Szigma, XXI. 1989/90. 1. sz.

PATRICK SEVESTRE — ALAIN TROGNON*

Kétlépéses módszerek a dinamikus hibakomponens modellek becslésére**

1. Bevezetés

Ismeretes, hogy az autoregresszív modellek közelítő általánosított legkisebb négyzetek (FGLS) esztimátora autokorrelált hibatagok esetében a GLS esztimátornál aszimptotikusan kevésbé hatásos. Dinamikus modellek becslésére így fontos olyan kétlépéses módszerek kidolgozása amelyeknél legalább aszimptotikusan nem merül fel hatásosságveszteség akkor, amikor a hibatagok elméleti kovarianciamátrixát egy konzisztens esztimátorával helyettesítjük. AR(1) hibatagú autoregresszív modellekre HATANAKA (1974) megoldotta ezt a problémát.

Jelen cikk célja, megvizsgálni a problémát az autoregresszív hibakomponensű modellek esetén.[1] Mivel a paneladat-állományok túlnyomó része számos egyedre, de (általában) csak egy rövid időszakra tartalmaz megfigyeléseket, olyan kétlépéses módszerek érdekelnek bennünket, amelyeknek aszimptotikus hatásossága megegyezik a hibatagok elméleti kovarianciamátrixát használó esztimátoréval az $N \to \infty$, de T véges esetben.

A második részben a problémát az általánosított és a kvázi-általánosított M-esztimátorok segítségével fogalmazzuk meg. A *3-7. részben* ismertetjük az általánosított BALESTRA — NERLOVE esztimátort, a λ' esztimátort, egy, CHAMBARLAIN (1982)-ben bemutatott módszeren alapuló új esztimátort, és egy olyan esztimátort, amelyet a közelmúltban R. BUNDELL vezetett be. A *8. rész* a bemutatott módszerek relatív hatásosságának összehasonlítására szolgáló néhány szimuláció eredményét tartalmazza.

2. A keret: általánosított és kvázi-általánosított M-esztimátorok[2]

Vegyünk egy olyan gazdasági jelenséget, amely valószínűségi változópárokat (x_n és $y_n, n = 1, \ldots, N$) kapcsol össze. Legyen ez a jelenség leírható egy olyan modellel,

---

* Külön köszönettel tartozunk F. FAURE-nak a cikkben szereplő szimulációk elkészítésénél végzett munkájáért.

** SEVESTRE P. — A. TROGNON: „Two step estimation methods for dynamic error components models" (*Fordította*: KŐRÖSI Gábor). Az ugyanebben a számban közölt F. FAURE — P. SEVESTRE cikk ezen írás folytatásának tekinthető, a két cikk között bizonyos átfedések is vannak.

[1] A magyar irodalomban a hibakomponens modelleket szokás még véletlen hatású modelleknek is nevezni. (ford.)

[2] Ez a rész teljes egészében A. TROGNON (1987) írásából származik.

amelyben szerepel $\Pi \in P$ paraméter. Pontosabban az y-nak az x-ekre vett feltételes eloszlását ez az ismeretlen Π paraméter jellemzi, amelynek valódi (elméleti) értéke Π_0. A közgazdászokat a teljes Π helyett csak annak egy részparamétere, β érdekli, aminek elméleti értéke $\beta_0 = g(\Pi_0) \in g(P)$.

2.1. Az M-esztimátorok

GOURIEROUX és MONFORT (1987) nyomán a $g(\Pi_0)$ M-esztimátorának nevezzük a

$$\hat{\beta}_N = \operatorname*{argmin}_{\beta \in g(P)} \sum_{n=1}^{N} \Psi(y_n, x_n; \beta); g(P) \in \mathbf{R}^k \tag{1}$$

kifejezést, ahol Ψ egy adott skalárfüggvény. Ψ-ről általában feltételezzük, hogy β-nak differenciálható függvénye. Ezt figyelembe véve a $\hat{\beta}_N$ aszimptotikus tulajdonságainak vizsgálata a következő határérték problémához vezet:

$$\Psi_\infty(\beta, \Pi_0) = \lim_{N \to \infty} N^{-1} \Psi_N(\beta), \tag{2}$$

ahol

$$\Psi_N(\beta) = \sum_n \Psi(y_n, x_n; \beta).$$

A legegyszerűbb esetekben, például amikor az (y_n, x_n) párok egymástól függetlenek, azonos eloszlásúak, a célfüggvény a következő:

$$\Psi_\infty(\beta, \Pi_0) = E_x E_0 \Psi(y, x; \beta), \tag{3}$$

ahol E_0 az y-nak x-re vonatkozó „elméleti feltételes eloszlása" szerinti várható értéke, míg E_x az x „elméleti peremeloszlásának" várható értéke.

Megjegyezzük, hogy az átlagra vonatkozó konzisztencia feltételek alkalmazhatók azokra a folyamatokra, amelyekkel az alkalmazott közgazdaságtannak kell foglalkoznia, még akkor is, ha ezek a folyamatok nem függetlenek, hanem erősen „kevertek". Az AMEMIYA (1986)-ban és a GOURIEROUX és MONFORT (1987)-ben megfogalmazott feltételek mellett $\hat{\beta}_N$ majdnem mindig ahhoz a β_0-hoz tart, ami

$$\beta_0 = \operatorname*{argmin}_{\beta \in g(P)} \Psi_\infty(\beta, \Pi_0). \tag{4}$$

A $\hat{\beta}_N M$-esztimátor akkor és csak akkor tart $g(\Pi_0)$-hoz, ha $\beta_0 = g(\Pi_0), \forall \Pi_0 \in P$.

