 0.1263 & -0.1171 \\ -0.0164 & -0.1171 & 0.1212 \end{pmatrix} \right) \quad (18)$$

Különös figyelmet érdemel az 5 és 95 percentilisek alkotta intervallum, amelyet Bayes-féle prediktív intervallumnak neveznek. Tanulságos a Bayes-módszerrel és a hagyományos technikákkal adódó eredmények összehasonlítása. Az előrejelzések és azok határai általában különböznek a Box-Jenkins eljárással adódóaktól. Az előrejelzési intervallumok szélesebbek, sőt még csak nem is tartalmazzák teljes egészében a Box-Jenkins-féle intervallumokat. Ez azonban nem meglepő, hiszen a Bayes-módszerrel nyerhetőül teljesen eltérő előrejelző függvényeken alapulnak. Egy Box-Jenkins modell által generált előrejelzés tendenciaszerűen torzított a mintaátlag felé, míg a prediktív eloszlás átlaga nem mutat ilyen viselkedést. Bár ezeket a tapasztalatokat egy nagyon egyszerű modellel kapcsolatban szereztük, a módszer jóval bonyolultabb modellek esetében is alkalmazható.

5. VÁLTOZÓ ELŐREJELZÉSEK

A kizárólag múltbeli adatokon alapuló előrejelzési módszerek feltételezik, hogy a sztochasztikus folyamat ugyanaz lesz a jövőben, mint amilyen a múltban volt. Az előző szakaszbeli prediktív eloszlást ilyen feltételek mellett szimuláltuk. Ebben a szakaszban feltételezzük, hogy a sztochasztikus folyamat a jövőben megváltozik. Feltételezzük, hogy a folyamatban 1982–1984 között változás következik be, és ennek a feltételezésnek megfelelő változó előrejelzést adunk. Erre a célra a

$$y_t - \mu = \Phi_1(y_{t-1} - \mu) + \Phi_2(y_{t-2} - \mu) + \varepsilon_t \quad (19)$$

másodrendű autoregresszív folyamat alkalmas, ahol μ az idősor átlagértékét jelöli. A (16) másodrendű autoregresszív modellel összevetve $\Phi_0 = (1 - \Phi_1 - \Phi_2)\mu$. A Φ vektor a posteriori eloszlását adott τ pontosság és $Y = (y_{-1}, y_0, \dots, y_T)$ adatok mellett a (18) egyenlet írja le.

Ha az idősor μ átlagértéke független a Φ_1 és Φ_2 paramétereiktől, az átlagértéknek μ értékről $(\mu + \lambda)$ értékre változása a (18) eloszlást csak a $\hat{\Phi}_0$ átlagértéken keresztül befolyásolja.

Eredetileg a

$$\hat{\Phi}_0 = (1 - 1.151 + 0.323)\hat{\mu} \quad (20)$$

összefüggés állt fenn, így a konstans kiigazított várható értéke:

$$\hat{\Phi}_0 = 0.0554 + 0.172\lambda \quad (21)$$

Ez a szimulációs eljárást csak kissé módosítja. A $(0.554 + 0.172\lambda, 1.151, -0.323)$ kiigazított várható érték vektorhoz kell egy, az $N(0, [\tau D]^{-1})$ folyamatból származó eltérés vektort hozzáadni. Ennek a két vektornak az összege a Φ egy realizációja, amelyet a folyamat egy jövőbeli lefutásának generálására használhatunk. A lefutásokban bekövetkező, az új vektor által okozott változás a „beavatkozás” előjelétől és mértékétől függ. Ez a változó előrejelzések előállítására szolgáló eljárás BOX és TIAO (1975) módszerére emlékeztet, amelyben egy determinisztikus komponenst adnak hozzá egy idősormodellhez, így az képes áttérni egy új várható érték szintre egy meghatározott időpontban. Ezt az eljárást alkalmazhatjuk a jövő leírására különböző feltételezések mellett, így a „mi lenne, ha” elemzések hasznos eszköze lehet. A szimulált utak elemzésével előrejelezhetjük egy idősor fordulópontjait (lásd WECKER 1979). Lehetséges változó előrejelzések előállítása ennek a módszernek a segítségével informatív a priori eloszlást alkalmazva (17) helyett.

IRODALOM

1. BAILLIE, R. T. (1979) Asymptotic Prediction Mean Squared Error for Vector Autoregressive Models, *Biometrika*, 66, 675–679.
2. BLOOMFIELD, P. (1972) On the Error of Prediction of a Time Series, *Biometrika*, 59, 501–509.
3. BOX, G. E. P. and JENKINS, G. M. (1976) *Time Series Analysis, Forecasting and Control*, San Francisco: Holden-Day
4. BOX, G. E. P. and TIAO, G. C. (1975) Intervention Analysis with Applications to Economic and Environmental Problems, *Journal of the American Statistical Association*, 70, 70–79.
5. CHOW, G. C. (1974) Multiperiod Predictions from Stochastic Difference Equations by Bayesian Methods, in: *Studies in Bayesian Econometrics and Statistics*, eds. Fienberg, S.E. and Zellner, A., Amsterdam: North-Holland, chap. 8.

6. HARRISON, P. J. and STEVENS, C. F. (1976) Bayesian Forecasting, *Journal of the Royal Statistical Society. Ser.B*, 38, 205-228.
7. MONAHAN, J. F. (1983) Fully Bayesian Analysis of ARMA Time Series Models, *Journal of Econometrics*, 21, 307-331.
8. PENTIKAINEN, T. and RANTALA, J. (1981) Evaluation of the Capacity of Risk Carriers by Means of Stochastic Dynamic Programming, *ASTIN Bulletin*, 12, 1-21.
9. PHILLIPS, P. C. B. (1979) The Sampling Distribution of Forecasts from a First-Order Autoregression, *Journal of Econometrics*, 9, 241-261.
10. VAN DIJK, H. K., KLOEK, T. and BOENDER, C. G. E. (1985) Posterior Moments Computed by Mixed Integration, *Journal of Econometrics*, 29, 3-18.
11. WECKER, W. (1979) Predicting the Turning Points of a Time Series, *Journal of Business*, 52, 35-50.
12. WEST, M., HARRISON, P. J. and MIGON, H. S. (1985) Dynamic Generalized Linear Models and Bayesian Forecasting, *Journal of the American Statistical Association*, 80, 73-83.
13. ZELLNER, A. (1971) *An Introduction to Bayesian Inference in Econometrics*, New York: John Wiley.

ABSTRACT

The autoregressive integrated moving average, ARIMA class of models provides a flexible set of parametric forms for modeling and forecasting from univariate time series models. From a Bayesian viewpoint, however, the Box-Jenkins method lacks an important facet - a provision for modeling uncertainty about parameter estimates. Here we present a technique for including this feature in both the estimation and forecasting stages.

EGY MEGKÖZELÍTÉS NEMORTOGONÁLIS LESZABÁSI ÉS PAKOLÁSI FELADATOK MEGOLDÁSÁRA

VARRÓ ZOLTÁN

JPTE Közgazdaságtudományi Kar, Pécs

A közelmúltban számos algoritmus látott napvilágot leszabási és pakolási feladatok megoldására. Azt a speciális esetet vizsgáljuk, amikor a leszabásra kerülő téglalapok legalább egyikének hossza nagyobb mint a kiinduló téglalap, és ezért nemortogonális mintákat is figyelembe kell venni. Eljárást javasolunk a keletkező derékszögű háromszögek feldarabolására azonos méretű téglalapokra. Csak guillotine vágásokat megengedve a feladatot legrövidebb út problémára vezetjük vissza.

