Szigma, XX. (1987–88) 2–3. sz.

MÁTYÁS LÁSZLÓ

Dinamikus panelmodellek becslése

Az idősorok és keresztmetszeti adatok együttes felhasználásának — az input és az output információt növelő szerepe következtében — rendkívül fontos helye van az ökonometriai vizsgálatokban. A panelmodellek lehetővé teszik az így előállított adatbázisra épülő ökonometriai modellek specifikálását és becslését (MÁTYÁS [4]). A hagyományos panelmodellekre kidolgozott (és a statisztikai-ökonometriai számítógépes programcsomagokban fellelhető) paraméterbecslési eljárások azonban dinamikus modellek esetén (mikor a magyarázó változók között késleltetett endogének is szerepelnek) nem mindig eredményeznek torzítatlan, illetve konzisztens becslést. Tekintettel kell lenni különösen arra, hogy a konzisztencia vizsgálata valamivel kiterjedtebb elemzést igényel, mint a hagyományos idősoros modelleknél, mivel az egyes változók megfigyeléseinek száma két szempontból is tarthat a végtelenbe: egyrészt a megfigyelt egyedek száma (ami a sztochasztikus határértékek számításánál a nagy számok törvényének alkalmazását teszi lehetővé), másrészt a megfigyelt idősor hossza egyaránt a végtelenbe tarthat.

Írásom fő célja bemutatni, hogy a panelmodellek szokásos paraméterbecslési eljárásai mikor konzisztensek és mikor nem, különös tekintettel arra az esetre, amikor a megfigyelt idősorok végesek, hiszen általában nagyszámú egyed rövid idősorainak a megfigyelései állnak rendelkezésünkre. Nem kerülnek terítékre a továbbiakban speciálisan dinamikus panelmodellekre kidolgozott olyan becslési eljárások, mint például a megfelelő instrumentális változók módszerei: egyrészt, mivel ez jelentősen megnövelné az írás terjedelmét; másrészt, mivel ezen módszerek feladatorientáltak, így általánosságban beszélni róluk nem lenne célravezető; s végül harmadszor, mivel a már említett számítógépes programcsomagok nem tartalmazzák ezen eljárásokat, így gyakorlati szerepük — jelenleg még — kicsi.

Az írás első részében röviden emlékeztetünk a panelmodellekre, illetve a paramétereinek becslésére szolgáló eljárásokra. Ezután megnézzük egy egyszerűsített — exogén változókat nem tartalmazó — modell főbb paraméter esztimátorainak asszimptotikus és „fél”-asszimptotikus tulajdonságait (mikor a megfigyelt idősor hossza véges), megállapítva, mely esztimátorok konzisztensek. A továbbiakban a megfigyelt változók stacionaritását feltételezve, újravizsgáljuk a fenti esztimátorok konzisztenciáját. Végül bebizonyítjuk, hogy az eddig tett összes főbb megállapításunk érvényben marad az exogén változókat magában foglaló általános modellben is. Sajnálatos módon a téma tárgyalása nélkülözhetetlenné tesz számos súlyos képlet és levezetés alkalmazását, ami azonban elkerülhetetlen, mivel ezek az irodalomban nem találhatók meg (és így itt referenciaként szolgálhatnak), illetve ha meg is találhatók, hibásak (mint például TROGNON [11], SEVESTRE–TROGNON [9], NICKELL [6] írásaiban).

1. A panelmodellek

Legyen a kiinduló modell

$$y = X\beta + u, \tag{1}$$

ahol – és a továbbiakban mindig –

y – az endogén változó megfigyeléseinek $(NT \times 1)$ méretű vektora,

X – az exogén magyarázó változók megfigyeléseinek $(NT \times K)$ méretű mátrixa,

u – a látens változók $(NT \times 1)$ méretű vektora,

K – a magyarázó változók száma,

N – a megfigyelt egyedek száma,

T – a megfigyelt idősor hossza,

tehát

$$y = \begin{pmatrix} y_{11} \\ \vdots \\ y_{1T} \\ \vdots \\ y_{N1} \\ \vdots \\ y_{NT} \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad X = \begin{pmatrix} x_{11}^1 & \dots & x_{11}^K \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{NT}^1 & \dots & x_{NT}^K \end{pmatrix}.$$

Ha az egyedspecifikus hatásokat állandó hatásként építjük be az (1) modellbe, akkor a modell formája:

$$y = X\beta + Z\alpha + u, \tag{1a}$$

ahol

$Z = I_N \otimes L_T$ a vakváltozók $(NT \times N)$ méretű mátrixa

I_N – az $(N \times N)$ méretű egységmátrix,

L_T – a $(T \times 1)$ méretű csupa egyesekből álló vektor,

α – az egyedhatásokat kifejező $(N \times 1)$ méretű paramétervektor és

$E(u) = 0, \quad E(uu') = \sigma^2 I_{NT}$.

Ha az egyedspecifikus hatásokat véletlen hatásként építjük be az (1) modellbe, akkor a modell formája:

$$y = X\beta + \mu \otimes L_T + v, \tag{1b}$$

ahol

μ – az egyedhatásokat kifejező $(N \times 1)$ méretű valószínűségi vektorváltozó,

v – a látens változók $(NT \times 1)$ méretű vektora, valamint:

a) A μ_i és v_{it} valószínűségi változók függetlenek minden i-re és t-re;

b) $E(\mu_i) = 0,\ E(v_{it}) = 0$;

c)

$$E(v_{it}v_{i't'}) = \begin{cases} \sigma_v^2 & \text{ha } i=i',\ t=t' \\ 0 & \text{különben;} \end{cases}$$

d)

$$E(\mu_i\mu_{i'}) = \begin{cases} \sigma_\mu^2 & \text{ha } i=i' \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Belátható (MÁTYÁS [4]), hogy az (1a) és (1b) modell paramétereinek főbb esztimátorai kifejezhetők a λ–típusú esztimátor segítségével:

$$\widehat{\beta}_\lambda = (X'W_nX + \lambda X'B_nX)^{-1}(X'W_ny + \lambda X'B_ny)$$

vagy

$$\widehat{\beta}_\lambda = (X'X + (\lambda - 1)X'B_nX)^{-1}(X'y + (\lambda - 1)X'B_ny),$$

ahol

$$W_n = I_{NT} - (I_N \otimes \frac{J_T}{T}) = I_N \otimes (I_T - \frac{J_T}{T})$$

és

$$B_n = I_N \otimes \frac{J_T}{T},$$

ahol

J_T a csupa 1-esekből álló $(T \times T)$ méretű mátrix. Ha $\lambda = 0$, akkor $\widehat{\beta}_\lambda$ az (1a) modell paramétereinek állandó hatású (úgynevezett intra, vagy within) esztimátora; ha $\lambda = 1$, akkor az (1a), (1b) modellek paramétereinek KLNM esztimátorát nyújtja a $\widehat{\beta}_\lambda$, valamint ha $\lambda = (\delta_v^2/\delta_v^2 + T\delta_\mu^2)$, akkor az (1a), (1b) modellek ALNM esztimátora.