Ha Ψ kétszer folytonosan differenciálható β szerint, akkor $\sqrt{N}(\hat{\beta}_N - \beta_0)$ aszimptotikusan normális eloszlású

$$V_1 = J_{\beta\beta}^{-1} I_{\beta\beta} J_{\beta\beta}^{-1}$$

kovarianciamátrixszal, ahol

$$I_{\beta\beta} = E_x E_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \beta}(y, x; \beta_0) \frac{\partial \Psi}{\partial \beta}(y, x; \beta_0)$$

és

$$J_{\beta\beta} = E_x E_0 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial\beta\partial\beta'}(y, x; \beta_0).$$

Vegyük észre, hogy $I_{\beta\beta}$ és $J_{\beta\beta}$ függ az (y_n, x_n) párok ismeretlen eloszlásától, de a

$$\hat{V}_1 = \hat{J}_{\beta\beta}^{-1} \hat{I}_{\beta\beta} \hat{J}_{\beta\beta}^{-1}$$

a változók tényleges eloszlására vonatkozó információk nélkül is V_1 konzisztens esztimátorát adja, ahol

$$\hat{I}_{\beta\beta} = N^{-1} \sum_{n=1}^{N} \frac{\partial\Psi}{\partial\beta}(y_n, x_n; \hat{\beta}_N) \frac{\partial\Psi}{\partial\beta'}(y_n, x_n; \hat{\beta}_N)$$

és

$$\hat{J}_{\beta\beta} = N^{-1} \sum_{n=1}^{N} \frac{\partial^2\Psi}{\partial\beta\partial\beta'}(y_n, x_n; \beta_N).$$

2.2 Általánosított és kvázi-általánosított M-esztimátorok

A fenti becslési eljárás arra az esetre is kiterjeszthető, amikor a célfüggvény nemcsak a minket érdeklő β paramétertől függ, hanem egy olyan C külső paramétertől is, amelyről — legalább is első lépésben — feltesszük, hogy ismert az elméleti értéke: C_0. Ekkor a szélsőérték kritérium felírható a

$$\Psi_N(\beta, C_0) = \sum_{n=1}^{N} \Psi(y_n, x_n; \beta, C_0) \tag{5}$$

alakban. Ψ_N β szerinti maximuma egy $\hat{\beta}_N(C_0)$ esztimátort ad, amelyet általánosított M-esztimátornak nevezünk.

Amennyiben C elméleti értéke (C_0) ismeretlen, de rendelkezésünkre áll egy konzisztens $\tilde{C}_N$ esztimátora, akkor az ezzel számított

$$\underset{\beta \in g(P)}{\operatorname{argmax}} \sum_{n=1}^{N} \Psi(y_n, x_n; \beta, \tilde{C}_N) \tag{6}$$

esztimátort kvázi-általánosított M-esztimátornak nevezzük.

Folytonos Ψ és konzisztens $\tilde{C}_N$ esetén a következő aszimptotikus feladatot kapjuk:

$$\min_{\beta \in g(P)} E_x E_0 \Psi(y, x; \beta, C_0). \tag{7}$$

Ha a feladatnak β_0 az egyetlen megoldása, akkor $\hat{\beta}_N(C_0)$ és a $\hat{\beta}_N(C_N)$ ugyanahhoz a β_0 határértékhez tart. Vagyis $\hat{\beta}_N(C_0)$-ban C_0 helyettesítése egy konzisztens

$\tilde{C}_N$ esztimátorral aszimptotikusan semmilyen torzítást sem eredményez. A kvázi-általánosított M-esztimátor aszimptotikus kovarianciamátrixát azonban erősen befolyásolhatja ez a helyettesítés. Megmutatható (ld. GOURIEROUX és MONFORT (1987)), hogy

$$\sqrt{N}(\hat{\beta}_N(\tilde{C}_N) - \beta_0) \xrightarrow[N\to\infty]{D} N(0, V_2), \tag{8}$$

ahol

$$V_2 = J_{\beta\beta}^{-1}\{I_{\beta\beta} + J_{\beta C}K_{C\beta} + K_{\beta C}J_{C\beta} + J_{\beta C}K_{CC}J_{C\beta}\}J_{\beta\beta}^{-1}$$

amelyben $I_{\beta\beta}$ és $I_{\beta\beta}$ a korábban megadottak, $J_{\beta C}$ pedig az alábbiak szerint írható fel:

$$J_{\beta c} = E_x E_0 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial\beta\partial c'}(y, x; \beta_0, C_0).$$

$J_{C\beta}$ ennek transzponáltja, a K mátrixok pedig a következő valószínűségi változópárok aszimptotikus kovarianciamátrixának blokkjai:

$$\sqrt{N}\begin{pmatrix} \frac{1}{N}\sum\limits_n \frac{\partial\Psi}{\partial\beta}(y_n, x_n; \beta_0, C_0) \\ \tilde{C}_N - C_0 \end{pmatrix} \xrightarrow[N\to\infty]{D} N\left(0, \begin{pmatrix} I_{\beta\beta} & K_{\beta C} \\ K_{C\beta} & K_{CC} \end{pmatrix}\right).$$

A K_{cc} a $\tilde{C}_N$ aszimptotikus kovarianciamátrixa, így ez az esztimátor — a szélsőérték kritériumból származtatott hasonlóan — aszimptotikusan normális eloszlású.

