Szigma, XX. (1987–88) 1. sz.

MÁTYÁS LÁSZLÓ

A sztochasztikusan változó paraméterű modellek egy lehetséges alkalmazási területe

A változó paraméterű modellek becslése területén az utóbbi években elért eredmények megteremtették a lehetőségét annak, hogy az a ökonometriai modellezés egy lépéssel közelebb kerüljön a gazdasági valósághoz, lehetővé téve ezzel a gazdasági folyamatok valósághűbb leírását. Ennek lényege, hogy míg a hagyományos ökonometriai modellek feltételezték a modellt meghatározó strukturális paraméterek állandóságát, addig a változó strukturális paraméterek bevezetése – éppen e változás révén – jobban megfoghatóvá teszi a változó gazdasági összefüggéseket. A változó paraméterű modellezés alapjait WALD [17] fektette le még a negyvenes években, de csupán az ötvenes, hatvanas évek kutatási eredményei tették lehetővé e modellek alkalmazásának fokozatos térhódítását. A hazai gazdasági modellezők még messze nem élnek a változó paraméterű modellek adta lehetőségekkel, ami egyrészt annak tudható be, hogy a kényelmes felhasználást lehetővé tevő számítógépes programcsomagok még csak most kezdenek elterjedni, másrészt pedig annak, hogy a felhasználás ökonometria-elméleti megalapozása Magyarországon még nem történt meg. Éppen ezen kíván szerény mértékben segíteni ezen írás, melynek fő célja egy lehetséges alkalmazási területen – az idősorok és keresztmetszeti adatok együttes felhasználásának területén – bemutatni, hogy mit nyújthat a gyakorlati modellező számára a változó paraméterű modellezés.

Első lépésben áttekintjük a főbb változó paraméterű modelleket, majd bemutatjuk egy modelltipus paramétereinek a legkisebb négyzetek módszerére alapozott becslését. Ez után az idősorok és keresztmetszeti adatok együttes felhasználásának mezején áttekintjük e modellek egy lehetséges gyakorlati alkalmazási területét, eljutva az időben és egyedenként változó paraméterstruktúrák modellezéséig.

1. Változó paraméterű regressziós modellek

A változó paraméterű modellek a hagyományos ökonometriai modelleknek a regressziós paraméterek állandóságára tett hipotézisét oldják fel. Ez nagyon fontos lehet például a következő ökonometriai problémák esetén:

1. A struktúra nem stabil (időben), vagyis a strukturális paraméterek nem állandóak, mert

a) olyan sztochasztikus hatások vannak a modellben, amelyeket az additív reziduális változó nem tud figyelembe venni;

b) a modell paramétereit egy sokváltozós sztochasztikus folyamat generálja;

c) a modell paraméterei egy adott időpillanatban valamilyen keresztmetszeti minta által generált valószinüségi változók.

2. Annak ellenére, hogy a valódi struktúra stabil, célszerű a változó paraméterű modellezés, mert

a) specifikációs hiba fordul elő (mikor kihagyunk egy vagy több magyarázó változót, például szabadságfok problémák miatt), ekkor ugyanis a valódi paraméterekre „rárakódó" torzító hatást ilyenformán valamennyire megfoghatjuk;

b) egy vagy több (megfigyelhető) helyettesítő változót alkalmazunk az adott modellben szereplő (ténylegesen meg nem figyelhető) változó helyett, aminek a hatása ilyen úton kezelhető;

c) nem korrekt függvényformát alkalmazunk, amiért az eredetileg stabil paraméterek változásnak lehetnek kitéve;

d) aggregációs hibát követünk el, ami kiszűrhető lehet ilyen úton.

