Szigma, XX. (1987–88) 2–3. sz.

FOGALMAK ÉS MÓDSZEREK

KLAFSZKY EMIL– TERLAKY TAMÁS

Az ellipszoid módszerről

Dolgosatunkban as ellipssoid módsser egy rövid, újsserű tárgyalását adjuk. Célunk a módsser fő lépéseinek egyszerű, lehetőleg elemi bisonyítása, as ellipssoid módsser önmagában teljes, minden részletét összefoglaló tárgyalása. A feladat méretének mérésére egy a ssokásostól eltérő konstanst vezetünk be. Nem célunk as elméleti korlátok javítása, vagy a legélesebb elméleti korlátot adó változat köslése.

Cikkünk négy réssből tevődik össse. Elssör egész vektorok által adott poliéderek térfogatára adunk külső és belső korlátot, majd as ellipssoidok, illetve egy adott fél ellipssoidot tartalmazó minimális térfogatú ellipssoidok tulajdonságait vissgáljuk. A harmadik résxben ismertetjük as ellipssoid módssert és bisonyítjuk, hogy as polinomiális lépésssámban eldönti, hogy egy egyenlőtlenségrendsser megoldható-e vagy sem. Végül megmutatjuk, hogy ha van ilyen algoritmus, akkor ennek felhassnálásával polinomiális lépésssámban meg is találhatunk as egyenlőtlenségrendsser megoldásai kösül egyet.

Immár évtizedek óta jól ismert, hogy gyakorlati feladatokon mutatott hatékonysága ellenére a ssimplex módsser nem polinomiális algoritmus. Erre elősször KLEE és MINTY [5] adott ssép példát. Klee és Minty példájának módosításával megmutatható, hogy a ssimplex módsser tetssőleges, ismert változata nem polinomiális.

Elősször KHACSIJÁN ssovjet matematikus adott polinomiális eljárást lineáris programozási feladatok megoldására 1979-ben. As algoritmus *ellipszoid módszer* néven vált ismertté, mivel ellipssoidok térfogatcsökkentésén alapul. Elméleti hatékonysága ellenére hamar kiderült, hogy as ellipssoid módsser (jelenlegi formájában) a gyakorlatban hassnálhatatlan.

As algoritmusok területén a következő lépés KARMARKAR projekciós módssere, amely as ellipssoid algoritmusnál jobb elméleti korlátot ad, de gyakorlati alkalmazhatósága, hatékonysága pillanatnyilag még erősen vitatott. Asas Karmarkar módssere sem hosta meg as áttörést olyan értelemben, hogy elméletileg és gyakorlatilag is egyaránt hatékony módssert nyerjünk.

Dolgozatunkban GÁCS–LOVÁSZ [2], KHACSIJÁN [4] cikkeire valamint SCHRIJVER [7] könyvére támasskodva ismertetjük as ellipssoid módsser lényegét.

A továbbiakban a mátrixokat latin nagy betűkkel, a vektorokat kis betűkkel, míg a skalárokat görög betűkkel jelöljük. Egy $A: m \times n$ mátrix sorvektorait $a^{(1)}, \ldots, a^{(m)}$, osslopvektorait $a_1, \ldots, a_n$, míg együtthatóit α_{ij} jelöli.

Mielőtt rátérnénk as ellipssoid módsser elemeinek tárgyalására, ismertetünk néhány, a továbbiakban felhassnált tételt, illetve meghatárossuk, hogy mit is értünk polinomiális algoritmuson.

Polinomiális algoritmus [7]: Egy algoritmust egy adott feladat megoldására vonatkosóan polinomiális algoritmusnak nevesünk, ha van olyan α konstans és r ssám, hogy a feladat megoldásához ssükséges műveletek ssáma a legrosssabb esetben is legfeljebb αs^r, ahol s a feladat méretét jelöli (esetünkben s a változók ssáma – dimenzió).

A *Caratheodory* tételt nem fogalmassuk meg precízen, csak megjegyessük, hogy esetünkben es ast garantálja, hogy ha egy lineáris egyenlőtlenségrendssernek van megoldása, akkor bázismegoldása is van. (lásd. [6,7])

Hadamar egyenlőtlenség [7]: Legyen $B = (b_1, \ldots, b_n)$ egy $m \times n$-es mátrix. Ekkor

$$\sqrt{\det(B^* B)} \leq \| b_1 \| \times \ldots \times \| b_n \| ,$$

és ha $m = n$ (B négyzetes), akkor

$$\det(B) \leq \| b_1 \| \times \ldots \times \| b_n \| .$$

Cauchy–Schwarz egyenlőtlenség [7]: Legyen $c, d \in R^n$, akkor $c^* d \leq \| c \| \cdot \| d \|$ egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha c és d párhuzamosak.

