Okuguchi Koji—Szidarovszky Ferenc

# A többtermékes oligopol probléma stabilitásáról

## 1. Bevezetés

Theocharis [1959] klasszikus dolgozata óta az egytermékes oligopol játék *Cournot*-féle egyensúlypontjának stabilitásáról számos cikk jelent meg. Ebben a dolgozatban néhány klasszikus eredményt általánosítunk a többtermékes esetre. Feltesszük, hogy az ár- és költségfüggvények valamennyien lineárisak. Az egyensúlypont létezésének bizonyítása után egy időben diszkrét dinamikus játékot fogalmazunk meg, és megadjuk stabilitásának szükséges és elégséges feltételét is. Majd az időben folytonos dinamikus modellt ismertetjük és ennek stabilitását elemezzük. Látni fogjuk, hogy a stabilitási feltételek lényegesen különböznek a két esetben. Mátrixok $S$-stabilitásának néhány eredményét (Arrow és McManus, 1958) használjuk fel a folytonos modell stabilitási vizsgálatainál.

Jelölje $n$ a termelők (játékosok) számát. Legyen $m$ a különféle termékek száma. Az egyes termelők stratégiáit a különféle termékekből gyártott mennyiségek jelentik. A $k$-adik $(1 \leq k \leq n)$ termelő stratégiája tehát egy $m$ — dimenziós $\mathbf{x}_k = [x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{km}]$ vektorral írható le, ahol $x_{kl}$ jelöli az $l$-edik termékből gyártott mennyiséget.

Feltesszük, hogy költségfüggvényének alakja

$$C_k(\mathbf{x}_k) = \sum_{l=1}^{m} b_{kl}\, x_{kl} + c_k,\ (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

ahol $b_{kl} \geq 0$, $c_k \geq 0$. Az $l$-edik $(1 \leq l \leq m)$ termék egységáráról is feltesszük, hogy az összes termelő által előállított teljes termékmennyiségek lineáris függvénye:

$$p_l = \sum_{j=1}^{m} a_{lj}\, X_j + d_l, \tag{2}$$

ahol

$$X_j = \sum_{k=1}^{n} x_{kj}.$$

Képezzük az $a_{lj}$ együtthatókból az $m \times m$ típusú $\mathbf{A}$ mátrixot. Tegyük fel a következőt:

(A) Az $\mathbf{A} + \mathbf{A}^T$ mátrix negatív definit.

Ez a feltétel közvetlenül nehezen ellenőrizhető, azonban a következő esetben automatikusan teljesül, amikor az $a_{lj}$ mátrixelemekről feltesszük, hogy

$$a_{ll} < 0,\ a_{lj} \leq 0\ (j \neq l). \tag{3}$$

$$|a_{ll}| > \sum_{j \neq l} |a_{lj}| \tag{4a}$$

és

$$|a_{ll}| > \sum_{j \neq l} |a_{jl}|. \tag{4b}$$

Ekkor (3), (4a) és (4b): alapján

$$2|a_{ll}| > \sum_{j \neq l} |a_{lj} + a_{jl}|. \tag{5}$$

Tehát $\mathbf{A} + \mathbf{A}^T$ negatív domináns diagonális elemekkel rendelkezik, azaz negatív definit.

A $k$-adik termelő kifizetőfüggvénye ekkor

$$\pi_k(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^{m} x_{kl}\, p_l(\mathbf{x}) - C_k(\mathbf{x}_k). \tag{6}$$

Tegyük fel továbbá a következőket:

(B) $k = 1, 2, \ldots, n$ esetén a $k$-adik játékos stratégiahalmaza $D_k \subset R^m$ korlátos, zárt, konvex. Az irodalomban a $D_k$ stratégiahalmazokról általában azt teszik fel, hogy

$$D_k = \mathop{\times}_{l=1}^{m} [0, L_{kl}],$$

ahol $L_{kl}$ a $k$-adik játékosnak az $l$-edik termékből való kapacitását jelenti. Nyilvánvaló, hogy az $L_{kl}$ számok végessége esetén a ($B$) feltétel automatikusan teljesül.

A fentiekben a $\Gamma = \{n; D_1, \ldots, D_n; \pi_1, \ldots, \pi_n\}$ játékot definiáltuk, amelyet többtermékes oligopol játéknak nevezünk.