Ennek az eredménynek fontos következménye, hogy $V_2 \geq V_1$. Vagyis a C_0 helyettesítése egy konzisztens $\tilde{C}_N$ esztimátorral hatásosságveszteséghez vezet. Amennyiben azonban

$$J_{\beta c} = E_x E_0 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial\beta\partial c'}(y, x; \beta_0, C_0) = 0$$

a kvázi-általánosított M-esztimátor aszimptotikus kovarianciamátrixa megegyezik az elméleti általánosított M-esztimátorral. Vagyis ekkor a $\hat{\beta}_N(\tilde{C}_N)$ aszimptotikus tulajdonságai függetlenek a $\tilde{C}_N$-étől.

Nézzük meg alkalmazhatók-e ezek az eredmények a kétlépéses módszerekkel becsült autoregresszív hibakomponens modellekre is.

3. Az autoregresszív hibakomponens modell

Legyen az elemzett modell egy autoregresszív hibakomponens modell:

$$\begin{aligned} y_{nt} &= \alpha y_{n,t-1} + x'_{nt} + \varepsilon_{nt} \\ \varepsilon_{nt} &= u_n + w_{nt}, \end{aligned} \tag{9}$$

ahol

$$Eu_n = 0, \quad Ew_{nt} = 0,$$

és

$$Eu_n u_{n'} = \delta_{nn'}\sigma_u^2 \quad Ew_{nt}w_{n't'} = \delta_{nn'}\delta_{tt'}\sigma_w.$$

A modell mátrix alakban felírva:

$$y = X\beta + \varepsilon, \tag{10}$$

ahol

$$E\varepsilon = 0, \quad V\varepsilon = \Omega$$

és

$$\begin{aligned}\Omega &= \sigma_w^2\left[I_N \otimes \left(I_T - \frac{J_T}{T} - \frac{\sigma_w^2+\sigma_u^2}{T\sigma_u^2}\frac{J_T}{T}\right)\right]\\ &= \sigma_w^2\left[I_N \otimes \left(I_T - \frac{J_T}{T} - \Theta^{-1}\frac{J_T}{T}\right)\right]\end{aligned}$$

továbbá

$X = [y_{n,t-1}, x_{nt}]$ a magyarázó változók $(NT \times K)$ méretű mátrixa;

$y = [y_{nt}]$ az endogén változó $(NT \times 1)$ elemű vektorra.

4. Az általánosított Balestra-Nerlove esztimátor

P. BALESTRA és M. NERLOVE alapvető jelentőségű tanulmányukban egy olyan kvázi-általánosított esztimátort is felvetettek, amely konzisztens, ha az N és T úgy növekszik hogy közben $T/N \to \infty$. Mint azonban a bevezetésben hangsúlyoztuk, a panel adatbázisok többsége viszonylag sok egyedre és kevés időpontra tartalmaz megfigyeléseket. Ilyen körülmények között viszont T/N a végtelen helyett nullához tart.

Az írásukban javasolt másik esztimátor azonban, ami egy instrumentális változós esztimátor, a hatásosság növelése érdekében „általánosítható”[3]. Ez az esztimátor felírható

$$\hat{\beta} = (Z\Omega^{-1}X)^{-1}Z\Omega^{-1}y \tag{11}$$

alakban, ahol

$Z = [\hat{y}_{n,t-1}, x_{nt}]$ $(NT \times K+1)$ méretű mátrix, $\hat{y}_{n,t-1}$ pedig az $y_{n,t-1}$-nek a késleltetett egzogén változók terébe vetített képe;

Ω a reziduumok kovarianciamátrixának becslése (amely szokás szerint blokkdiagonális szerkezetű).

Az esztimátor a következő minimumfeladat megoldásaként adódik:

$$\text{Min}(y - X\beta)\Omega^{-1}Z(Z\Omega^{-1}Z)Z\Omega^{-1}(y - X\beta).$$

---

[3] Ld. ARELLANO — BOND (1987) írásában a módszer alkalmazását az Anderson-Hsiao esztimátorokra.

Az esztimátor a Z instrumentális változók egzogenitása következtében konzisztens:

$$\operatorname*{plim}_{N\to\infty} \frac{1}{N}\frac{\partial\Psi}{\partial\beta} = -\frac{2}{N} y'_{-1}\Omega^{-1}Z(Z'\Omega^{-1}Z)^{-1}Z'\Omega^{-1}(y - X\beta)$$
$$= -2\frac{y'_{-1}\Omega^{-1}Z}{N}\left(\frac{Z'\Omega^{-1}Z}{N}\right)^{-1}\frac{Z'\Omega^{-1}\varepsilon}{N} = 0. \qquad (12)$$

Továbbá, mivel

$$\operatorname*{plim}_{N\to\infty} \frac{1}{N}\frac{\partial\Psi}{\partial\beta\partial\Theta} = 0 \qquad (13)$$

az esztimátor határeloszlását nem befolyásolja, hogy a Θ paraméter tényleges értéke helyett annak becslése szerepel benne.