1. Bevezetés

A leszabási és pakolási feladatok számos iparágban jelentős szerepet játszanak. Ilyen például acélrudak vagy üvegtáblák darabolása kívánt méretekre, de a bútoriparban is gyakran találkozunk ezzel a feladattal. A felhasznált félkésztermékeket általában néhány méretben állítják elő, amelyek csak ritkán azonosak a gyártáshoz szükséges méretekkel. A cél általában az, hogy a feldarabolás minimális költséggel történjék. Ez lehetséges úgy is, hogy csupán a hulladékot minimalizáljuk, de figyelembe vehetünk egyéb tényezőket is, mint például a leszabást végző gépek átállítási idejét. A raklap pakolási feladat (pallet loading) egy speciális kétdimenziós leszabási feladatnak tekinthető, ahol a cél maximális számú azonos méretű téglalap (a dobozok alaplapja) elhelyezése egy nagyobb téglalapon. A fent vázolt témakörbe tartozó problémákról és megoldási módszereikről igen jó áttekintés található W. DOWSLAND [3] és DYCKHOFF - KRUSE - ABEL - GAL [4] cikkében, valamint J. TERNO - R. LINDEMANN - G. SCHEITHAUER [8] nemrég megjelent könyvében.

2. Korábbi eredmények

Ebben a cikkben a kétdimenziós leszabási feladat egy speciális esetével foglalkozunk. Először megfogalmazzuk a feladatot általánosan. Legyen adott egy téglalap, amelynek hossza L , szélessége W . Ezt a téglalapot kívánjuk feldarabolni kisebb területű téglalapokra, amelyeknek a méreteit az alábbi R halmaz tartalmazza:

$$R = \{(l_1, w_1), (l_2, w_2), \dots, (l_m, w_m)\}$$

Feltételezzük, hogy a méretek egészek és a vágások szélessége elhanyagolható. A cél egy olyan szabásminta előállítására, amely minimális területű hulladékot eredményez. Szokásos a kis téglalapok számára egyedi felső korlátokat is megadni. A vágások technikai okokból szinte mindig párhuzamosak a kiinduló téglalap élével. Az ilyen mintákat ortogonálisaknak nevezzük. Előfordul, hogy technikai okokból a téglalapot csak egy egyenes mentén tudjuk kettévágni, ilyen pl. az üvegtáblák darabolása. Ezt a típusú vágást guillotine vágásnak nevezzük.

A raklap pakolási feladatot az elmúlt időszakban számosan vizsgálták: A. SMITH – P. DE CANI [5], K. DOWSLAND [2], H. STEUDEL [6]. Ezekben a cikkekben kizárólag ortogonális elrendezéseket vettek figyelembe. A szerzők heurisztikus algoritmusokat javasolnak a feladat megoldására, mivel az egzakt megoldás a hosszú futási idő miatt nem lehetséges.

P. DE CANI [1] volt az első, aki a nem ortogonális minták alkalmazhatóságára felhívta a figyelmet. A következő problémát vizsgálta: Legyen adott bizonyos számú téglalap. Keressük azt a legkisebb területű téglalapot, amelyben az adott téglalapok elrendezhetők. Egyszerű példát adott arra, hogy a legkisebb területű téglalapot akkor kapjuk, ha nemortogonális elrendezést alkalmazunk. Arra is rámutatott, hogy nemortogonális mintákat kell figyelembe venni akkor is ha a leszabni kívánt téglalap hossza nagyobb, mint a kiinduló téglalapé.

A közelmúltban A. RINNOY KAN, J. DE WIT és R. WIJMENGA [7] terjeszték ki GILMORE és GOMORY módszerét nemortogonális szabásminták esetére is. Téglalap helyett egy szalag darabolását vizsgálták, és céljuk az volt, hogy minél több nemortogonális mintát elimináljanak az optimalitás megsértése nélkül. Az eredmények azt mutatták, hogy nemortogonális szabásminták figyelembevételével jelentős megtakarítás érhető el.

3. Egy algoritmus derékszögű háromszögek leszabására egybevágó téglalapokká

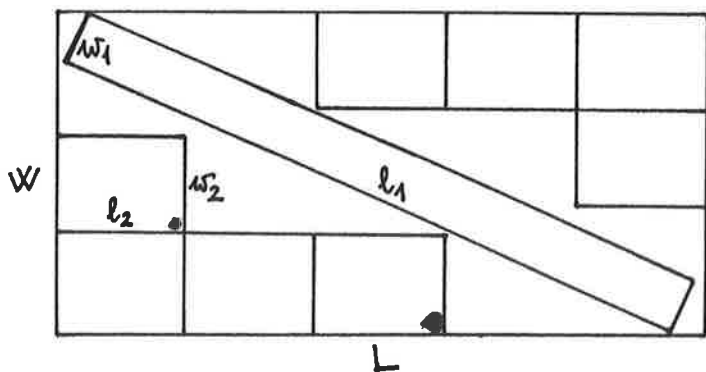
Legyen adott egy L hosszúságú és W szélességű ($W \leq L$) téglalap, amelyet kisebb méretű téglalapokra kell leszabnunk. Tekintsük azt a speciális esetet, amikor kétféle téglalapra van szükségünk, amelyek mérete (l_1, w_1) és (l_2, w_2) . Ha $l_1 > L$ de az (l_1, w_1) téglalap leszabható az (L, W) téglalapból, akkor a feladatot ortogonális mintákkal nem lehet megoldani. Egy lehetséges szabásminta az 1. ábrán látható.

Miután az (l_1, w_1) téglalapot elforgatva leszabtuk, az célunk, hogy a megmaradt derékszögű háromszögből maximális számú (l_2, w_2) méretű téglalapot kapjunk. A következő példa azt mutatja, hogy ha átfogóval párhuzamos vágásokat is megengedünk, akkor több téglalapot kaphatunk, mintha csak a befogókkal párhuzamos ortogonális vágásokat alkalmazzuk.

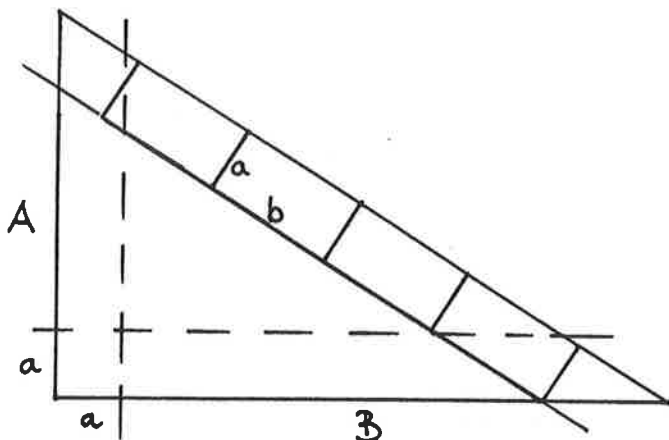
Legyenek a befogók $A = 20$ és $B = 39$, a téglalap méretei pedig $a = 14$, $b = 6$. Ekkor az átfogóval párhuzamos vágást is megengedve három, míg egyébként csak két téglalapot kapunk.

Az A és B befogójú derékszögű háromszög leszabását úgy végezzük el, hogy hatféle guillotine vágást engedünk meg. Ezek mindegyike párhuzamos a háromszög egy-egy oldalával és szélessége a vagy b , a téglalap szélessége vagy hosszúsága. A kapott csíkokat végül téglalapokra daraboljuk fel. A 2. ábrán három a szélességű csíkot eredményező vágás látható.