Végül megjegyessük, hogy lineáris programozási feladatok megoldása ekvivalens lineáris egyenlőtlenségrendsserek megoldásával, így elég esek megoldására ssorítkosnunk. Ugyanis mint as jól ismert, a $\min\{c^* x \mid Ax = b,\ x \geq 0\}$ és a $\max\{y^* b \mid A^* y \leq c\}$ primál–duál feladatpár megoldása ekvivalens as $\{Ax = b,\ x \geq 0,\ A^* y \leq c,\ c^* x - y^* b \leq 0\}$ lineáris egyenlőtlenségrendsser megoldásával [1,2,6].

1. Külső és belső korlátok

Ebben a fejesetben egéss együtthatókkal adott poliéderekre, és így asok térfogatára adunk külső (felső) és belső (alsó) korlátot. As együtthatók egéss értékűsége nyilván ekvivalens assal, hogy racionalitást tételesünk fel (a legkisebb kösös nevesővel ssoroshatunk).

Legyen as A: $m \times n$ mátrix és a $c \in R^n$ vektor egéss értékű (asas α_{ij} és γ_j egéss $i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n$), ($m > 1$). As általánosság megsértése nélkül feltehető, hogy $\operatorname{rang}(A) = m$.

1.1. definíció: A paraméterek *terjedelmének* a

$$\sigma = | a^{(1)} | \cdot \ldots \cdot | a^{(i)} | \cdot \ldots \cdot | a^{(m)} | \cdot | c | . \tag{1.1}$$

számot nevezzük, ahol $| a^{(i)} |$ az $a^{(i)}$ vektor Euklideszi normáját jelöli. □

Tekintsük az

$$A^* y \leq c \qquad \begin{aligned} Ax &= \Theta \\ c^* x &= -1 \\ x &\geq \Theta \end{aligned}$$

alternatív feladatpárt, ahol $\Theta = (0, \ldots, 0)$. Jól ismert, hogy ezen feladatok közül pontosan az egyiknek van megoldása. A következő lemmában bizonyítjuk, hogy amennyiben valamelyik feladat megoldható, akkor a σ sugarú gömbben is van megoldása.

1.1. lemma:

1° Ha $A^* y \leq c$ megoldható, akkor $A^* y \leq c$; $| \eta_i | \leq \sigma$, $\forall i$ is megoldható. (Minden bázismegoldás ilyen.)

2° Ha $Ax = \Theta$, $c^* x = -1$, $x \geq \Theta$ megoldható, akkor $Ax = \Theta$, $c^* x = -1$, $x \geq \Theta$, $| \xi_j | \leq \sigma$, $\forall_j$ is megoldható. (Minden bázismegoldás kielégíti az utóbbit.)

Bizonyítás: 1° Carathéodory tétele szerint, ha van megoldás, akkor van olyan B bázis és y bázismegoldás is, melyre $B^* y = c_B$, $N^* y \leq c_N$ (itt $A = (B, N)$ és $c = (c_B, c_N)$ jelöléseket használtuk). Jelölje $b^{(i)}$ a B mátrix i-edik sorát. A Cramer szabály szerint

$$\eta_i = \frac{\det(B \setminus b^{(i)}, c_B)}{\det(B)} .$$

A számlálót a Hadamard egyenlőtlenséggel becsüljük felülről, a nevezőt pedig a Leibnitz kifejtéssel alulról, így:

$$| \eta_i | \leq \frac{| b^{(1)} | \ldots | b^{(m)} | | c_B |}{1}$$

(Itt kihasználtuk, hogy A egész értékű mátrix.)
A jobboldalt tovább becsülhetjük felülről triviális módon σ-val, így állításunknak megfelelően $| \eta_i | \leq \sigma$ adódik.

2° Ha van megoldása a feladatnak, akkor a Caratheodory tétel szerint valamely $\bar{B}$ bázisra van $\bar{x}_B$ bázismegoldása is az egyenletrendszernek, azaz $\bar{B} = \binom{B}{c_B} (m+1) \times (m+1)$ méretű mátrix, $\bar{x}_B \in R_+^{m+1}$ melyekre $\bar{B} \bar{x}_B = \binom{\Theta}{1}$ és $\bar{x}_B \geq \Theta$. Ekkor a Cramer szabály szerint

$$\xi_j = \frac{\det\left(\bar{B} \setminus \bar{a}_j, \binom{\Theta}{1}\right)}{\det(\bar{B})} .$$

Hasonlóan az 1° részben elmondottakhoz a számlálót a Hadamard egyenlőtlenséggel becsüljük felülről, a nevezőt pedig a Leibnitz kifejtéssel alulról, így (A egész):

$$|\xi_j| \leq \frac{|b_1|\dots|b_{m+1}|\cdot 1}{1},$$

aminek triviális felső becslése σ. $\square$

A lemma alapján, a Farkas tétel felhasználásával bizonyítható az alábbi fontos tétel.