Fő figyelmünk a továbbiakban az (1b) modell λ–típusú esztimátoraira fog irányulni. Az állandó hatású (1a) modellt csupán néhány problémával fogjuk érinteni, mivel a dinamikus megközelítés szempontjából sokkal kevesebb nehézség forrása.

2. A λ–típusú esztimátorok dinamikus modellekben

Az írás további részében feltételezzük, hogy az (1b) modell csupán egyetlen magyarázó változót tartalmaz és az a késleltetett endogén változó. Az utolsó fejezetben be fogjuk látni, hogy az így egyszerűsített modellre tett megállapításaink érvényben maradnak az exogén változókat tartalmazó modellben is. A modell tehát:

$$y_t = \beta y_{t-1} + u, \qquad (2)$$

ahol

$$y_t = \begin{pmatrix} y_{11} \\ \vdots \\ y_{1T} \\ \vdots \\ y_{N1} \\ \vdots \\ y_{NT} \end{pmatrix}, \quad y_{t-1} = \begin{pmatrix} y_{10} \\ \vdots \\ y_{1,T-1} \\ \vdots \\ y_{N0} \\ \vdots \\ y_{N,T-1} \end{pmatrix}$$

és

$$u = \mu \otimes L_T + v .$$

Vegyük észre, hogy itt az y változó t indexe a szokásostól eltérően annak megkülönböztetésére szolgál, hogy az y vektorváltozó egyidejű vagy késleltetett értékeivel van-e dolgunk.

Egyszerűen belátható, hogy a (2) modell magyarázó és látens változói nem függetlenek, így a λ–típusú esztimátorok (véges mintában) nem torzítatlanok.

Nézzük, mi a helyzet nem véges mintában! Gyakorlati szempontból két esetnek van jelentős szerepe:

1. mikor N fix és $T \to \infty$ (a továbbiakban *teljesen asszimptotikus* eset);
2. mikor $N \to \infty$, de T fix (*fél–asszimptotikus eset*).

Vegyük először a $\widehat{\beta}_\lambda$ esztimátort a fél–asszimptotikus esetben:

$$\operatorname*{plim}_{N\to\infty} \frac{1}{NT}\widehat{\beta}_\lambda = \operatorname*{plim}_{N\to\infty} \frac{1}{NT}\left[y'_{t-1}y_{t-1} + (\lambda-1)y'_{t-1}B_n y_{t-1}\right]^{-1} \times$$
$$\times \left[y'_{t-1}y_t + (\lambda-1)y'_{t-1}B_n y_t\right] .$$

Visszahelyettesítve a fenti formulába a (2) összefüggést:

$$\operatorname*{plim}_{N\to\infty} \frac{1}{NT}\widehat{\beta}_\lambda = \beta + \operatorname*{plim}_{N\to\infty} \frac{1}{NT}\left[y'_{t-1}y_{t-1} + (\lambda-1)y'_{t-1}B_n y_{t-1}\right]^{-1} \times$$
$$\times \left[y'_{t-1}u + (\lambda-1)y'_{t-1}B_n u\right] .$$

Figyelmünket összpontosítsuk most a torzító tényezőre, és vizsgáljuk meg az egyes tagok fél–asszimptotikus határértékeit.

A) A $\text{plim}_{N\to\infty} \frac{1}{NT} y'_{t-1} u$ határérték kiszámításához figyelembe kell venni, hogy az y_i, illetve az y vektor az i-edik egyednél a (2) modell végső formáját felhasználva a következő formát ölti:

$$y_{it} = \begin{pmatrix} \beta y_{i0} + \mu_i + v_{i1} \\ \vdots \\ \beta^j y_{i0} + \frac{1-\beta^j}{1-\beta}\mu_i + \sum_{\tau=0}^{j-1} \beta^\tau v_{i,j-\tau} \\ \vdots \\ \beta^T y_{i0} + \frac{1-\beta^T}{1-\beta}\mu_i + \sum_{\tau=0}^{T-1} \beta^\tau v_{i,T-\tau} \end{pmatrix}$$

és

$$y_{i,t-1} = \begin{pmatrix} y_{i0} \\ \beta y_{i0} + \mu_i + v_{i1} \\ \vdots \\ \beta^{T-1} y_{i0} + \frac{1-\beta^{T-1}}{1-\beta}\mu_i + \sum_{\tau=0}^{T-2} \beta^\tau v_{i,T-\tau-1} \end{pmatrix}.$$

Mivel pedig

$$u_i = \mu_i L_T + \begin{pmatrix} v_{i1} \\ \dots \\ v_{iT} \end{pmatrix},$$

így

$$\text{plim}_{N\to\infty} \frac{1}{NT} y'_{t-1} u = \frac{1}{NT} [\sum_{\tau=1}^{T-1} \frac{1-\beta^\tau}{1-\beta} E(\mu'\mu) + \sum_{\tau=0}^{T-1} \beta^\tau E(y'_0\mu)],$$

ahol y_0 a y_{i0} kezdeti értékeket tartalmazó $(N \times 1)$ méretű valószínűségi vektorváltozó.