1. ábra



2. ábra

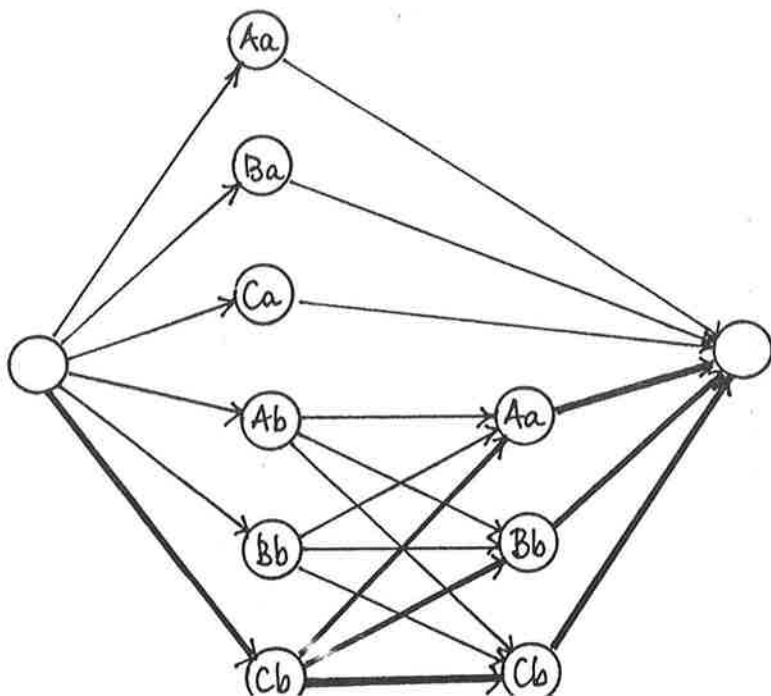


Egy olyan hálózatot konstruálunk, amelynek szögpontjai a hat guillotine vágás után kapott derékszögű háromszögeket reprezentálják. A forrásnak a kiinduló háromszög felel meg, a nyelőnek pedig az összes olyan maradék derékszög, amelyből már nem szabható le téglalap. Két szögpontot akkor köt össze egy irányított él, ha a kisebb háromszög a nagyobbból a megengedett hat vágás valamelyikével megkapható. Így minden szögpontból legfeljebb hat másikba vezet él. Az élekhez rendelt pozitív számok mutatják, hogy mennyi hulladék keletkezik a nagyobb háromszögből levágott csíkból.

Feladatunk a guillotine vágások egy olyan sorozatának megállapítása, amely minimális hulladékot eredményez. Ez ekvivalens azzal, hogy a fent definiált hálózatban megkeressük a legrövidebb utat a forrástól a nyelőhöz. A legrövidebb út probléma a viszonylag könnyen megoldhatók közé tartozik, mivel bonyolultsága a szögpontok számának négyzete.

Tekintsük ismét azt a példát, amelyben $A = 20, B = 39, a = 14, b = 6$. A 3. ábrán látható a feladathoz tartozó hálózat és három optimális út. Az első él a három optimális útban közös. Először egy C oldallal párhuzamos b szélességű csíkot vágunk le (Cb vágással) a háromszögből, amely két téglalapot eredményez. A második vágás közömbös, hogy melyik oldallal párhuzamos (Aa, Bb, Cb is lehet). Ebből a csíkból egy téglalap adódik.

3. ábra

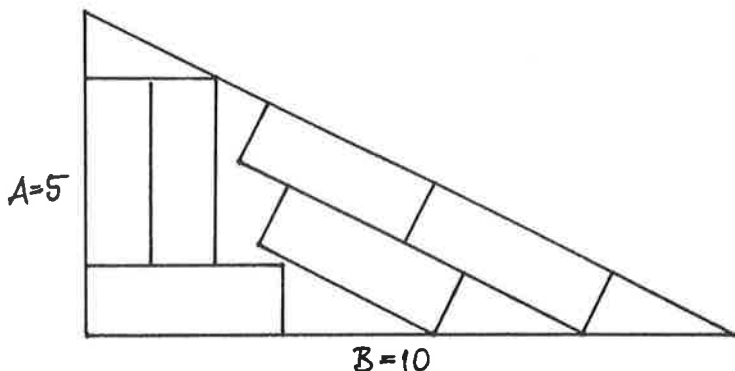


4. Következtetések:

Mivel a hálózat szögpontjainak száma igen nagy, ha a háromszög méretei a téglalapéhoz képest viszonylag nagyok, ezért csak viszonylag kisméretű feladatokat sikerült megoldani ezzel a módszerrel.

A javasolt algoritmus természetesen csak a megengedett hat vágás sorozataival előállíthatók közül választja ki a legjobbat. Amennyiben nemguillotine vágásokat is megengedünk, akkor kevesebb hulladékot eredményező szabásminták is léteznek. $A = 5, B = 10, a = 3, b = 1$ esetén a 4. ábrán látható minta 6 téglalapot eredményez, míg a fenti algoritmus csak 5-öt.

4. ábra



A vizsgálatok következő lépése az lehetne, hogy a feladatot korlátozás és szétválasztás módszerével és dinamikus programozással is megoldjuk, továbbá kiterjesszük azokra az esetekre, amikor

- (a) nemguillotine vágásokat is megengedünk,
- (b) a téglalapok nem azonos méretűek.

IRODALOM

1. DE CANI, P.: A note on the two-dimensional rectangular cutting stock problem. J. Operational Res. Soc. 29(1978), 703-706.
2. DOWSLAND, K.: A combined data-base and algorithmic approach to the pallet loading problem. J. Operational Res. Soc. 38(1987), 341-345.

3. DOWSLAND, W.: Two and three dimensional packing problems and solution methods. *NZ Operations Research* 13(1985), 1-18.
4. DYCKHOFF, H. - KRUSE, H. J. - ABEL, D. - GAL, T.: Trim loss and related problems. *Omega* 13(1985), 59-72.
5. SMITH, A. - DE CANI, P.: An algorithm to optimize the layout of boxes in pallets. *J. Op. Res. Soc* 31(1980), 573-578.
6. STEUDEL, H. J.: Generating pallet loading patterns: a special case of the two-dimensional cutting stock problem. *Management Science* 25(1979), 997-1004.
7. RINNOY KAN, A. H. G - DE WIT, J. R. - R. TH. WIJMENGA: Nonorthogonal two-dimensional cutting patterns. *Management Science* 33(1987), 670-684.
8. TERNO, J. - LINDEMANN, R. - SCHEITHAUER, G.: *Zuschnittprobleme und ihre praktische Lösung*. VEB Fachbuchverlag Leipzig, 1987.

ABSTRACT

Recently several algorithms have been proposed for solving pallet loading and cutting stock problems. We have investigated the special case where at least one of the ordered rectangles is longer than the stock rectangle and therefore we have to consider nonorthogonal patterns as well. We propose a method for packing rectangles of identical dimensions into the remaining right-angled triangle. Allowing only guillotine cuts we formulate the packing problem as a shortest route problem in a network.

TÖBBSZINTŰ TERMELÉSI-KÉSZLETEZÉSI MODELLEK HEURISZTIKÁI

KNUT RICHTER - VÖRÖS JÓZSEF

Chemnitzi Műszaki Egyetem - Janus Pannonius Tudományegyetem

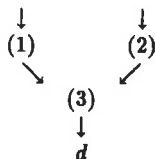
A tanulmány a többszintű termelési-készletezési modellt vizsgálja újrendelés megengedésével. (Újrendelés lehetőségéről akkor beszélünk, amikor a keresletet jelentkezése időpontjában a termék hiánya miatt nem lehet kielégíteni, de ennek kielégítését a termelő - a megrendelő egyetértésével (pl. árcsökkentés ellenében) - későbbi időpontban vállalja, vagy többletköltség árán vállalja az igény azonnali kielégítését.) A problémára egy dinamikus programozási algoritmust és néhány heurisztikát definiál, majd numerikus összehasonlítást végez. Végül egy termodinamikusan motivált heurisztikát fejleszt ki, mely jobb eredményt mutat az előzőeknél.

1. Bevezetés

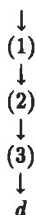
Az anyagsükséglettervezési (MRP) rendszernek a termelésstervezésben történő használata jelentősen megnövelte az érdeklődést a többszintű döntéshozás témája iránt. Egy többszintű termelési-készletezési rendszerben egy termék termelése néhány más komponenst igényel, majd ő maga is komponensévé válik egy másik, - de egyetlen - terméknek. Az ilyet összeszerelő termelési-készletezési rendszernek nevezzük. (Lásd 1. ábra.)

