

## A termésátlag ingadozása: a törvényszerűségek matematikai elemzése

### Bevezetés

A termésátlag ingadozásának és a hozzá kapcsolódó bizonytalanságnak a figyelembe vétele a gazdasági tervezés és irányítás fontos kérdése, ezért is foglalkoznak világszerte — sokféle módszert alkalmazva — ennek vizsgálatával, törvényszerűségeinek feltárásával.

A matematikai modellezési módszerek a hozamot többé-kevésbé véletlen mennyiségnek, valószínűségi változónak tekintik, és különböző modellek segítségével az adott adattömbben rejlő törvényszerűségek feltárására törekszenek. Ilyen irányú vizsgálatokat végeztek a [4—13] munkák is. A Markov-láncok alkalmazásával [10] már nemcsak a hozamok várható alakulása, eloszlása, hanem annak struktúrája és az egyes hozamkategóriák belső változásainak dinamikája is modellezhetővé vált. A modellezésben további fejlődést jelentett az átmenetvalószínűségek időbeli állandóságának, a homogenitás feltételeinek feloldása, és az átmenetvalószínűségi mátrix változásainak magyarázó változók függvényével történő becslése [3, 7, 10].

Ez a dolgozat továbbfejleszti az átmenetvalószínűségek változását vizsgáló modellt, speciális eseteként a régi modellt is megkapjuk. A módosítás lényege, hogy a fuzzy elmélet fogalmaival a hozamváltozás folytonos jellegét a termelőegységek osztályok közti mozgásának modellezésében az eddigieknél jobban figyelembe tudjuk venni. Elsősorban a matematikai háttérrel kívánunk foglalkozni, és csak röviden térünk ki konkrét számítások ismertetésére. Az eredmények elemzése és a közgazdasági következtetések levonása a kutatásban részt vevő közgazdász és mezőgazdász kollégák feladata.<sup>1</sup>

Ezúton mondunk köszönetet *Sebestyén Józsefnek*, aki ezt a kutatási irányt sok évvel ezelőtt elindította, azóta is összefogta, irányította és a folytonos előrelépést segítette.

### I. Fuzzy szemléletmód

A bizonytalan, elmosódott határú, pontatlanul „definiált” halmazokat a köznap szóhasználat nagyon jól ismeri és használja, például amikor „idős” emberekről, „élenjáró” termelőkről, „hatékonyan” dolgozókról stb. van szó. Valóban, ezek a tulajdonságok egy-egy adott összesség, alaphalmaz (embercsoport, termelőegységek) nem minden elemére egyértelműek, sőt, nem is egyértelműsíthetők. Ez a legtöbb esetben így van [17]. A leggyakrabban mégis

<sup>1</sup> Időközben elkészült egy részletesebb, eredményeket elemző-összefoglaló kutatási jelentés [18].

belekényszerítjük a dolgokat hagyományos halmazokba, például úgy, hogy kiválasztunk egyértelműen eldönthetőnek tartott tulajdonságokat, vagy — mérhető mennyiségek esetén — önkényes határértékekkel döntjük el, hogy mi legyen az alacsony, a közepes vagy éppen a magas érték.

Természetesen tudjuk, hogy ez a hagyományos logikai gondolkodásmódnak megfelelő eljárás nem igazán helyes. Ezért elemzésekben, vizsgálatokban egyre gyakrabban találkozni a fordított megközelítéssel: az összesség elemeinek hasonlósága, illetve különbözősége alapján képzett csoportokat próbálják meg több-kevesebb sikerrel azonosítani vagy elnevezni (clusteranalízis).

A fuzzy szemléletmód ettől alapvetően eltér. Azt vizsgálja, hogy egy bizonyos, „pontatlanságot” is magában hordozó tulajdonságcsoporthoz mennyire igaz az alaphalmaz elemeire nézve. Ezt egy ún. tartalmazási függvényen (membership function, Zugehörigkeitsfunktion) keresztül adja meg. A függvényérték azt jelzi, hogy az adott elem mennyire tartozik az adott tulajdonságcsoporthoz, azaz csak bizonytalanul körvonalazott összességhez, „halmazhoz”. Ezt a halmazhoz tartozási értéket általában szakértői vélemények alakítják, így bár ez is szubjektív, mégis a valóság árnyaltabb visszatükrözésére képes. Például az alábbi tartalmazási függvényrel a „magas kukoricahozamú gazdaságok” halmazát tudjuk jellemezni: az  $x$  t/ha-os hozamot elért gazdaság

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & x < 8 \\ (x - 8)/2 & 8 \leq x \leq 10 \\ 1 & 10 < x \end{cases}$$

értékkel tartozik ebbe a csoportba.

Az átmenetvalószínűség fogalmára építve tanulmányozhatjuk egy rendszer átmeneteit előre meghatározott állapotai közt és az így visszatükrözött struktúraváltozásokat. Ehhez csupán az állapotok meghatározása, valamint az egyes időpontokhoz tartozó állapot- és átmenetvalószínűségek megadása (számszerűsítése) szükséges. Ezért a mezőgazdasági termelőegységeknek a hagyományos „től-ig” hozamkategóriák közti mozgását különösebb matematikai-módszertani nehézség nélkül vizsgálhatjuk. Korábbi számításainknál ([7, 10, 12]) a matematikai feladat az volt, hogy meg kellett teremteni az átmenetvalószínűségi mátrix-sorozat függvényközelítésének és előrejelzésének a lehetőségét. Ezt a 3. pontban ismertetjük.

A fuzzy elmélet alapján érzékenyebb, valósághoz hívebb modelleket készíthetünk, esetünkben a termésátlag *folytonos* változását visszatükrözni képes, véges „állapottér” (fuzzy partíció) vezethető be. Ez pedig mind az átmenetek, mind a struktúraváltozás pontosabb leírását teszi lehetővé. Ezzel a metodikával a klasszikus intervallumosztályokon belüli, tehát eddig érzékelhetetlen termésátlag-ingadozásokat is változásként, átmenetként kezelhetjük; míg a kicsiny, de hagyományos osztályhatárt átlépő, tehát eddig átmenetként érzékelt változásokat a nekik megfelelő jóval kisebb mértékben vehetjük figyelembe.

A továbbiakban először áttekintjük a szükséges fuzzy fogalmakat és tulajdonságaikat, a szükséges valószínűségszámítási fogalmak megfelelő általánosításait, a fuzzy állapotok közti átmenetek értelmezését, valamint egy sztochasztikus mátrix-sorozat függvényközelítésére alkalmas eljárást. Ezután a búza- és kukoricahozam alakulásának vizsgálatára felállított konkrét modellekkel foglalkozunk, végül pedig az ezekből nyerhető eredményekről szólunk.

## 2. Fuzzy alapfogalmak, tulajdonságok

### 2.1. Fuzzy halmazok, műveletek

A fuzzy halmaz fogalma a klasszikus halmaz fogalmának általánosítása a karakterisztikus függvény  $\{0, 1\}$  értékkészletének kibővítése által. A fogalmat ZADEH [16] vezette be és a rá épülő matematikai elmélet nagyon szerteágazó (ld. például [1]). [14] bevezető jellegű összefoglalást tartalmaz.

Legyen  $X$  egy tetszőleges alaphalmaz. Az  $A \subset X$  részhalmaz karakterisztikus függvénye,  $\chi_A: X \rightarrow \{0, 1\}$ ,

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \in A \cap X \\ 0 & \text{ha } x \in \bar{A} \cap X. \end{cases}$$

$X$  hagyományos részhalmazainak halmazát  $\mathfrak{S}(X)$  fogja jelölni. Ezeket éles határú halmazoknak is nevezzük.

