Szigma, XX. (1987–88) 1. sz.

FÜSTÖS LÁSZLÓ – MESZÉNA GYÖRGY – RESS SÁNDOR –
SIMONNÉ MOSOLYGÓ NÓRA

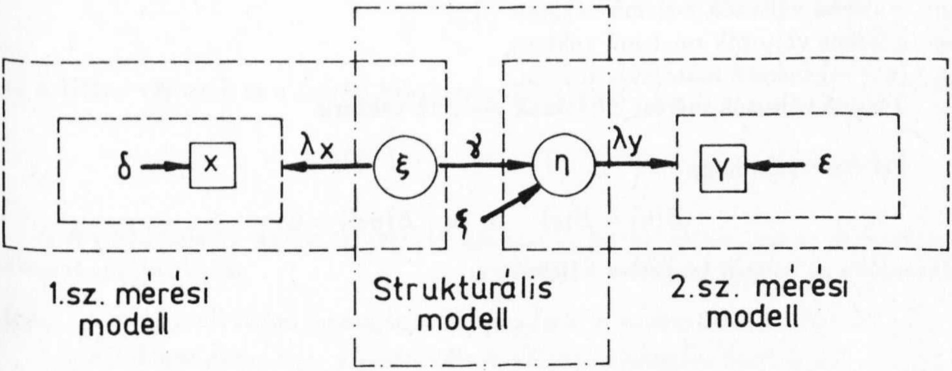
Strukturális kapcsolatok általános lineáris modellje (LISREL)

1. Az általános modell

A LISREL (**L**inear **S**tructural **R**elationship) modellrendszer két látens változó halmaz struktúráját írja le, azzal a feltételezéssel, hogy a látens változók közvetlenül nem mérhetők, hanem mögöttes kifejezői a közvetlenül mérhető változóknak.

Az általános modell kétféle típusú blokkot tartalmaz: a *mérési modellt*, amely azt fejezi ki, hogy a mérési változók két komponensre bonthatók, szisztematikus elemre, amit a modellben a látens változó fejez ki, és a mérési hibára. A mérési modellt a függő és független változókra külön-külön írjuk fel.

A *strukturális modell* pedig a látens változók közötti kauzális összefüggéseket fejezi ki. (1. ábra)



1. ábra. Az általános modell sémája

Az ábrán a következő jelölésekkel éltünk:

X: a megfigyelt, független exogén változók halmaza
Y: a megfigyelt, függő endogén változók halmaza
ξ: a látens exogén változók halmaza
η: a látens endogén változók halmaza
λ_x: a független változók faktorsúlyai
λ_y: a függő változók faktorsúlyai
δ: a megfigyelt független változók mérési hibái
ε: a megfigyelt függő változók mérési hibái
γ: a látens változók regressziós együtthatói
ς: a függő látens változók reziduumai.

Az általános modell feltételei kétfélék:

a) rendszer feltételek, ezek a modell becsléséhez szükséges általános feltételek

b) modell feltételek, amelyekkel speciális modellek definiálhatók.

A mérési modellek

A mérési modell két egyenlettel írható fel, az egyik az endogén látens és mérési változók közötti kapcsolatot, a másik pedig az exogén látens és mérési változók összefüggéseit írja le. Az endogén függő változókra:

$$y = \Lambda_y \eta + \varepsilon , \tag{1}$$

ahol:

y: a mérési változók p-elemű vektora
η: a látens változók m-elemű vektora
Λ_y: $(p \times m)$-méretű faktorsúly mátrix
ε: a függő változók mérési hibájának p-elemű vektora

Feltételezzük, hogy

$$E(\eta) = E(\varepsilon) = 0 \quad \text{és} \quad E(\eta\varepsilon') = 0 .$$

Hasonlóan az exogén független változókra:

$$x = \Lambda_x \xi + \delta , \tag{2}$$

ahol:

x: a mérési változók q-elemű vektora
ξ: a látens változók n-elemű vektora
Λ_x: $(q \times n)$-méretű faktorsúly mátrix
δ: a független változók mérési hibájának q-elemű vektora.

Feltételezzük, hogy

$$E(\xi) = E(\delta) = 0 \quad \text{és} \quad E(\xi\delta') = 0 .$$

A strukturális egyenletek modellje

A strukturális egyenletek a látens endogén és exogén változók kauzális összefüggéseit írják le:

$$B\eta = \Gamma\xi + \varsigma\,, \tag{3}$$

ahol

B: A látens endogén változók közötti $(m \times m)$-méretű regressziós együttható mátrix

Γ: a látens exogén és endogén változók közötti $(m \times n)$-méretű regressziós együttható mátrix

ς: a függő látens változók reziduális komponense, m-elemű vektor.

Feltételezzük, hogy

$$E(\eta) = E(\xi) = E(\varsigma) = 0 \quad \text{és} \quad E(\xi\varsigma') = 0$$

valamint, hogy a B mátrix nem szinguláris.

Az eddigiekből megállapítható, hogy általános rendszerfeltételek a következők:

a) a mérési hibák és a reziduális tag korrelálatlanok:

$$E(\varsigma\varepsilon') = 0 \quad \text{és} \quad E(\varsigma\delta') = 0\,.$$

b) a két mérési modell hibája korrelálatlan:

$$E(\varepsilon\delta') = 0\,,$$

c) a látens változók és a mérési hibák korrelálatlanok:

$$E(\xi\delta') = 0 \quad \text{és} \quad E(\eta\varepsilon') = 0\,.$$

A modellrendszer akkor tekinthető adottnak, ha az alábbi nyolc paraméter mátrixot specifikáltuk:

1. Λ_y: a megfigyelt függő (endogén) változók $(p \times m)$-méretű faktorsúly mátrixa. Általános eleme λ_{yij} a j-edik látens változó közvetlen hatását fejezi ki az i-edik megfigyelt változóra.

2. Λ_x: a megfigyelt független (exogén) változók $(q \times n)$-méretű faktorsúly mátrixa. Általános eleme λ_{xij} a j-edik látens változó közvetlen hatását fejezi ki az i-edik megfigyelt változóra.