Az összeszerelő termelési rendszerre CROWSTON és WAGNER (1973), AFENTAKIS és társai (1984), (1986), valamint ROSLING (1986) dolgoztak ki hatékony, optimális megoldást adó algoritmusokat. Gyakorlati szempontból ugyanakkor a területnek egy igen fontos ága a heurisztika. A legegyszerűbb elgondolások egyike, hogy az egyszerű, a dinamikus sorozatnagyság megállapítására kidolgozott heurisztikákat szintenként alkalmazzuk. Azonban ezen eljárások szuboptimalitása nyilvánvaló, hiszen mellőzik a szintek közötti összefüggéseket. A szintek közötti összefüggések érzékeltetésé céljából BLACKBURN és MILLEN (1982) az input költségadatokat módosították. Azt is megállapították, hogy a vizsgálatokat elegendő a sorozatgépes rendszerre elvégezni, mivel a termelési rendszer mélysége s nem szélessége a döntő (a sorozatgépes rendszer olyan összeszerelő rendszer, ahol nemcsak az utód termékek száma egy, hanem az elődök száma is egy (lásd 2. ábra)). Ebből kiindulva, a tanulmány csak a sorozatgépes rendszerrel foglalkozik, ugyanakkor a kifejlesztett heurisztikák az összeszerelő rendszerre is alkalmazhatók.

1. ábra: Egy összeszerelő rendszer



2. ábra: Egy sorozatgépes rendszer



ZANGWILL (1969), LOVE (1972), CHAND (1983) és ZANGWILL (1986) dolgoztak ki hatékony dinamikus programozási eljárást, illetve érdekes eredményeket sorozatgépes, dinamikus rendszerekre. LAMBRECHT és társai (1981), és GRAVES (1981) pedig kitűnő tulajdonságú többszintes heurisztikákat fejlesztettek ki.

A tanulmány lényegi vonása, hogy az említett cikkektől eltérően az újrendelést megengedi, ami egyúttal azt jelenti, hogy a kereslet átrendezésére – bizonyos költségek árán – lehetőség nyílik. A többszintű termelési-készletezési rendszerek újrendelési problémája már korábbi tanulmányokban is előfordult. Elsőként TAHA és SKEITH (1970) tanulmányát kell megemlíteni, akik statikus és determinisztikus keresleti adatsorra dolgoztak ki eljárást. ZANGWILL algoritmusát módosítva JOHNSON és MONTGOMERY (1974) adtak dinamikus programozási eljárást az esetre. Magának az algoritmusnak a korrektsége azonban vitatható, továbbá nem tartalmazza LOVE-nak az algoritmust gyorsító elképzeléseit.

A tanulmány második fejezete egy dinamikus programozási eljárást definiál, a harmadik fejezet pedig az újrendelés esetére módosított heurisztikákat írja le, és közli a tesztelési eredményeket. A negyedik fejezet egy új heurisztikát fejleszt ki, a befejező ötödik rész a következtetéseket adja.

2. A többszintű sorozatgépes termelési-készletezési rendszer újrendelés lehetőségével

A probléma általános leírásának megfelelően (lásd CHAND (1983)), azt tételezzük fel, hogy M termelőberendezés áll sorozatban, és az $(m+1)$ -edik termelőberendezés

inputja az m -edik egység outputja. Az első egységnél a nyersanyagok korlátlanul állnak rendelkezésünkre, míg az M -ediknél a késztermékek készülnek, melyeket a fogyasztói igények kielégítésére használnak. Valamennyi egységnél létezhetnek készletek, és feltesszük még, hogy a termelési ráta végtelen, tehát a megrendelt mennyiség azonnal rendelkezésünkre áll. Valamennyi szinten egységnyi termeléshez egységnyi inputra van szükség. A kereslet újrendelése csak a késztermékek (M -edik szintjén) lehetséges.

Jelölje D_t a t -edik periódusban a végtermék iránti keresletet, ez valamennyi periódusban ismert mennyiség; $t \in \langle 1, T \rangle$, ahol $\langle a, b \rangle = \{a, a+1, \dots, b\}$. Jelölje X_{mt} a termelés volumenét az m -edik egységnél a t -edik periódusban, ennek költségét pedig $C_{mt}(X_{mt})$, $m \in \langle 1, M \rangle$, $t \in \langle 1, T \rangle$. I_{mt} az m -edik egységnél a készletszintet jelöli a t -edik periódus végén, melynek költsége $H_{mt}(I_{mt})$ lesz, $t \in \langle 1, T \rangle$, $m \in \langle 1, M-1 \rangle$. Az M -edik szintre $H_t^+(I_t^+)$, illetve $H_t^-(I_t^-)$ a készletezési, illetve újrendelési költséget jelöli a t -edik periódusban. Ekkor a többszintű termelési-készletezési probléma az alábbi módon modellezhető:

$$\min \sum_{t=1}^T \left(\sum_{m=1}^{M-1} (C_{mt}(X_{mt}) + H_{mt}(I_{mt})) + C_{Mt}(X_{Mt}) + H_t^+(I_t^+) + H_t^-(I_t^-) \right) \quad (1a)$$

$$I_{mt} = I_{m,t-1} + X_{mt} - X_{m+1,t}, \quad m \in \langle 1, M \rangle, \quad t \in \langle 1, T \rangle \quad (1b)$$

$$X_{M+1,t} = D_t, \quad t \in \langle 1, T \rangle \quad (1c)$$

$$I_{m0} = I_{mT} = 0, \quad X_{mt} \geq 0, \quad m \in \langle 1, M \rangle, \quad t \in \langle 1, T \rangle \quad (1d)$$

$$I_{mt} \geq 0, \quad m \in \langle 1, M-1 \rangle, \quad t \in \langle 1, T \rangle \quad (1e)$$

$$I_{Mt} = I_t^+ - I_t^-, \quad I_t^+ \geq 0, \quad I_t^- \geq 0, \quad t \in \langle 1, T \rangle \quad (1f)$$

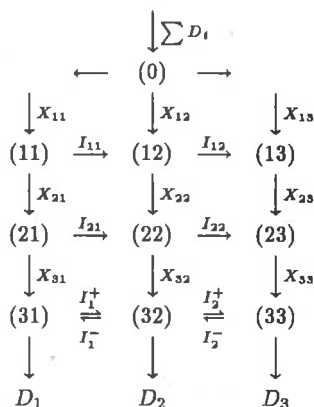
Az (1) feladat egy egyetlen forrásponttal rendelkező hálózatként is reprezentálható (lásd 3. ábra). ZANGWILL (1968) megmutatta, hogy ha a C és H függvények konkávak, akkor (1)-nek létezik olyan optimális megoldása, melynek extrémális folyama van, vagyis egy belső pontnak legfeljebb egy pozitív inputja van. Ez azt jelenti, hogy létezik olyan optimális megoldás, melyre:

$$I_{m,t-1} X_{mt} = 0, \quad m \in \langle 1, M-1 \rangle, \quad t \in \langle 1, T \rangle$$

és

$$I_{t-1}^+ I_t^- = 0, \quad X_{Mt} I_t^- = 0, \quad X_{Mt} I_{t-1}^+ = 0 \quad t \in \langle 1, T \rangle.$$

3. ábra: A dinamikus sorozatgépes rendszer újrendeléssel



A Zangwill-féle tulajdonságnak van néhány érdekes következménye, melyeket a következőkben foglalhatunk össze:

1. **Következmény:** Ha egy pontba vezető él a D_k -ból szállít pozitív mennyiséget, akkor a teljes D_k mennyiséget szállítja, $k \in \langle 1, T \rangle$.

2. **Következmény:** Ha z , mint az (mt) pont ($m = \text{szint}$, $t = \text{periódus}$) inputja tartalmazza D_k -t, $k < t$, akkor tartalmazza D_t -t is.