Vegyük figyelembe, hogy az $y_{i,t-1}$ és az u_i valószínűségi vektorváltozók egyes elemei függetlenek minden i-re $(i = 1, \dots, N)$ és azonos eloszlásúak, így a nagy számok törvényének megfelelően (lásd a Hincsin tételt)

$$\text{plim}_{N\to\infty} \frac{1}{N} y'_{t-1} u = \frac{1}{N} E(y'_{t-1} u)$$

$$E(\mu'\mu) = N E(\mu_i^2), \quad (E(\mu_1) = \ldots = E(\mu_N))$$

$$E(y'_0\mu) = N E(y_{i0}\mu_i), \quad (E(y_{10}\mu_i) = \ldots = E(y_{N0}\mu_N))$$

$$\sum_{\tau=0}^{T-1} \beta^T E(y_{i0}\mu_i) = \frac{1-\beta^T}{1-\beta} E(y_{i0}\mu_i)$$

és végül

$$\sum_{\tau=1}^{T-1} \frac{1-\beta^\tau}{1-\beta} E(\mu_i\mu_i) = \frac{1}{1-\beta}[T-1-\beta^1-\ldots-\beta^{T-1}]E(\mu_i\mu_i) =$$

$$= \frac{1}{1-\beta}(T - \frac{1-\beta^T}{1-\beta})E(\mu_i\mu_i) = \frac{1}{(1-\beta)^2}(T - T\beta - 1 + \beta^T)E(\mu_i\mu_i).$$

Összegezve tehát

$$\operatorname*{plim}_{N\to\infty} \frac{1}{NT} y'_{t-1}u = \frac{1}{T}\frac{1-\beta^T}{1-\beta}E(y_{i0}\mu_i) + \frac{1}{T}(\frac{T-T\beta-1+\beta^T}{(1-\beta)^2})\sigma_\mu^2.$$

B) A $\operatorname{plim}_{N\to\infty} \frac{1}{NT} y'_{t-1}y_{t-1}$ határérték kiszámításánál vegyük figyelembe az $y_{i,t-1}$ valószínűségi vektorváltozó A) pontban látott kifejtését, amiből könnyen adódik, hogy

$$y'_{it-1}y_{i,t-1} = (\beta^{T-1}y_{i0} + \frac{1-\beta^{T-1}}{1-\beta}\mu_i + \sum_{\tau=0}^{T-2}\beta^\tau v_{iT-\tau-1})^2 + \ldots + y_{i0}^2,$$

és így a nagy számok törvényének figyelembevételével

$$\operatorname*{plim}_{N\to\infty} \frac{1}{NT} y'_{t-1}y_{t-1} = \frac{1}{T}[\sum_{\tau=0}^{T-1}\beta^2 E(y_{i0}^2) + \sum_{\tau=1}^{T-1}\frac{2\beta^\tau(1-\beta^\tau)}{1-\beta}E(y_{i0}\mu_i) +$$

$$+ \sum_{\tau=1}^{T-1}(\frac{1-\beta^\tau}{1-\beta})^2 E(\mu_i\mu_i) + \sum_{j=1}^{T-1}\sum_{\tau=0}^{j-1}\beta^{2\tau}E(v_{ij-\tau-1}^2)].$$

Számításba véve, hogy

$$\sum_{j=1}^{T-1}\sum_{\tau=0}^{j-1}\beta^{2\tau} = 1 + (1+\beta^2) + \ldots + (1+\beta^2+\ldots+\beta^{2(T-2)}) =$$

$$= \frac{1}{1-\beta^2}[1-\beta^2+1-\beta^4+\ldots+1-\beta^{2(T-1)}] =$$

$$= \frac{1}{1-\beta^2}[T-1-\beta^2(\frac{1-\beta^{2(T-1)}}{1-\beta^2})] =$$

$$= \frac{1}{1-\beta^2}[\frac{T-1-T\beta^2+\beta^{2T}}{1-\beta^2}],$$

a keresett határérték :

$$\underset{N\to\infty}{\text{plim}} \frac{1}{NT} y'_{t-1} y_{t-1} = \frac{1}{T}\frac{1-\beta^{2T}}{1-\beta^2} E(y_{i0}^2) + \frac{1}{T}\frac{2}{1-\beta}[\frac{1-\beta^T}{1-\beta} - \frac{1-\beta^{2T}}{1-\beta^2}]E(y_{i0}\mu)+$$

$$+\frac{1}{T}\frac{1}{(1-\beta)^2}[T - 2\frac{1-\beta^T}{1-\beta^2} + \frac{1-\beta^{2T}}{1-\beta^2}]\sigma_\mu^2 + \frac{1}{T}\frac{1}{1-\beta^2}[\frac{T-1-T\beta^2+\beta^{2T}}{1-\beta^2}]\sigma_v^2 .$$

C) A $\text{plim}_{N\to\infty} \frac{1}{NT} y'_{t-1} B_n y_{t-1}$ **határérték kissámításánál as eddigiek figyelembevételével könnyen adódik, hogy**

$$\underset{N\to\infty}{\text{plim}} \frac{1}{NT} y'_{t-1} B_n y_{t-1} = \frac{1}{T^2} E[(\sum_{\tau=0}^{T-1} \beta^\tau y_{i0} + \sum_{\tau=1}^{T-1} \frac{1-\beta^\tau}{1-\beta}\mu_i +$$

$$+ \sum_{j=1}^{T-1}\sum_{\tau=0}^{j-1} \frac{1-\beta^\tau}{1-\beta} v_{iT-\tau-1})^2] .$$

Elvégesve a négysetre emelést és as eddig ismertetett technikai fogások adta egyszerűsítéseket, adódik, hogy

$$\underset{N\to\infty}{\text{plim}} \frac{1}{NT} y'_{t-1} B_n y_{t-1} = \frac{1}{T^2}\frac{1}{(1-\beta)^2}\Bigg[(1-\beta^T)^2 E(y_{i0}^2) +$$

$$+ 2(1-\beta^T)(\frac{T-1-T\beta+\beta^T}{1-\beta})E(y_{i0}\mu_i)+$$

$$+(\frac{T-1-T\beta+\beta^T}{1-\beta})^2\sigma_\mu^2 + [T - 1 - 2\beta\frac{1-\beta^{T-1}}{1-\beta} + \beta^2\frac{1-\beta^{2(T-1)}}{1-\beta^2}]\sigma_v^2\Bigg] .$$