1.1. tétel: Ha $A^*y \leq c$ nem megoldható, akkor $A^*y \leq c + \frac{1}{m\cdot n\cdot\sigma}\mathbb{1}$ sem megoldható. ($\mathbb{1} = (1,\dots,1)$)

Bizonyítás: Ha $A^*y \leq c$ nem megoldható, akkor a Farkas tétel szerint

$$\begin{aligned} Ax &= \Theta \\ c^*x &= -1 \\ x &\geq \Theta \end{aligned}$$

megoldható, ami 2° szerint azt jelenti, hogy

$$\begin{aligned} Ax &= \Theta \\ c^*x &= -1 \\ x &\geq \Theta \\ \xi_j &\leq \sigma \qquad \forall_j \end{aligned}$$

is megoldható. Ez átalakítható az alábbi alakba:

$$\begin{aligned} Ex + Eu &= \sigma\mathbb{1} \\ Ax \quad &= \Theta \\ c^*x \quad &= -1 \end{aligned}$$

$$x \geq 0, \quad u \geq \Theta,$$

ahol E az egységmátrix.
Ez a feladat ismét megoldható, de ekkor a Farkas tétel szerint a

$$\begin{aligned} Ez + A^*y + \vartheta c &\leq \Theta \\ Ez \qquad\qquad &\leq \Theta \\ z^*\sigma\mathbb{1} - \vartheta &> \Theta \end{aligned}$$

feladat nem megoldható. Ekkor speciálisan a $\vartheta = -1$ és $z = -\frac{1}{m\cdot n\cdot\sigma}\mathbb{1}$ választással sem megoldható, azaz az

$$A^*y \leq c + \frac{1}{m\cdot n\cdot\sigma}\mathbb{1}$$

nem megoldható, mivel a másik két feltétel a $-\frac{1}{m\cdot n\cdot\sigma}\mathbf{1} \le 0$ és a $-\sigma\frac{1}{m\cdot\sigma}+1>0$ triviálisan teljesülő feltételbe megy át. □

1. *következmény*: Az $A^*y \le c$ egyenlőtlenségrendszer akkor és csak akkor megoldható, ha az

$$A^*y \le c + \frac{1}{m\cdot n\cdot\sigma}\mathbf{1}$$
$$|\eta_i| \le \sigma + \frac{1}{m^2\cdot n\cdot\sigma^2} \qquad \forall i$$

egyenlőtlenség rendszer megoldható.

Bizonyítás: A lemma 1° állítás szerint ha $A^*y \le c$ megoldható, akkor az $A^*y \le c$ $|\eta_i| \le \sigma$ $\forall i$ rendszer is megoldható. Ekkor nyilván az $A^*y \le c+\frac{1}{m\cdot n\cdot\sigma}\mathbf{1}$, $|\eta_i| \le \sigma+\frac{1}{m^2\cdot n\cdot\sigma^2}$, $\forall i$ egyenlőtlenségrendszer is megoldható.

Fordítva, ha $A^*y \le c$ nem megoldható, akkor a tétel szerint $A^*y \le c+\frac{1}{m\cdot n\cdot\sigma}\mathbf{1}$ sem megoldható. Ekkor nyilván az $|\eta_i| \le \sigma+\frac{1}{m^2\cdot n\cdot\sigma^2}$, $\forall i$ feltételek mellett sem megoldható. □

2. *következmény*: Ha az

$$A^*y \le c + \frac{1}{m\cdot n\cdot\sigma}\mathbf{1}$$
$$|\eta_i| \le \sigma + \frac{1}{m^2\cdot n\cdot\sigma^2} \qquad \forall i$$

egyenlőtlenségrendszer megoldható, akkor megoldáshalmaza tartalmaz $\frac{1}{m^2\cdot n\cdot\sigma^2}$ élű kockát is.