3. B: a látens függő endogén változók $(m \times n)$-méretű regressziós mátrixa. Általános eleme β_{ij} a j-edik endogén változó közvetlen hatását mutatja az i-edik endogén változóra.

4. Γ: a látens független exogén változóknak a látens, függő endogén változókra vonatkozó $(m \times n)$-méretű regressziós mátrixa. Általános eleme γ_{ij} a j-edik exogén változónak az i-edik endogén változóra vonatkozó közvetlen hatását mutatja.

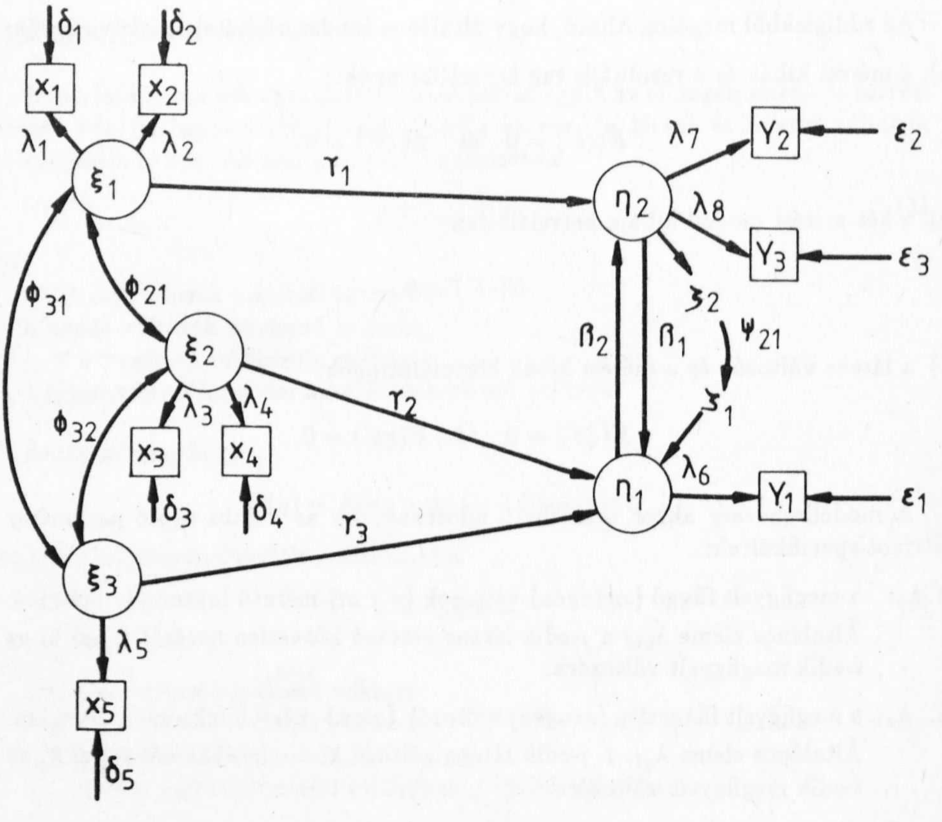
5. Φ: a látens exogén változók $(n \times n)$-méretű kovariancia (korreláció) mátrixa

6. Ψ: a reziduális változók (ς) $(m \times m)$-méretű kovariancia (korreláció) mátrixa

7. Θ_ε: a megfigyelt endogén változók (y) hibájának $(p \times p)$-méretű kovariancia mátrixa

8. Θ_δ: a megfigyelt exogén változók (x) hibájának $(q \times q)$-méretű kovariancia mátrixa

A paraméter mátrixok előállítására példaként tekintsünk egy olyan modellt, amely három látens exogén változót (ξ_1, ξ_2, ξ_3) és két látens endogén változót (η_1, η_2) tartalmaz a 2. ábrán látható séma szerint.



2. ábra. Példa a paramétermátrixok előállítására.

A mérési modellek

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & \lambda_4 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_6 & 0 \\ 0 & \lambda_7 \\ 0 & \lambda_8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

A strukturális modell

$$\begin{pmatrix} 1 & -\beta_1 \\ -\beta_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \gamma_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix}$$

A látens exogén és reziduális változók kovariancia mátrixa:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_{11} & & \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & \\ \Phi_{31} & \Phi_{32} & \Phi_{33} \end{pmatrix} \qquad \Psi = \begin{pmatrix} \Psi_{11} & \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} \end{pmatrix}$$

A megfigyelt változók mérési hibáinak kovariancia mátrixai:

$$\Theta_\varepsilon = \begin{pmatrix} \Theta_{\varepsilon 11} & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_{\varepsilon 22} & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_{\varepsilon 33} \end{pmatrix} \qquad \Theta_\delta = \begin{pmatrix} \Theta_{\delta 11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_{\delta 22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_{\delta 33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Theta_{\delta 44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Theta_{\delta 55} \end{pmatrix}.$$

1.1. A strukturális egyenletek redukált formája

A strukturális egyenletből könnyen eljutunk a redukált formához, mert feltételeztük, hogy B nem szinguláris. Így

$$B\eta = \Gamma\xi + \zeta\,,$$

ebből

$$\eta = D\xi + \zeta_r\,,$$

ahol:

$$D = B^{-1}\Gamma \quad \text{és} \quad \zeta_r = B^{-1}\zeta\,.$$

A D mátrix a redukált forma együtthatóit tartalmazza. A függő változók (η) variancia-kovariancia mátrixa:

$$C = E(\eta\eta') = E[(B^{-1}\Gamma\xi + B^{-1}\varsigma)(B^{-1}\Gamma\xi + B^{-1}\varsigma)'] .$$