D) As eddigiek figyelembevételével vissonylag egyszerűen adódik, hogy

$$\underset{N\to\infty}{\text{plim}} \frac{1}{NT} y'_{t-1} B_n u = \frac{1}{T}\frac{1-\beta^T}{1-\beta} E(y_{i0}\mu_i) + \frac{T-1-T\beta+\beta^T}{T(1-\beta)^2}\sigma_\mu^2 +$$

$$+ \frac{T-1-T\beta+\beta^T}{T^2(1-\beta)^2}\sigma_v^2 .$$

A fél–assimptotikus határértékekből könnyen adódnak a teljesen assimptotikus határértékek. Ehhez azonban meg kell fontolni a következőket: ha $\beta > 1$ és $T \to \infty$, akkor a torzítás határértéke zérus lesz. Ennek belátása egyszerű: osszuk el a torzító tényezőben mind a számlálót (A és D), mind a nevezőt (B és C) β^T-vel. Ekkor $T \to \infty$ esetén a számláló 0-hoz, míg a nevező $+\infty$-hez tart (a határértékek tulajdonságairól lásd például SZÉP [10] könyvének 2. fejezetét) és így a torzítás határértéke valóban zérus. Ebből az a rendkivül fontos megállapítás következik, hogy $T \to \infty$ esetén (ha $\beta > 1$) az összes λ–típusú esztimátor konzisztens becslést fog nyújtani a dinamikus modell paraméterére.[1] Szimulációs vizsgálatok kimutatták (MÁTYÁS [5]), hogy gyakorlatilag (átlagosan) $T > 9-10$ esetén a KLNM, az ALNM, és az intra esztimátorok numerikusan megegyeznek és torzításuk elhanyagolhatóan kicsi.[2] A teljesen assimptotikus határérték vizsgálatához tehát elegendő a $\beta < 1$ eset figyelembe vétele (a továbbiakban – ha ettől eltérő nem kerül említésre – a fenti okok miatt csupán $\beta < 1$ esetet vizsgáljuk).[3] Az A és D határértékekből, ha $\beta < 1$ és $T \to \infty$ az adódik, hogy

1.
$$\operatorname*{plim}_{N,T\to\infty} \frac{1}{NT} y'_{t-1} u = \frac{1}{1-\beta}\sigma_\mu^2 ;$$

2.
$$\operatorname*{plim}_{N,T\to\infty} \frac{1}{NT} y'_{t-1} y_{t-1} = \frac{1}{(1-\beta)^2}\sigma_\mu^2 + \frac{1}{1+\beta^2}\sigma_v^2 ;$$

3.
$$\operatorname*{plim}_{N,T\to\infty} \frac{1}{NT} y'_{t-1} B_n y_{t-1} = \frac{1}{(1-\beta)^2}\sigma_\mu^2 ;$$

4.
$$\operatorname*{plim}_{N,T\to\infty} \frac{1}{NT} y'_{t-1} B_n u = \frac{1}{1-\beta}\sigma_\mu^2 ;$$

és ebből

$$\operatorname*{plim}_{N,T\to\infty} \frac{1}{NT}\widehat{\beta}_\lambda = \beta + [\frac{1}{(1-\beta)^2}\sigma_\mu^2 + \frac{1}{1-\beta^2}\sigma_v^2 + (\lambda-1)\frac{1}{(1-\beta)^2}\sigma_\mu^2]^{-1}\times$$
$$\times[\frac{1}{1-\beta}\sigma_\mu^2 + (\lambda-1)\frac{1}{1-\beta}\sigma_\mu^2].$$

---

[1] Megjegyzendő, hogy a tényleges gazdasági elemzéseknél a $\beta > 1$ eset csak viszonylag ritkán fordul elő, mivel egy explozív modellt eredményez és a gazdasági folyamatok csak nagyon ritkán rohamosan növekvő jellegűek.

[2] A vizsgálatok szerint, ha $1 < \beta < 2$, akkor $T > 15-13$ esetén, ha $\beta > 2$, akkor $T > 6-7$ esetén állja meg a helyét az a numerikus ekvivalenciára és a torzítás mértékére tett megállapítás.

[3] A $\beta = 1$ határeset gyakorlati jelentősége kicsi, viszont számos elméleti nehézség forrása lehet, így ezt az esetet itt sem vizsgáljuk.

Látható, hogy ha $\lambda = 0$, akkor a $\widehat{\beta}_\lambda$ (az intra) esztimátor aszimptotikusan torzítatlan. Ez annyit jelent, hogy mind az állandó, mind a véletlen hatású modellnél N és $T \to \infty$ esetén az intra esztimátor konzisztens becslést nyújt a keresett paraméterre (ami triviálisnak tűnik, hiszen az állandó hatású modellnél semmi ok sincs a torzításra, a véletlen hatású modellnél pedig az intra esztimátornál alkalmazott merőleges vetítés kiiktatja az egyedhatásokat (MÁTYÁS [4]), melyek a torzítás hordozói). Az ALNM esztimátor $[\widehat{\beta}_\lambda\, , \lambda = \sigma_v^2/(\sigma_v^2 + T\sigma_\mu^2)]$ szintén konzisztens becslést nyújt a (2) modell paraméterére, mivel ha $\lambda = \sigma_v^2/(\sigma_v^2 + T\sigma_\mu^2)$ és $T \to \infty$, akkor $\lambda \to 0$, vagyis ekkor az ALNM esztimátor tart a konzisztens intra esztimátorhoz és így maga is konzisztens. Természetesen a KLNM esztimátor nem konzisztens $(\widehat{\beta}_\lambda\, , \lambda = 1)$, ami a (2) modell magyarázó és látens változói közötti kapcsolatnak a következménye.