A változó paraméterű modelleknek a gazdasági modellezésben alkalmazott főbb típusai a következők:

A) *Szisztematikusan változó paraméterű modellek*

a) Funkcionálisan változó paraméterek

$$y_t = X_t'(\beta + \alpha Z_t) + u_t\,, \qquad (*)$$

ahol y_t az endogén változó megfigyelése a t-edik pillanatban ($t = 1, \ldots, T$),

X_t' az exogén változók megfigyeléseit tartalmazó mátrix t-edik sora, mérete $(K \times 1)$,

Z_t egy exogén jellegű változó megfigyelése a t-edik pillanatban,

u_t a szokásos tulajdonságokkal rendelkező látens változó,

K az exogén változók száma,

valamint

$$E(X_t'u_t) = 0 \quad E(Z_t u_t) = 0$$

minden t–re, és α, β ismeretlen paraméter vektorok.

Látható, hogy a (*) egyenlet strukturális paraméterei függvényei egy további exogén változónak.

b) Binárisan változó paraméterek

$$y_t = X_t'(\beta + \alpha D_t) + u_t\,,$$

ahol

$$D_t = \begin{cases} 0 & \text{ha } 1 \le t < t_0\,, \\ 1 & \text{ha } t_0 \le t \le T \end{cases}$$

és α ismeretlen paraméter vektor.

Mind az a), mind a b) esetben a kellően alkalmazott KLNM konzisztens és hatásos becslést nyújt a keresett paraméterekre. A b) esetben, ha t_0 ismeretlen, akkor ez is becsülhető a KLNM becslés sztenderd hibájának a minimalizálásával. (E modellekről lásd például GOLDFELD–KELEJIAN–QUANDT [4], RAJ–ULLAH [10]). Ennek megfelelően, mivel a szisztematikusan változó paraméterű modellek paramétereinek a becslése nem igényel újfajta megközelítést, a továbbiakban nem foglalkozunk vele.

B) *Sztochasztikus változó paraméterű modellek*

a) Véletlen paraméterek

$$y_t = X_t'(\beta + \varepsilon_t) + u_t ,$$

ahol ε_t egy $(K \times 1)$ méretű valószinüségi vektorváltozó és $E(\varepsilon_t) = 0$, $E(u_t) = 0$, valamint $E(\varepsilon_t' u_t) = 0$.

E modellt – bevezetőjükről – szokás HILDRETH–HOUCK [5] modellnek is nevezni. Észrevehető, hogy itt a modell $(\bar{\beta} = \beta + \varepsilon_t)$ paramétervektora egy rögzített ismeretlen (becsülendő) átlag (β) körül ingadozik. Ez gyakorlatilag azt jelenti, hogy regressziós modell paramétervektorát egy teljesen véletlen sztochasztikus folyamat generálja.

b) Szekvenciális paraméterek

$$y_t = X_t'(\lambda\beta_{t-1} + (1-\lambda)\beta + \varepsilon_t) + u_t ,$$

ahol λ a folyamatot meghatározó paraméter[1],

$$E(u_t) = 0 , \quad E(\varepsilon_t) = 0 , \quad E(\varepsilon_t' u_t) = 0$$

és

$$\beta_t = \lambda\beta_{t-1} + (1-\lambda)\beta + \varepsilon_t ,$$

amit fokozatos visszahelyettesítéssel a β_0 kezdeti paraméterre visszavezetve adódik:

$$\beta_t = \lambda^t\beta_0 + (1-\lambda^t)\beta + \sum_{\tau=0}^{t-1} \lambda^\tau \varepsilon_{t-\tau} .$$

Látható, hogy e modellt alapvetően befolyásolja a β_0 kezdeti paramétervektor. Ha $0 < \lambda < 1$, akkor e modellt szokás ROSENBERG-féle [11], [12] sztochasztikusan konvergens paraméterű modellnek nevezni. Ha $\lambda = 0$, akkor visszakapjuk a Hildreth–Houck modellt, ha pedig $\lambda = 1$, akkor

$$y_t = X_t'(\lambda\beta_{t-1} + \varepsilon_t) + u_t ,$$

[1] λ a modell szempontjából a priori meghatározott paraméter; hogy milyen értéket adunk neki, az nagyban függ a modellezett gazdaság hipotézisrendszerétől.

amit szokás COOLEY–PRESCOTT [1], [2] modellnek is nevezni, de az irodalomban gyakran adaptív paraméterű modell név alatt is szerepel. A regressziós modell ($\bar{\beta} = \lambda\beta_{t-1}(1-\lambda)\beta+\varepsilon_t$) paramétervektora most az idő függvényében egy ismeretlen (becsülendő) átlag (β) körül ingadozik. Ez gyakorlatilag azt jelenti, hogy a modell paramétervektorát egy elsőrendű autoregresszív sztochasztikus folyamat (**AR**(1)) generálja.