*Definíció:* A  $X$  alaphalmaz  $A$  fuzzy részhalmaza alatt az

$$A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X, \mu_A: X \rightarrow [0, 1]\}$$

halmazt értjük, ahol  $\mu_A$  adott függvény.  $\mu_A$ -t tartalmazás függvénynek nevezük. Az  $X$  halmaz fuzzy részhalmazainak halmazát  $\bar{\mathfrak{S}}(X)$ -el jelöljük.  $A, B \in \bar{\mathfrak{S}}(X)$  fuzzy halmazok esetén azt mondjuk, hogy az  $A$  része a  $B$ -nek ( $A \subseteq B$ ), ha  $\mu_A(x) \leq \mu_B(x) \quad \forall x \in X$ .

Nyilvánvaló, hogy az  $A \in \bar{\mathfrak{S}}(X)$  fuzzy halmaz, valamint a  $\mu_A$  tartalmazási függvény egymást kölcsönösen feltételezi és meghatározza. Ezért igen gyakran csak a tartalmazási függvényekkel dolgozunk.

A hagyományos  $A \in \mathfrak{S}(X)$  részhalmazok karakterisztikus függvényei természetesen tartalmazási függvénynek is felfoghatóak és a hagyományos halmazok azonosíthatóak a  $\{(x, \chi_A(x)) \mid x \in X\}$ -típusú fuzzy halmazokkal. Ennek megfelelően az alaptér és az üres halmaz mindig fuzzy halmaz is,  $X, \emptyset \in \bar{\mathfrak{S}}(X)$  és tartalmazási függvényük:

$$\mu_X(x) = \chi_X(x) = 1; \quad \mu_\emptyset(x) = \chi_\emptyset(x) = 0 \quad \forall x \in X.$$

Gyakorlati feladatban sokszor előfordulhat, hogy valódi, éles határú részhalmazból kiindulva képezünk fuzzy halmazt. Ekkor az eredeti részhalmaz elbizonytalanításáról, az éles határ elmosásáról, fuzzysításról beszélhetünk.

*Definíció:* Azt mondjuk, hogy a  $B \in \bar{\mathfrak{S}}(X)$  fuzzy halmaz az  $A \in \mathfrak{S}(X)$  valódi részhalmaz fuzzysítása, ha

$$\sup_{x \in A} \mu_B(x) = 1, \quad \inf_{x \notin A} \mu_B(x) = 0,$$

továbbá

$$\inf_{x \in A} \mu_B(x) \geq \sup_{x \notin A} \mu_B(x).$$

Véges  $X$  alaphalmaz esetén ez azt jelenti, hogy  $\exists x \in A$ , melyre  $\mu_B(x) = 1$  és  $\exists z \notin A$ , melyre  $\mu_B(z) = 0$ , valamint az  $A$ -hoz tartozó elemek legalább akkora tartalmazási függvényértékkel bírnak, mint bármelyik  $A$ -hoz nem tartozó elem.

Könnyen belátható, hogy egy adott  $A \in \mathfrak{S}(X)$  halmaznak általában végtelen sok fuzziyosítása lehet, illetve egy fuzziy halmaz általában végtelen sok halmaz fuzziyosításának is tekinthető.

A fuzziy halmazműveletek bevezetése úgy célszerű, hogy a klasszikus halmazokat a karakterisztikus függvényükkel véve figyelembe, a műveletek eredménye egybeessen a hagyományos halmazműveletek eredményével.

Egyszerűen látható, hogy  $A, B \in \mathfrak{S}(X)$  esetén

$$\begin{aligned}\chi_{A \cup B} &= \max(\chi_A, \chi_B) = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B = \min(1, \chi_A + \chi_B); \\ \chi_{A \cap B} &= \min(\chi_A, \chi_B) = \chi_A \cdot \chi_B = \max(0, \chi_A + \chi_B - 1)\end{aligned}$$

továbbá, ha  $A \in \mathfrak{S}(X)$ , akkor

$$\chi_{\bar{A}} = 1 - \chi_A,$$

ezért az  $A, B \in \mathfrak{S}(X)$  fuzziy halmazok egyesítéseként a

$$(1) \quad \mu_{A \cup B} = \max(\mu_A, \mu_B) \quad \text{„unió”},$$

$$(2) \quad \mu_{A+B} = \mu_A + \mu_B - \mu_A \cdot \mu_B \quad \text{„összeg”},$$

$$(3) \quad \mu_{A \dot{\cup} B} = \min(1, \mu_A + \mu_B) \quad \text{„korlátos összeg”}$$

tartalmazási függvénnyel definiált fuzziy halmazok ( $A \cup B, A + B, A \dot{\cup} B \in \mathfrak{S}(X)$ ), illetve az  $\cup, +, \dot{\cup}$  műveletek, közös részként a

$$(4) \quad \mu_{A \cap B} = \min(\mu_A, \mu_B) \quad \text{„metszet”},$$

$$(5) \quad \mu_{AB} = \mu_A \cdot \mu_B \quad \text{„szorzat”},$$

$$(6) \quad \mu_{A \dot{\cap} B} = \max(0, \mu_A + \mu_B - 1) \quad \text{„korlátos metszet”},$$

az  $A \in \mathfrak{S}(X)$  komplementereként a

$$(7) \quad \mu_{\bar{A}} = 1 - \mu_A$$

műveletek adódnak „természetes” általánosításként. A fentiek egyszerű következménye, hogy  $A, B \in \mathfrak{S}(X)$ -re

$$(8) \quad \mu_A + \mu_B = \mu_{A \cup B} + \mu_{A \cap B} = \mu_{A+B} + \mu_{AB} = \mu_{A \dot{\cup} B} + \mu_{A \dot{\cap} B};$$

valamint

$$(9) \quad \emptyset \subseteq A \dot{\cap} B \subseteq AB \subseteq A \cap B \subseteq A \cup B \subseteq A + B \subseteq A \dot{\cup} B \subseteq X.$$

A fenti általánosítások közül a (7) mellett akár az (1), (4), akár a (2), (5), akár a (3), (6) eleget tesz a *De Morgan* szabályoknak. Az elég általánosan használt (1), (4), (7) művelethármaszt inkább „halmazelméleti kiterjesztésnek” tekinthetjük, mivel a legtöbb hagyományos halmazművelet-tulajdonság megtartására törekszik. A (2), (5), (7) művelethármaszt inkább „valószínűségszámítási kiterjesztés”, mivel itt ugyan több halmazelméleti azonosság érvényét veszti (pl. disztributivitás), de mint látni fogjuk a valószínűségelméleti fogalmak fuzziy általánosításánál ez a művelethármas tűnik természetesnek.

## 2.2. Fuzzy esemény, fuzzy események valószínűsége

SMETS [15]-ben a fuzzy események, valószínűségek kérdéskörének egyik lehetséges, axiomatikus felépítését tárgyalja. Ennek alapján, valamint a feladatunk megoldása érdekében bevezetendő valószínűségyszámítási fogalmak miatt, a korábban tárgyalt műveletek közül a (2), (5), (7) művelethármassal fogunk dolgozni.