Bizonyítás: Az 1. következmény szerint legyen $\bar{y}$ az $A^*\bar{y} \le c$ egyenlőtlenségrendszer egy megoldása.
Legyen továbbá $y := \bar{y}+\frac{1}{m^2\cdot n\cdot\sigma^2}\mathbf{1}$. Ekkor

$$A^*y = A^*\bar{y} + \frac{1}{m^2\cdot n\cdot\sigma^2}\cdot A^*\mathbf{1} \le c + \frac{1}{m^2\cdot n\cdot\sigma^2}\cdot A^*\mathbf{1}$$

De $\mathbf{1}^*\cdot A = a^{(1)}+\ldots+a^{(m)}$ és az egész vektorokra nyilvánvalóan teljesülő $x \le \mathbf{1}\cdot|x|$ becslés miatt

$$\mathbf{1}^*\cdot A \le \mathbf{1}^*\cdot|a^{(1)}+\ldots+a^{(m)}| \le \mathbf{1}^*\sum_{i=1}^{m}|a^{(i)}| \le$$
$$\le \mathbf{1}^*\sum_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{m}|a^{(j)}| \le \mathbf{1}^*\cdot m\cdot\sigma\,.$$

Így

$$A^*y \le c + \frac{1}{m^2\cdot n\cdot\sigma^2}A^*\mathbf{1} \le c + \frac{1}{m\cdot n\cdot\sigma}\mathbf{1}$$

ami igazolja állításunkat. □

Ebben a fejezetben egy tetszőleges poliéderhez adtunk egy, megoldhatóság szempontjából vele ekvivalens olyan poliédert, amelynek térfogata már garantáltan pozitív.

2. Ellipszoidok

Ebben a fejezetben egy speciális ellipszoid transzfromációval foglalkozunk. Megmutatjuk, hogy a transzformáció eredményeként kapott ellipszoid tartalmazza az eredeti ellipszoid alkalmas fél–ellipszoid részét, valamint, hogy térfogata kisebb.

Az alábbiakban, az elliposszoidok tulajdonságának vizsgálatakor nem használjuk ki az adatok egész értékűségét.

2.1. definíció: Legyen $z \in R^m$ és P pozitív mátrix. Az R^m m dimenziós Euklideszi tér

$$E = ell(z, P) := \{x \mid (x-z)^* P^{-1}(x-z) \leq 1\}$$

halmazát ellipszoidnak nevezzük. □

A z vektort az ellipszoid *centrumának* nevezzük. Ismert, hogy a z ponton átmenő a normálvektorú *féltér* az

$$a^*(x-z) \leq 0$$

egyenlőtlenséggel adható meg.

Legyen $E' = ell(z', P')$ az alábbi módon adott:

$$z' := z - \frac{1}{m+1} \cdot \frac{Pa}{\sqrt{a^* Pa}},$$

$$P' := \frac{m^2}{m^2-1}\left(P - \frac{2}{m+1} \cdot \frac{Pa\,a^*P}{a^*Pa}\right).$$

Az alábbiakban belátjuk, hogy az $ell(z', P')$ halmaz valóban ellipszoid, és tartalmazza az $ell(z, P) \cap \{x \mid a^*(x-z) \geq 0\}$ fél–ellipszoidot.

2.1. lemma: P' pozitív definit.

Bizonyítás: Azt kell megmutatni, hogy tetszőleges $x \in R^n$ $(x \neq 0)$ vektorra $x^*P'x > 0$, azaz

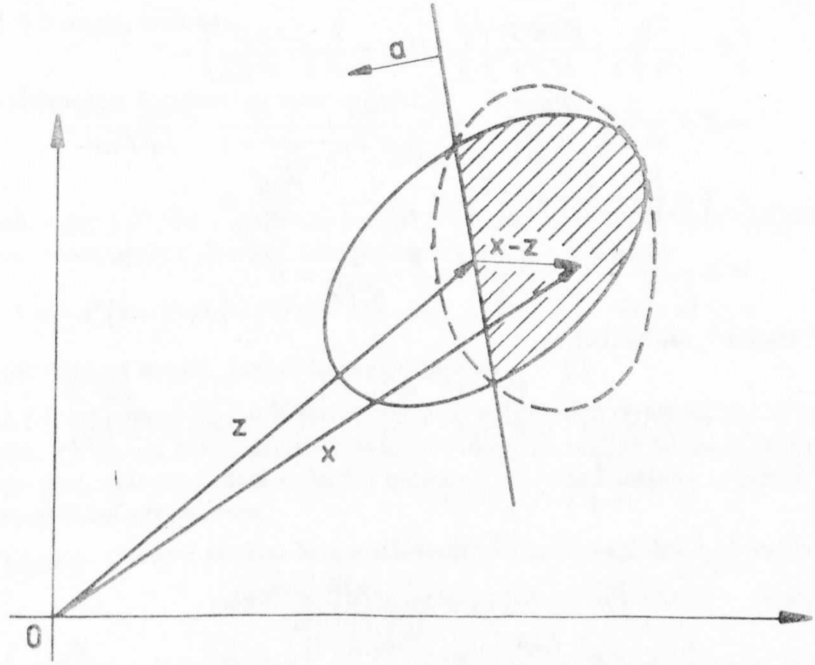
$$x^*Px - \frac{2}{m+1} \cdot \frac{x^*Pa\,a^*Px}{a^*Pa} > 0\,. \tag{$*$}$$