Ismeretes, hogy az (A) feltétel fennállása esetén (ld. SZIDAROVSZKY, 1978) $\pi_k$ konvex $\mathbf{x}_k$-ban, így (A) és (B) teljesülése esetén a *Nikaido-Isoda* tétel (ld. SZÉP és FORGÓ, 1972) alapján a játéknak létezik egyensúlypontja, azaz létezik olyan $\mathbf{x}^* = (\mathbf{x}_1^*, \ldots, \mathbf{x}_n^*) \in D_1 \times \ldots \times D_n$ vektor, hogy tetszőleges $k$ $(1 \leq k \leq n)$ index és $\mathbf{x}_k \in D_k$ mellett

$$\pi_k(\mathbf{x}^*) \geq \pi_k(\mathbf{x}_1^*, \ldots, \mathbf{x}_{k-1}^*, \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}^*, \ldots, \mathbf{x}_n^*).$$

Ez a klasszikus egyensúlypont-probléma statikus, nincs tekintettel a játékosok dinamikus viselkedésére. A következő két pontban két modellt mutatunk be, amely még a játék dinamizmusát is figyelembe veszi.

## 2. A diszkrét modell

Tegyük fel, hogy a $t = 0$ időpontban valamennyi játékos számára adott valamilyen $\mathbf{x}_k(0)$ stratégia. Minden $t > 0$ időpontban az összes játékos a következőképpen gondolkodik. Felteszi, hogy az összes többi játékos az előző $(t - 1)$-dik időpontbeli (már ismert) stratégiáját választja ismét. Ily módon a

$k$-adik játékos a

$$\pi_k(\mathbf{x}_k(t)) = \sum_{l=1}^{m} x_{kl}(t) \cdot \left[\sum_{j=1}^{m} a_{lj}\left(\sum_{i\neq k} x_{ij}(t-1) + x_{kj}(t)\right) + d_l\right] -$$

$$- \left(\sum_{l=1}^{m} b_{kl}x_{kl}(t) + c_k\right) \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{7}$$

függvényt maximalizálja $\mathbf{x}_k(t)$ szerint.

Tegyük fel a következőt:

(C) Az $\mathbf{x}_k(t)$ maximumhely $D_k$ belsejében van. Ennek a feltételnek a jelentőségére még visszatérünk.

Ekkor a parciális deriváltak zérus voltából adódóan az

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}+\mathbf{A}^T & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}+\mathbf{A}^T & \ldots & \mathbf{0} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{A}+\mathbf{A}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{x}_n(t) \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A} & \ldots & \mathbf{A} \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{A} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \mathbf{A} & \mathbf{A} & \ldots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t-1) \\ \mathbf{x}_2(t-1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{x}_n(t-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \boldsymbol{\alpha}_n \end{bmatrix} \tag{8}$$

egyenletrendszer adódik, ahol $\boldsymbol{\alpha}_k = (\alpha_{k1}, \alpha_{k2}, \ldots \alpha_{km})^T$, az $\alpha_{kj} = b_{kj} - d_i$ elemekkel. Egyszerű invertálással a következő explicit lineáris differenciaegyenlet-rendszer adódik:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B} & \ldots & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{B} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \mathbf{B} & \mathbf{B} & \ldots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t-1) \\ \mathbf{x}_2(t-1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{x}_n(t-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\mathbf{A}+\mathbf{A}^T)^{-1}\cdot\boldsymbol{\alpha}_1 \\ (\mathbf{A}+\mathbf{A}^T)^{-1}\cdot\boldsymbol{\alpha}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ (\mathbf{A}+\mathbf{A}^T)^{-1}\cdot\boldsymbol{\alpha}_n \end{bmatrix}, \tag{9}$$

ahol bevezettük a

$$\mathbf{B} = (\mathbf{I} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}^T)^{-1} \tag{10}$$

jelölést. Ismeretes a differenciaegyenletek elméletéből, hogy a Cournot-egyensúlypont akkor és csak akkor stabilis ha a

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B} & \ldots & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{B} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \mathbf{B} & \mathbf{B} & \ldots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{11}$$

mátrix sajátértékeinek abszolút értéke 1-nél kisebb. Ha bevezetjük az $n$-edrendű

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 1 & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix} \tag{12}$$

mátrixot, akkor **H** a következő Kronecker-szorzat alakban is felírható:

$$\mathbf{H} = \mathbf{C} \times \mathbf{B}. \tag{13}$$

Legyenek $\beta_i$ a **B**, $\gamma_j$ pedig a **C** mátrix sajátértékei. Ismeretes a következő eredmény (BELLMANN, 1970):

1. *lemma:* A **H** mátrix sajátértékei a $\beta_i\ \gamma_j$ szorzatok.