Mivel

$$E(\xi\xi') = \Phi; \qquad E(\varsigma\varsigma') = \Psi$$

és

$$E(\xi\varsigma') = E(\varsigma\xi') = 0 ,$$

azt kapjuk, hogy

$$C = D\Phi D' + B^{-1}\Psi B^{-1'} .$$

1.2. A megfigyelt változók variancia-kovariancia mátrixa

Képezzük a függő és független megfigyelt változókból a következő vektort: $z = [y, x]$ és tételezzük fel, hogy a megfigyelt változókat az átlaguktól való eltérésekkel mértük. Ekkor

$$\Sigma = E(zz') = \begin{pmatrix} E(yy') & E(yx') \\ E(xy') & E(xx') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma_{yy} & \Sigma_{yx} \\ \Sigma_{xy} & \Sigma_{xx} \end{pmatrix} .$$

Σ különböző blokkjait a következőképpen kaphatjuk meg:

$$\Sigma_{yy} = E(yy') = E[(\Lambda_y\eta + \varepsilon)(\Lambda_y\eta + \varepsilon)'] .$$

Mivel

$$E(\eta\eta') = C \qquad E(\varepsilon\varepsilon') = \Theta_\varepsilon$$

és

$$E(\eta\varepsilon') = E(\varepsilon\eta') = 0 ,$$

így

$$\Sigma_{yy} = \Lambda_y C \Lambda_y' + \Theta_\varepsilon .$$

Hasonló módon határozható meg Σ többi blokkja is:

$$\Sigma_{yx} = E(yx') = E[(\Lambda_y\eta + \varepsilon)(\Lambda_x\xi + \delta)'] ,$$

mivel

$$E(\eta\xi') = D\Phi \quad \text{és} \quad E(\eta\delta') = E(\varepsilon\xi') = E(\varepsilon\delta') = 0 ,$$

így

$$\Sigma_{yx} = \Lambda_y D\Phi\Lambda_x' = \Sigma_{xy} .$$

Σ_{xx} diagonális blokk a következő:

$$\Sigma_{xx} = E(xx') = E[(\Lambda_x\xi + \delta)(\Lambda_x\xi + \delta)'] ,$$

$$E(\xi\xi') = \Phi; \qquad E(\delta\delta') = \Theta_\delta$$

és

$$E(\xi\delta') = E(\delta\xi') = 0 ,$$

ezért

$$\Sigma_{xx} = \Lambda_x\Phi\Lambda_x' + \Theta_\delta .$$

A fentiek alapján a megfigyelt változók variancia-kovariancia mátrixa a következő:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Lambda_y C\Lambda_y' + \Theta_\varepsilon & \Lambda_y D\Phi\Lambda_x' \\ \Lambda_x\Phi D'\Lambda_y' & \Lambda_x\Phi\Lambda_x' + \Theta_\delta \end{pmatrix} .$$

Megállapítható, hogy a megfigyelt változók variancia-kovariancia mátrixa (Σ) a korábbiakban specifikált nyolc paraméter mátrix közötti kapcsolatot írja le. Ez azt jelenti, hogy az általános modell eredményei tartalmazzák a különböző speciális eseteket is.

Az eddigiekben feltételeztük, hogy a változókat a várható értéküktől vett eltérésekkel mértük. Gyakran célszerű standardizált változók alkalmazása. Tekintsük azt az esetet, amikor a látens változók standardizáltak.

Az η és ξ változók standardizált alakjához jutunk az A_η^{-1} és A_ξ^{-1} mátrixokkal való szorzás útján, ahol

$$A_\eta = (\mathrm{diag}C)^{1/2} \quad \text{és} \quad A_\xi = (\mathrm{diag}\Phi)^{1/2} .$$

A paraméter mátrixok standardizált látens változók esetén a következőképpen transzformálódnak:

$$\begin{aligned} \Lambda_y^* &= \Lambda_y A_\eta \\ \Lambda_x^* &= \Lambda_x A_\xi \\ B^* &= A_\eta^{-1} B A_\eta \\ \Gamma^* &= A_\eta^{-1}\Gamma A_\xi \\ \Phi^* &= A_\xi^{-1}\Phi A_\xi^{-1} \\ \Psi^* &= A_\eta^{-1}\Psi A_\eta^{-1} \end{aligned}$$

A látens változókhoz hasonlóan a megfigyelt változókat is standardizálhatjuk.

Megjegyezzük, hogy standardizált változók esetén a variancia-kovariancia mátrix megegyezik a korrelációs mátrixszal, és a standardizált együtthatókat útegyütthatóknak nevezzük.

1.3. Identifikáció

Feltételezzük, hogy a megfigyelt változók együttes valószinüségeloszlása normális, az eloszlás jól jellemezhető az első és második momentumokkal, $z = [y, x]$ eloszlását a $\Lambda_y, \Lambda_x, B, \Gamma, \Phi, \Theta_\varepsilon, \Theta_\delta$ paraméterektől függő kovariancia mátrix (Σ) jellemezze.

Jelölje Π vektor az előbbi paramétereket és legyen t a vektor komponenseinek száma.

A kovariancia mátrix általános eleme: $\sigma_{ij} = f_{ij}(\Pi)$. Feltételezzük, hogy f_{ij} és az első deriváltja folytonos, a kovariancia mátrix pedig pozitív definit a paramétertér minden pontjában.

Egy specifikált modell, egy adott struktúra egy és csak egy Σ-t generál, de különböző struktúrák generálhatják ugyanazt a Σ-t, ezeket empirikusan ekvivalens struktúrának nevezzük.

Ha egy paraméter az összes ekvivalens rendszerben ugyanazt az értéket veszi fel, akkor identifikálható. Ha a modell valamennyi paramétere identifikálható, akkor a modellt identifikálónak nevezzük.

Az identifikálhatóság szükséges feltétele a

$$t \leq \frac{1}{2}(p+q)(p+q+1)$$

reláció teljesülése.

Ha valamely paraméter a Σ mátrixból egyértelműen meghatározható, a kérdéses paraméter identifikálható. Ha egy paraméter többféleképpen is meghatározható az ún. túlidentifikáltság esete áll fenn.

A $\sigma_{ij} = f_{ij}(\Pi)$ egyenletek gyakran nem lineárisak explicit megoldás így ritkán adható.