Látható, hogy a sztochasztikus változó paraméterű modellek alapelgondolása, hogy a strukturális paraméterek egy determinisztikus és egy sztochasztikusan változó részből tevődnek össze. Egyértelmű, hogy mind az a), mind a b) modelleknél a KLNM konzisztens becslést nyújt a keresett paraméterekre, azonban a bonyolult látens struktúra következtében e becslés nem lesz hatásos, így az ALNM alkalmazása válik szükségessé.[2].

A következő fejezetben a Hildreth–Houck modell példáján bemutatjuk, hogyan állítható elő a sztochasztikusan változó paraméterű modellek paramétereinek ALNM esztimátora.

2. A Hildreth–Houck modell ALNM becslése

A modell a t-edik időpontban a következő:

$$y_t = X_t'(\beta + \varepsilon_t) + u_t\,,$$

ahol

$$E(\varepsilon_t) = 0, \quad E(u_t) = 0\,;$$

$$E(\varepsilon_t'\varepsilon_{t'} = \begin{cases} 0, & \text{ha } t \neq t'\,, \\ <\sigma_1^2, \ldots, \sigma_K^2>, & \text{ha } t = t'; \end{cases}$$

$$<\sigma_1^2, \ldots, \sigma_K^2> = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_K^2 \end{pmatrix}$$

$(K \times K)$ méretű diagonális mátrix, valamint az ε_t vektor egyes elemei és u_t korrelálatlanok.

Vektor alakban újraírva a modellt, $u^* = (u_1^* \ldots, u_T^*)$ jelöléssel:

$$y = X\beta + u^*\,, \tag{1}$$

ahol

$$u_t^* = u_t + \sum_{i=1}^{K} X_{it}\varepsilon_{it}\,,$$

[2] Megjegyzendő, hogy mind az a), mind a b) modellek paramétereinek a becslésére léteznek a maximum-likelihood módszeren, illetve a Kálmán filteren alapuló eljárások is, de ezek tárgyalása túlnőne az írás keretein (RAJ–ULLAH [10])

Az ALNM alkalmazásához az $E(u^*u^{*'})$ kovariancia mátrixot kell előállítani:

$$E(u^*u^{*'}) = < \overbrace{\sigma_u^2 + \sum_{i=1}^{K} X_{it}^2\sigma_i^2}^{d_t} >, \quad (t = 1, \ldots, T)$$

amely egy $(T \times T)$ méretü diagonális mátrix.

A továbbiakban tehát a σ_u^2 és a σ_i^2 varianciákat fogjuk becsülni. Legyen az (1) modell paramétervektorának KLNM becslése $\widehat{\beta}$ és az ebből származó reziduum:[3]

$$\mathbf{e} = y - X\widehat{\beta}.$$

Világos, hogy

$$\mathbf{e} = Wy, \quad \text{ahol} \quad W = I - X(X'X)^{-1}X'$$

és ha visszahelyettesítjük az (1) egyenletet a fenti összefüggésbe adódik, hogy

$$\mathbf{e} = Wu^*.$$

A mátrix jelöléseket felbontva, a reziduum vektor t-edik eleme

$$\mathbf{e}_t = \sum_{j=1}^{T} w_{tj}u_j^*,$$

ahol w_{tj} a W mátrix t, j-edik eleme.