Az említett cikkben Smets azt is megmutatta, hogy a valószínűségi szempontból elvárható összefüggések teljesítése érdekében az alábbi, szintén Zadeh által javasolt fogalmat célszerű használni:

*Definíció:* Legyen  $(X, \mathfrak{B}, P)$  egy mértéktér. Az  $A \in \overline{\mathfrak{B}}(X)$  fuzzy halmaz fuzzy esemény, ha a  $\mu_A$  tartalmazási függvény mérhető, azaz  $\forall y \in [0, 1]$ -re  $\{x \mid \mu_A(x) \in [0, y]\} \in \mathfrak{B}$ .

Az  $A$  fuzzy esemény valószínűségét a

$$(10) \quad P(A) = \int_X \mu_A dP$$

formula adja meg, ahol  $P$  valószínűségi mérték.

Megjegyezzük, hogy  $\mu_A$  ekkor egy  $(X, \mathfrak{B}, P)$ -n értelmezett valószínűségi változónak is felfogható,  $P(A)$  ekkor ennek a várható értéke (ami létezik, mert  $0 \leq \mu_A \leq 1$ ). Ezért, ha  $x_i \in X$  ( $i = 1, \dots, m$ ) független kísérleti eredmények, akkor a fuzzy esemény valószínűségét a

$$(11) \quad P(A) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mu_A(x_i) = E(\mu_A)$$

egyenlőség alapján becsülhetjük.

A továbbiakban rögzítsük az  $(X, \mathfrak{B}, P)$  mértékteret. Az  $A, B \in \overline{\mathfrak{B}}(X)$  fuzzy eseményekre könnyű belátni, hogy

$$(12) \quad 0 \leq P(A) \leq 1; \quad P(X) = 1;$$

$$(13) \quad P(A) + P(B) = P(A + B) + P(AB).$$

*Definíció:* Az  $A_i \in \overline{\mathfrak{B}}(X)$  ( $i = 1, \dots, m$ ) fuzzy halmazrendszert fuzzy partíciónak nevezzük, ha

$$(14) \quad \sum_{i=1}^m \mu_{A_i}(x) = 1 \quad (\forall x \in X).$$

Ez a fogalom a teljes eseményrendszer megfelelője, (14) pedig az ott érvényes  $\chi_{A_1} + \dots + \chi_{A_m} \equiv 1$  azonosság megfelelője. A definíció következménye, hogy  $B \in \overline{\mathfrak{B}}(X)$ -re

$$(15) \quad P(B) = P(BA_1) + P(BA_2) + \dots + P(BA_m).$$

*Definíció:* Azt mondjuk, hogy az  $A, B \in \overline{\mathfrak{B}}(X)$  fuzzy események függetlenek, ha

$$(16) \quad P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

Az  $A$  fuzzy esemény feltételes valószínűségét a  $B$  fuzzy esemény, mint feltétel mellett a

$$(17) \quad P(A|B) = P(AB)/P(B)$$

egyenlőség definiálja, feltéve, hogy  $P(B) > 0$ .

Egyszerűen belátható, hogy ekkor  $0 \leq P(A|B) \leq 1$ ;  $P(X|B) = 1$ ;  $P(B|X) = P(B)$ ; valamint ha  $A, B$  független, akkor  $P(A|B) = P(A)$ . (15) és (17) egyszerű következménye, hogy fuzzy partíció esetén

$$(18) \quad P(A_1|B) + P(A_2|B) + \dots + P(A_m|B) = 1.$$

Speciálisan tehát  $P(A|B) + P(\bar{A}|B) = 1$  is igaz.

### 2.3. Átmenetek fuzzy állapotok között

Legyen  $\{\xi_t | t \in T\}$  egy  $(X, \mathfrak{B}, P)$ -n értelmezett sztochasztikus folyamat. A folyamat lehetséges fuzzy állapotai alatt a valós számtest azon fuzzy részhalmazait értjük, melyeknek tartalmazási függvénye Borel-mérhető. Ha  $A \in \bar{\mathfrak{B}}(R)$  fuzzy állapot, akkor azt a  $\{\xi_t \in A\}$ -val jelölt fuzzy eseményt, amelyre  $\{\xi_t \in A\} \in \bar{\mathfrak{B}}(X)$ ,

$$\mu_{\{\xi_t \in A\}}(x) = \mu_A(\xi_t(x)) \in [0, 1] \quad (\forall x \in X)$$

a „ $\xi_t$  folyamat az  $A$  fuzzy állapotban van” kijelentéssel azonosíthatjuk.

A folyamat  $r$  időpontbeli  $A$  fuzzy állapotból az  $s$  időpontbeli  $B$  fuzzy állapotba való átmenete (17) alapján a  $P(\{\xi_s \in B\} | \{\xi_r \in A\})$  feltételes valószínűséggel jellemezhető ( $r, s \in T$ ).

Jelölje  $R_0$  a folyamat lehetséges értékeinek halmazát, azaz legyen

$$R_0 = \bigcup_{t \in T} \xi_t(X).$$

Könnyen látható, hogy ha az  $A_i \in \bar{\mathfrak{B}}(R)$  ( $i = 1, \dots, N$ ) fuzzy állapotok  $R_0$  fuzzy partícióját adják meg, akkor a  $\{\xi_t \in A_i\} \in \bar{\mathfrak{B}}(X)$  ( $i = 1, \dots, N$ ) fuzzy események az  $X$  alaptér fuzzy partícióját alkotják, valamint (18) alapján

$$(19) \quad \sum_{j=1}^N P(\{\xi_s \in A_j\} | \{\xi_r \in A_i\}) = 1.$$

Tehát az átmenetek jellemzésére szolgáló

$$(20) \quad p_{ij}^{(r,s)} = P(\{\xi_s \in A_j\} | \{\xi_r \in A_i\}) \quad (i, j = 1, \dots, N)$$

átmenet valószínűségek egy

$$(21) \quad \mathbf{P}^{(r,s)} = (p_{ij}^{(r,s)})_{i,j=1,\dots,N}$$

sztochasztikus mátrixba foglalhatók, éppúgy, mint a hagyományos események közöttiek. Bevezetve a

$$(22) \quad pr^t(i) = P(\{\xi_t \in A_i\})$$

állapot valószínűségeket és ezek

$$(23) \quad \mathbf{pr}^t = (pr^t(1), \dots, pr^t(N))^*$$

vektorait, (17) és (15) alapján kapjuk, hogy az alábbi összefüggés is igaz:

$$(24) \quad \mathbf{pr}^s = (\mathbf{P}^{(r,s)})^* \cdot \mathbf{pr}^r \quad (r, s \in T).$$

A továbbiakban  $T$  adott időszakot jelöl,  $T = \{T_{\text{kezdő}}, \dots, T_{\text{záró}}\}$ .

### 3. Az átmenetvalószínűségi mátrix becslése exogén változók függvényeként

Következő lépésként az egymás utáni évek közti mozgást tükröző  $\mathbf{P}^{(t,t+1)}$  mátrixsorozat tulajdonságait vizsgáljuk. Megteremtettük az exogén változók alapján való függvényillesztés és ezáltal az előrejelzés lehetőségét is. Az  $f(\mathbf{Z}) = \mathbf{A} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{Z}$  lineáris mátrix-függvényben  $\mathbf{A}$  és  $\mathbf{B}$  jelöli a keresett paramétermátrixokat,  $\mathbf{Z}$  pedig az összes exogén változót fogja össze. Elvileg bármilyen, az átmenetekre hatással bíró tényező szoba jöhet (ráfordítások, időjárási tényezők, fajtaváltás stb.). A becslést azon feltétel mellett végezzük, hogy  $f(\mathbf{Z})$  a vizsgálati időszak adatait alapul véve sztochasztikus mátrix legyen.