Az identifikálhatóságot az ún. információs mátrix alapján vizsgáljuk. (Maximum-likelihood becslés esetén ez a becslő függvény második deriváltja.) Ha az információs mátrix pozitív definit, a modell identifikálható; ha szinguláris, akkor a modell nem identifikálható, és az információs mátrix rangja alapján állapítható meg, hogy mely paraméterek nem identifikálhatók.

1.4. A paraméterek becslése

Feltételezzük, hogy a megfigyelt változók eloszlása a várható értékekkel és a kovariancia mátrixszal jellemezhető. A Σ kovariancia mátrix a Π paraméterek függvénye, amelyeket az n-elemü független minta alapján becsülünk.

Jelölje a megfigyelt változók (x, y) mintabeli kovariancia mátrixát S. A becslés problémája a Σ paraméter-mátrix illesztése a mintabeli S kovariancia mátrixhoz. Az illesztésre három eljárást mutatunk be:

a) minimalizáljuk a megfigyelt és a modell által reprodukált varianciák-kovarianciák különbségeinek négyzetösszegét:

$$U = \frac{1}{2} tr(S - \Sigma)^2 .$$

Ez a közismert legkisebb négyzetek módszere (OLS).

b) az általánositott legkisebb négyzetek módszere (GLS) a súlyozott legkisebb négyzetösszeget minimalizálja:

$$G = \frac{1}{2} tr[W(S - \Sigma)]^2 .$$

Ha a súlymátrix (W) egységmátrix, akkor visszakapjuk az előbbi esetet. A gyakorlatban súlymátrixként S^{-1}-t szokás alkalmazni. A fenti két eljárás a változók eloszlására nem tesz kikötést, a becslés egyenletenként történik.

c) a maximum-likelihood becslésnél Σ adott értékeire ismernünk kell S sűrűségfüggvényét. Ha ismert az x és y változók eloszlása, akkor S sűrűségfüggvénye meghatározható, jelölje ezt $f(S \mid \Sigma)$, ebben a függvényben a Π paramétervektor az ismeretlen.

A mintából számított S kovariancia mátrix elemeinek helyettesítésével jutunk a maximum-likelihood függvényhez (L).

Feltételezve, hogy a megfigyelt változók eloszlása normális, a likelihood függvény logaritmusa (konstanstól eltekintve) a következő:

$$\log L = -[\log \mid \hat{\Sigma} \mid + tr(S\hat{\Sigma}^{-1})] .$$

Jöreskog (1970) az F függvény minimalizálását javasolta a becsléshez:

$$F = \log \mid \hat{\Sigma} \mid + tr(S\hat{\Sigma}^{-1}) - \log \mid S \mid - (p + q) .$$

Az F függvény minimuma ugyanazt az értéket adja Π becslésére, mint az L függvény maximuma, mivel

$$F = -c_1(\log L + c_2) ,$$

ahol c_1 és c_2 konstansok és $\log L$, illetve $c_1(\log L + c_2)$ függvény maximuma megegyezik $F = -c_1(\log L + c_2)$ minimumával.

Az F függvény minimalizálása elvégezhető a *Fletcher–Powell* (1963) iterációs eljárással, amely egy választott kezdőpontból indulva gyors konvergenciát biztosít a lokális minimumhoz. Ha több minimumhely létezik, nem garantálja a globális optimumot, ennek elérése függ a kezdőpont megválasztásától. Az eljárás a paraméterek szimultán becslését adja.

1.5. A modell tesztelése

Ha a paraméterek maximum-likelihood becslését az F-függvény alapján végezzük, akkor NF_0 nagy minta esetén χ^2 eloszlású lesz.

$$d = \frac{1}{2}(p+q)(p+q+1) - t$$

szabadságfokkal, ahol

t: a paraméterek száma a H_0 hipotézisben
F_0: az F függvény minimuma
N: a minta elemszáma.

A H_0 hipotézist $(S = \hat{\Sigma})$ elfogadjuk, ha a modellből számított NF_0 érték kisebb χ^2 kritikus értékénél a választott szignifikancia szint mellett, egyébként elutasítjuk. Utóbbi esetben szükséges a modell módosítása.

2. Az általános modell speciális esetei

Az általános LISREL modellnek több speciális esete lehetséges, attól függően, hogy a modell egyes blokkjaira – a mérési és a strukturális egyenleteket tartalmazó alrendszerekre – milyen feltételezésekkel élünk, a szereplő változókat hogyan specifikáljuk. A feltételezések vonatkozhatnak csak a mérési vagy csak a strukturális egyenleteket leíró alrendszerekre vagy ezek együttesére. Ettől függően változik a modell értelmezése, becslése is.

A következőkben eltekintünk az egyes esetek részletezésétől, először bemutatjuk a háromféle feltételezésnek megfelelő modell típusokat, majd példaként a gyakorlatban jól ismert faktormodell esetet részletesen tárgyaljuk.

2.1. A faktormodell

A faktorelemzésben a megfigyelt változók (x) valódi értékeit (τ) a látens változók függvényeként fejezzük ki. A látens változók között vannak, amelyek több megfigyelt változó előállításában is szerepelnek, ezeket közös faktoroknak (ξ) nevezzük, és vannak olyanok, amelyek csak egy-egy változó reprodukálásában játszanak szerepet, ezeket egyedi faktoroknak (u) nevezzük.

Feltételezések a		
mérési blokkra	strukturális blokkra	mérési és strukturális blokkra
- klasszikus mérési modell	- variancia-kovariancia komponens modell	- többváltozós kauzális modell
- többjellemzős modell	- faktormodell	- több csoportos szimultán modell
	- másodrendü faktormodell	
	- regressziós modell	
	- út elemző modell	

A faktorelemzés matematikai modellje:

$$x_i = \tau_i + e_i$$

$$\tau_i = \lambda_{i1}\xi_1 + \lambda_{i2}\xi_2 + \ldots + \lambda_{im}\xi_m + u_i\,,$$

ahol:

e_i: az i-edik megfigyelt válózó mérési hibája
τ_i: az i-edik megfigyelt változó valódi értéke
ξ_j: a j-edik közös faktor (látens változó)
u_i: az i-edik egyedi faktor
λ_{ij}: a j-edik közös faktorhoz tartozó faktorsúly az i-edik megfigyelt változóra
$\delta_i = u_i + e_i$: az i-edik mérési hiba és az i-edik egyedi faktor összege.