Ehhez, $m > 1$ miatt elég megmutatni, hogy

$$(x^*Px)(a^*Pa) > (x^*Pa)(a^*Px)\,.$$

Mivel P pozitív definit, így van olyan teljes rangú S mátrix, hogy $P = S^*S$. Ekkor a fenti egyenlőtlenség az

$$|\,Sx\,|^2|\,Sa\,|^2 > ((Sx)(Sa))^2$$



1. ábra.

alakot ölti, ami pedig a Cauchy-Schwartz-Bunyakovszki egyenlőtlenség szerint $Sx \neq \lambda Sa$ esetén fenn áll. Ha $Sx = \lambda Sa$, akkor $x = \lambda a$ és $(*)$ nyilván teljesül. □

2.2. lemma: Az új ellipszoid tartalmazza az eredeti ellipszoid felét, azaz

$$ell(z', P') \supset \{x \mid a^*(x - z) \leq 0\} \cap ell(z, P).$$

Bizonyítás: Legyen x eleme a jobboldalnak, azaz

$$a^*(x - z) \leq 0$$

és

$$(x - z)^* P(x - z) \leq 1.$$

Be kell látni, hogy ekkor x a baloldalnak is eleme.
Elemi számolással adódik, hogy

$$P'^{-1} = \frac{m^2 - 1}{m^2}\left(P^{-1} + \frac{2}{m-1} \cdot \frac{aa^*}{a^*Pa}\right),$$

ugyanis

$$\left(P - \frac{2}{m+1}\cdot\frac{Paa^*P}{a^*Pa}\right)\left(P^{-1} + \frac{2}{m-1}\cdot\frac{aa^*}{a^*Pa}\right) =$$

$$= E - \frac{2}{m+1}\cdot\frac{Paa^*}{a^*Pa} + \frac{2}{m-1}\frac{Paa^*}{a^*Pa} - \frac{4}{m^2-1}\cdot\frac{Paa^*Paa^*}{(a^*Pa)^2}$$

$$= E + \left\{-\frac{2}{m+1} + \frac{2}{m-1} - \frac{4}{m^2-1}\right\}\frac{Paa^*}{a^*Pa} =$$

$$= E + \frac{-2m+2+2m+2-4}{m^2-1}\cdot\frac{Paa^*}{a^*Pa} = E\,.$$

Így állításunk igazolásához az

$$\left(x - z + \frac{1}{m+1}\cdot\frac{Pa}{\sqrt{a^*Pa}}\right)^*\cdot\frac{m^2-1}{m^2}\left[P^{-1} + \frac{2}{m-1}\cdot\frac{aa^*}{a^*Pa}\right]\cdot$$

$$\cdot\left(x - z + \frac{1}{m+1}\cdot\frac{Pa}{\sqrt{a^*Pa}}\right) \le 1$$

egyenlőtlenséget kell igazolni a félellipszoidban levő minden x esetén.

Legyen $\alpha := \sqrt{a^*Pa}$ és $\beta := a^*(x-z)$. Ekkor

$$\left((x-z)^* + \frac{1}{\alpha(m+1)}a^*P\right)\left(\frac{m^2-1}{m^2}P^{-1} + \frac{2(m+1)}{m^2\alpha^2}aa^*\right)\left((x-z) + \frac{Pa}{(m+1)\alpha}\right) =$$

$$= \frac{m^2-1}{m^2}(x-z)^*P^{-1}(x-z) + 2\frac{m^2-1}{m^2}\cdot\frac{1}{\alpha(m+1)}(x-z)^*P^{-1}Pa +$$

$$+ \frac{m^2-1}{m^2}\cdot\frac{a^*PP^{-1}Pa}{\alpha^2(m+1)^2} + \frac{2(m+1)}{m^2\alpha^2}(x-z)^*aa^*(x-z) +$$

$$+ 2\frac{2(m+1)}{m^2\alpha^2}\cdot\frac{1}{\alpha(m+1)}(x-z)^*aa^*Pa + \frac{1}{\alpha^2(m+1)^2}\cdot\frac{2(m+1)}{m^2\alpha^2}a^*Paa^*Pa \le$$

$$\le \frac{m^2-1}{m^2} + \frac{2(m-1)}{m^2}\cdot\frac{\beta}{\alpha} + \frac{m-1}{m^2(m+1)} + \frac{2(m+1)}{m^2}\cdot\frac{\beta^2}{\alpha^2} + \frac{4}{m^2}\cdot\frac{\beta}{\alpha} + \frac{2}{(m+1)m^2} =$$