#### 3.1. Modellváltozatok

Az átmenetvalószínűségi mátrix, valamint különböző exogén változók rendelkezésre álló idősorai alapján a  $\mathbf{P}^{(t,t+1)}$  mátrixokat az alábbi függvénnyel becsüljük:

$$(25) \quad \hat{\mathbf{P}}^{(t,t+1)} = \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{Z}^t, \quad (t = T_{\text{kezdő}}, \dots, T_{\text{záró}} - 1)$$

vagy elemenként felírva:

$$(26) \quad \hat{p}_{ij}^{(t,t+1)} = a_{ij} + \sum_{k=1}^r b_{ik} z_{kj}^t, \quad (i, j = 1, \dots, N),$$

ahol „ $\hat{\phantom{x}}$ ” a becsült értékre utal;

$\mathbf{A} = (a_{ij})_{N \times N}$ -es,  $\mathbf{B} = (b_{ik})_{N \times r}$ -es, a becsülendő paramétereket tartalmazó mátrixok;

$r$  az exogén változók száma;

$\mathbf{Z}^t = (\mathbf{z}_1^t, \dots, \mathbf{z}_r^t)^* = (z_{kj}^t)_{r \times N}$ -es mátrix, melynek általános eleme,  $z_{kj}^t$  a  $k$ -adik exogén változó  $j$ -edik osztályra vonatkozó idősorának  $t$ -edik, azaz a  $t \rightarrow t + 1$  átmenethez tartozó elemét jelöli, míg  $*$ -gal a transzponálást jelöljük.

Az  $a_{ij}$ ,  $b_{ik}$  paraméterek becslését a legkisebb négyzetek elve alapján végezzük, azaz az

$$(27) \quad F(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \sum_{i=1}^N \sum_{t=T_k}^{T_z-1} \sum_{j=1}^N (p_{ij}^{(t,t+1)} - \hat{p}_{ij}^{(t,t+1)})^2$$

függvényt minimalizáljuk, ahol a becsült mátrixoknak teljesíteniük kell a sztochasztikus mátrixokra vonatkozó feltételeket:

$$(28) \quad 0 \leq \hat{p}_{ij}^{(t,t+1)} \leq 1 \quad (i, j = 1, \dots, N; t = T_k, \dots, T_z - 1)$$

$$(29) \quad \sum_{j=1}^N \hat{p}_{ij}^{(t,t+1)} = 1 \quad (i = 1, \dots, N; t = T_k, \dots, T_z - 1).$$



( $T_k$ -val  $T_{\text{kezdő}}$ -t,  $T_z$ -vel  $T_{\text{záró}}$ -t, azaz a vizsgálati időszak első és utolsó évét jelöljük.)

E feltételek jellegéből következik, hogy a számítások soronként külön-külön végezhetőek, így a becslési feladat  $N$  db kvadratikussá programozási feladat ( $QP$ ) megoldására vezet.

1. változat: a teljes modell

Az  $i$ -edik sorra vonatkozó feladat általános esetben (tetszőleges  $z_{kj}$  exogén változókat megengedve):

$$(30) \quad F(a_{i1}, \dots, a_{iN}, b_{i1}, \dots, b_{ir}) = \sum_{t=T_k}^{T_z-1} \sum_{j=1}^N \left( p_{ij}^{(t,t+1)} - \left( a_{ij} + \sum_{k=1}^r b_{ik} z_{kj}^t \right) \right)^2 \rightarrow \min$$

$$(31) \quad a_{ij} + \sum_{k=1}^r b_{ik} z_{kj}^t \geq 0 \quad (j = 1, \dots, N; t = T_k, \dots, T_z - 1)$$

$$(32) \quad \sum_{j=1}^N \left( a_{ij} + \sum_{k=1}^r b_{ik} z_{kj}^t \right) = 1 \quad (t = T_k, \dots, T_z - 1).$$

A fenti, (30)–(32) meghatározta  $QP$  feladatnak  $N + r$  változója és  $|T| \cdot (N + 1)$ , tehát igen sok korlátozó feltétele van. (Itt  $|T| = T_z - T_k =$  az átmenetek száma.) A feltételek nagy száma a feladat megoldását a rendelkezésre álló számítástechnikai lehetőségek mellett nagyon költségessé teszi.

Az adott esetben a feltételek száma valamivel csökkenthető, mivel exogén változóként csak „gyakorosság-típusúakat” kívánunk szerepeltetni, amelyekre teljesül, hogy:

$$(33) \quad \sum_{j=1}^N z_{kj}^t = 1 \quad (k = 1, \dots, r; t = T_k, \dots, T_z - 1).$$

Emiatt (43) teljesüléséhez elég megkövetelni, hogy

$$(32.a) \quad \sum_{j=1}^N a_{ij} + \sum_{k=1}^r b_{ik} = 1$$

feltétel teljesüljön. Így a feltételek száma  $TN + 1$ .

2. változat: az egyszerűsített modell

A megmaradó  $TN + 1$  korlátozó feltétel mellett a feladat megoldása még mindig nagyon költséges, különösen, ha tekintetbe vesszük, hogy minden számításához  $N$  db ilyen feladatot kell megoldani (esetünkben 15-öt).

Ezért egy olyan erősebben korlátozott modellel kísérleteztünk, amelyben az

$$(31.a) \quad a_{ij} \geq 0 \quad (j = 1, \dots, N) \text{ és } b_{ik} \geq 0 \quad (k = 1, \dots, r)$$

előjelkorlát előírása  $z_{kj}^t \geq 0$  esetén biztosítja a (31) alatti feltételek teljesülését. Az így kapott  $QP$  feladatnak — a változók előjelkorlátain kívül — egyetlen korlátozó feltétele (32.a.).

(31.a.) alkalmazása azonban azt is feltételezi, hogy a figyelembe vett exogén változókra jogosan tehetjük fel, hogy az átmenetvalószínűségi mátrixokra — éppen ebben az értelemben véve — pozitív hatással vannak.



## 3.2. Megoldási algoritmus

A teljes modellnek megfelelő (30), (31), (32.a) feladatot a feltételek nagy számára való tekintettel, valamint a számítások pontosságának növelése érdekében [6] alapján egy feltétel nélküli regressziószámítási és egy, az eredeti  $QP$  feladatnál kisebb méretű lineáris komplementaritási ( $LC$ ) feladatra vezettük vissza.

A (30), (31), (32.a)  $QP$  feladat megoldása ekvivalens a következő feladat megoldásával:

Keressük azon  $\mathbf{x}_i$ ,  $\mathbf{y}_i$ ,  $\mathbf{v}_i$  és  $v_{0i}$  értékeket, amelyekre:

$$(34) \quad -\mathbf{C} \cdot \mathbf{x}_i + \mathbf{y}_i = 0$$

$$(35) \quad \mathbf{I}^* \cdot \mathbf{x}_i = 1$$

$$(36) \quad \mathbf{C}^* \cdot \mathbf{v}_i - \mathbf{I} \cdot v_{0i} - 2 \cdot \mathbf{C}^* \cdot \mathbf{C} \mathbf{x}_i = -2 \cdot \mathbf{C}^* \cdot \mathbf{p}_i$$

$$(37) \quad \mathbf{y}_i \geq 0$$

$$(38) \quad \mathbf{v}_i \geq 0$$

$$(39) \quad \mathbf{y}_i^* \cdot \mathbf{v}_i = 0,$$

ahol

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_N & (\mathbf{Z}^{T_k})^* \\ \mathbf{E}_N & (\mathbf{Z}^{T_{k+1}})^* \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{E}_N & (\mathbf{Z}^{T_{z-1}})^* \end{bmatrix}_{NT \times (N+r)},$$

ahol  $\mathbf{Z}^i$  ugyanaz, mint (26)-nál;

$$\mathbf{p}_i = (p_{i1}^{(T_k, T_{k+1})}, \dots, p_{iN}^{(T_k, T_{k+1})}, \dots, p_{i1}^{(T_{z-1}, T_z)}, \dots, p_{iN}^{(T_{z-1}, T_z)})^*;$$

$$\mathbf{x}_i = (a_{i1}, \dots, a_{iN}, b_{i1}, \dots, b_{ir})^*,$$

$\mathbf{y}_i$  és  $\mathbf{v}_i$   $NT$  elemű vektorok,  $\mathbf{E}_N$   $N$ -edrendű egységmátrix és  $\mathbf{I}$   $N + r$  elemű összegző vektor. Az

$$(40) \quad \hat{\mathbf{x}}_i = (\mathbf{C}^* \cdot \mathbf{C})^{-1} \cdot \mathbf{C}^* \cdot \mathbf{p}_i = \mathbf{R}^{-1} \cdot (\mathbf{R}^*)^{-1} \cdot \mathbf{C}^* \cdot \mathbf{p}_i$$

feltétel nélküli regressziós együtthatók ismeretében (36)-ból

$$(41) \quad \mathbf{x}_i = \hat{\mathbf{x}}_i - \frac{1}{2} \mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{D}^* \cdot \mathbf{w}_i,$$

ahol  $\mathbf{R}$  a  $\mathbf{C}^* \cdot \mathbf{C}$  mátrix Cholesky dekompozíciójából adódó trianguláris mátrix, azaz  $\mathbf{C}^* \cdot \mathbf{C} = \mathbf{R}^* \cdot \mathbf{R}$ ,

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -\mathbf{C} \\ \mathbf{I}^* \end{bmatrix} \cdot \mathbf{R}^{-1} \text{ és } \mathbf{w}_i^* = (\mathbf{v}_i^*, v_{0i}).$$

(41)-t (34) és (35)-be helyettesítve és bevezetve még a

$$\mathbf{q}_i^* = (\mathbf{y}_i^*, y_{0i}) \text{ és } \mathbf{g}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\mathbf{C} \\ \mathbf{1}^* \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}_i$$

jelöléseket is, a következő *LC* feladatot kapjuk:

(amelynek  $\mathbf{w}_i$  megoldását (41)-be helyettesítve adódnak a keresett  $\mathbf{x}_i$  feltételes regressziós együtthatók):

$$(42) \quad -\frac{1}{2} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{D}^* \cdot \mathbf{w}_i + \mathbf{q}_i = \mathbf{g}_i$$

$$(43) \quad \mathbf{v}_i \geq 0; \mathbf{y}_i \geq 0; \mathbf{v}_i^* \cdot \mathbf{y}_i = 0; y_{0i} = 0.$$

A (30), (31.a), (32.a) egyszerűsített modell egy kisméretű kvadratikus programozási feladat, melynek megoldási algoritmusai ismertek, ennek részletesebb ismertetésétől eltekintünk.

#### 4. Konkrét modellek a búza- és a kukoricahozam alakulásának vizsgálatára

##### 4.1. Fuzzy hozamszintek

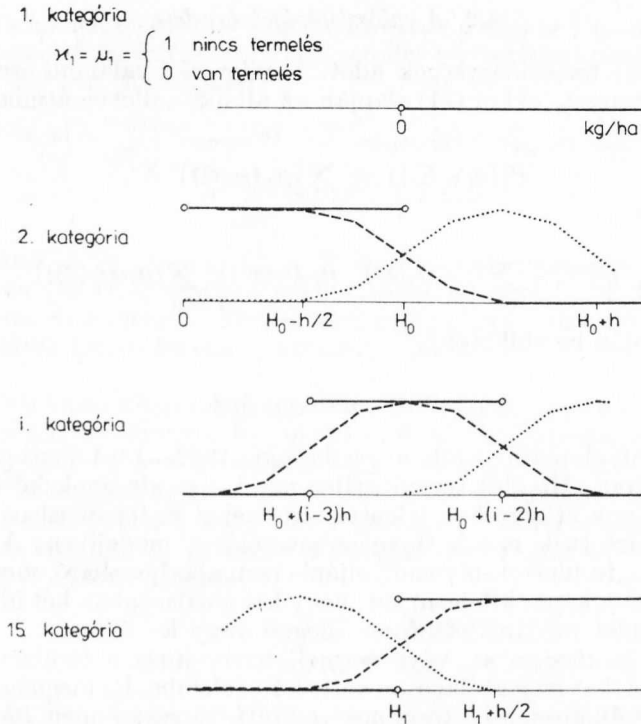
A búza-, illetve kukoricatermés-átlag fuzzy szintjeinek megválasztásakor a korábban kialakított „től–ig” hozamkategóriákból indultunk ki, hogy eredményeinket majd ebből a szempontból is értékelni tudjuk.

A hagyományos hozamkategóriák a következők:

Kategória	Búza	Kukorica (kg/ha)
1	0	0
2	1–1400	1–2000
3	1401–1750	2001–2500
4	1751–2100	2501–3000
5	2101–2450	3001–3500
6	2451–2800	3501–4000
7	2801–3150	4001–4500
8	3151–3500	4501–5000
9	3501–3850	5001–5500
10	3851–4200	5501–6000
11	4201–4550	6001–6500
12	4551–4900	6501–7000
13	4901–5250	7001–7500
14	5251–5600	7501–8000
15	5601–	8001–

*Megjegyzés:* A 0 termésátlag a nem termelés esete.

Ezeket az intervallum-kategóriákat az éles határpontok elmosásával fuzzy-sítottuk, és ezzel a  $R_0 = [0, \infty)$  félegyenes fuzzy partícióját valósítottuk meg. Jól látható ez az *I. ábrán*, ahol a tartalmazási függvények mellett a régi kate-



1. ábra: Hagyományos és fuzziyított hozamkategóriák: —:  $\chi_i$ , az  $i$ -edik kategória karakterisztikus függvénye; - - :  $\mu_i$ , az  $i$ -edik fuzzy kategória tartalmazási függvénye. (Búza:  $H_0 = 1400$  kg/ha;  $h = 350$  kg/ha;  $H_1 = 5600$  kg/ha; Kukorica:  $H_0 = 2000$  kg/ha;  $h = 500$  kg/ha;  $H_1 = 8000$  kg/ha.)

góriák karakterisztikus függvényei is szerepelnek. A  $\mu_i$ -nek megfelelő fuzzy halmazt

$$F_i = \{(x, \mu_i(x)) \mid x \in [0, \infty)\} \quad (i = 1, \dots, 15)$$

fogja jelölni. Például az 5300 kg/ha-os hozam (vagy az azt elért termelőegység) hagyományosan a 14. kategória tagja volt, míg fuzziysan tekintve 0,714-es értékkel tartozik az  $F_{14}$ -es és 0,286-os értékkel az  $F_{13}$ -as fuzzy hozamszinthez. Úgy is fogalmazhatunk, hogy

$F_1$  a nem-termelés szintje;

$F_2$  a  $H_0 - h/2$  érték körüli vagy kisebb;

$F_i$  az  $i$ -edik régi osztály középértéke körüli ( $i = 3, \dots, 14$ );

$F_{15}$  a  $H_1 + h/2$  érték körüli vagy nagyobb

hozamok fuzzy halmaza. Az ilyen termésátlagot elért termelőegységek tartoznak egyhez közeli tartalmazási függvényértékkel a nekik megfelelő  $\{\xi_i \in F_i\}$  fuzzy eseményekhez.