Feltételezzük, hogy: $E(x_i) = o$, $E(\xi_j) = o$, $E(e_i) = o$, $E(u_i) = o$ $\forall i, j$-re

valamint: $E(\xi_j u_i) = o$, $E(\xi_j e_i) = o$ $\forall i, j$-re.

A faktorelemzés modellje mátrix-aritmetikai jelölésekkel:

$$x = \Lambda_x \xi + \delta$$

ahol:

$$\delta = u + e \quad E(x) = 0, \quad E(\xi) = 0, \quad E(\delta) = 0, \quad E(\xi\delta') = 0$$

$$E(\delta\delta') = \Theta_\delta$$

diagonális.

A modellben feltételezzük, hogy (1) a mérési hiba változói korrelálatlanok egymással $E(e_i e_j) = 0$, (2) az egyedi faktorok korrelálatlanok egymással $E(u_i u_j) = 0$, (3) a közös faktorok korrelálatlanok δ-val, $E(\xi\delta') = 0$.

A modell paraméter-mátrixai: Λ_x, Φ és Θ_δ.

A variancia-kovariancia mátrix a paraméterek függvényében:

$$\Sigma = \Lambda_x \Phi \Lambda_x' + \Theta_\delta \, .$$

A gyakorlatban legtöbbször az exploratív elemzésekben feltételezzük, hogy $\Phi = I$, vagyis a közös faktorok korrelálatlanok. Az exploratív faktorelemzés során általában a következő kérdéseket kell megválaszolnunk:

1.) mennyi közös faktor szükséges a megfigyelt változók közötti korrelációk magyarázatához

2.) a faktorsúlyok között melyek szignifikánsak és melyek nem

3.) mi a faktorok elméleti tartalma.

Az első kérdés könnyen megválaszolható, mivel a különböző faktorszámú modellek szignifikanciáját χ^2 próbával tesztelhetjük, és így megtalálhatjuk a faktoroknak azt a számát, amelyet tovább növelve a modell illeszkedése szignifikánsan tovább nem javítható.

A második kérdés a rotált faktorsúlyok standard hibájának számításával válaszolható meg, a módszer azonban elég bonyolult, így a gyakorlati alkalmazása korlátozott. Ennél egyszerűbb eljárást javasol *Jöreskog* (1978), amit „legjobban illeszkedő egyszerű struktúrá"-nak nevezett el.

A harmadik kérdés megválaszolásához a szignifikáns faktorsúlyok mellett a szakmai ismeretek kapnak nagy szerepet. A konfirmatív faktorelemzés alapvetően abban különbözik az exploratív faktorelemzéstől, hogy az előbbieknél a faktorstruktúrát a priori-elméleti vagy korábbi empirikus vizsgálatok alapján ismertnek tételezzük fel, míg az utóbbinál a faktor-struktúrát az elemzés során, a vizsgált adatokból származtatjuk.

3. Látens változók út-elemzése [LVPLS]

(Latent Variable Path Analysis for Partial Least Square method)

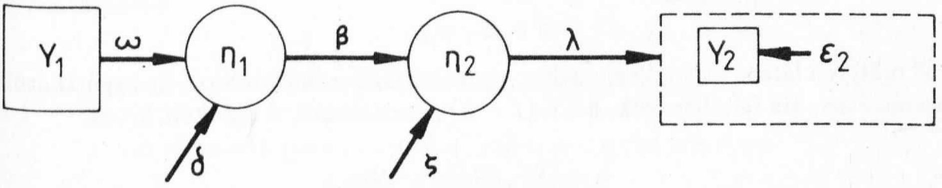
LVPLS a látens változók közötti kauzális kapcsolatok elemzésére kifejlesztett speciális modell. Az általános LISREL modell melletti tárgyalását indokolja, hogy az alkalmazások során kiemelkedő jelentősége van, speciális feltevései a teljes modellrendszert érintik, becslési eljárásként a parciális legkisebb négyzetek elvét alkalmazza.

A továbbiakban a rövid tárgyalás során elsősorban az eltérésekre térünk ki.

3.1. A modell egyenletei

Az út-modell sémáját a 3. ábra mutatja, ahol

y_1, y_2: a megfigyelt változók halmaza
η_1, η_2: a látens változók halmaza
β: útegyütthatók
λ: az endogén megfigyelt változók faktorsúlyai
ω: az exogén megfigyelt változók regressziós súlyai
ς: a látens endogén válrozók reziduális komponensei
δ: a látens exogén változók reziduális komponensei
ε_2: az exogén megfigyelt változók mérési hibái.



3. ábra. Az út modell

A modell három egyenletből áll:

a) a látens változók közötti strukturális egyenlet (út-egyenlet)

$$\eta = B\eta + \varsigma .$$

Feltételezzük, hogy

$$E(\eta) = 0, \quad E(\varsigma) = 0, \quad E(\eta\varsigma') = 0 .$$

b) a megfigyelt endogén változók mérési modellje:

$$y = \Lambda\eta + \varepsilon ,$$

ahol

Λ: a megfigyelt változóknak a látens változókra vonatkozó faktorsúly mátrixa
ε: a megfigyelt változók mérési hibája.

Feltételezzük, hogy

$$E(y) = 0, \quad E(\varepsilon) = 0, \quad E(\eta\varepsilon') = 0 .$$

c) a súly-egyenlet a látens változókat a megfigyelt változók regressziós függvényeként állítja elő:

$$\eta = \Omega y + \delta ,$$

ahol

Ω: a regressziós együtthatók mátrixa
δ: a látens változók reziduális tagja.