$$= \left[\frac{m^2-1}{m^2} + \frac{m-1}{m^2(m+1)} + \frac{2}{(m+1)m^2}\right] + \left(\frac{2(m-1)}{m^2} + \frac{4}{m^2}\right)\frac{\beta}{\alpha} + \frac{2(m+1)}{m^2}\cdot\frac{\beta^2}{\alpha^2} =$$

$$= 1 + \frac{2(m+1)}{m^2}\cdot\frac{\beta}{\alpha}\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) = 1 + \frac{2(m+1)}{m^2}\cdot\frac{\beta}{\alpha^2}(\alpha+\beta)\,.$$

Így $\beta \leq 0$ miatt, csak az

$$\alpha + \beta \geq 0$$

egyenlőtlenséget kell belátni, azaz azt, hogy

$$\sqrt{a^* P a} + a^*(x - z) \geq 0 .$$

Tudjuk, hogy $| S^{-1}(x - z) |^2 = (x - z)^* P^{-1}(x - z) \leq 1$, így a Cauchy–Schwartz–Bunyakovszki egyenlőtlenséget alkalmazva a

$$-\beta = -a^*(x - z) = (-a^* S)(S^{-1}(x - z)) \leq | Sa | \cdot | S^{-1}(x - z) | \leq \alpha \cdot 1 = \alpha$$

egyenlőtlenséget kapjuk, ami állításunkat igazolja. $\square$

A fejezet befejezéseként belátjuk, hogy az új ellipszoid térfogata kisebb mint az eredetié. Ehhez azt a geometriából jól ismert tényt használjuk fel, hogy ellipszoidok térfogatának aránya az őket definiáló mátrixok determinánsainak arányaiból vont négyzetgyökkel egyezik meg.

2.3. lemma:

$$\frac{vol(ell(z', P'))}{vol(ell(z, P))} < e^{\frac{1}{2(m+1)}} .$$

Bizonyítás: Mint említettük

$$\frac{vol(ell(z', P'))}{vol(ell(z, P))} = \sqrt{\frac{\det(P')}{\det(P)}} .$$

Tudjuk (RÓZSA, [8]), hogy tetszőleges nem szinguláris négyzetes B mátrix, b vektor és α skalár esetén

$$\det(B + \alpha b b^*) = (1 + \alpha b^* B^{-1} b) \det(B) ,$$

amiből kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \det(P') &= \left(\frac{m^2}{m^2 - 1}\right)^m \left(1 - \frac{2}{(m+1) a^* P a} a^* P P^{-1} P a\right) \det(P) = \\ &= \left(\frac{m^2}{m^2 - 1}\right)^m \left(1 - \frac{2}{m+1}\right) \det(P) = \\ &= \left(1 + \frac{1}{m^2 - 1}\right)^{m-1} \left(\frac{m}{m+1}\right)^2 \det(P) = \\ &= \left(1 + \frac{1}{m^2 - 1}\right)^{m-1} \left(1 - \frac{1}{m+1}\right)^2 \det(P) . \end{aligned}$$

Az $1 + x < e^x$ összefüggést felhasználva kapjuk a

$$\det(P') < e^{\frac{m-1}{m^2-1}} e^{-\frac{2}{m+1}} \det(P) = e^{-\frac{1}{m+1}} \det(P)$$

összefüggést. Így

$$\frac{vol(ell(z',P'))}{vol(ell(z,P))} < \sqrt{\frac{e^{-\frac{1}{m+1}}\det(P)}{\det(P)}} = e^{-\frac{1}{2(m+1)}}. \quad \square$$

Megjegyezzük, hogy az $ell(z',P')$ a fent említett fél–ellipszoidot tartalmazó minimális térfogatú ellipszoid. Erre a tényre nem lesz szükségünk a továbbiakban, így ezt nem bizonyítjuk.

3. Az ellipszoid módszer

Ebben a részben ismertetjük az ellipszoid módszert annak eldöntésére, hogy az $A^*y \leq c$ lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldható-e vagy sem.

Ettől a ponttól kezdve ismét szükségünk van arra, hogy az adatok egészek.

Algoritmus:

0. lépés: Adott $A: m \times n$ mátrix, $c \in R^n$. Számítsuk ki az (1.1) képlettel adott σ értéket. Legyen
$ell(z_0, P_0) = ell(\Theta, 2\sigma E)$, azaz a kezdeti ellipszoid a 2σ sugarú gömb.

$(k+1)$ lépés: Ha z_k kielégíti a $A^* z_k \leq c + \frac{1}{mn\sigma}\mathbb{1}$ egyenlőtlenségrendszert, akkor STOP, az $A^*y \leq c$ rendszer megoldható.