3. **Következmény:** Ha z az (mt) pont inputja, akkor

$$z = \sum_{r=1}^k D_r \quad 1 \leq l \leq k, \quad t \leq k \leq T$$

Bizonyítás: Tételezzük fel, hogy z tartalmazza D_j -t és D_{j+h} -t, $j \leq T-2$, $h \geq \max\{2, t-1\}$ és $j+h \leq T$, de nem tartalmazza D_{j+r} -t, $1 \leq r < h$, továbbá, hogy z' mint az $(m't')$ pont inputja tartalmazza D_{j+r} -t. Ekkor léteznének egymást keresztező folyamatok, mely ellentmond a Zangwill-féle tulajdonságnak.

Tekintsük most az (1) alatti problémát egy, az irodalomban igen széles körben használt költségfüggvénnyel:

$$C_{mt}(X_{mt}) = \begin{cases} S_m + P_m X_{mt}, & \text{ha } X_{mt} > 0 \\ 0, & \text{ha } X_{mt} = 0 \end{cases} \quad m \in \langle 1, M \rangle \quad t \in \langle 1, T \rangle$$

$$H_{mt}(I_{mt}) = h_m I_{mt} \quad m \in \langle 1, M-1 \rangle \quad t \in \langle 1, T \rangle$$

$$\text{és } H_t^+(I_t^+) = h_M I_t^+ \quad H_t^-(I_t^-) = \pi I_t^- \quad m \in \langle 1, M \rangle \quad t \in \langle 1, T \rangle$$

Definíció: Egy termelési terv gyűrűztetett, ha $X_{m,t}$ pozitivitása maga után vonja $X_{m+1,t}$ pozitivitását.

1. Lemma: Az (1) feladatnak létezik optimális gyűrűztetett termelési terve.

A tétel bizonyítása teljesen megegyezik LOVE (1972) bizonyításával.

A fenti összefüggések alapján a következőkben egy dinamikus programozási algoritmust definiálunk (1) megoldására. Jelölje $C(t)$ a t periódusos probléma optimális megoldásához tartozó célértéket, míg $\alpha(l, t)$ az l -től a t -ig terjedő periódusok igényei kielégítésének minimális költségét azzal a feltétellel, hogy $(l-1)$ és t szomszédos regenerációs pontok. (A j -edik periódust regenerációs pontnak tekintjük, ha $I_{mj} = 0$ minden $m \in \{1, M\}$ -re.) Ekkor:

$$C(t) = \min_l \{C(l, t) = C(l-1) + \alpha(l, t)\} \quad (2)$$

minden $t \in \{1, T\}$, $l \in \{1, t\}$ -re és $C(0) = 0$.

Jelölje $C(i, j, l, t)$ az i -től az M -ig terjedő szinteken felmerülő költségek minimumát, amikor is az l -től a t -ig terjedő periódusok igényét elégítjük ki és az i -edik egységnél a j -edik periódus elején $\sum_{r=i}^t D_r$ termék áll rendelkezésre. Ekkor

$$\alpha(l, t) = S_1 + \min_{j \in \{l, t\}} \{C(1, j, l, t)\}$$

$i < M$ -re, és $C(i, j, l, t)$ a következőképpen kalkulálható:

$$C(i, j, l, t) = \min \left\{ h_i \sum_{r=l}^t D_r + C(i, j+1, l, t), \right.$$

$$\left. \min_{k \in \{j, t\}} \{S_{i+1} + C(i+1, j, l, k) + h_i(k+1-j) \sum_{r=k+1}^t D_r + C(i, k+1, k+1, t)\} \right\}$$

ahol $C(i, j, t+1, t) = \sum_{i+1}^t = 0$

$i = M$ esetén

$$C(M, j, j, j) = 0, \text{ és } C(M, j, l, t) = \pi \sum_{r=1}^{j-1} D_r(j-r) + h_M \sum_{r=j+1}^t D_r(r-j)$$

3. Néhány heurisztika újrendelés esetével

A tanulmány három szekvenciálisan alkalmazott – a WAGNER-WHITIN, a SILVERMEAL, a BITRAN és társai (1984) által definiált úgynevezett előre lépegető –, és egy többszintű (melyet LAMBRECHT és társai (1981) dolgoztak ki) heurisztikával foglalkozik. Ezekre sorjában a WW, SM, FH, és ML jelölésekkel hivatkozunk.

Az újrendelés esetére módosított Wagner–Whitin féle dinamikus programozási algoritmus jól ismert az irodalomból (lásd ZANGWILL (1966), (1969)). Esetünkben ez az algoritmus az utolsó (késztermék) szintre az alábbi módon definiálható: legyenek j és k szomszédos regenerációs pontok (tehát $I_{Mj} = 0$ és $I_{Mk} = 0$), és

$$D_{jk}(t) = \pi \sum_{r=j+1}^t D_r(t-r) + h_M \sum_{r=t}^k D_r(r-t)$$

és

$$G_{jk} = S_M + \min_{j < t \leq k} \{D_{jk}(t)\}$$

minden $k \in \langle 1, T \rangle$ -ra és $j \in \langle 0, k-1 \rangle$ -re. Jelölje F_k az első k periódus igényei kielégítésének minimális költségét, feltéve, hogy k regenerációs pont. Ekkor az

$$F_0 = 0, \quad F_k = \min_{0 \leq j < k} \{F_j + G_{jk}\} \quad (3)$$

egyenletrendszer megoldása az M -edik szint szuboptimális megoldását adja. Az M -edik szintnek ez a szuboptimális termelési terve az $(M-1)$ -edik szint keresleti adatsorát képezi, de G_{jk} definíciójában az M -től kisebb szinteken az újrendelés esetét természetesen mellőzzük.

A módosított SM-nél az M -edik szinten, ha j regenerációs pont, a következő regenerációs pont a $(j+n+1)$ -edik, $n = 0, 1, 2, \dots$ periódusban lesz, ahol n az a legkisebb egész, melyre $f(n+1) - f(n) > 0$, ahol

$$f(n) = \frac{G_{jk}}{n+1} \quad (k = j+n+1) \quad (4)$$

A (4) által adott termelési terv lesz az $(M-1)$ -edik szint keresleti adatsora és így tovább, míg az első szinthez el nem érünk. Természetesen az $m < M$ szinteken az

$$f(n) = \frac{S_m + h_m \sum_{r=j+1}^k D_r(r-j)}{n+1}$$

kifejezést használjuk, mely mellőzi az újrendelési lehetőséget.

Hasonló módon, mikor az FH-t alkalmazzuk, amennyiben az M -edik szinten j regenerációs pont, a következő $(j+n+1)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ lesz, ahol n az a legnagyobb nemnegatív egész, melyre

$$\min_{j < t \leq k} \{D_{jk}(t)\} < S_M \quad (k = j+n+1) \quad (5)$$

Az ML egyszerűségének fenntartása érdekében újrendelést csak regenerációs pont és termelő periódus között engedünk meg (egy periódust termelő periódusnak nevezünk, ha $X_{1t} > 0$). Legyen $(k-1)$ egy regenerációs periódus, és a periódust

követő első termelési periódus a k . Az ML minden termelő egységre (szintre) periódusonként definiál egy koefficiens, mely jelzi, hogy vajon a költségek csökkennek-e, ha a k -adik periódusban indított sorozathoz hozzáfűzzük D_i -t, $i > k$. Ha az i -re definiált összes koefficiens negatív, $(i-1)$ regenerációs pont lesz, és az eljárás előlről kezdődik.