Bizonyítás: Az

$$\Omega^{-1} = W + \Theta\beta$$

felbontás segítségével

$$\frac{\partial(Z'(W+\Theta B)Z)^{-1}}{\partial\Theta} = -(Z'(W+\Theta B)Z)^{-1}Z'BZ(Z'(W+\Theta B)Z)^{-1},$$

amiből az instrumentális változók egzogenitása miatt következik, hogy

$$\operatorname*{plim}_{N\to\infty} \frac{1}{N}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\beta\partial\Theta} = -2\operatorname{plim}\frac{y'_{-1}\beta Z}{N}\left(\frac{Z'(W+\Theta B)Z}{N}\right)^{-1}\frac{Z'(W+\Theta B)(y-X\beta)}{N}+$$
$$+2\operatorname{plim}\frac{y'_{-1}(W+\Theta B)Z}{N}\left(\frac{Z'(W+\Theta B)Z}{N}\right)^{-1}\frac{Z'BZ}{N}\left(\frac{Z'(W+\Theta B)Z}{N}\right)^{-1}$$
$$\frac{Z'(W+\Theta B)Z(y-X\beta)}{N} - 2\operatorname{plim}\frac{y'_{-1}(W+\Theta B)Z}{N}\left(\frac{Z'(W-\Theta B)Z}{N}\right)^{-1}$$
$$\frac{Z'B(y-X\beta)}{N} = 0.$$

Így, ha az egyedszám végtelenbe tart, mindegyik közelítő általánosított Balestra-Nerlove esztimátor aszimptotikus kovarianciamátrixa az általánosított Balestra-Nerlove esztimátorhoz tart.

5. A λ' esztimátor

MADDALA (1971) megmutatta, hogy minden hibakomponens modell esztimátora ugyanahhoz az egy paraméterű esztimátor osztályhoz tartozik, az alábbiak szerint:

$$\hat\beta(\lambda) = (X'WX + \lambda X'\beta X)^{-1}(X'Wy + \lambda X'\beta y) \quad \lambda\in[0,\infty]. \qquad (14)$$

A $\lambda = 0$ a *within*-esztimátort, $\lambda = 1$ a klasszikus legkisebb négyzetek esztimátort (OLS), $\lambda\to\infty$ a *between*-esztimátort adja, stb.

Véges T esetén azonban sajnos mindegyik hagyományos esztimátor inkonzisztens, mivel a transzformált hibatagok és a késleltetett endogén változók közötti korreláció még aszimptotikusan sem enyészik el (ld. P. SEVESTRE — A. TROGNON (1983), (1985)).

$\lambda = 0$ esetében a $\hat{\beta}(0)$ aszimptotikusan alulbecsüli β-t, és amikor $\lambda = 1$, akkor a $\hat{\beta}(1)$ OLS esztimátor felülbecsüli β-t. Van azonban olyan $\lambda^* \in [0,1]$, hogy $\hat{\beta}(\lambda^*) \to \beta$, ha $N \to \infty$. Ez az optimális érték megadható a

$$\lambda^* = \frac{(K(1-\rho)}{\left(\frac{1-\alpha^T}{1-\alpha}\frac{Ey_{n0}u_n}{\sigma^2} + K(1-\rho+T\rho)\right)} \tag{15}$$

alakban, ahol

$$K = \frac{T-1-T\alpha+\alpha^T}{T(1-\alpha)^2}$$

és

$$\rho = \frac{\sigma_u^2}{(\sigma_u^2+\sigma_W^2)}.$$

Látható, hogy az $Ey_{n0}u_n = 0$ esetben a λ^* esztimátor megegyezik a GLS esztimátorral.

Az esztimátor kiszámítható a

$$y_{nt} + (\sqrt{\lambda^*}-1)y_n = (X_{nt} + (\sqrt{\lambda^*}-1)X_n)\beta + \varepsilon_{nt} + (\sqrt{\lambda^*}-1)\varepsilon_n \tag{16}$$

transzformált modellre alkalmazott OLS-sel, így megkapható $\hat{\beta}(\lambda')$ a

$$\min_{\beta}(y-X\beta)(W+\lambda^* B)(y-X\beta)$$

minimumfeladat megoldásaként is.

Az esztimátor konstrukciója következtében természetesen mindaddig konzisztens, amíg az egzogén változók szigorúan egzogének[4]. De nem számítható, mivel λ^* az ismeretlen paraméterek függvénye. Sajnálatos módon a λ' egy konzisztens $\hat{\lambda}'$ esztimátorára épített, és így számítható közelítő λ' esztimátor határeloszlása viszont függ a $\hat{\lambda}'$ határeloszlásától, mivel:

$$\lim \frac{1}{N}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\beta\partial\lambda'} = -2\lim\frac{1}{N}y'_{-1}B(y-X\beta) =$$
$$= -2\left(\frac{\sigma_u^2}{1-\alpha} + \frac{\sigma_w^2}{T(1-\alpha)} - \frac{\sigma_w^2(1-\alpha^T)}{T^2(1-\alpha^2)}\right)B_1,$$

[4] Köszönettel tartozunk *R. Blundelnek*, amiért rámutatott erre a feltételre.

ahol B_1 a *between*-esztimátor aszimptotikus torzítása.[5] Ez a mennyiség viszont $N \to \infty$-nél semmilyen paraméterkombinációra sem tart 0-hoz: a közelítő λ' esztimátor aszimptotikus kovarianciamátrixa tehát függ az első lépésben választott $\hat{\lambda}'$ esztimátorétól.[6]

6. Egy Chamberlain típusú esztimátor

A nemrégiben CHAMBERLAIN (1984) cikkében leírt módszerek dinamikus hibakomponens modellekre is alkalmazhatók. A módszer bemutatásának egyszerűsítése kedvéért egy olyan elsőfokú autoregresszív modellre korlátozzuk a tárgyalást, melyben csak egy egzogén változó van. A módszer különösebb nehézség nélkül alkalmazható általánosabb, az endogén változó p különböző késleltetését és K egzogén változót tartalmazó modellre is.