Az induló feltételekből következik, hogy

$$E(\mathbf{e}_t) = E(\sum_{j=1}^{T} w_{tj}u_j^*) = 0.$$

A reziduum varianciájára pedig a következő adódik:

$$E(\mathbf{e}_t^2) = E[(\sum_{j=1}^{T} w_{tj}u_j^*)^2] = \sum_{j=1}^{T}\sum_{j'=1}^{T} w_{tj}w_{tj'}[E(u_j^*u_{j'}^*)] = \sum_{j=1}^{T} w_{tj}^2 d_j, \qquad (2)$$

ahol

$$d_j = \sigma_u^2 + \sum_{i=1}^{K} X_{ij}^2\sigma_i^2.$$

[3] Ha teljesen következetesek lennénk a jelölésben, akkor az **e** helyett $\widehat{u}^*$–ot kellene használnunk, ez azonban nincs összhangban az idevágó irodalommal, amelyben ennél a modellnél a becsült reziduumot **e**-vel jelölik, így ezt használjuk mi is.

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\dot{\mathrm{e}} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}_1^2 \\ \vdots \\ \mathrm{e}_T^2 \end{pmatrix} \qquad \dot{W} = \begin{pmatrix} w_{11}^2 & \dots & w_{1T}^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{T1}^2 & \dots & w_{TT}^2 \end{pmatrix}$$

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 1 & X_{21}^2 & \dots & X_{K1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{2T}^2 & \dots & X_{KT}^2 \end{pmatrix}, \quad \dot{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_u^2 + \sigma_1^2 \\ \sigma_2^2 \\ \vdots \\ \sigma_K^2 \end{pmatrix}.$$

Látható, hogy az $\dot{X}$ mátrix tartalmazza a szabad konstans csupa 1-esekből álló oszlopvektorát, amit a formulákban szintén exogén változóként szerepeltetünk, vagyis K, az exogén változók száma, úgy adódik, hogy $K-1$ ténylegesen exogén változó szerepel plusz a konstans. Most újraírva a (2) összefüggést

$$E(\dot{\mathrm{e}}) = \dot{W}\dot{X}\dot{\sigma}\,, \tag{3}$$

ahol $\dot{\sigma}$–t kell becsülni.

Az ötlet az, hogy tekintsük a (3) várható értéket egy regressziós összefüggésnek, vagyis

$$\dot{\mathrm{e}} = \dot{W}\dot{X}\dot{\sigma} + v\,,$$

ahol v látens változó és $E(v) = 0$.

Bevezetve a $\dot{G} = \dot{W}\dot{X}$ jelölést, a fenti képletre adódik, hogy

$$\dot{\mathrm{e}} = \dot{G}\dot{\sigma} + v\,. \tag{4}$$

Mivel v kovariancia mátrixáról nem állíthatjuk, hogy skalár típusú így a (4) regressziós egyenletben a $\sigma^{\bullet}$ paramétervektor becslésére az ALNM-et kellene alkalmazni (RAJ–ULLAH [10]). Általában azonban hagyományosan megelégszünk a varianciák konzisztens becslésével, elsősorban azért, mert a varianciák hatásos becslésének előállítási „ára" nem fizetődne ki az (1) egyenlet strukturális paramétereinek becslésekor. A (4) egyenletre a KLNM-et alkalmazva, a keresett varianciák becslése:

$$\widehat{\dot{\sigma}} = (G'G)^{-1}G'\dot{\mathrm{e}}\,, \tag{5}$$

és így az (1) modell β strukturális paramétervektorának ALNM becslése minden további nélkül előállítható. Vegyük észre, hogy az (5) esztimátorban a σ_u^2 és σ_1^2 varianciák becslésének elkülönítése nem lehetséges. Erre az (1) modell ALNM esztimátorában mellesleg nincs is szükség, és így itt nem okoz gondot, de bizonyos gazdasági elemzéseknél, ahol a varianciákat külön-külön értelmezik, már értelmezési nehézségeket okozhat.[4] A következő fejezetben meglátjuk majd, hogy megnövelt minta információ esetén lehetővé válik e két variancia becslésének szeparálása is.