A használt koefficiensek az alábbiak:

$$u_{ji} = \sum_{r=1}^j S_r - C_{i-1} - h_j D_i(i-k), \quad i = k+1, k+2, \dots, \quad j \leq \min\{j^0, M\} \quad (6)$$

$$u_{ji} = u_{j-1,i} + S_j - (h_j - h_{j-1})D_i(i-p_j), \quad j = j^0+1, \dots, M; \quad i = k+2, \dots \quad (7)$$

és

$$u_{M+1,i} = \begin{cases} \sum_{r=1}^M S_r - C_{i-1} - \pi \sum_{r=k}^{i-1} D_r & \text{ha } j^0 = M+1 \\ -\infty & \text{máskülönben} \end{cases}, \quad i = k+1, \dots \quad (8)$$

ahol

C_{i-1} = a k és az $(i-1)$ periódusok közötti kumulatív raktározási költség

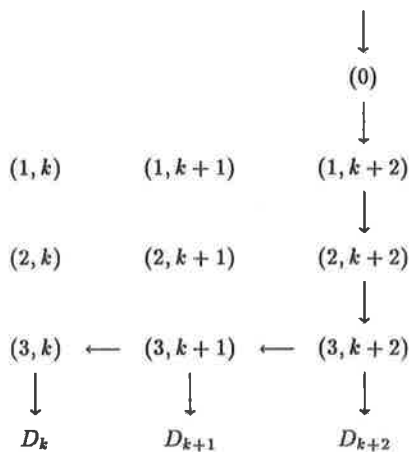
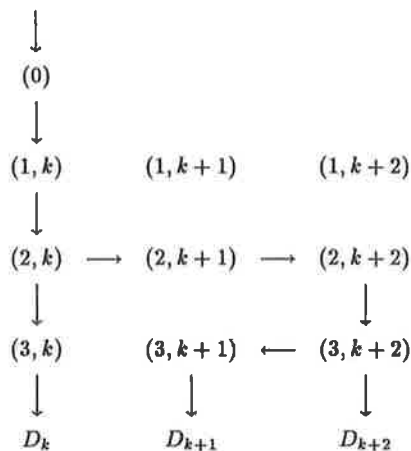
p_j = azon utolsó periódus indexe, amikor a j -edik szinten a termelés szintje pozitív

j^0 = utolsó szint (termelő egység), melyre $p_j = k$, vagy $M+1$.

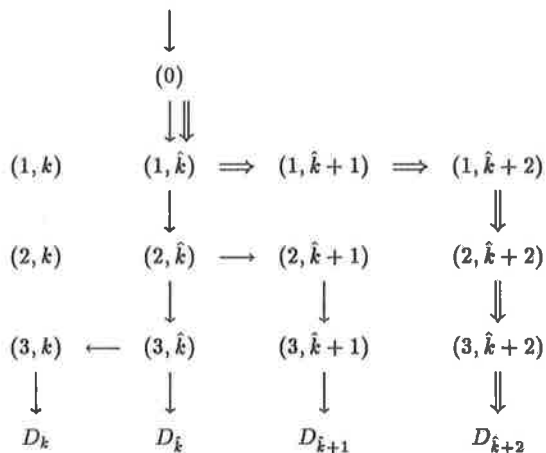
A (6) koefficiens az újrendelésből eredő esetleges megtakarításokat méri; a 4. ábra mutatja ezt az esetet.

Így az ML egy partikuláris $(k-1)$ regenerációs pontra az alábbi:

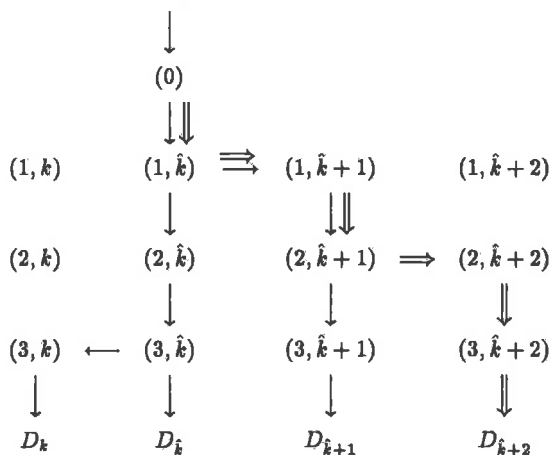
1. lépés: Legyen $\hat{k} = k$, $A = \{1, 2, \dots, M+1\}$, $i = \hat{k} + 1$; $C_k = 0$; $j^0 = M+1$; $p_j = \hat{k}$ minden j -re.
2. lépés: Számoljuk ki az u_{ji} , $j = 1, \dots, M+1$ értékeket (6)-(8) felhasználásával. Ha $u_{ji} < 0$ minden j -re, akkor a 4. lépés következik, máskülönben tovább a 3. lépésre.
3. lépés: Definiálja j^* -t az $u_{j^*,i} = \max_j \{u_{ji}\}$ előírás, és aktualizáljuk a szóbanforgó termelési terv indexeit, valamint p_j -t és \hat{k} -t. Ha $j^* \in A$ akkor $j^0 = j^*$ és $A = \{1, 2, \dots, j^0\}$; máskülönben j^0 és A változatlanul marad. Legyen $i = i+1$ és térjünk vissza a 2. lépéshez ha $i < T+1$, másként Stop.
4. lépés: Ha $i \neq T$ akkor $(i-1)$ új regenerációs pont lesz, így $k = i$ lesz, és visszatérünk az 1. lépéshez. Ha $i = T$, akkor T termelő periódus lesz és Stop.

4. ábra: Egy újrendelési eset, melyet az *ML* figyelembe vesz5. ábra: Az *ML* által nem tekintett újrendelési eset

6. ábra: Egy, a (6) által értékelt eset ($j^0 = 2, i = k + 2, j = 1$)



7. ábra: Egy, a (7) által értékelt alternatíva ($j^0 = 1, i = k + 2, j = 2$)



Fontos megemlíteni, hogy a sorozatnagyság heurisztikák a kereslet pozitivitását feltételezik az első periódusban. Azonban az M -től kisebb szinteken a keresleti adatsor mindig a következő szint termelési terve, mellyel kapcsolatban előfordulhat, hogy az zero az első periódusban. Ezért az

$$X_{mt} = 0, \quad m \in \{1, M-1\}; \quad t \in \{0, t^* - 1\}$$

ahol t^* az a legkisebb index melyre $X_{Mt^*} > 0$, előírás szükséges.

A teszt példákban az inputokat a következők szerint generáltuk: a keresleti adatsorokat a $[0, 200]$ intervallumból választottuk véletlenszerűen egyenletes eloszlást feltételezve; hasonló módon jártunk el a fix költségek és a raktározási költségek esetében, amikor is a fix költségeket a $\{150, 300, 600, 1500\}$, a lépcsős raktározási költségeket a $\{0.1, 0.5, 1.0, 2.0\}$ halmazból választottuk. (Az m -edik szint lépcsős raktározási költsége $= h_m - h_{m-1}$.) A $h_1 = 1$ értékadással költségválasztási eljárásunk – az összehasonlíthatóság céljából – megegyezik a BLACKBURN-MILLEN (1982) tanulmányban definiált költségstruktúrákkal. Az újrendelési fajlagos költségére mindig $\pi = h_M + 0.5$.

Valamennyi partikuláris M és T értékre 400 feladatot oldottunk meg, és mindegyik feladatot mindegyik heurisztikával. Az eredményeket az 1. tábla foglalja össze.

1. táblázat: Az (M, T) párokhoz tartozó átlagos %-os veszteség az optimalitásban

Eljárás	(2, 3)	(2, 5)	(2, 10)	(3, 3)	(3, 5)	(3, 10)	(5, 3)	(5, 5)	(5, 7)	(5, 10)
WW	2	3	3	4	4	7	8	15	17	19
SM	4	9	7	7	13	14	13	26	24	26
FH	3	7	6	6	9	10	11	20	22	23
ML	8	12	8	8	9	9	12	15	17	12

Az 1. tábla alapján megállapítható, hogy nagyobb méretű problémák megoldásához az ML javasolható, és az ML teljesítményét csak kisméretű feladatok esetében múlják felül más heurisztikák; mindemellett az ML számítási ideje igen kedvező. A legnagyobb méretű feladat esetében egy feladat futási ideje IBM XT-n kevesebb, mint egy másodperc, ha az SM, FH, vagy ML módszereket használjuk, 3 másodpercet igényel a WW, míg 21 másodpercet az optimális eljárás. A szekvenciális eljárások közül viszont a WW-nek van a legjobb teljesítménye, de az FH nem rosszabb lényegesen. Érdekes adalék, hogy – compilert nem használva – a WW időfogyasztása mintegy ötször nagyobb, mint az FH-é. Mindezen ismeret a később kifejlesztendő heurisztikánk alakításánál játszik fontos szerepet. Egy heurisztika értékelésénél a legrosszabb eredmény sem lehet közömbös: ezen feljegyzéseket a 2. tábla tartalmazza. Az első és második táblában közölt eredmények szoros hasonlóságot mutatnak.