3. A λ–típusú esztimátor fél–aszimptotikus határértékének elemzése

Terjünk vissza a fél–aszimptotikus eset vizsgálatához. Láttuk, hogy a fél–aszimptotikus határértékek erősen függnek az $E(y_{i0}^2)$ és $E(y_{i0}\mu_i)$ várható értékétől, vagyis a kezdeti értékekre tett hipotézisektől. Alaposabb szemlélődés után kitűnik az is, hogy a $\widehat{\beta}_\lambda$ esztimátor T véges esetén torzítottak, ha $\lambda = 1$ és $\lambda = \sigma_v^2/(\sigma_v^2+T\sigma_\mu^2)$ vagyis a (2) modell paraméterének KLNM, ALNM és intra esztimátora is torzított. Lényeges továbbá annak megállapítása is, hogy ha $\sigma_\mu^2 = 0$ és az intra esztimátort vizsgáljuk (ami nem más így most, mint a (2) modell állandó hatású változatának paraméter esztimátora), akkor ezen esztimátor is torzított. Ez első nekifutásra nagyon furcsának tűnik, mivel látszólag egy állandó hatású modellnél még, ha T véges is, nincs semmi ok a torzításra.

a) Különböző kezdeti érték feltételek

Az elemzés folytatásához és ahhoz, hogy többet tudjunk mondani a λ–típusú esztimátorok fél–aszimptotikus tulajdonságairól, az y_{i0} kezdeti értékre néhány hipotézist kell tenni. Az irodalomban (ANDERSON–HSIAO [1], SEVESTRE–TROGNON [8]) általában az alábbi négy hipotézis valamelyikével szokás élni:

1. y_{i0} konstans, vagyis nem valószínűségi változó. Ez gyakorlatilag azt jelenti, hogy a fejlődés egy tökéletesen ismert kezdeti pontról indul el pályáján.

2. $y_{i0} = \alpha_i + v_{i0}$, ahol α_i konstans és v_{i0} "valódi" látens változó, amely független μ_i–től. Ez azt jelenti, hogy az egyedhatás a kiinduló pontban nem valószínűségi változó. Ekkor a $t = 0$ időpontban α_i a tényleges egyedhatást fejezi ki, a $t \neq 0$ időpontban pedig a μ_i valószínűségi változó értékei a pillanatnyi eltérést mutatják ezen egyedhatástól. Ennek megfelelően $\alpha_i = E(\mu_i)$, vagy másként $E(\mu_i - \alpha_i) = 0$.

3. $y_{i0} = \widehat{\alpha}_i + v_{i0}$, ahol $\widehat{\alpha}_i$ valószínűségi változó, de független μ_i–től és fennáll az $E(\mu_i) = E(\widehat{\alpha}_i) = 0$ egyenlőség. Például $\widehat{\alpha}_i$ lehet a $t = 0$ időpontban az i dezaggregációnál kisebb dezaggregációból származó becslés.

4. $y_{i0} = k_1\mu_i + k_2 v_{i0}$, ahol k_1 és k_2 a folyamatot meghatározó paraméterek.

A fenti 1., 2. és 3. hipotézisek lényeges megszorításokat feltételeznek az y_{i0} kezdeti értéket illetően, melyek szerint e kezdeti érték eltérően viselkedik, mint az endrogén változó előrehaladott értékei. A gazdasági elemzéseknél ezen hipotézisekkel nem mindig célszerű élni, mivel a valóságtól néha teljesen elrugaszkodottak lehetnek. Előnyük viszont, hogy $E(y_{i0}\mu_i) = 0$ és így az ALNM esztimátor $(\lambda = \sigma_v^2/(\sigma_v^2+T\sigma_\mu^2))$ még a fél–aszimptotikus esetben is konzisztens lesz.

A 4. hipotézis értelmezéséhez tegyünk egy kis kitérőt. Tegyük fel, hogy y_{it} stacioner sztochasztikus folyamat, amely az „idők kezdete" óta tart és az idők végtelenségéig fog tartani. (vagyis $T \to \infty$). Ekkor

$$y_{i0} = \frac{\mu_i}{1-\beta} + \sum_{\tau=0}^{\infty} \beta^\tau v_{i,-\tau}$$

és ebből

$$E(y_{i0}^2) = \frac{\sigma_\mu^2}{(1-\beta)^2} + \frac{\sigma_v^2}{1-\beta^2}$$

$$E(y_{i0}\mu_i) = \frac{\sigma_\mu^2}{1-\beta}.$$

Visszatérve a 4. hipotézishez, ha itt $k_1 = \frac{1}{1-\beta}$ és $k_2 = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)}}$, akkor éppen a fenti stacioner sztochasztikus folyamatot modelleztük! Visszahelyettesítve ezen várható értékeket a $\widehat{\beta}_\lambda$ esztimátor fél–aszimptotikus határértékeibe, megkaphatjuk a λ–típusú esztimátorok torzítását, ha y_{it} stacioner sztochasztikus folyamat és T véges.

A)

$$\operatorname*{plim}_{N\to\infty} \frac{1}{NT} y_{t-1}' u = \frac{\sigma_\mu^2}{1-\beta}$$

B)

$$\operatorname*{plim}_{N\to\infty} \frac{1}{NT} y_{t-1}' y_{t-1} = \frac{\sigma_\mu^2}{(1-\beta)^2} + \frac{\sigma_v^2}{1-\beta^2}$$

C)

$$\operatorname*{plim}_{N\to\infty} \frac{1}{NT} y_{t-1}' B_n y_{t-1} = \frac{\sigma_\mu^2}{(1-\beta)^2} + \frac{\sigma_v^2}{T(1-\beta)^2} - \frac{2\beta(1-\beta^T)}{T^2(1-\beta)^2(1-\beta^2)}\sigma_v^2$$

D)

$$\operatorname*{plim}_{N\to\infty} \frac{1}{NT} y_{t-1}' B_n u = \frac{\sigma_\mu^2}{1-\beta} + \frac{\sigma_v^2}{T(1-\beta)} - \frac{\sigma_v^2(1-\beta^T)}{T^2(1-\beta)^2}$$

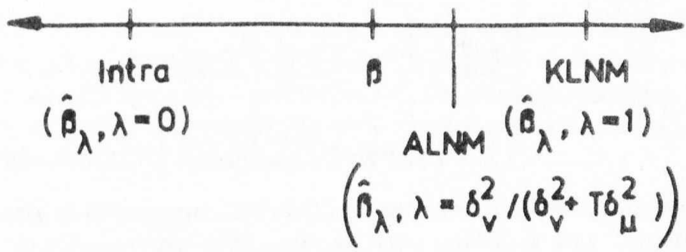
Ebből

$$\operatorname*{plim}_{N\to\infty} \frac{1}{NT}\widehat{\beta}_\lambda = \beta + [(\frac{\sigma_\mu^2}{(1-\beta)^2} + \frac{\sigma_v^2}{1-\beta^2})+$$

$$+(\lambda-1)(\frac{\sigma_\mu^2}{(1-\beta)^2} + \frac{\sigma_v^2}{T(1-\beta)^2} - \frac{2\beta(1-\beta^T)}{T^2(1-\beta)^2(1-\beta^2)}\sigma_v^2)]^{-1}\times \quad (3)$$

$$\times[\frac{\sigma_\mu^2}{1-\beta} + (\lambda-1)(\frac{\sigma_\mu^2}{1-\beta} + \sigma_v^2 T(1-\beta) - \frac{\sigma_v^2(1-\beta^T)}{T^2(1-\beta)^2})].$$