Meghatározzuk ezután a $\gamma_i$ számokat:

2. *lemma:* A **C** mátrix sajátértékei $-1$ és $(n-1)$.

*Bizonyítás:* Induljunk ki **C** sajátérték-egyenletéből:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 1 & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_n \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_n \end{bmatrix}, \tag{14}$$

ahol $z = (z_1, \dots, z_n)^T$ jelöli a sajátvektort. A (14) alapján

$$\sum_{j \neq i} z_j = \gamma z_i \qquad (i = 1, 2, \dots, n), \tag{15}$$

amelyet $i$-re összegezve adódik, hogy

$$(n-1) \sum_{i=1}^{n} z_i = \gamma \sum_{i=1}^{n} z_i, \tag{16}$$

vagyis

$$(n - 1 - \gamma) \sum_{i=1}^{n} z_i = 0. \tag{17}$$

Két eset lehetséges tehát:

a) $\gamma = n - 1$;

b) $\sum_{i=1}^{n} z_i = 0.$

Az első esetben megtaláltuk az egyik sajátértéket. A másik esetben pedig adjunk $z_i$ — t a (15) egyenlethez:

$$0 = \sum_{j=1}^{n} z_j = (\gamma + 1) z_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{18}$$

és minthogy van nemzérus $z_i$ komponens, szükségképpen $\gamma = -1$; amely a $\mathbf{C}$ mátrix másik sajátértékét szolgáltatja. ∎

Ezek után bebizonyítjuk az alfejezet fő eredményét:

1. *tétel.* Az (A), (B) és (C) feltételeken kívül tegyük fel, hogy $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}^T$ sajátértékei valósak. Ekkor a diszkrét dinamikus modell akkor és csak akkor stabilis, ha $n < 3$.

*Bizonyítás:* Kimutatjuk először, hogy $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}^T$ mátrix valamennyi sajátértéke egységnyi. Ennek igazolására tekintsük az

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{u} = \delta\mathbf{u}$$

sajátértékegyenletet, majd szorozzuk be balról először az $\mathbf{A}$ mátrixszal, majd az $\mathbf{u}^*$ vektorral. Ekkor átrendezés után azonnal adódik, hogy

$$\delta = \frac{\mathbf{u}^* \mathbf{A}^T \mathbf{u}}{\mathbf{u}^* \mathbf{A} \mathbf{u}} = 1,$$

hiszen a számláló és a nevező megegyezik.

Ennek alapján $\mathbf{B}$ sajátértéke $(1+1)^{-1} = \frac{1}{2}$, így $\mathbf{H}$ sajátértékei $\left(-\frac{1}{2}\right)$ és $\frac{n-1}{2}$. Ezek abszolút értéke akkor és csak akkor kisebb egynél, ha $n < 3$. ∎

## 3. A folytonos modell

A folytonos modell esetében a következőket tesszük fel. Legyen most is $t \geq 0$ valamely (folytonos) időpont. Jelölje $\mathbf{x}_k$ és $\mathbf{y}_k$ a $k$-adik játékos aktuális és profit maximalizáló stratégiáját. A profitmaximalizálást most is a rögzített $x_1, \ldots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_{k+1}, \ldots, \mathbf{x}_n$ stratégiák mellett értjük. Ekkor egyszerű deriválással adódik, hogy

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}+\mathbf{A}^T & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}+\mathbf{A}^T & \ldots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{A}+\mathbf{A}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_n \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A} & \ldots & \mathbf{A} \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{A} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{A} & \mathbf{A} & \ldots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}, \tag{19}$$

ahol ismét feltesszük, hogy a maximumhelyek a $D_k$ halmazok belső pontjai. Nyilvánvalóan