Jelen esetben a modell egyszerűen:

$$y_{nt} = \alpha y_{n,t-1} + \beta x_{nt} + u_{nt} + w_{nt} \quad n = 1, \ldots, N;\ t = 1, \ldots, T \tag{18}$$

Ez a modell kifejezhető az y_{n0} és az egzogén változók múltbeli értékeinek függvényében is:

$$y_{nt} = \alpha^t y_{n0} + \beta \sum_{j=0}^{t-1} \alpha^i x_{n,t-j} + u_n \frac{(1-\alpha^t)}{(1-\alpha)} + \sum_{j=0}^{t-1} \alpha_j w_{n,t-j}. \tag{19}$$

Amennyiben az x változó szigorúan egzogén — amit cikkünkben eddig is feltételeztünk — akkor az y_{nt} $x_{n1}, \ldots, x_{nT}$ és y_{n0} feltételek melletti lineáris előrejelzése:

$$\begin{aligned}
E'(y_{nt} | y_{n0}, x_{n1}, \ldots, x_{nT}) &= \alpha^t y_{n0} + \beta \sum_{j=0}^{t-1} \alpha^i x_{n,t-j} + \\
&+ (1 + \alpha + \cdots + \alpha^{t-1}) \frac{E(u_0 y_{n0})}{V y_{n0}} (y_{n0} - E y_{n0}) = \\
&= k_1 \frac{1-\alpha^t}{1-\alpha} + \left(\alpha^t + \frac{1-\alpha^t}{1-\alpha} k_0 \right) y_{n0} + \beta \sum_{j=0}^{t-1} \alpha^i x_{n,t-j},
\end{aligned}$$

ahol

$$k_0 = \frac{E y_{n0} u_n}{V y_{n0}}, \quad k_1 = E y_{n0}$$

vagy

$$E'(y_{nt} | y_{n0}, x_{n1}, \ldots, x_{nT}) = \Pi_{0t} + \Pi_{1t} y_{n0} + \sum_{j=1}^{T} \Pi_{j-1,t} x_{nj},$$

[5] A levezetés egyszerűsítése céljából feltettük, hogy a modell tiszta AR(1) folyamat, vagyis $y = \alpha y_{-1} + \varepsilon$.

[6] További információkkal szolgál erről *F. Faure* és *P. Sevestre* ugyanebben a számban közölt cikke.

ahol

$$\Pi_{0t} = k_1 \frac{1-\alpha^t}{1-\alpha} \quad \Pi_{1t} = \alpha^t + \frac{1-\alpha^t}{1-\alpha} k_0$$

és

$$\Pi_{j+1,t} = \beta\alpha^{t-j} \; j = 1, 2, \ldots, t \quad \Pi_{j+1,t} = 0 \; j = t+1, \ldots, T.$$

A Π-knek az OLS módszer egyszerű konzisztens esztimátorát adja, amennyiben az y_{nt}-re számítunk olyan, konstans tagot is tartalmazó regressziót, melynek magyarázó változói az y_{n0} és az $x_{n1}, \ldots, x_{nT}$ változók. Mivel ez egy egyszerű szerkezetű modell becslését (SURE) jelenti, az OLS módszer a

$$\Pi_{jt}, \; j = 0, 1, \ldots, T+1; \quad t = 1, \ldots, T$$

legjobb torzítatlan lineáris esztimátora (BLUE).

A $\hat{\Pi}_{jt}N$ szerinti határértéke Π_{jt}, ami k_0, k_1, α és β függvénye.

Alkalmazva a GOURIEROUX—MONFORT—TROGNON (1985)-ben kidolgozott aszimptotikus legkisebb négyzetek (ALS) módszerét a k_0, k_1, α és β konzisztens becslésére a

$$\begin{aligned} &\Pi_{t+1,t} = \beta \quad t = 1, \ldots, T \\ &\Pi_{j+1,t} = \alpha\Pi_{j+1,t-1} \quad j = 1, \ldots, t-1; \quad t = 2, \ldots, T \\ &\Pi_{t+h,t} = 0 \quad h = 2, \ldots, T+1-t \end{aligned}$$

egyenletrendszert kapjuk. Ezeket az összefüggéseket mátrix alakban egymás alá írva az $\alpha_1\beta$, k_0 és k_1 egy olyan lineáris modelljét kapjuk, amelynek feltételeit a Π-k jelentik. Szemléltetésül részletesen kiírjuk a $T = 3$ esetre a mátrixegyenletet:

$$\begin{pmatrix} \Pi_{01} \\ \Pi_{02} \\ \Pi_{03} \\ \Pi_{11} \\ \Pi_{12} \\ \Pi_{13} \\ \Pi_{21} \\ \Pi_{22} \\ \Pi_{23} \\ \Pi_{31} \\ \Pi_{32} \\ \Pi_{33} \\ \Pi_{41} \\ \Pi_{42} \\ \Pi_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \Pi_{01} & 0 & 0 & 1 \\ \Pi_{02} & 0 & 0 & \cdot 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \Pi_{11} & 0 & 0 & 1 \\ \Pi_{12} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \Pi_{21} & 0 & 0 & 0 \\ \Pi_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \Pi_{32} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ k_0 \\ k_1 \end{pmatrix}$$

vagy vektor alakban:

$$W = Z\Theta, \quad \Theta' = (\alpha, \beta, k_0, k_1),$$

ahol W és Z mérete $T(T+2) \times 1$ ill. $T(T+2) \times 4$. A Π-k helyett OLS becsléseiket használva W és $Z (N \to \infty)$ konzisztens becslése adódik.