A fenti képlet segítségével számos „feladat-orientált" konzisztens becslést tudunk előállítani, ha T véges; (lásd például CHOWDHARY [3]), de mivel ezek egyedi megoldások, itt nem fogunk rájuk kitérni. Megvizsgálva a főbb esztimátorok által nyújtott paraméterbecsléseket, megnézhetjük, hogy ezek értéke hol helyezkedik el az elméleti paraméterhez képest. (1. ábra.)



1. ábra.

b) Az intra esztimátor torzításának oka az állandó hatású modellnél

Az 1. fejezetben láttuk, hogy az intra esztimátor ($\widehat{\beta}_\lambda$, $\lambda = 0$) a következő:

$$\widehat{\beta}_{intra} = (X'W_nX)^{-1}(X'W_ny),$$

illetve dinamikus esetben a (2) modellre alkalmazva:

$$\widehat{\beta}_{intra} = (y'_{t-1}W_ny_{t-1})^{-1}(y'_{t-1}W_ny).$$

Egyszerűen belátható (MÁTYÁS [4]), hogy ugyanezt az esztimátort nyerjük, ha a (2) modellt balról W_n -nel beszorozva transzformáljuk és erre a KLNM-et alkalmazzuk. A transzformált (2) modell a következő:

$$W_ny_t = \beta W_ny_{t-1} + W_nu. \quad (4)$$

Mivel $W_n = I_{NT} - (I_N \otimes \frac{J_T}{T})$, az $(I_N \otimes \frac{J_T}{T})u$ tényező felírható a következőkeppen (most $u = v$):

$$(I_N \otimes \frac{J_T}{T})u = \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^{T} v_{1t} \\ \vdots \\ \sum_{t=1}^{T} v_{1t} \\ \vdots \\ \sum_{t=1}^{T} v_{NT} \\ \vdots \\ \sum_{t=1}^{T} v_{NT} \end{pmatrix} \quad \text{(a vektor mérete :}(NT \times 1)) .$$

Figyelembe véve az y_{it-1} változó redukálását a 2. fejezetben áttekintett végső formára (és hogy most $u = v$):

$$(I_N \otimes \frac{J_T}{T})y_{t-1} = \begin{pmatrix} \sum_{\tau=0}^{T-1} \beta^\tau y_{10} + \sum_{j=1}^{T-1} \sum_{\tau=0}^{j-1} \frac{1-\beta^\tau}{1-\beta} v_{1T-\tau-1} \\ \vdots \\ \sum_{\tau=0}^{T-1} \beta^\tau y_{10} + \sum_{j=1}^{T-1} \sum_{\tau=0}^{j-1} \frac{1-\beta^\tau}{1-\beta} v_{1T-\tau-1} \\ \vdots \\ \sum_{\tau=0}^{T-1} \beta^\tau y_{N0} + \sum_{j=1}^{T-1} \sum_{\tau=0}^{j-1} \frac{1-\beta^\tau}{1-\beta} v_{N,T-\tau-1} \\ \vdots \\ \sum_{\tau=0}^{T-1} \beta^\tau y_{N0} + \sum_{j=1}^{T-1} \sum_{\tau=0}^{j-1} \frac{1-\beta^\tau}{1-\beta} v_{N,T-\tau-1} \end{pmatrix} .$$

Látható tehát, hogy véges T esetében az (5) modell magyarázó és látens változói nem függetlenek, ami a fellépő torzítás oka. Ha azonban $T \to \infty$, akkor $\sum_{t=1}^{T} v_{it} \to 0$ és így a torzítás sérussá válik.

c) Konzisztens λ–típusú esztimátor véges T esetén

A fél–asszimptotikus határértékek tanulmányozásából kitűnik, hogy lennie kell olyan kitüntetett λ–nak (a továbbiakban λ^*), melynek értékére véges T esetében a torzítás sérus less. A torzító tényező számlálóját tegyük egyenlővé nullával:

$$\lambda[\frac{1}{T}\frac{1-\beta^T}{1-\beta}E(y_{i0}\mu_i) + A(\sigma_\mu^2 + \frac{1}{T}\sigma_v^2)] - \frac{A}{T}\sigma_v^2 = 0 ,$$

ahol

$$A = \frac{1}{T}\frac{T-1-T\beta-\beta^T}{(1-\beta)^2} .$$

Ebből könnyen adódik a λ^*-ra

$$\lambda^* = \frac{\frac{A}{T}\sigma_v^2}{\frac{1}{T}\frac{1-\beta^T}{1-\beta}E(y_{i0}\mu_i) + A(\sigma_\mu^2 + \frac{1}{T}\sigma_v^2)} ,$$

illetve a (3) képletből, ha stacioner idősorral van dolgunk,

$$\lambda^* = \frac{\frac{A}{T}\sigma_v^2}{\frac{\sigma_\mu^2}{1-\beta} + \frac{A}{T^2}\sigma_v^2} .$$

Vegyük éssre, hogy ha $T \to \infty$, akkor $\lambda^* = 0$ és így a $\widehat{\beta}_{\lambda^*}$ esstimátor as intra esstimátorra redukálódik, valamint, ha $E(y_{i0}\mu_i) = 0$, akkor $\lambda^* = \sigma_v^2/(T\sigma_\mu^2 + \sigma_v^2)$ és így a $\widehat{\beta}_{\lambda^*}$ as ALNM esstimátorra redukálódik. A $\widehat{\beta}_{\lambda^*}$ esstimátor függ as ismeretlen paraméterektől, a gyakorlatban tehát csak úgy hassnálható, ha első lépésben előállítjuk as ismeretlen paraméterek valamilyen konsisstens becslését, majd ennek felhassnálásával újrabecsüljük β-t a $\widehat{\beta}_{\lambda^*}$ esstimátor segítségével. Ssimulációs vissgálatok kimutatták (MÁTYÁS [5]), hogy a $\widehat{\beta}_{\lambda^*}$ esstimátor nem nyújt jobb becslést as ismeretlen paraméterekre, mint a másik kétlépcsős esstimátor, a becsült kovariancia mátrixot felhassnáló ALNM esstimátor. E jelenség okának a felderítése még további kutatásokat igényel.