Feltételezzük, hogy

$$E(\delta) = 0, \quad E(y, \delta') = 0 .$$

3.2. *A strukturális egyenlet redukált formája*

A strukturális egyenlet

$$\eta = B\eta + \varsigma .$$

A B mátrix a látens változók egymásra gyakorolt közvetlen hatásait, út-együtthatóit tartalmazza. Ha feltételezzük, hogy $(I - B)$ invertálható, a redukált forma:

$$\eta = (I - B)^{-1}\varsigma = B^{*}\varsigma$$

A redukált forma B^{*} mátrixa a látens változók egymásra gyakorolt teljes hatásait tartalmazza. A teljes és közvetlen hatások különbsége a közvetett hatás:

$$B^{+} = B - B^{*} .$$

Hasonlóan kifejezhető a látens változóknak a megfigyelt változókra vonatkozó teljes és közvetett hatása is:

$$y = \Lambda\eta + \varepsilon = \Lambda B^{*}\varsigma + \varepsilon = \Lambda^{*}\varsigma + \varepsilon ,$$

ahol

Λ : a közvetlen hatások mátrixa
Λ^{*}: a teljes hatások mátrixa.

A közvetett hatások mátrixa:

$$\Lambda^{+} = \Lambda - \Lambda^{*} .$$

3.3. *A paraméterek becslése*

A modell paraméterei:

B: a látens változók út-együtthatóinak mátrixa
Λ: a megfigyelt változók faktorsúlymátrixa
Ω: a látens változók súly együtthatóinak mátrixa
Ψ: a látens változók reziduális tagjainak kovariancia mátrixa.

A paramétereket a parciális legkisebb négyzetek módszerével becsüljük. A módszer lényege, hogy a paramétereket részhalmazokra bontja, és az egyes partíciókat a legkisebb négyzetek kritériuma szerint becsüli, miközben a többi paraméter ismert, rögzíitett értékkel szerepel.

A becslési módszer (PLS) alkalmazásának feltételei:

a) a megfigyelt változók egymást át nem fedő blokkokra particionáltak,

b) a látens változók is egymást át nem fedő blokkokra particionáltak, és egy látens változó blokk csak egy megfigyelt változó blokkhoz kapcsolódhat,

c) a strukturális egyenlet (út-modell) rekurzív.

A becslés illeszkedése a megfigyelt változók normális együttes eloszlása esetén χ statisztikával, egyébként a speciálisan e célra definiált megbízhatósági indexek alapján mérhető.

4. Gyakorlati alkalmazás (LVPLS)

A vízkészlet mint természeti erőforrás szerepe a magyar gazdaság növekedésében

Bemutató példánk mögött több lépcsőben elvégzett számítássorozat áll. A szereplő 63 változó 1930-80 évekre vonatkozó 50 éves idősorait már évekkel ezelőtt sokrétű statisztikai vizsgálat alá vetették. Az előzőekben tárgyalt általános lineáris modell szemléletében öt változatban építettük fel a modell rendszert. Ismertetni mindössze egy gondolatsort szeretnénk, célunk az elemzésben leírtakkal való kapcsolat, s a kérdésfeltevések, válaszok hangsúlyozása lesz. A 63 változót faktoranalízissel 38-ra tömörítettük, – az információtartalom 95%-ának megtartásával.

Fogalmazzuk meg először alapvető kérdésünket. A víznek mint térben és időben korlátos, de megújuló természeti erőforrásnak az igénybevétele hogyan hat a gazdasági fejlődés pályáira? Milyen számszerű összefüggések ismerhetők fel a különböző struktúrákból felépített rendszerekben? A vizsgálatokban szereplő alapvető struktúrák: a népgazdaság, az ipar, a mezőgazdaság, az infrastruktúra, a vízgazdalkodás. Az éppen bemutatásra kerülő modellváltozatban csak az utóbbi négy kategória szerepel. Az első négy struktúrát endogén, a vízgazdálkodást exogén mérési változókkal írjuk le.

Meggondolásaink két alaphipotézisre támaszkodnak:

1.) A vízkészlet igénybevétele nem függ a többi struktúra kölcsönhatásától. (Valójában ugyanis a népgazdasági irányítás a víz többcélú használatától, illetve a víz társadalmi-gazdasági körforgására épülő gazdaságszabályozás rendszerétől lényegében eltekint.)

2.) A vízkészlet igénybevétele a többi szereplő struktúra hatékonyságán keresztül befolyásolja a makrogazdaság növekedési pályáit.

Nézzük meg most figyelmesen az alábbi három sémát: (4. ábra)

- Az első az LVPLS (3.1. pontban már bemutatott) vázlatos felépítése, a szemléletes összehasonlítás érdekében megismételtük.

- A második a bemutatásra szánt konkrét modell változat, a közvetlen gyakorlati felépítésében.

- A harmadik séma a második azonos átalakítása, hogy formálisan is megfeleljen az első szerkezetének.