2. táblázat: Az (M, T) párokhoz tartozó legnagyobb optimalitási veszteség

Eljárás	(2, 3)	(2, 5)	(2, 7)	(2, 10)	(3, 3)	(3, 5)	(3, 7)	(3, 10)	(5, 3)	(5, 5)	(5, 10)
WW	29	35	28	22	37	54	37	34	56	55	54
SM	47	54	50	68	57	58	59	47	78	83	82
FH	31	40	40	38	57	73	41	34	68	60	69
ML	61	65	62	60	52	50	49	42	52	50	52

Habár az FH módszerrel kapcsolatban nem ismeretesek numerikus eredmények még az újrendelés lehetőségének mellőzésével sem, megállapíthatjuk, hogy a heurisztikák lényegesen rosszabb viselkedést mutatnak az esetenkénti negatív raktárkészlet megengedésével (újrendelés esete), mint anélkül. Azonban, a már említett BLACKBURN-MILLEN (1982) tanulmány alapján ismert, hogy a szekvenciális heurisztikák teljesítménye lényegesen növekszik, ha a szintek közötti összefüggést figyelembe véve az input költségadatokat megfelelően módosítjuk. Hogy miként kell az input adatokat módosítani újrendelési lehetőség figyelembe vételével, a CHAND - VÖRÖS (1989) tanulmány ad betekintést ehhez.

A következő fejezet célja, hogy kidolgozzon olyan egyszerű – tehát a gyakorlati követelménynek számítástechnikailag eleget tevő – heurisztikát, mely jobb eredmények elérésére alkalmas, mint az irodalomból jól ismert megközelítések egyszerű adaptációja.

4. Egy termodinamikusan motivált heurisztika

A szekvenciális heurisztikák javítása céljából egy termodinamikusan motivált heurisztikát (TH-t) fejlesztünk ki és tesztelünk le. Ez a megközelítés elsősorban a kombinatorikus optimalizálási problémák megoldásánál járt sikerrel (lásd BURKARD és RENDL (1983), CHAMS és társai (1987)), s ezen eredmények bátorítottak az adaptáció elkészítésére.

A termodinamikusan motivált heurisztika alapötlete, hogy egy lehetséges megoldásból véletlenszerűen egy új lehetséges megoldást generál és összehasonlítja a két megoldás célfüggvényértékét. Ha az új megoldás célfüggvényértéke rosszabb, nem biztos, hogy eldobjuk ezen megoldást; ez egy újabb véletlen számtól függ. Minél több próbálgatást végzünk, annál nagyobb a valószínűsége, hogy jó megoldást kapunk. Ezért a termodinamikusan elképzelt (mely egyébként a fizika hőkiegyenlítődési elvéből fakad) akkor számíthat elsősorban sikerre, ha az új lehetséges megoldások generálását, valamint a hozzátartozó célfüggvényérték kiszámítását igen rövid idő alatt el lehet végezni.

Ezen gondolatokat a többszintű dinamikus sorozatnagyság problémájához adaptálva, a TH-t az alábbi módon definiáljuk:

1. lépés: Legyen $u = U$ és $\alpha = 0$, ahol U pozitív. Legyen $0 < A < 1$, és legyen R pozitív egész. Oldjuk meg a többszintű problémát FH-val és legyen

a megoldás X_{m_t} -vel, illetve I_{m_t} -vel reprezentálva, míg a terv költsége z_x -szel.

2. lépés: Legyen $e = 1$
3. lépés: Generáljunk két pozitív egész számot: m -t és t -t, $m \in \langle 1, M \rangle$, $t \in \langle 1, T - 1 \rangle$. Ha $m = M$, akkor a 7. lépés következik.
4. lépés: Ha $X_{m+1, t+1} = 0$ vagy $X_{m_j} = 0$ minden $j \in \langle 1, t \rangle$, akkor a 11. lépés következik.
5. lépés: Változtassuk meg a termelési tervet. Az új tervet jelölje Y , melyet az alábbiak szerint definiálunk: $Y_{j_l} = X_{j_l}$ minden $j \in \langle m, M \rangle$ - és $l \in \langle 1, T \rangle$ - re, valamint $Y_{m, t+1} = I_{m_t}$ és $Y_{m_k} = X_{m_k} - I_{m_t}$, ahol k a $(t + 1)$ előtti utolsó olyan periódus, melyre $X_{m_k} > 0$, ha $X_{m, t+1} = 0$. Ha $X_{m, t+1} > 0$, akkor $Y_{m, t+1} = 0$ és $Y_{m_k} = X_{m_k} + X_{m, t+1}$. Ha $m = 1$, akkor a 9. lépés következik.
6. lépés: Az m -edik szint új tervének felhasználásával adjunk termelési tervet az $1, \dots, m - 1$ szintek számára FH módszerrel, majd a 9. lépés következik.
7. lépés: Ha $D_{t+1} = 0$, akkor a 11. lépés következik.
8. lépés: Legyen a a t előtti utolsó regenerációs pont, és legyen b a t utáni utolsó. Ha t regenerációs pont, módosítsuk az M -edik szint tervét úgy, hogy a és b legyenek szomszédos regenerációs pontok, és keressük meg a termelő periódust a és b között. Ha t nem regenerációs pont, legyenek a és t , illetve t és b szomszédos regenerációs pontok, és mindkét intervallumban keressük meg a termelő periódusokat. Az M -edik szint termelési tervét használva adjuk meg az első $M - 1$ szint termelési tervét FH segítségével. Jelölje Y_{j_k} az új termelési tervet.
9. lépés: Jelölje z_y az új terv megvalósításának költségét. Ha $z_x > z_y$ akkor a 10. lépés következik. Ha nem, generáljuk a v véletlenszámot a $(0, 1)$ intervallumon egyenletes eloszlással. Ha $v < \exp((z_y - z_x)/u)$, akkor a 10. lépés következik, egyébként pedig a 11.
10. lépés: Legyen $X_{ij} = Y_{ij}$ minden i -re és j -re, legyen $z_x = z_y$ és $\alpha = 1$.
11. lépés: $e = e + 1$. Ha $e \leq R$, akkor a 3. lépés következik.
12. lépés: Ha $\alpha = 1$ akkor $\alpha = 0$, $u = uA$, és a 2. lépés következik.
13. lépés: Stop.

Az eljárás véges számú lépés után ér véget, mivel minden próba ciklus után amennyiben z_x értéke változik, az u paraméter értéke csökken. Így annak a valószínűsége, hogy egy rosszabb megoldást fogadunk el mint az aktuális célérték, csökken. A heurisztikával kapcsolatos általános tapasztalatoknak megfelelően, a mi számítási eredményeinkből is látható lesz, hogy a heurisztika teljesítménye nagymértékben függ R értékétől, de természetesen A értéke sem lehet közömbös. A TH tesztelése

során öt költségstruktúrát generáltunk és mindegyiken belül húsz keresleti adatsort (a korábban definiált halmazokból). A számítási eredményeket a 3. tábla foglalja össze.