3. Egy lehetséges alkalmazási terület

Az idősorok és keresztmetszetei adatok együttes felhasználásának hagyományos módja a panel-modellek alkalmazása (MÁTYÁS [7], [8]). Számos esetben azonban az egyedhatásokat célszerübb a paraméterek változásába beépíteni, mint a látens változót szétbontani egyed és reziduális hatásokra. Ennek megfelelően alkalmazhatók az egyedhatások kezelésére a változó paraméterű modellek megfelelő alakjai.

A) *A Swamy modell*

Legyen a vizsgálandó modell most

$$y_i = X_i(\beta + \varepsilon_i) + u_i \tag{6}$$

formájú, ahol

- i az i-edik megfigyelt egyedre utaló index, $i = 1, \ldots, N$,
- X_i az exogén változók megfigyeléseinek értékeit tartalmazza az i-edik egyednél, mérete $T \times K$,
- y_i az endogén változó megfigyeléseinek $(T \times 1)$ méretű vektora az i-edik egyednél,
- u_i a látens változók $(T \times 1)$ méretű vektora az i-edik egyednél,
- β a paramétervektor (mérete $K \times 1$),
- ε_i az egyedhatásokat kifejező $(K \times 1)$ méretű valószinüségi vektorváltozó,
- K az exogén változók száma.

Az összes egyedre felírva:

$$y = X\beta + \tilde{X}\varepsilon + u, \tag{7}$$

ahol

- X az exogén változók megfigyeléseinek értékét tartalmazó $(NT \times K)$ méretű mátrix,
- y az y_i-ket tartalmazó $NT \times 1$ méretű vektor,
- ε és u az ε_i és u_i vektorokból felépített $(NK \times 1)$, illetve $(NT \times 1)$ méretű valószinüségi vektorváltozók;

---

[4] Az (5) esztimátornál érdemes felfigyelni arra is, hogy ez nem feltétlenül eredményez pozitív becslést a szórásokra. Negatív szórás becslés esetén az egész modell-specifikáció újragondolása válhat szükségessé.

és

$$\widetilde{X} = \begin{pmatrix} X_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & X_N \end{pmatrix} .$$

Tegyük fel, hogy teljesülnek a következő hipotézisek:

$$E(\varepsilon_i) = 0 , \qquad E(u_i) = 0 ,$$

$$E(u_i u'_{i'}) = \begin{cases} \beta^2_{ui} I_T & i = i' , \\ 0 & i \neq i' , \end{cases}$$

$$E(\varepsilon_i \varepsilon'_{i'} = \begin{cases} \Delta & i = i' \\ 0 & i \neq i' \end{cases} ,$$

és ε_i, u_i korrelálatlan valószinüségi vektorváltozók.

Az így leírt modellt P. A. Swamy [14], [15], [16] állította fel először. Könnyen észrevehető, hogy a modell nem más, mint a Hildreth–Houck modell egy – a dezaggregált adatbázishoz adaptált – változata. A különbség egyrészt az, hogy itt – mivel nem csupán egy idősor áll rendelkezésünkre – lehetővé válik az ε_i vektorváltozó kovariancia mátrixának a diagonalitására vonatkozó hipotézis elhagyása, másrészt pedig az, hogy az u_i látens változó σ^2_{ui} varianciája minden egyednél eltérő lehet.

Ahhoz, hogy a (7) modell paramétervektorának hatásos ALNM becslését előállíthassuk, szükség van az

$$E[(\widetilde{X}\varepsilon + u)(\widetilde{X}\varepsilon + u)'] = \sum$$

kovariancia mátrix becslésére.

Tudjuk, hogy

$$\sum = \begin{pmatrix} \sum_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sum_{NN} \end{pmatrix}$$

ahol $\sum_{ii} = X_i \Delta X'_i + \sigma^2_{ui} I_T$.