Az 1. ábrán látható függvények közül  $\mu_3, \dots, \mu_{14}$  szimmetrikusak a középértékükre, egymásba eltolhatóak és két kevésbé és egy jobban emelkedő, illetve fogyó egyenesből állnak.  $\mu_2$ -nek csak fogyó,  $\mu_{15}$ -nek csak növekedési (illetve konstans) szakaszai vannak.

4.2. *A valószínűségek becslése*

Ha ismerjük a termelőegységek adott  $X$  halmazát, valamint ezek  $\varepsilon_i(x)$  ( $x \in X$ ) évenkénti hozamait, akkor (11) alapján az állapot-, illetve átmenet valószínűségek a

$$(44) \quad P(\{\varepsilon_i \in F_i\}) \approx \sum_{x \in X} [\mu_{F_i}(\varepsilon_i(x))] / |X|,$$

valamint a

$$(45) \quad p_{ij}^{(r,s)} \approx \sum_{x \in X} [\mu_{F_i}(\varepsilon_r(x)) \cdot \mu_{F_j}(\varepsilon_s(x))] / \sum_{x \in X} [\mu_{F_i}(\varepsilon_r(x))]$$

formulák alapján becsülhetők.

4.3. *Termelőegységek*

Számításaink alapjául az állami gazdaságok 1962–1984 közti gazdaságos adatai szolgáltak. Mivel a termőterület mind a gazdaságok között, mind az egyes gazdaságok idősoraiban jelentős eltéréseket és ingadozásokat mutatott, célszerűnek tartottuk ennek figyelembevételét a modellben. A kézenfekvő, hagyományos „területtel súlyozni” eljárás nem alkalmazható, mert semmilyen súlyrendszer sem képes kifejezni azt, hogy két gazdaságban két időpont között a termelő terület például jelentősen megnő vagy lecsökken.

[18]-ban a gazdaságokat véve termelőegységekké a terület változásokból adódó korrekciókat még utólagosan vettük figyelembe. Ez meglehetősen bonyolultan formalizálható módosításokhoz vezetett. Egyszerűbben, de tartalmában azonos módon vehetjük figyelembe a területmozgások hatásait, ha termelőegységnek az 1 ha-os területegységeket választjuk.

A dolgozat további részében az  $X$  alaphalmaz tehát az 1 ha-os termőterület-egységek összességét fogja jelölni. Hogy a (44), (45)-ben szereplő  $\mu_{F_i}(\varepsilon_i(x))$  értékeket meghatározhassuk, minden területegységhez termésátlagértéket ( $\varepsilon_i(x)$ ) kellett rendelni. Ezt az alábbi módon végeztük:

a) Az összes termelőterület évenkénti ingadozásának zavaró hatását egy állandó nagyságú földalappal ( $T_0$ ) bevezetésével szűrtük ki. ( $T_0 = 212\,000$  ha a búzá-nál,  $T_0 = 165\,000$  ha a kukoricánál.)

b) Jelölje  $G$  az állami gazdaságok összességét,  $g \in G$  egy konkrét gazdaságot,  $y_t(g)$  a  $t$ -edik évi hozamot,  $T^t(g)$  a gazdaság  $t$ -edik évi termelőterületét. Az  $(r, s)$  évpár közti átmenetnél a következő módon rendelünk termésátlagot az 1 ha-os területegységekhez:

- a  $g$  gazdaság termelésben maradó területének egységeihez, összességében  $T_{\text{termelő}}^{(r,s)}(g) = \min(T^r(g), T^s(g))$  területhez az  $r$ -edik évben  $y_r(g)$  nagyságú, az  $s$ -edik évben  $y_s(g)$  nagyságú termésátlag tartozik;
- a  $g$  gazdaság termelésből kivont területének egységeihez, összességében  $T_{\text{csökkenés}}^{(r,s)}(g) = \max(0, T^r(g) - T^s(g))$  területhez az  $r$ -edik évben  $y_r(g)$  nagyságú, az  $s$ -edik évben a nem-termelésnek megfelelően 0 nagyságú termésátlag tartozik;
- a  $g$  gazdaság termelésbe bevont területének egységeihez, összességében  $T_{\text{növekmény}}^{(r,s)}(g) = \max(0, T^s(g) - T^r(g))$  területhez az  $r$ -edik évben 0, az  $s$ -edik évben  $y_s(g)$  nagyságú termésátlag tartozik.

c) Ha az előzőeknek megfelelően meghatároztuk a  $\varepsilon_i(x)$  ( $x$  1 ha-os területegységet jelöl!) termésátlagértékeket, akkor minden termelésben részt vevő egységet figyelembe vettünk. Ez összesen

$$\begin{aligned} T^*(r, s) &= \sum_{g \in G} [T_{\text{termelő}}(g) + T_{\text{csökkenés}}(g) + T_{\text{növekmény}}(g)] = \\ &= \sum_{g \in G} \max(T^r(g), T^s(g)) \end{aligned}$$

területet jelent. A fennmaradó  $T_0 - T^*(r, s)$  terület egységei nem vettek részt a termelésben [az  $(r, s)$  évpárra nézve], ezért termésátlagukat mindkét időpontban 0-nak értelmezzük. Természetesen  $T_0$ -t úgy választottuk meg, hogy minden évpárra nézve legyen fennmaradó terület.

d) A vizsgálati időszakban többször előfordult, hogy egy  $g \in G$  gazdaság beolvadt egy  $h \in G$  gazdaságba. Hogy a b) pontban leírtak alkalmazásakor a beolvadás a  $g$  gazdaságnál ne jelentős területkivonás, valamint a  $h$ -nál egyidejűleg ne jelentős területbevonás útján tükröződjék vissza, a beolvadás  $(t, t + 1)$  évpárjánál a  $t + 1$ -edik évben a beolvadó  $g$  gazdaságot is termelőnek tekintjük a  $h$ -éval azonos hozammal, valamint a befogadó  $t + 1$ -edik évi területét megosztjuk  $g$  és  $h$  között. Legyen:

$$\begin{aligned} \tilde{T}^{t+1}(h) &= \min(T^t(h), T^{t+1}(h)) \\ \tilde{T}^{t+1}(g) &= \max(0, T^{t+1}(h) - T^t(h)). \end{aligned}$$

Ezeket a területmértékeket alkalmazva az összeolvadások esetében a  $h$  gazdaságnál jelentkező területnövekedés a lehető legnagyobb mértékben a  $g$  gazdaság területegységeinek közvetlen átmeneteként jelentkeznek.