4. As exogén váltosókat is magában foglaló dinamikus modell

As eddigiek során a (2) egysserűsített modell vissgálata során jutottunk el ssámos fontos követkestetésig. Most belátjuk, hogy főbb eredményeink érvényben maradnak as exogén magyarásó váltosókat magában foglaló modellben is. Írjuk fel újra as (1b) modell it-edik elemét, ha a magyarásó váltosók kösött $k-1$ darab exogén és egy késleltetett endogén váltosó sserepel:

$$y_{it} = \beta_1 y_{it-1} + \sum_{k=2}^{K} \beta_k X_{kit} + \mu_i + v_{it} =$$

$$= \beta_1^t y_{i0} + \sum_{k=2}^{K} \beta_k \sum_{\tau=0}^{t-1} \beta_1^\tau X_{kit-\tau} + \mu_i \frac{1-\beta_1^t}{1-\beta_1} + \sum_{\tau=0}^{t-1} \beta_1^{t-1}\beta_1^\tau v_{it-\tau} .$$

Ha most as össsekeverés elkerülésére a (2) egysserűsített modellt $*$-gal jelöljük, vagyis

$$y_{it}^* = \beta_1^t y_{i0} + \mu_i \frac{1-\beta_1^t}{1-\beta_1} + \sum_{\tau=0}^{t-1} \beta_1^\tau v_{it-\tau}$$

(ahol β_1 a késleltetett endogén váltosó paramétere és as 1-es index a többi magyarásó váltosó paraméterétől való megkülönböstetésére ssolgál), akkor

$$y_{it}^* = \beta_1^t y_{it-1}^* + \mu_i + v_{it} ,$$

ahol $y_{i0}^* = y_{i0}$. As elemső modell tehát mátrix formában felírva a követkeső:

$$y_t = \beta_1 y_{t-1} + X\beta + u , \tag{5}$$

ahol $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_K)$. Belátható (MÁTYÁS [4], [5]), hogy az (5) modell paramétereinek λ–típusú esztimátora úgy állítható elő, hogy a modellt balról beszorozva a $(W_n + \sqrt{\lambda}B_n)$ transzformációs operátorral transzformáljuk és erre a transzformált modellre alkalmazzuk a KLNM-et (a W_n és B_n operátorokat már definiáltuk az 1. fejezetben). A mátrixok particiónkénti inverzének felhasználásával adódik, hogy

$$\widehat{\beta}_{1\lambda} = [\widetilde{y}'_{t-1}\widetilde{M}\widetilde{y}_{t-1}]^{-1}[\widetilde{y}'_{t-1}\widetilde{M}\widetilde{y}_t] = \widehat{\beta}_1 + [\widetilde{y}'_{t-1}\widetilde{M}\widetilde{y}_{t-1}]^{-1}\widetilde{y}'_{t-1}\widetilde{M}\widetilde{u}$$

és

$$\begin{aligned}\widehat{\beta}_\lambda &= (\widetilde{X}'\widetilde{X})^{-1}\widetilde{X}'(\widetilde{y}_t - \widehat{\beta}_{1\lambda}\widetilde{y}_{t-1}) = \\ &= \beta - (\widehat{\beta}_{1\lambda} - \beta_1)(\widetilde{X}'\widetilde{X})^{-1}\widetilde{X}'\widetilde{y}_{t-1} + (\widetilde{X}'\widetilde{X})^{-1}\widetilde{X}\widetilde{u},\end{aligned}$$

ahol a $\widetilde{y}_t$, $\widetilde{y}_{t-1}$, $\widetilde{u}$, $\widetilde{X}$ vektorok, illetve mátrix jelölik a $(W_n + \sqrt{\lambda}B_n]$ operátorral transzformált y_t, y_{t-1}, u, X vektorokat, illetve mátrixot és $\widetilde{M} = I_{NT} - \widetilde{X}(\widetilde{X}'\widetilde{X})^{-1}\widetilde{X}'$.

Tegyük fel, hogy az X mátrix változói tisztán exogén jellegűek, ebből következik, hogy $\operatorname{plim}_{N\to\infty} \widetilde{X}'\widetilde{u}/N = 0$ ami maga után vonja, hogy

$$\operatorname*{plim}_{N\to\infty} \widetilde{y}'\widetilde{M}\widetilde{u}/N = \operatorname*{plim}_{N\to\infty} \widetilde{y}'_{t-1}\widetilde{u}/N .$$

Foglaljuk egybe az y^*_{it-1} $(t = 1, \ldots, T;\ i = 1, \ldots, N)$ változókat az y^*_{t-1} vektorba, és jelöljük $\widetilde{y}^*_{t-1}$-gyel a $[W_n + \sqrt{\lambda}B_n]$ operátorral történt transzformálás után. Az X változóinak exogenitásából következik az is, hogy

$$\operatorname*{plim}_{N\to\infty} \widetilde{y}^*_{t-1}\widetilde{u}/N = \operatorname*{plim}_{N\to\infty} \widetilde{y}^{*\prime}_{t-1}\widetilde{u}/N .$$

Összegezve tehát adódik az eredmény

$$\operatorname*{plim}_{N\to\infty}(\widehat{\beta}_{1\lambda} - \beta_1) = \operatorname*{plim}_{N\to\infty}\left[\frac{\widetilde{y}^{*\prime}_{t-1}\widetilde{y}^*_{t-1}}{\widetilde{y}'_{t-1}\widetilde{M}\widetilde{y}_{t-1}}\right] \times \operatorname*{plim}_{N\to\infty}(\beta^*_{1\lambda} - \beta_1)$$

és

$$\operatorname*{plim}_{N\to\infty}(\widehat{\beta}_\lambda - \beta) = \operatorname*{plim}_{N\to\infty}(\widehat{\beta}_{1\lambda} - \beta) \times \operatorname*{plim}_{N\to\infty}(\widetilde{X}'\widetilde{X})^{-1}\widetilde{X}'\widetilde{y}_{t-1},$$

ahol $\beta^*_{1\lambda}$ a (2) egyszerűsített modell paraméterének λ–típusú esztimátora. Beláttuk így, hogy az exogén változókat tartalmazó dinamikus véletlen hatású modellben az (1b) a paraméterek λ–típusú esztimátorainak torzítása arányos az egyszerűsített (2) modellbeliekkel és amikor a fél–aszimptotikus torzítás zérus az egyszerűsített modellben, akkor zérus az exogén változókat tartalmazó modellben is. Hasonló módon, hasonló eredményre jutunk természetesen, ha N és T is tart a végtelenbe.