Ezzel egy véges lineáris távolságmodellt kapunk

$$\hat{W} = \hat{Z}\Theta + \varepsilon \tag{20}$$

ahol $N \to \infty$ esetén $\varepsilon \to 0$, és

$$V\varepsilon = V(\hat{W} - \hat{Z}\Theta) = \Sigma.$$

A Θ paramétereknek egyszerű konzisztens esztimátora a következő

$$\hat{\Theta} = (\hat{Z}'Z)^{-1}\hat{Z}'\hat{W}. \tag{21}$$

Jobb választás viszont a

$$\hat{\Theta} = (\hat{Z}'\hat{\Sigma}^{-1}Z)^{-1}\hat{Z}'\hat{\Sigma}^{-1}\hat{W}, \tag{22}$$

ha $\hat{\Sigma}$ konzisztens esztimátora Σ-nak. Mivel aΣ a Π-k és a Θ kovarianciamátrixának a függvénye, nagyon egyszerűen becsülhető, ha már rendelkezésünkre áll Θ egy konzisztens becslése.

A Chamberlain-típusú esztimátor lényeges előnye, hogy a modell az endogén változó több különböző késleltetettjét is tartalmazhatja. És mivel a Π-k korlátozások nélküli OLS-sel becsülhetők, nincs szükség a szigorú egzogenitás feltevésére. Egyszerűen konstruálható aszimptotikus próba is e hipotézis ellenőrzésére:

Mivel szigorúan egzogén x-ek esetében

$$\sqrt{N}(\hat{W} - \hat{Z}\Theta) \to N(0, \Sigma)$$

megállapítható, hogy a nullhipotézis érvényessége esetén fennáll

$$\xi = N(\hat{W} - \hat{Z}\hat{\Theta})'\hat{\Sigma}^{-1}(\hat{W} - \hat{Z}\hat{\Theta}) \to \chi^2_{(T(T+2)-4}. \tag{23}$$

Amennyiben az x-ek nem egzogének, a ξ próbafüggvény a végtelenhez tart. Egy, az $(1-\alpha)$ szinthez tartozó aszimptotikus kritikus tartomány:

$$C = \{\xi > \chi^2_{(1-\alpha)}(T(T+2) - 4\}. \tag{24}$$

A hipotézis elfogadása esetén az y_{n0} és az u_n függetlenségének tesztelése a (21) k_0 paramétere szignifikancia vizsgálatának felel meg.

7. A Blundell esztimátor[7]

A (18) egyenlet x változója szigorú egzogenitásának elfogadása esetén a kezdeti érték és az egyedhatások közti korreláció jelenti a fő problémát. Az előző részben látotthoz hasonlóan felbonthatjuk az egyedhatást y_{n0} lineáris függvényére és egy ezekre a kezdeti megfigyelésekre ortogonális egyedi hibatagra:

$$u_n = \frac{E y_{n0} u_n}{E y_{n0}^2} y_{n0} + \eta_n.$$

Ekkor (18) átírható egy olyan kiterjesztett modellé, amelyben a magyarázó változók között szerepel az y_{n0} is.

$$y_{nt} = \alpha y_{nt-1} + \beta x_{nt} + \gamma y_{n0} + \eta_n + w_{nt} \tag{25}$$

Ebben az alakban a specifikus η hatás korrelálatlan az y_{n0}-val. Így, mint azt az *5. rész*ben már hangsúlyoztuk, az erre a modellre alkalmazott GLS már konzisztens. Sajnos azonban a közelítő GLS határeloszlása függ a

$$\hat{\Theta} = \frac{\hat{\sigma}_w^2}{(\hat{\sigma}_w^2 + T\hat{\sigma}_\eta^2)} \tag{26}$$

határeloszlástól.

8. Kisminta tulajdonságok: néhány szimulációs eredmény

Az előző részekben megmutattuk, hogy a közelítő általánosított BALESTRA — NERLOVE esztimátor aszimptotikus kovarianciamátrixa független a Θ becslésére első lépésben választott esztimátortól. Vagyis az elméleti Θ paraméter helyettesítése egy konzisztens $\hat{\Theta}$ becsléssel semmilyen hatásosságveszteséget sem eredményez. Ugyanez érvényes a CHAMBERLAIN típusú esztimátorokra is a pszeudo-reziduumok kovarianciamátrixának egy konzisztens esztimátorral való helyettesítésekor. A λ' esztimátornál és a BLUNDELL esztimátornál ezzel szemben hasonló tulajdonság nem érvényesül.

A három módszer relatív hatásossága azonban még ismeretlen. Nem tudjuk továbbá, hogyan viselkednek az esztimátorok véges mintában. A kérdések megválaszolására szimulációs vizsgálatot végeztünk,[8] a következőkben ennek eredményeit foglaljuk össze.[9] Az alkalmazott rövidítések a következők:

GBN: az elméleti általánosított Balestra — Nerlove esztimátor.
GBNN: Közelítő GBN, első lépésben a Balestra — Nerlove instrumentális esztimátorral.

---

[7] Az esztimátort *R. Blundell* informális beszélgetések során javasolta.

[8] A párhuzamosan közölt F. FAURE — P. SEVESTRE cikk tartalmazza az adatgenerálási folyamat részletes leírását.

[9] A Chamberlain és a Blundell típusú esztimátorokra vonatkozó szimulációs eredmények még nem állnak rendelkezésünkre.