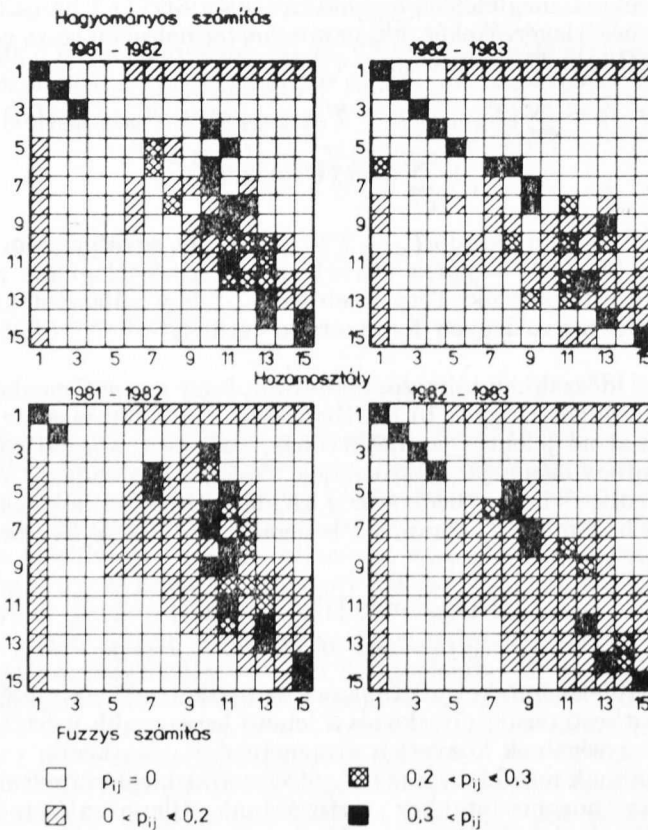
A fent leírtaknak megfelelően (44) és (45) szerint meghatároztuk az „1 ha-os terület” fuzzy hozamszintekhez tartozásának állapotvalószínűségeit és a  $(t, t + 1)$  évpárok közti átmenetvalószínűségeket. Azokban az esetekben, amikor a becslés alapján  $P(\{\varepsilon_t \in F_i\})$  értéke nulla adódott [tehát (45) nem alkalmazható], az alábbi értékeket írtuk elő:

$$p_{ij}^{(t,t+1)} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (i \text{ rögzített}, j = 1, \dots, 15).$$

## 5. Számítási eredményeinkről

a) Fuzzy hozamkategóriákat használva (44) és (45) alapján tehát becslési eredményül átmenetvalószínűségi mátrix-sorozatot és állapotvalószínűségi vektor-sorozatot kapunk. Ezért ily módon pontosan ugyanolyan típusú (közgazdasági) vizsgálatok és következtetések adhatók, mint a hagyományos esetben, a „tól-ig” hozamosztályokkal végzett korábbi számítások alapján. Megítélésünk szerint azonban jóval valóságghűbben, a hozamváltozásokra érzékenyebben sikerült a modell felépítése. Ennek hatása azonnal jelentkezett abban, hogy a fuzzys számítás mátrixaiban több pozitív érték jelent meg, elhelyezésük is jóval egyenletesebb. Ez a 2. ábrán látható.

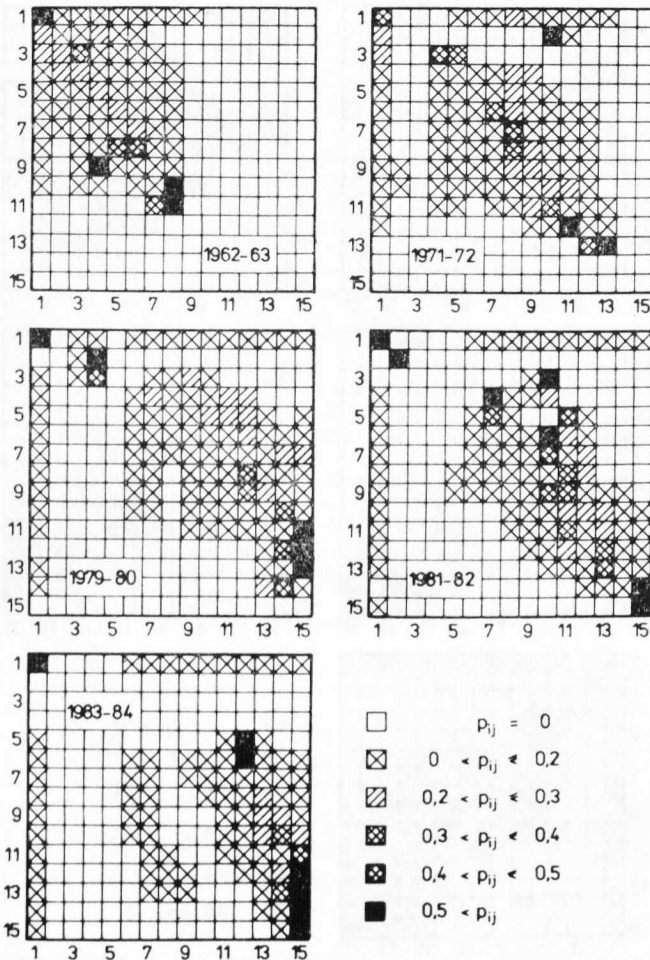
b) Hogy a vizsgálati időszakban végbement változásokat érzékeltessük, a 3. és 4. ábrán a  $\mathbf{P}^{(t,t+1)}$  sorozatok mátrixaiban tapasztalt belső átrendeződést



2. ábra. Átmenetvalószínűségi mátrixok összehasonlítása (a búzatermelés példája)

mutatjuk be, kiemelve egyes évpárokat. Mindez természetesen a búza- és kukoricatermelésben elért egyre magasabb hozamok következménye és egyben számszerű jellemzése. A mátrixok tükrözik azonban az elért termelési szint megtartásának, illetve a további hozamnövekedésnek a bizonytalanságát is, az alacsonyabb szintekre kerülés valószínűségein keresztül. A növekedési tendencia mellett tehát visszaeséseket és átcsoportosulásokat is megfigyelhettünk.

c) Amennyiben a fuzzy hozamszintrendszerünk elemeit egyesítjük (az  $\dot{\cup}$  művelettel), kevesebb tagból álló, de „bővebb” fuzzy halmazokat jellemző hozamszinteket állíthatunk elő. Ezen a módon vizsgáltuk például a „legalább három fuzzy hozamszintnyi” emelkedés és visszaesés valószínűségeit is. Ez utóbbi például a kukorica  $F_{13}$ -as hozamszintjét alapul véve az 1 ha-os termelőegység termésátlagának a „7250 kg/ha körüli” szintről az „5750 kg/ha körüli vagy kisebb” ( $F_2 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} F_{10}$ ) szintre való visszaesésének valószínűségét fogja megadni. A 2. pontban leírtak alapján látható, hogy az így összevont szintekre való átmenetek valószínűségei egyszerűen a megfelelő átmenetvalószínűségi mátrixelemek összeadásával számíthatók ki.