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{y}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{B} & \dots & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{B} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \mathbf{B} & \mathbf{B} & \dots & \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{x}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)^{-1} \alpha_1 \\ (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)^{-1} \alpha_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)^{-1} \alpha_n \end{bmatrix}. \tag{20}$$

Feltesszük, hogy az egyes játékosok a

$$\frac{dx_{kl}}{dt} = r_{kl}(y_{kl} - x_{kl}) \quad (\forall k, l) \tag{21}$$

differenciálegyenlet-rendszer megoldásának megfelelően folyamatosan változtatják stratégiáikat, ahol $r_{kl} > 0$ $(\forall k, l)$. Bevezetve az $\mathbf{r}_k = (r_{k1}, \dots r_{km})^T$ vektorokat és az $\mathbf{R}_k = \text{diag}\,(r_{k1}, \dots, r_{km})$ mátrixokat a (21) differenciálegyenlet-rendszer a tömörebb

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt}\mathbf{x}_1 \\ \frac{d}{dt}\mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \frac{d}{dt}\mathbf{x}_n \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 & & & \\ & \mathbf{R}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{R}_n \end{bmatrix} (\mathbf{I} + \mathbf{H}) \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 & & & \\ & \mathbf{R}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{R}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)^{-1} \alpha_1 \\ (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)^{-1} \alpha_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)^{-1} \alpha_n \end{bmatrix} \tag{22}$$

alakban írható fel.

Ismeretes, hogy az egyensúlypont a folytonos (22) modell szerint akkor és csak akkor stabilis, ha az

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 & & & \\ & \mathbf{R}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{R}_n \end{bmatrix} (\mathbf{I} + \mathbf{H}) \tag{23}$$

mátrix valamennyi sajátértékének valós része pozitív. Ismeretes (ld. ARROW és MCMANUS, 1958) a következő eredmény.

3. *lemma:* Legyen $\mathbf{S}$ és $\mathbf{T}$ két azonos rendű négyzetes mátrix. Ha $\mathbf{S}$ és $\mathbf{T} + \mathbf{T}^T$ pozitív definit mátrixok, akkor $\mathbf{S} \cdot \mathbf{T}$ valamennyi sajátértékének a valós része pozitív.

Minthogy (23) első tényezője pozitív diagonális elemekkel rendelkező diagonális mátrix, mindig pozitív definit. A lemma alkalmazásához azt kell biztosítanunk, hogy az $\mathbf{I} + \mathbf{H} + \mathbf{I} + \mathbf{H}^T = 2\,\mathbf{I} + (\mathbf{H} + \mathbf{H}^T)$ mátrix pozitív definit. Ez nyilvánvalóan akkor teljesül, ha $\mathbf{H} + \mathbf{H}^T$ sajátértékei $(-2)$-nél valamenynyien nagyobbak. Minthogy

$$\mathbf{H} + \mathbf{H}^T = \mathbf{C}\times(\mathbf{B} + \mathbf{B}^T),$$

a $\mathbf{H} + \mathbf{H}^T$ mátrix sajátértékei a $-\varepsilon_i$ és $(n-1)\varepsilon_i$ mennyiségek, ahol $\varepsilon_i$ a $\mathbf{B} + \mathbf{B}^T$ sajátértékeit jelöli. Az egyensúlypont tehát akkor és csak akkor stabilis, ha

$$-\varepsilon_i > -2 \quad \text{és} \quad (n-1)\varepsilon_i > -2,$$

azaz

$$\frac{2}{1-n} < \varepsilon_i < 2. \tag{24}$$

Ez a feltétel a sajátértékek kiszámítása nélkül közvetlenül csak nehezen ellenőrizhető, ezért különösen jelentős a következő tétel.

2. *tétel.* Ha az (A), (B) és (C) feltételek fennállnak, valamint $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T\mathbf{A}$, akkor az egyensúlypont mindig stabil.