Legyen $\widehat{\mathbf{e}}_i$ a KLNM becslésből származó reziduum vektor

$$\widehat{\mathbf{e}}_i = y_i - X_i \widehat{\beta}_i ,$$

ahol $\widehat{\beta}_i$ az i–edik egyed idősorából, vagyis a (6) egyenletből számított KLNM paraméterbecslés.

Ekkor

$$\widehat{\sigma}^2_{ui} = \frac{\widehat{\mathbf{e}}'_i \widehat{\mathbf{e}}_i}{T - K}$$

a σ^2_{ui} varianciának torzítatlan becslése.

A Δ mátrix becslése pedig (MÁTYÁS [7]):

$$\Delta = \frac{S}{N-1} - \frac{1}{N}\sum_{i-1}^{N} \sigma_{ui}^2 (X_i' X_i)^{-1} ,$$

ahol

$$S = \sum_{i=1}^{N} \widehat{\beta}_i \widehat{\beta}_i' - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \widehat{\beta}_i \sum_{i=1}^{N} \widehat{\beta}_i'$$

és $\widehat{\beta}_i$ a (6) formulából származó KLNM paraméterbecslés.

Látható, hogy a fenti kovariancia mátrix becslése során maximálisan támaszkodtunk az idősorok és keresztmetszeti adatok együttes meglétéből adódó többletinformációra. Így érthetővé válik, hogy az eredeti – sima idősoros vizsgálatokra kidolgozott – Hildreth–Houck modellben az $E(\varepsilon_t \varepsilon_t')$ kovariancia mátrix diagonalitásának a hipotézise pótolja a hiányzó minta információt.

Szintén a (7) modell Σ kovariancia mátrixának becslésére rendelkezésre álló többletinformáció tette lehetővé, hogy az eredeti Hildreth–Houck modellnél látottnál egyszerűbben becsüljük e kovariancia mátrixot. A következő pontban bemutatandó modellnél azonban erre már, sajnos, nem lesz lehetőség.

B) *A Hsiao modell*

Legyen a vizsgálandó modell most

$$y_t = X_i \beta + X_i \varepsilon_i + \widetilde{X}_i \lambda + u_i , \tag{8}$$

ahol

λ az időhatásokat kifejező $(KT \times 1)$ méretű valószínűségi vektorváltozó,

$$\tilde{X}_i = \begin{pmatrix} X_{i1}' & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & X_{iT}' \end{pmatrix}$$

és a többi jelölés változatlan.

Az összes egyedre felírva a (8) modellt

$$y = X\beta + \widetilde{X}\varepsilon + \widetilde{\widetilde{X}}\lambda + u , \tag{9}$$

ahol

$$\widetilde{\widetilde{X}} = \begin{pmatrix} \widetilde{X}_1 \\ \vdots \\ \widetilde{X}_N \end{pmatrix} .$$

A továbbiakban a következő hipotézisekkel élünk:

$$E(u_i) = 0\,, \quad E(\lambda_t) = 0\,, \quad E(\varepsilon_i) = 0\,;$$

$$E(u_i u'_{i'}) = \begin{cases} \sigma_u^2 I & i = i' \\ 0 & i \neq i' \end{cases};$$

$$E(\varepsilon_i \varepsilon'_{i'}) = \begin{cases} \Delta & i = i' \\ 0 & i \neq i' \end{cases};$$

$$E(\lambda_t \lambda'_{t'}) = \begin{cases} A & t = t' \\ 0 & t \neq t' \end{cases};$$

ahol λ_t a λ vektor t-edik szubvektora. Továbbá feltételezzük, hogy ε, λ és u valószínűségi vektorváltozók páronként korrelálatlanok és hogy az A, valamint Δ kovariancia mátrixok diagonálisak, ahol a megfelelő diagonális elemeket α_k és σ_k-val jelöljük.