A fentiekből következik, hogy ha az egyszerűsített modellben valamilyen λ–típusú esztimátort aszimptotikusan, illetve fél–aszimptotikusan torzítatlannak találtuk, akkor ezen esztimátor aszimptotikusan, illetve fél–aszimptotikusan torzítatlan lesz az exogén változókat tartalmazó modellben is. Degenerált esetektől eltekintve (mikor $(X'X)^{-1}X'y_{t-1} = 0$) az állítás komplementere is igaz, vagyis amikor az egyszerűsített modell paraméterének λ–típusú esztimátora aszimptotikusan, vagy fél–aszimptotikusan torzított, akkor az exogén változókat tartalmazó modell paramétereinek λ–típusú esztimátora is aszimptotikusan vagy fél–aszimptotikusan torzított lesz.

Általánosságban az is elmondható, hogy mivel többnyire

$$\tilde{y}^{*'}_{t-1}\tilde{y}^{*'}_{t-1} < \tilde{y}^{*}_{t-1}\widetilde{M}\tilde{y}_{t-1},$$

az exogén változók szerepeltetése csökkenti a paraméterbecslések torzításának mértékét.

Gyakorlati jelentősége kicsi, a teljesség kedvéért azonban mindenképpen szükséges néhány szó erejéig érinteni azt az esetet, amikor N fix és $T \to \infty$. Ekkor az aszimptotikus határérték számításánál nem támaszkodhatunk a nagy számok törvényére, viszont felhasználhatjuk az autoregresszív modellek aszimptotikus tulajdonságaira vonatkozó ismereteinket. Ezek segítségével belátható (TROGNON [11]), hogy a $\beta^{*}_{1\lambda}$ esztimátor csak akkor konzisztens, ha $\lambda = 0$ vagy $\lambda = \sigma_v^2/(\sigma_v^2 + T\sigma_\mu^2)$, vagyis mind az egyszerűsített, mind az exogén változókat tartalmazó modellben a főbb λ–típusú esztimátorok közül csupán az ALNM és az intra eredményez N fix és $T \to \infty$ esetén aszimptotikusan torzítatlan becslést.

Az írás végére néhány rövid gyakorlati észrevétel kívánkozik. Először is mi tekinthető nagy, illetve kis N-nek és T-nek? Nagy N-nek egyértelműen vélhető az az eset, amikor $N > 25$. T–vel már nem ilyen egyszerű a helyzet. Ha $\beta_1 < 1$ és N nagy, akkor $T > 10 - 15$ már nagynak tekinthető, ellenben, ha N kicsi, akkor $T > 20 - 25$ tekinthető nagynak. $\beta_1 > 1$-nél N-től függetlenül már $T > 6 - 7$ nagynak tekinthető.

Felmerülhet továbbá a kérdés, hogy mi a teendő, ha több konzisztens esztimátor közül áll módunkban választani. Ekkor célszerű (ha lehetséges) az ALNM-et választani, mivel ez általában hatásos.

Végül egy elméletileg alá nem támasztott gyakorlati tapasztalat: ha lehetőség adódik az instrumentális változók alkalmazására, használatukat célszerű jól megfontolni, mivel ritkán fizetik vissza bonyolultságuk árát.

(Beérkezett: 1987. április 3-án.)

Irodalom

1. ANDERSON, T.W.–HSIAO, C.: Formation and Estimation of Dynamic Models Using Panel Data. *Journal of Econometrics*, 1982. No. 1.
2. ANDERSON, T.W.–HSIAO, C.: Estimation of Dynamic Model with Error Components. *JASA*, 1981. No. 375.
3. CHOWDHURY, G.: A Note on Correcting Biases in Dynamic Panel Models. *Applied Economics*, 1987. No. 1.
4. MÁTYÁS L.: A panelmodellek becslése. *Szigma*, 1986, 4.
5. MÁTYÁS L.: Idősorok és keresztmetszeti adatok együttes felhasználása az ökonometriai vizsgálatokban. *Kandidátusi értekezés*. Budapest, 1986.
6. NICKELL, S.: Biases in Dynamic Models with Fixed Effects. *Econometrica*, 1981. No. 6.
7. SEVESTRE, P.: Modeles Dynamiques a Erreurs Composées. (Thése pour le doctorat de 3 cycle), Université de Paris I Panthéon Sorbonne, Paris, 1983.
8. SEVESTRE, P.–TROGNON, A.: A Note on Autoregressive Error Components Models. *Journal of Econometrics*, 1985. No. 2.
9. SEVESTRE, P.–TROGNON, A.: Proprietés de Grands Echantillons d'une Classe d'estimateurs des Modeles Autoregressifs á Erreurs Composées. *Annals de l'INSEE*, 1983. No. 50.
10. SZÉP J.: *Analizis*. KJK. Budapest. 1972.
11. TROGNON, A.: Econometrie. *INSEE-ENSAE*. Malakoff 1984.
12. TROGNON, A.: Valeurs Assymptotiques de l'estimateur des Moindres Carrés Ordinaires dans les Modeles Autoregressifs á Erreurs Composées. *INSEE*. Unité de Recherche. 1976. No. 112–930.

Estimation of Dynamic Panel Models

Panel models are the most widespread instruments for using time series and cross-section data. Unfortunately, in a dynamic case the traditional parameter estimates do not posses the usual good properties. The purpose of this writing is to show what properties particular estimators possess in this case, with special regard to the small sample properties. Using the results of Monte–Carlo analyses guidelines are given for practice, i.e. what kind of models and estimators are worth while and expedient to use in a particular case.