3. táblázat: Az (M, T) párokhoz tartozó átlagos %-os veszteség az optimalitásban

Eljárás	(2, 3)	(2, 5)	(2, 7)	(2, 10)	(3, 3)	(3, 5)	(3, 7)	(3, 10)	(5, 3)	(5, 5)	(5, 10)
FH	3	14	12	7	12	11	13	11	6	21	19
TH	1	7	7	3	2	4	5	3	2	8	5

A 3. tábla adataiból kiolvasható, hogy TH sikeresen alkalmazható a többszintű sorozatnagyság meghatározásában még akkor is, amikor az újrendelés lehetőségét megengedjük. Ez az eredmény azért fontos, mert az eddig legsikeresebbnek tekintett (lényegileg a korlátozás és szétválasztás elvére épülő) algoritmusok (AFENTAKIS és társai (1984), (1986)) is igen bonyolulttá válnak ebben az esetben. Annak ellenére, hogy az FH némileg rosszabb eredményt mutat fel, mint az előző futások során, TH eredményei kedvezőbbek valamennyi heurisztikáétól. Viszont meg kell jegyezni, hogy a TH időfogyasztása kisebb méretű feladatok esetén kedvezőtlenebb, futási ideje hosszabb, mint az optimális megoldást adó dinamikus programozásé. Azonban amikor T értéke nagy ($=10$) a dinamikus programozási idő harmadát igényli csak átlagosan. A TH előnye még mutatósabbakká válnak, ha speciális input struktúrákat vizsgálunk: ZANGWILL (1987) egyik legutóbbi munkája segít ezek megkeresésében (összeszerelő üzemre lásd AXSATER és NUTTLE (1986)). ZANGWILL megállapította, hogy szimulált input adatok esetén a szintek 70 – 80%-a általában eliminálható. Ezen elimináló feltételeknek nem eleget téve a következő költségstruktúrát definiáljuk:

	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$
$h_m =$	1	1.5	2	2.5	3
$S_m =$	1500	600	300	150	100

és $\pi = 3.5$. Ezek után száz keresleti adatsort generáltunk véletlenszerűen egyenletes eloszlás mellett a $[0, 100]$ intervallumból és csak a tízperiódusos problémákat vizsgáltuk. Az eredményeket a 4. tábla foglalja össze.

4. táblázat: Az átlagos és maximális %-os veszteség az optimalitásban

Eljárás			$M = 2$		$M = 3$		$M = 5$	
			átl.	max.	átl.	max.	átl.	max.
SM			23	53	26	62	37	76
TH	$R = MT/2$	$U = 10$	9	46	9	28	17	52
		$U = 100$	7	32	8	39	17	40
		$U = 500$	9	42	9	47	11	52
	$R = MT$	$U = 10$	3	35	3	33	15	43
		$U = 100$	5	36	2	22	12	36
		$U = 500$	3	39	3	41	5	35

A tábla adataiból látható, hogy míg a FH teljesítménye jelentősen csökkent, TH megtartotta figyelemre méltó eredményeit. Az is kiderül, hogy U értékei igen jelentős szerepet játszanak és megfelelően hozzá kell illeszteni a feladat jellegéhez (méret és költségek). U növekedésével természetesen a számítási idő is növekszik, de még $U = 500$ és $R = MT$ választásnál sem haladja meg az optimális megoldást adó algoritmus időfelhasználásának a felét (átlagosan tíz másodperc GWBASIC fordító használatával IBM XT-n).

5. Következtetések

A tanulmányban a többszintű dinamikus sorozatnagyság meghatározásával foglalkoztunk, amikor a késztermékek szintjén az újrendelés lehetőségét megengedjük. A tanulmányban egy dinamikus programozási eljárást adtunk a probléma megoldására, majd néhány jólismert heurisztikát módosítottunk erre az esetre, és teszteltük őket. Az eredmények a következőkben foglalhatóak össze:

- az újrendelés lehetőségével számolva az FH, SM, ML, és WW heurisztikák rosszabb teljesítményt nyújtanak, mint mikor a nemnegativitást a készlet-szintre kikötjük;
- a kifejlesztett, termodinamikusan motivált heurisztika jó eredményeket mutat, használata különösen ajánlott speciális költségstruktúra, valamint nagyméretű feladat esetében.

IRODALOM

1. AFENTAKIS, P., GAVISH, B. and KARMARKAR, U.: Computationally Efficient Optimal Solutions to the Lot-Sizing Problem in Multi-Stage Assembly System, M.Sci., 30(1984), 222 - 239
2. AFENTAKIS, P. and GAVISH, B.: Optimal Lot-Sizing Algorithms for Complex Product Structures, Op. Res. 34(2), (1986) 237-239
3. AXSATER, S. and NUTTLE, H.: Aggregating Items in Multi-Level Lot Sizing, Lecture Notes in Economics and Math. Systems. No. 226, Springer-Verlag, (1986)
4. BLACKBURN, J. and MILLEN, R.: Improved Heuristics for Multi Stage Requirements Planning Systems, M.Sci., 29(1983), 44-56
5. BURKARD, R. E. and RENDL, F.: A Thermodynamically Motivated Simulation Procedure for Combinatorial Optimizational Problems, EJOR, 17(1984), 169-174
6. CHAMS, M., HERTZ, A. and DE WERRA, D.: Some Experiments with Simulated Annealing for Coloring Graphs, EJOR, 32(1987), 260-266

7. CHAND, S.: Rollig Horizon Procedures for the Facilities in Series Inventory Model with Nested Schedules, *M.Sci.*, 29(1983), 237-249
8. CHAND, S. – VÖRÖS, J.: Multi-Stage Lot Sizing Heuristics with Backlogging, Purdue University, Working Paper, 1989
9. GRAVES, S. C.: Multi Stage Lot Sizing: An Iterative Procedure, *TIMS Studies in M.Sci.* 16(1981), ed. L. B. Schwarz
10. JOHNSON and MONTGOMERY: Operation Research in Production Planning, Scheduling and Inventory Control, John-Wiley, (1974)
11. LAMBRECHT, M. R., VAN DER EECKEN, J. and VAN DER VEKEN, H.: Review of Optimal and Heuristic Methods for a Class of Facilities in Series Dynamic Lot Sizing Problems, *TIMS Studies in M.Sci.* 16(1981), ed. L. B. Schwarz
12. LOVE, S. F.: A Facilities in Series Inventory Model with Nested Schedules, *M.Sci.*, 18(1972), 327-338
13. SILVER, E. A. and MEAL, H. C.: A Heuristic for Selecting Lot Size Quantities, *Production and Inventory Management*, 2nd Quarter (1973), 64-74
14. TAHA, H. A. and SKEITH, R. W.: The Economic Lot Sizes in Multi Stage Production Systems, *AIIE Transactions*, June 1970
15. WAGNER, M. H. and CROWSTON, W. B.: Dynamic Lot Size Models for Multi Stage Assembly Systems, *M.Sci.*, 20.1(1973)
16. WAGNER, M. H. and WHITIN, T.: Dynamic Version of the Economic Lot Size Model, *M.Sci.*, 5(1958), 89-96
17. ZANGWILL, W. I.: Minimum Concave Cost Flows in Certain Networks, *M.Sci.*, 14(1968), 429-450
18. ZANGWILL, W. I.: A Backlogging Model and a Multi-Echelon Model of a Dynamic Economic Lot Size Production System – A Network Approach, *M.Sci.*, 15(1969), 505-527
19. ZANGWILL, W. I.: A Deterministic Multi-Period Production Scheduling Model with Backlogging, *M.Sci.*, 13.1(1966), 105-119
20. ZANGWILL, W. I.: Eliminating Inventory in a Series Facility Production Systems, *M.Sci.*, 33.9(1987), 1150-1164

ABSTRACT

In this paper the multi-stage inventory model is analysed in backlogging case and a dynamic programming procedure is derived for the facilities in series inventory problem. Some heuristics are defined for the backlogging case and it is stated that these well-known heuristics exhibit worse results than in non-backlogging case. Finally a thermodynamically motivated heuristic is defined which shows better performance.

A kiadásért felelős: JANUS PANNONIUS EGYETEMI KIADÓ
Szerkesztő: Dombi Péter
Felelős szerkesztő: Vörös Károlf
HU ISSN 0039-8128
Tompog, Pécs — 1221/92