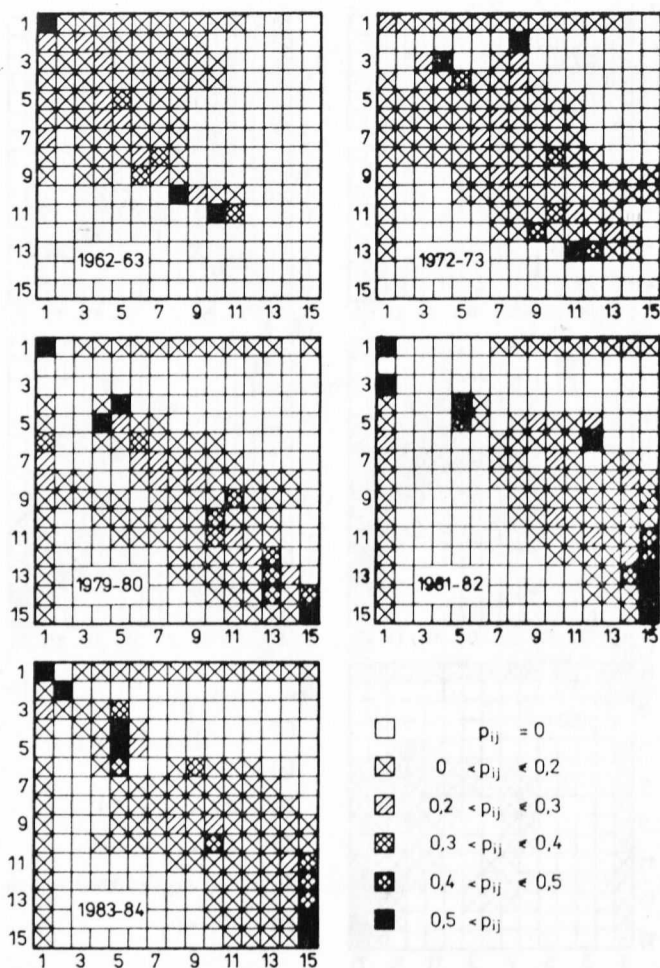


3. ábra. Az átmenetvalószínűségi mátrix szerkezete egyes évpárokban (egységnyi búzatermelő terület fuzzy hozamszintek közti átmenetei alapján)

d) A 3. pontban foglalkoztunk egy sztochasztikus mátrixsorozat magyarázó változókkal való közelítésével, amikor a becsült  $\hat{\mathbf{P}}^{(t,t+1)}$  mátrixoktól is megköveteltük, hogy sztochasztikus mátrixok legyenek. Már korábbi tapasztalataink is rámutattak az alkalmas magyarázó változók kiválasztásának nehézségeire, ezért a közelítő függvényekben most a  $\mathbf{P}^{(t,t+1)}$  sorozat késleltetéseivel és az állapotvalószínűségi vektorokkal kísérleteztünk.

Így elsősorban a mátrix-sorozatokban végbement eltolódási-növekedési tendenciát tükröző függvényeket kaptunk. A 3. pontban megadott egyszerűsített modell használatát is a  $\mathbf{P}^{(t,t+1)}$  sorozatnak ez a sajátossága tette lehetővé. Ennek eredményei ebben az esetben az ellenőrző számítások tapasztalata szerint is jól egybeestek a lényegesen ráfordításigényesebb teljes modell eredményeivel.





4. ábra. Az átmenetvalószínűségi mátrix szerkezete egyes évpárookban (egységnyi kukorica-termelő terület fuzzy hozamszintek közötti átmenetei alapján)

A közelítő függvények számításának lehetősége matematikailag alapot teremtett az átmenetvalószínűségi mátrix előrejelzésére is. Úgy tűnik azonban, szakmailag megfelelő magyarázó változórendszer kialakítása még mindig jövőbeli feladat, és a közgazdászok, mezőgazdászok tartós, együttes erőfeszítésére van szükség ahhoz, hogy ez a módszer mint tervezési eszköz az elképzelt módon, szakmailag is jól használhatóan működjön, azaz a gazdasági tervezőmunkában a benne rejlő lehetőségeket ki is lehessen aknázni.

(Beérkezett: 1986. augusztus 11-én.)

## IRODALOM

1. DUBOIS, D.—PRADE, H.: *Fuzzy sets and systems: Theory and applications*. Academic Press, New York, 1980.
2. GOLUB, G. H.—SAUNDERS, H. A.: Linear least squares and quadratic programming. *Integer and nonlinear programming* c. kötetben. Szerk: Abadie, J., North-Holland, 1970, 229—256.
3. HALLBERG, M. C.: Projecting the size distribution of agricultural firms — An application of a Markov process with non-stationary transition probabilities. *Amer. J. of Agricultural Economics* 51, 1969, 289—302.
4. JÓZSEF S.: A termelésátlag-eloszlás alakulásának leírása és előrejelzése. *Statisztikai Szemle*, 1981. 10. sz.
5. JÓZSEF, S.: On distribution of wheat and corn yield, *Biometrical J.* 7., 1983.
6. JÓZSEF S.—SEBESTYÉN J.—VIGH J.: *Természeti és gazdasági hatótenyezők szerepe a búza- és kukoricatermelésben*. AKI Tanulmány 1983. 4. sz.
7. KOVÁCS M.—ZSIGMOND I.: *Termelésátlag-alakulás törvényszerűségeinek vizsgálata*, ELTE SzK Kutatási jelentés, 1980.
8. M. DOBOS K.: *A sztochasztikus kapcsolatok jellemzőinek alakulása 1962—1971 évek között az állami gazdaságok búza- és kukoricatermelésében*. AKI, 1974.
9. M. DOBOS K.—PINTÉR J.: *Az állami gazdaságok éves termésátlag-elosztásának vizsgálata*. ESZK Tájékoztató 23. sz. 1978.
10. M. DOBOS K.: A Markov-lánc modell alkalmazása az átlaghozamok vizsgálatára és előrejelzésére. *Gazdálkodás*, 1978. 3. sz.
11. M. DOBOS K.: A kukorica termésátlag-alakulás vizsgálati módszerei. *A genetikai potenciál javításának és jobb kihasználásának lehetőségei* c. kötetben. Gödöllő, 1984.
12. SEBESTYÉN J.: *Hozamváltózási valószínűségek alakulása az állami gazdaságok búza-termelésében*. AKI belső dokumentum, 1980.
13. SEBESTYÉN J.: *Számítások a termésátlag-alakulás valószínűségi vizsgálatához*. AKI Kutatási jelentés, 1977.
14. NAGY Cs.: Bevezetés a fuzzy halmazok elméletébe. *SZIGMA*, 1981, XIV. 1, 53—70.
15. SMETS, P.: Probability of a fuzzy event: an axiomatic approach. *Fuzzy Sets & Systems*, 1982 (7), 152—164.
16. ZADEH, L. A.: Fuzzy Sets. *Inf. Control*, 1965 (8), 338—353.
17. SOLT K.: Téves illúziók a határozatlan prédikátumok megrendszabályozásáról. *Műhelymunkák a nyelvészet és társtudományai köréből*. I. sz., 1985.
18. JÓZSEF S.—KOVÁCS M.—M. DOBOS K.—SEBESTYÉN J.—ZSIGMOND I.: *A termésátlagok irányzatához kapcsolódó bizonytalanság vizsgálata különböző matematikai módszerekkel, döntéseknél figyelembe vehető törvényszerűségek megállapítása céljából*. Kutatási jelentés, Budapest, 1986.

## MATHEMATICAL ANALYSIS OF THE YIELD FLUCTUATION LAWS

In this paper the laws of the yield fluctuation are investigated on the basis of the yield size distribution of agricultural firms. The categories of firms are defined as fuzzy sets. The transition of firms among these fuzzy categories, i.e. the dynamics of inner changes of these categories is described by a fuzzy process with fuzzy transition probability matrix. To estimate the relationship between the fuzzy transition probability matrix and the exogenous factors two quadratic programming models are proposed.

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ КОЛЕБАНИЯ УРОЖАЙНОСТИ

В данной статье исследование закономерностей колебания урожайности основывается на распределении сельскохозяйственных предприятий по урожайности сельхозпродуктов. Категории предприятий по урожайности определены как нечеткие множества. Переходы предприятий между этими нечеткими категориями, т. е. динамика внутренних изменений этих нечетких разрядов, описывается нечетким процессом с матрицей нечетких вероятностей перехода. Для моделирования зависимости матрицы нечетких вероятностей перехода от внешних факторов даны две модели квадратичного программирования.