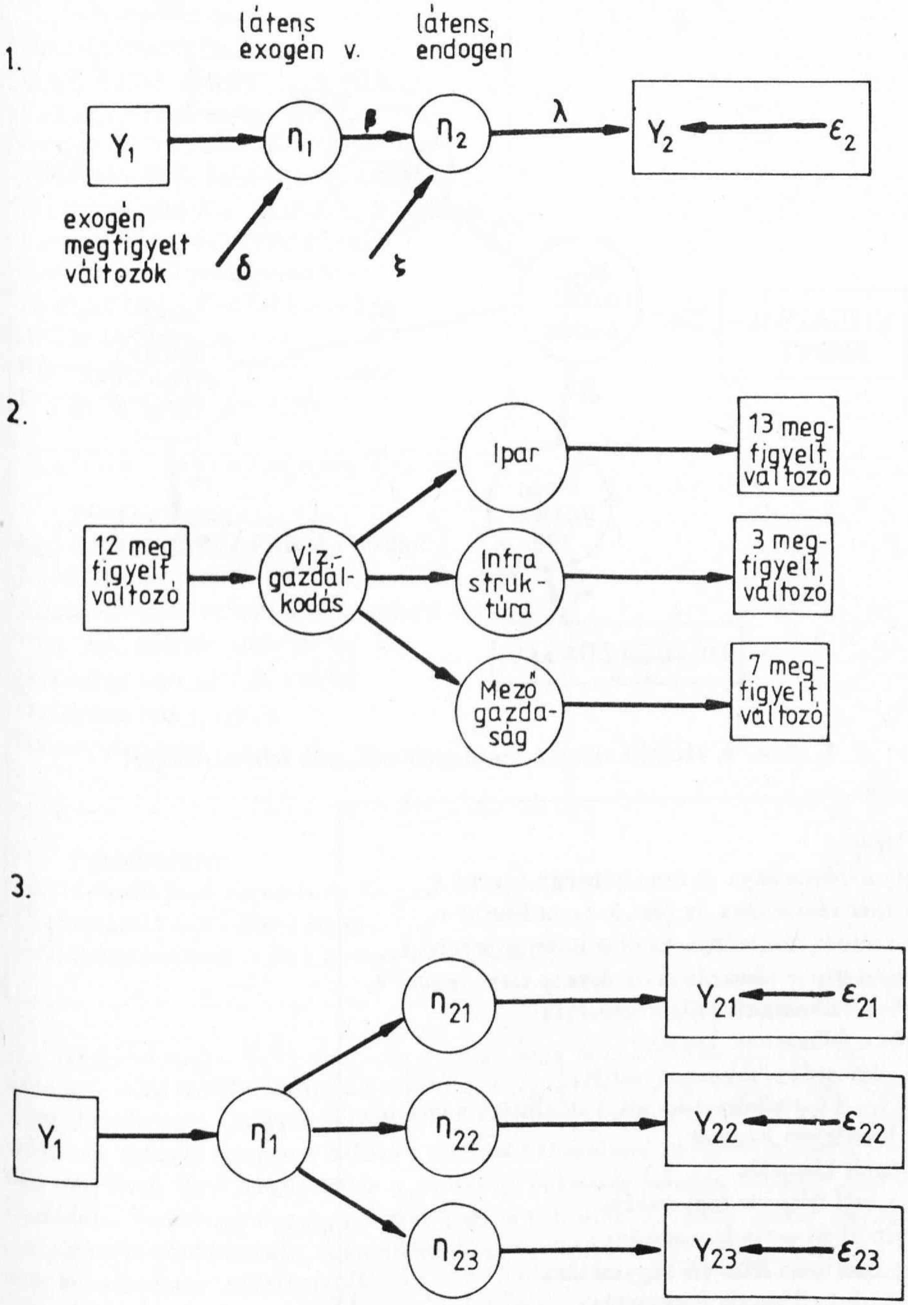
A megfeleltetés tehát a következő:

η_1: vízgazdálkodás (látens exogén változó)
η_{21}: ipar (látens endogén változó)
η_{22}: infrastruktúra (látens endogén változó)
η_{23}: mezőgazdaság (látens endogén változó)

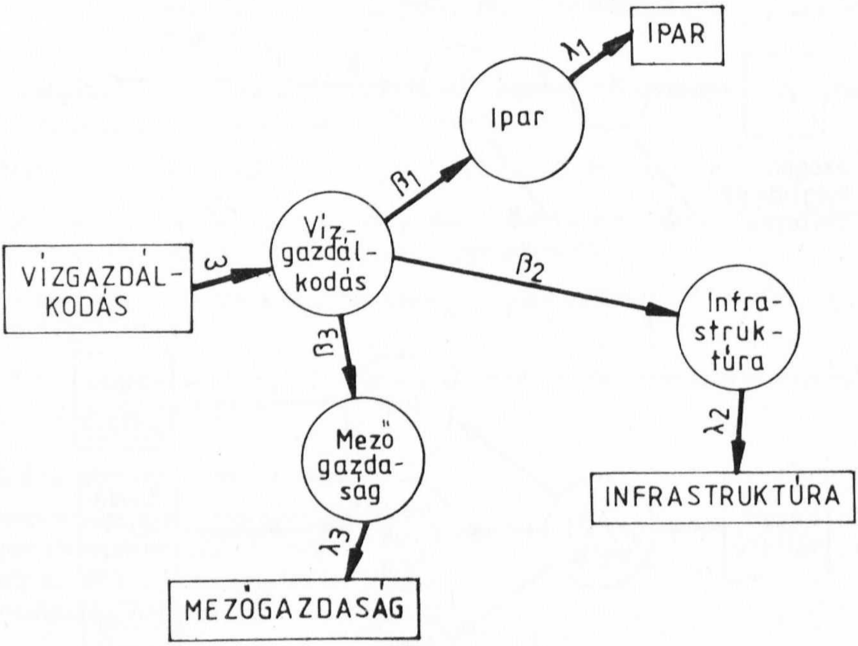
η_2 tehát három részre bomlik, $\eta_{21}, \eta_{22}, \eta_{23}$-ból tevődik össze. Az $Y_1, Y_{21}, Y_{22}, Y_{23}$ szimbólumokba összefoglalt exogén, illetve endogén mérési változó csoportokat a rövidség kedvéért külön nem soroljuk fel, a következő eredmény sémán viszont rendre feltüntetjük őket. (5. ábra)

Nézzük most meg, hogyan vonhatók le az eredményből következtetések. Mindenekelőtt felhívjuk a figyelmet, hogy az eredmény ábrán látható paraméterek értelmezéséhez célszerű ismét visszalapozni a 3.1. pont (LVPLS) alapsémájához, s az ott bejelölt *együtthatók meghatározásaira* támaszkodni.

A vízgazdálkodást leíró 12 megfigyelt változó mellett feltüntethetők volnának a paraméterértékek az exogén megfigyelt változók regressziós súlyai, (ω). Az alapmodell az η_1 szimbólumban rögzített látens változót az Y_1-ben lévő exogén megfigyelt változók regressziós függvényeként fejezi ki.