– Ha z_k nem megoldása a fenti rendszernek, akkor van olyan j index, melyre

$$z_k^* a_j > \gamma_j + \frac{1}{mn\sigma}.$$

A 2.2 definíciónak megfelelően legyen $a := a_j$.

Ha $k+1 > 2m(m+1)\log(4\sigma^3 m^2 n)$ STOP, az $A^*y \leq c$ rendszer inkonzisztens.

Ha $k+1 \leq 2m(m+1)\log(4\sigma^3 m^2 n)$, akkor legyen $z_{k+1} := z'$, $P_{k+1} := P'$ a 2.2. definíció szerint. Folytassuk a $(k+2)$ lépéssel. $\square$

Mint az 1.1. tétel és 1. következmény mutatja az $A^*y \leq c$ egyenlőtlenségrendszer megoldhatósága ekvivalens az $A^*y \leq c + \frac{1}{mn\sigma}\mathbb{1}$ egyenlőtlenségrendszer megoldhatóságával. Így a fenti algoritmus helyességéhez csak azt kell belátni, hogy ha $2m(m+1)\log(4\sigma^3 m^2 n)$ lépésig eljut az algoritmus, akkor tényleg inkonzisztens az egyenlőtlenségrendszer.

3.1. tétel: Ha a fenti algoritmus $2m(m+1)\log(4\sigma^3 m^2 n)$ lépésig nem talál megoldást, akkor az egyenlőtlenségrendszernek nem is létezik megoldása.

Bizonyítás: Az 1.1. tétel és következményei szerint $A^*y \leq c$ megoldhatósága ekvivalens $A^*y \leq c + \frac{1}{mn\sigma}\mathbb{1}$, $|\eta_i| \leq \sigma + \frac{1}{m^2 n\sigma^2}$ $\forall i$ megoldhatóságával, és az utóbbi tartalmaz $\frac{1}{m^2 n\sigma^2}$ élű kockát is, amelynek térfogata $\left(\frac{1}{m^2 n\sigma^2}\right)^m$.

A fentiekből az is látható, hogy mindkét fent említett poliéder benn van az origó középpontú, 2σ sugarú gömbben, melynek térfogatát $(2 \cdot 2\sigma)^m$-el becsülhetjük felülről.

A 2.2. lemma szerint a poliédert minden ellipszoid tartalmazza, amelyet az algoritmus generál. A 2.3. lemma szerint az ellipszoidok térfogata csökken, és N lépés után

$$vol(ell(z_N, P_N)) < e^{\frac{-N}{2(m+1)}} vol(ell(\Theta, 2\sigma E)) < e^{\frac{-N}{2(m+1)}} (4\sigma)^m .$$

Amennyiben ez a térfogat kisebb mint $\left(\frac{1}{m^2 n\sigma^2}\right)^m$, azaz az ellipszoid térfogata kisebb mint a benne lévő kocka térfogata, akkor ellentmondásra jutunk, azaz a poliéder üres.

$$e^{-\frac{N}{2(m+1)}} (4\sigma)^m < \left(\frac{1}{m^2 n\sigma^2}\right)^m$$

$$e^{-\frac{N}{2m(m+1)}} \cdot 4\sigma < \frac{1}{m^2 n\sigma^2}$$

$$e^{-\frac{N}{2m(m+1)}} < \frac{1}{4\sigma^3 m^2 n}$$

$$N > 2m(m+1)\log(4\sigma^3 m^2 n) .$$

Tehát ha $2m(m+1)\log(4\sigma^3 m^2 n)$ lépésnél tovább jutunk úgy, hogy nem találtunk megoldást, akkor a lineáris egyenlőtlenségrendszernek nincs megoldása. □

Ebben a fejezetben algoritmust adtunk annak eldöntésére, hogy az $A^* y \leq c$ egyenlőtlenségrendszer megoldható-e vagy sem. Sajnos algoritmusunk csak az $A^* y \leq c + \frac{1}{mn\sigma} \mathbb{1}$ egyenlőtlenségrendszerhez ad megoldást polinomiális lépésszámban.

A fenti algoritmust felhasználva a következő fejezetben megmutatjuk, miként kereshetünk megoldást is polinomiális lépésszámban az eredeti feladathoz.

4. Megoldás keresése

A harmadik fejezet algoritmusának ismételt hívásával, illetve a Gauss elimináció alkalmazásával polinomiális lépésszámban megoldást találhatunk az $A^* y \leq c$ lineáris egyenlőtlenségrendszerhez.