GBNW: Közelítő GBN, első lépésben a Balestra — Nerlove *within*-esztimátorral.
GBN1: Közelítő GBN, első lépésben az első Anderson — Hsiao esztimátorral.
GBN2: Közelítő GBN, első lépésben a második Anderson — Hsiao esztimátorral.
GBN3: Közelítő GBN, első lépésben az egzogén Anderson — Hsiao esztimátorral.
GBNP: Közelítő GBN, első lépésben az időpontok közötti (*between*) esztimátorral.
LBN: Közelítő λ', első lépésben a Balestra — Nerlove instrumentális esztimátorral.
LBNW: Közelítő λ', első lépésben a Balestra — Nerlove *within*-esztimátorral.
L1: Közelítő λ', első lépésben az első Anderson — Hsiao esztimátorral.
L2: Közelítő λ', első lépésben a második Anderson — Hsiao esztimátorral.
L3: Közelítő λ', első lépésben az egzogén Anderson — Hsiao esztimátorral.
LP: Közelítő λ', első lépésben az időpontok közötti (*between*) esztimátorral.

8.1. Nagy N-ek esete ($N = 180$)

8.1.1. A második lépés esztimátorának függése/függetlensége az első lépés esztimátorától

A szimulációs eredmények megerősítik a korábban feltárt aszimptotikus összefüggéseket. Az általánosított Balestra — Nerlove esztimátor eloszlása valóban független az első lépésben választott becsléstől, továbbá úgy tűnik, hogy ezek az eredmények bármilyen paraméterkombinációra érvényesek:

1. táblázat

A legkevésbé hatásos és a leghatásosabb közelítő közelítő λ' esztimátor szórásnégyzetének aránya

ρ / a	0.1	0.5	0.9
0.1	1.987	4.111	3.734
0.5	4.752	12.17	19.90
0.9	25.89	24.15	41.34

2. táblázat

A legkevésbé hatásos és a leghatásosabb közelítő közelítő GBN esztimátor szórásnégyzetének aránya

ρ / a	0.1	0.5	0.9
0.1	1.059	1.010	1.006
0.5	1.145	1.022	1.024
0.9	2.218	1.343	1.077

Ezek az eredmények nem túl meglepőek, mivel ebben az esetben ($N = 180$)

feltehető, hogy az aszimptotikus összefüggések érvényesülnek.

8.1.2. Melyiket válasszuk? Néhány eredmény az esztimátorok torzítására és szórására

Nincs mód arra, hogy minden paraméterkombinációra érvényes, egyértelmű sorrendet állapítsunk meg az esztimátorok között, mivel a λ' eloszlása függ attól, melyik módszert alkalmaztuk e paraméter becslésére. Az alábbi táblázatok alapján ennek ellenére megállapíthatjuk, hogy az a közelítő λ' esztimátor, amelynek az első lépése a Balestra — Nerlove esztimátoron alapul majdnem mindig felülmúlja a többi módszert: nagyon alacsony a torzítása és hatásosabb a többi esztimátornál.

3. táblázat

A legtorzítottabb esztimátor

a \ ρ	0.1	0.5	0.9
0.1	LP (-.0530)	LP (-.0152)	LP (-.0090)
0.5	LP (-.0666)	L1 (-.0264)	L1 (.0285)
0.9	LBN (-.0523)	LBN (-.0383)	L1 (-.0264)

4. táblázat

A legkevésbé torzított esztimátor

a \ ρ	0.1	0.5	0.9
0.1	GBNN (.0000)	GBNW (.0000)	L1 (.0000)
0.5	GBNN (.0024)	GBN2 (.0000)	GBNP (.0001)
0.9	GBN1 (.0004)	GBNN (-.0001)	LBN (.0000)

5. táblázat

A legkevésbé hatásos esztimátor

a \ ρ	0.1	0.5	0.9
0.1	GBNP (.0038)	GBNN (.0022)	LP (.0008)
0.5	GBNP (.0021)	L2 (.0036)	L1 (.0028)
0.9	L1 (.0016)	LP (.0014)	L1 (.0015)

6. táblázat

A leghatásosabb esztimátor

a \ ρ	0.1	0.5	0.9
0.1	L2 (.0004)	L2 (.0004)	L2 (.0002)
0.5	LBN (.0003)	LBN (.0003)	LBNW (.0001)
0.9	LBN (.0001)	LBN (.0000)	LBN (.0000)

Megfigyelhető, hogy a különböző esztimátorok átlagos négyzetes hiba (MSE) és szórás (hatásosság) szerinti sorrendje szinte megegyezik. Ez azt az egyáltalán nem meglepő jellegzetességet mutatja, hogy az esztimátorok egymástól alapvetően a hatásosságukban térnek el.

7. táblázat

A legnagyobb MSE

a \ ρ	0.1	0.5	0.9
0.1	GBNP (.0038)	GBNN (.0022)	LP (.0009)
0.5	LP (.0059)	L2 (.0036)	L1 (.0036)
0.9	LP3 (.0033)	LP3 (.0015)	L13 (.0022)

8. táblázat

A legkisebb MSE

a \ ρ	0.1	0.5	0.9
0.1	LBN (.0013)	L2 (.0005)	L2 (.0002)
0.5	LBN (.0014)	LBN (.0003)	LBNW (.0001)
0.9	LBNW (.0005)	LBNW (.0004)	LBN (.0000)

8.2. Kis N esete ($N = 25$)

8.2.1. A második lépés esztimátorának függése/függetlensége az első lépés esztimátorától

Vannak ugyan különbségek a nagy N-re kapott eredményekhez képest, a korábban ismertetett eredmények többsége azonban most is érvényesnek tűnik:

— Az általánisított Balestra — Nerlove esztimátor hatásossága az esetek többségében most is független az első lépésben választott becslési módszertől.