Az így definiált (8) modell használatát C. HSIAO [6] ajánlotta először. Látható, hogy e modell egy szabályos Hildreth–Houck modell és egy speciális Swamy modell ötvözete, ahol a Δ kovariancia mátrix diagonális. Az A és Δ kovariancia mátrixokra vonatkozó diagonalitási feltétel elengedhetetlennek tűnik ahhoz, hogy a meglevő minta információból becsülni lehessen őket. A (9) modell ALNM esztimátorának az előállításához a

$$\begin{aligned} \Sigma &= E[(\tilde{X}\varepsilon + \tilde{\tilde{X}}\lambda + u)(\tilde{X}\varepsilon + \tilde{\tilde{X}}\lambda + u)'] \\ &= \tilde{X}(I_N \otimes \Delta)\tilde{X}' + \tilde{\tilde{X}}(I_T \otimes A)\tilde{\tilde{X}}' + \sigma_u^2 I_{NT} \end{aligned}$$

kovariancia mátrixot kell becsülni. A becslés menete hasonló a Hildreth–Houck modellnél látottakhoz, így a levezetés egyes technikai fogásait felesleges részleteiben elemezni.

Írjuk fel a (9) modell it-edik elemét:

$$y_{it} = \sum_{k=1}^{K} \bar{\beta}_{ki} X_{kit} + u^*_{it}\,,$$

ahol

$$\bar{\beta}_{ki} = \beta_k + \varepsilon_{ki}\,,$$

$$u^*_{it} = \sum_{k=1}^{K} \lambda_{kt} X_{kit} + u_{it}\,.$$

Legyen

$$D_{it} = E(u^{*2}_{it}) = \sum_{k=1}^{K} X^2_{kit}\alpha_k + \sigma_u^2\,,$$

vagy vektor alakban

$$D_i = \dot{X}_i \alpha ,$$

ahol

$\dot{X}_i$ az X_i elemeit tartalmazza a négyzetre emelve

$\alpha' = (\alpha_1 + \sigma_u^2, \alpha_2, \ldots, \alpha_K)$, (itt a vektor első eleme, hasonlóan a Hildreth–Houck modellnél látottakhoz, a szabad konstans miatt tér el a többi elemtől szerkezetében).

Jelöljük $\widehat{\mathbf{e}}_i$-vel a KLNM becslésből származó reziduum vektort (hasonlóan, mint a Swamy modellnél):

$$\widehat{\mathbf{e}}_i = y_i - X_i \widehat{\beta}_i ,$$

ahol $\widehat{\beta}_i$ a β_i paramétervektor KLNM becslése.

Továbbá jelöljük $\dot{\mathbf{e}}_i$–vel a fenti reziduum vektor elemeinek a négyzeteit tartalmazó vektort. Ekkor

$$E(\dot{\mathbf{e}}_i) = \dot{W}_i D_i = G_i \alpha , \tag{10}$$

ahol a $\dot{W}$ mátrix az $(I - X_i(X_i'X_i)^{-1}X_i')$ mátrix elemeit tartalmazza a négyzeten és $G_i = \dot{W}_i \dot{X}_i$.

A Hildreth–Houck modellnél látott ötletnek megfelelően tekintsük a (10) formulát egy regressziós összefüggésnek, így az α paramétervektor KLNM becslése könnyen adódik:

$$\widehat{\alpha} = (G'G)^{-1} G' \dot{\mathbf{e}} ,$$

ahol G a G_i és $\dot{\mathbf{e}}$ az $\dot{\mathbf{e}}_i$-ket tartalmazó vektor.

Hasonló módon eljárva, de nem egy adott egyedre, hanem egy adott időpontra végezve a vizsgálatot, megkapható a σ_K varianciák konzisztens becslése is. (Ez gyakorlatilag azt jelenti, hogy megfigyeléseinket nem egyedenként, hanem időpontonként csoportosítjuk.)

Láttuk a Hildreth–Houck modellnél, hogy ott a σ_u^2 variancia szeparált becslése nem volt lehetséges. Most ez a többlet minta-információból adódóan lehetővé válik

$$\sigma_u^2 = \sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} \widehat{\mathbf{e}}_{it} \bar{\mathbf{e}}_{it} / NT$$

ahol $\widehat{\mathbf{e}}_{it}$ az $\widehat{\mathbf{e}}_i$ vektor t-edik eleme, valamint

$$\bar{\mathbf{e}}_{it} = (y_t - X_t \widehat{\beta}_t)_i$$

és

$$\widehat{\beta}_t = (X_t' X_t)^{-1} X_t y_t ,$$

miközben y_t és X_t az adott változó összes egyedének a t-edik időponthoz tartozó megfigyeléseit tartalmazza.