4.1. tétel: Amennyiben van egy algoritmusunk (pl. az ellipszoid módszer), mely polinomiális lépésszámban eldönti, hogy egy lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldható-e, akkor polinomiális lépésszámban megoldást is kaphatunk.

Bizonyítás: Az eredeti algoritmus legfeljebb n^2-szeri hívásával, és egy egyenletrendszer Gauss eliminációval való megoldásával kaphatunk megoldást.

Az algoritmus:

0. – Döntsük el, hogy az

$$y^*a_1 \le \gamma_1$$
$$\vdots$$
$$y^*a_n \le \gamma_n$$

rendszer megoldható–e. Ha nem akkor kész vagyunk, $A^*y \le c$ nem megoldható.

1. – Ha igen akkor az

$$y^*a_1 = \gamma_1$$
$$y^*a_2 \le \gamma_2$$
$$\vdots$$
$$y^*a_n \le \gamma_n$$

rendszer megoldhatóságát döntsük el az algoritmussal.

Ha nem megoldható, akkor elég az $y^*a_2 \le \gamma_2, \ldots, y^*a_n \le \gamma_n$ rendszert megoldani, ugyanis ekkor ennek minden megoldására $y^*a_1 < \gamma_1$. Ebben az esetben $n = n - 1$, és visszatérünk az előző lépésre.

2. – Ha megoldható, akkor az

$$y^*a_1 = \gamma_1$$
$$y^*a_2 = \gamma_2$$
$$y^*a_3 \le \gamma_3$$
$$\vdots$$
$$y^*a_n \le \gamma_n$$

rendszer megoldhatóságát döntsük el.

$\vdots$

k. – Ha megoldható, akkor az

$$y^*a_1 = \gamma_1$$
$$\vdots$$
$$y^*a_k = \gamma_k$$
$$y^*a_{k+1} \le \gamma_{k+1}$$
$$\vdots$$
$$y^*a_n \le \gamma_n$$

rendszer megoldhatóságát döntsük el.

Ha nem megoldható, akkor elég az

$$y^* a_1 = \gamma_1$$

$$\vdots$$

$$y^* a_{k-1} = \gamma_{k-1}$$

$$y^* a_{k+1} \leq \gamma_{k+1}$$

$$\vdots$$

$$y^* a_n \leq \gamma_n$$

rendszert megoldani, ugyanis ennek minden megoldására $y^* a_k < \gamma_k$. Ekkor $n = n - 1$ és visszatérünk az első lépésre.

k+1. – Ha megoldható akkor az

$$y^* a_1 = \gamma_1$$

$$\vdots$$

$$y^* a_k = \gamma_k$$

$$y^* a_{k+1} = \gamma_{k+1}$$

$$y^* a_{k+2} \leq \gamma_{k+2}$$

$$\vdots$$

$$y^* a_n \leq \gamma_n$$

rendszer megoldhatóságát döntsük el.

$\vdots$

A fenti algoritmus nyilván polinomiális lépésszámban megoldást talál az $A^* y \leq c$ feladatra, ugyanis az utolsó lépésben egy egyenletrendszert kell megoldani.

Így polinomiális lépésszámban nem csak azt tudjuk eldönteni, hogy egy lineáris egyenletrendszer megoldható-e, hanem polinomiális időben megoldást is találhatunk.

Befejezésül megismételjük, hogy az általunk közölt ellipszoid módszer nem az algoritmus legélesebb változata. Célunk a fő gondolatok, a fő lépések olyan, közérthető ismertetése volt, amely lehetőleg csak elemi eszközöket használ fel, és egyetemi előadásban is előadható.

(Beérkezett: 1988. augusztus 10-én.)

Irodalom

1. DANTZIG, G.B., *"Linear Programming and Extensions"*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1963.
2. GÁCS, P.–LOVÁSZ, L., "Khacsijan's algorithm for linear programming", *Mathematical Programming Study* 14, (1981) 61–68.
3. KARMARKAR, N., "A new polinomial time algorithm for linear programming", *Combinatorica* 4, (1984) 373–395.
4. KAHACSIJAN, L.G., "A polinomial algorithm for linear programming", *Doklady Akad. Nauk USSR* 244, (1979) 1093–1096.
5. KLEE, V. – MINTY, G.J., "How good is the simplex algorithm?", in: *Inequalities* III. (O.Shisha, ed.) Academic Press, New York, (1972) 159–175.
6. LEDERMANN, W. and VAJDA, S., *Combinatorics and Geometry*. (Handbook of applicable mathematics, Vol. V.) John Wiley and Sons, 1985.
7. SCHRIJVER A., *"Theory of Linear and Integer Programming"*, John Wiley and Sons, 1986.
8. RÓZSA P., *Lineáris algebra és alkalmazásai*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1974.