— A következő táblázatok alapján ezek az eredmények majdnem minden paraméterkombinációra érvényesnek tűnnek:

9. táblázat
A legkevésbé hatásos és a leghatásosabb közelítő λ' esztimátor szórásnégyzetének aránya

ρ / a	0.1	0.5	0.9
0.1	1.188	1.403	2.643
0.5	1.320	2.409	5.941
0.9	5.259	6.452	3.457

10. táblázat
A legkevésbé hatásos és a leghatásosabb közelítő GBN esztimátor szórásnégyzetének aránya

ρ / a	0.1	0.5	0.9
0.1	1.073	1.040	1.042
0.5	1.259	1.068	1.058
0.9	4.075	1.909	1.163

8.2.2. Melyiket válasszuk? Néhány eredmény az esztimátorok torzítására és szórására

A kis N-re ($N = 25$) vonatkozó szimulációs eredmények majdnem teljesen megegyeznek a nagy N-re ($N = 180$) kapottakkal. Az általánosított Balestra — Nerlove esztimátorok osztályába tartoznak a legkisebb torzítású esztimátorok, míg a leghatásosabbak inkább a közelítő λ' esztimátorok közül kerülnek ki. Az MSE szempontjából azonban inkább az előbbi tűnik kedvezőbbnek.

11. táblázat

A legtorzítottabb esztimátor

a \ ρ	0.1	0.5	0.9
0.1	LP (-.0583)	LP (-.0228)	LBN (-.0122)
0.5	LP (-.0789)	LP (-.0358)	L1 (.0269)
0.9	LPN (-.0590)	LPN (-.0429)	LPN (-.0107)

12. táblázat

A legkevésbé torzított esztimátor

a \ ρ	0.1	0.5	0.9
0.1	GBNN (-.0160)	LBN (-.0018)	GBNN (-.0029)
0.5	GBN1 (-.0084)	GBNN (-.0055)	GBNN (-.0018)
0.9	GBNP (-.0042)	GBN2 (-.0051)	GBNN (-.0005)

13. táblázat

A legkevésbé hatásos esztimátor

a \ ρ	0.1	0.5	0.9
0.1	GBN1 (.0268)	GBNN (.0168)	GBNN (.0034)
0.5	GBNP (.0148)	GBN1 (.0092)	L1 (.0047)
0.9	GBN3 (.0160)	GBN3 (.0094)	GBN1 (.0017)

14. táblázat

A leghatásosabb esztimátor

a \ ρ	0.1	0.5	0.9
0.1	LP (.0038)	LP (.0038)	L2 (.0020)
0.5	LBN (.0027)	LBN (.0028)	LBNW (.0012)
0.9	LBN (.0007)	LBN (.0006)	LBN (.0002)

15. táblázat

A legnagyobb MSE

ρ / a	0.1	0.5	0.9
0.1	GBNP (.0276)	GBNN (.0169)	GBNN (.0034)
0.5	GBNP (.0144)	GBN1 (.0092)	L1 (.0054)
0.9	GBN3 (.0160)	GBN3 (.0094)	GBN3 (.0018)

16. táblázat

A legkisebb MSE

ρ / a	0.1	0.5	0.9
0.1	LBN (.0050)	LP (.0040)	L2 (.0021)
0.5	LBN (.0042)	LBN (.0029)	LBNW (.0012)
0.9	LBNW (.0028)	LBNW (.0018)	LBN (.0003)

Hivatkozások

AMEMIYA T. (1986): *Advenced Econometrics* Basil Blackvell ed.

ANDERSON T.W. és C. HSIAO (1982): „Formulation and estimation of dynamic models using panel data". *Journal of Econometrics*, vol. 18, pp. 578-606.

ARELLANO M. és S. BOND „Some tests of specification for panel data: Monte - Carlo evidence and an application to employment eqations." *Working Paper*, Institute for fiscal Studies.

BALESTRA P. és M. NERLOVE (1966): „Pooling cross-section and time-series data in the estimation of a dynamic model" *Econometrica*, vol. 34, pp. 585-612.

FAURE F. és P. SEVESTRE (1988): „Comparative properties of various consistent estimators for dynamic error components models: Further results." *ERUDETE Working Paper* No 88-06.

GOURIEROUX C. és A. MONFORT (1987): *Statistique de Modèles Econométriques.* Cours polycopié ENSAE.

GOURIEROUX C., A. MONFORT és A. TROGNON (1981): *Asymptotic least squares. Application to qualitative models* Document de travail INSEE — ENSAE No 8108.

LIVIATAN N. (1963) „Consistent estimation of distributed lags" *International Economic Rewiew*, vol. 4, pp. 44-52.

NERLOVE M. (1971) „Further evidence on the estimation of dynamic economic relations from a time-series of cross-sections" *Econometrica*, vol. 39, 99. 359-382.

SEVESTRE P. és A. TROGNON (1983): „Proriétés de grands échantillons d' une classe d' estimateurs des modeles autoregressifs a erreurs composees." *Annales de l'INSEE, No 50, pp. 25-49.*

SEVESTRE P. és A. TROGNON (1985): „A note on autoregressive error components models" *Journal of Econometrics*, vol. 28, pp. 231-245.

TROGNON A. (1987) *Efficacité des procédures en deux étapes: le cas des M-estimateurs quasi-généralisés* Document de travail INSEE/ENSAE.

WHITE H. (1984): *Asymptotic theory for econometricians* Academic Press.