Az írás végére érve a szerző reméli, hogy sikerült rámutatni a változó paraméterű modellek alapelgondolásának lényegére és bemutatni az idősorok és keresztmetszeti adatok együttes felhasználásának egy alternatív modellezési formáját.

(Beérkezett: 1987. május 6-án.)

Irodalom

1. T.F.COOLEY–E.C.PRESCOTT: Varying Parameter Regression. Theory and Some Applications. *Annals of Economic and Social Measurement*, 1974. (Vol. 2) No 4.
2. T.F.COOLEY–E.C.PRESCOTT: Estimation in the Presence of Stochastic Parameter Variation. *Econometrica*, 1976 (Vol. 44) No 1.
3. B.R.FROEHLICH: Some Estimators for a Random Coefficient Regression Model. *JASA*. 1973 (Vol. 89) No.347.
4. S.M.GOLDFELD–H.H.KELEJIAN–R.E.QUANDT: Least Squares and ML Estimation of Switching Regressions. *Princeton University Research Memorandum* No.130. 1971.
5. C.HILDRETH–J.P.HOUCK: Some Estimators for Linear Model with Random Coefficient. *JASA*. 1968 No.322.
6. G.JUDGE and alia: *The Theory and Practice of Econometrics*. Wiley 1980.
7. MÁTYÁS LÁSZLÓ: Idősorok és keresztmetszeti adatok együttes felhasználása az ökonometriai vizsgálatokban. Kandidátusi értekezés. 1986.
8. MÁTYÁS LÁSZLÓ: A panel modellek becslése. *Szigma*, 1986. 4.
9. B.RAJ–V.K.SRIVASTAVA–S.UPODHYAYA: The Efficiency of Estimating Random Coefficient Model. *Journal of Econometrics*, 1980 (Vol. 12) No 3.
10. B.RAJ–A.ULLAH: *Econometrics. A Varying Coefficients Approach.* Croom–Helm 1981.
11. B.ROSENBERG: The Analysis of Cross–Section of Time Series by Stochastically Convergent Parameter Regression. *Annals of Economic and Social Measurement*, 1973 (Vol. 2) No 4.
12. B.ROSENBERG: A Survey of Stochastic Parameter Regression. *Annals of Economic and Social Measurement*, 1973 (Vol. 2) No 4.
13. H.RUBIN: Note on Random Coefficients. In: *Cowles Commission for Research in Economics*. Monograph No.1O. (Ed.: T.C. Koopmans.) 1950.
14. P.A.SWAMY: *Statistical Inference in Random Coefficient Regression Models*. Springer–Verlag 1971.
15. P.A.SWAMY: Linear Models with Random Coefficients. In: *Frontiers in Econometrics*. (Ed.: P. Zarembka.) Academic Press 1974.
16. P.A.SWAMY–J.S.MEHTA: Estimation of Linear Models with Time and Cross Sectionally Varying Coefficients. *JASA*. 1977 (Vol. 72) No. 360.
17. A.WALD: A Note on Regression Analysis. *Annals of Mathematical Statistics*, 1947 No. 18.

A Possible Field of Application for Models with Stochastically Varying Parameters

The use of models with stochastically varying parameters in econometric analysis allowed derestricting the structural parameters from being constant. This step – important from the viewpoint of modelling – raises several new questions and problems both for modelling and methodology. The purpose of the paper is partly to show the major models with varying parameters – used in econometric analysis – and partly to highlight through a concrete application what the actual content of this approach is. The application presented offeres a more complex and more refined alternative procedure for the combined use of time series and cross-section data than do the panel models.