4. ábra. Modell sémák



5. *ábra.* A vizsgált séma a megfigyelt változók feltüntetésével

Ipar
Gépipar részaránya az össz.ip.beruh.bruttó é.
Vegyipar részaránya az össz.ip.term.bruttó é.
Könnyűipar részaránya az össz.ip.term.bruttó é.
Élelmiszeripar részaránya az össz.ip.term.bruttó é.
Iparban felhasznált villamosenergia
Iparban felhasznált benzín
Ipar részesedése a beruházásból
1000 ipari foglalkoztatott által előállított nemzeti jövedelem hányad
Bányavíz kiemelés
Kohászati friss-víz fogyasztása
Vegyipari friss-víz fogyasztása
Élelmiszeripari friss-víz fogyasztása
Energiaipar friss-víz fogyasztása

Vízgazdálkodás
Összes víztermelés kap.
Iparnak szolg.víz.energia ip.nélk.
Energiaiparnak szolg. víz
Szenny- és használt víz elvezető kap.
Védelmi művek kiépitettségi szinvon.
Közüzemi vízművel rendelk. települések
1 napra jutó ivóvíz felhasználás
Ipar közüzemi vízfogyasztása
Mezőgazdasági főművi kapacitás
Kohászat vízhasználata
Könnyűipar összes vízhasználata
Energiaipar vízhasználata

Mezőgazdaság
Egy számosállatra jutó mg-i terület
Növényterm. aránya a mg.nemzeti jöv.-ben
Állattenyésztés aránya a mg.nemzeti jöv.-ben
1 ha mg.területre jutó tejtermelés
Öntözésre berendezett terület
Öntözővíz felhasználás
Halastó területe

Infrastruktúra
1000 lakosra jutó követett út hossza
Csatornázott települések száma
Infrastruktúra részesedése az össz.beruházásból

Az $\eta_1 \rightarrow \eta_{21}$; $\eta_1 \rightarrow \eta_{22}$; $\eta_1 \rightarrow \eta_{23}$, vagy más fogalmazásban: vízgazdálkodás-ipar; vizgazdálkodás-infrastruktúra; vízgazdálkodás-mezőgazdaság kapcsolatokat (hatásokat), számszerüsítő útegyütthatók kifejezik a víz, mint természeti erőforrás, igénybevételének hatását, lineáris kapcsolatát az egyes struktúrák fejlődési pályáival. Ez a megállapítás a gazdasági fejlettség minden extenzív szakaszára kiadódott. Ennek az a magyarázata, hogy a víz, mint kollektív jószág általában a szabad javak közé tartozik, és használatának mechanizmusát gazdasági szempontból nem konzekvensen szabályozzák.

A séma másik oldalán azok a faktorsúlyok jelennek meg, amelyek a megfigyelt endogén változók előállítására szolgálnak az endogén látens változókból.

Számos változó volna felhasználható a látens változók helyettesítésére. Az együtthatók értékei alapján, előjelük figyelembevételével a megfelelő látens változó – s mögötte a víz – szerepe nyomon követhető.

Az eljárás használhatósága fokozott mértékben szembeötlő, ha a szereplő struktúrák változtatásával, a közöttük fennálló hipotetikus kapcsolatok irányainak variálásával adódó számítási eredeményeket elemezzük az *aktuális szaktudomány szemszögéből.* Az adatrendszerekhez legjobban illeszkedő reális modell elgondolások következetesen tesztelhetők.

(Beérkezett: 1986. december 5-én.)

Irodalom

1. BLALOCK, H.M. JR.: *Measurement in the social sciences.* Aldina Publishing Company, Chicago, 1974.
2. CHERNOFF, H. and DIVINY, N.: The computation of maximum-likelihood estimates of linear structural estimations. In: C.W. Hood and T.C. Koopmans (eds): *Studies in econometric method.* Wiley, New York, 1953, 236–302.
3. DUNCAN, O.D.: *Introduction to Structural Equation Models* Academic Press, New York–San Francisco–London, 1971, 1–180.
4. EVERITT, B.S.: An introduction to latent variable models. In: *Monographs on Statistics and Applied Probability,* Chapman and Hall, London–New York 1984, 1–107.
5. FLETCHER, R. – POWELL, M.: A rapidly convergent method for minimization. *Computer Journal,* 1963, 6. 163–168.
6. GOLDBERGER, A.S. and DUNCAN, O.D. (eds): *Structural equation models in the social scineces.* Seminar Press, New York, 1973, 85–112.
7. JÖRESKOG, K.G.: A general method for analysis of covariance structure. *Biometrika,* 1970, 57, 239–251.
8. JÖRESKOG, K.G. and WOLD, H. (eds): *Systems under indirect observation: Causality, Structure, Prediction:* North-Holland Publishing Company, Amsterdam–New York–Oxford, 1982.
9. JÖRESKOG, K.G.: Structural analysis of covariance and correlation matrix. *Psychometrika,* 1978, 43, 443–477.
10. LOHMOELLER, J.B.: Estimating parameters of linear structural relation models under partial least-squares criteria. Paper presented at the annual meeting of the American Research Association, San Francisco, April 1979.
11. SCOTT LONG, J.: Covariance structure models. An Introduction to LISREL. In Series: *Quantitative Applications in the Social Sciences,* Sage University Papers, 1983. 1–95.
12. WOLD, H.: Estimation of principal components and related models by iterative least squares. In: P.R. Krishnaiah (ed.): *Multivariate analysis,* Academic, New York, 1966.

A General Linear Model of Structural Relations: LISREL

The article presents the general scheme of the LISREL model which describes the relationship among two sets of observable and two sets of latent variables as well as between measurement errors and residuals. The tools are factor analysis and regression analysis. The analytical formulation of partial models, the problems of estimation, identification and testing as well as special cases of the model are also discussed. The general nature of the model is well explained by the reasoning about the path-analysis of the latent variables – presented in the second part of the article.

The paper ends with a review of a practical applications taken from the area of water management.