*Bizonyítás:* Tekintsük a $\mathbf{B} + \mathbf{B}^T$ mátrixot:

$$\begin{aligned}
\mathbf{B} + \mathbf{B}^T &= (\mathbf{I} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}^T)^{-1} + (\mathbf{I} + \mathbf{A}\cdot(\mathbf{A}^T)^{-1})^{-1} = \\
&= (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}^T)^{-1} + (\mathbf{A}^T(\mathbf{A}^T)^{-1} + \mathbf{A}(\mathbf{A}^T)^{-1})^{-1} = \\
&= [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)^{-1} + [(\mathbf{A}^T + \mathbf{A})(\mathbf{A}^T)^{-1}]^{-1} = \\
&= (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)^{-1}\cdot\mathbf{A} + \mathbf{A}^T(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)^{-1}.
\end{aligned}$$

Minthogy $\mathbf{A}$ és $\mathbf{A}^T$ felcserélhető, ugyancsak felcserélhető $\mathbf{A}$ és $\mathbf{A} + \mathbf{A}^T$, így $\mathbf{A}$ és $(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)^{-1}$ is. Ennek alapján

$$\mathbf{B} + \mathbf{B}^T = \mathbf{A}\cdot(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)^{-1} + \mathbf{A}^T\cdot(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)^{-1} = \mathbf{I},$$

így $\varepsilon_i = 1$, amellyel a tételt bizonyítottuk.

Befejezésül az (A), (B) és (C) feltételek jelentőségéről lesz szó.

Az (A) feltétellel a $\pi_k$ kifizetőfüggvényeknek az $\mathbf{x}_k$ stratégiákban való konkavitását biztosítjuk. A kifizetőfüggvények folytonossága linearitásukból következik.

A (B) feltétel a Nikaido-Isoda tétel alkalmazásához volt szükséges.

A (C) feltételre azért volt szükségünk, hogy a (7) függvény $\mathbf{x}_k(t)$ szerinti maximumhelyén a gradiens zérus legyen. Ezzel a feltétellel kapcsolatban a következő megjegyzést tesszük:

(a) Ha a $D_k$ halmaz a $[O, L_{kl}]$ intervallumok direkt sorozata, ahol az $L_{kl}$ korlátok elég nagyok, valamint az optimális $\mathbf{x}_k(t)$ vektor komponensei pozitívak, akkor a (C) feltétel fennáll.

(b) Ha az egyensúlyi stratégiák valamennyien $D_k$ belsejébe esnek, valamint az 1. vagy 2. tétel feltételei fennállnak, akkor megfelelő kezdeti stratégiákból kiindulva biztosítható, hogy $t > 0$ esetén is $D_k$ belsejébe essenek az optimális $\mathbf{x}_k(t)$ stratégiák.

(*Beérkezett: 1986. febr. 17-én.*)

## IRODALOM


1. ARROW, K. J.–M. MCMANUS: A Note on Dynamic Stability, *Econometrica*, 26 (1958), 448–454.
2. BELLMAN, R.: *Introduction to Matrix Analysis*, 2nd ed., McGraw Hill, New York, 1970.
3. FISHER, F. M.: The Stability of the Cournot Oligopoly Solution: The Effects of Speeds of Adjustments and Increasing Marginal Costs, *Review of Economic Studies*, 28 (1961), 125–135.
4. HADAR, J.: Stability of Oligopoly with Product Differentation, *Review of Economic Studies*, 33 (1966), 57–60.
5. JOHNSON, C. R.: Sufficient Conditions for D-Stability, *Journal of Economic Theory*, 9 (1974), 53–62.
6. OKUGUCHI, K.: *Expectations and Stability in Oligopoly Models*, Springer-Verlag, Berlin, 1976.
7. SELTEN, R.: *Preispolitik der Mehrproduktunternehmung in der Statischen Theorie*, Springer-Verlag, Berlin, 1970.
8. SZÉP J.–FORGÓ F.: *Bevezetés a játékelméletbe*, Közg. és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1972.
9. SZIDAROVSZKY F.: *Játékelmélet*, ELTE, TTK jegyzet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1978.
10. SZIDAROVSZKY, F.–K.OKUGUCHI: Stability of the Cournot Equiltbrium for an Oligopoly with Multi-Product Firms, *mimeo*, 1985.
11. SZIDAROVSZKY, F.–S. YAKOWITZ: Contribution to Cournot Oligopoly Theory, *Journal of Economic Theory*, 28 (1982), 51–70.
12. THEOCHARIS, R. D.: On the Stability of the Cournot Solution on the Oligopoly Problem, *Review of Economic Studies*, 27 (1959), 133–134.


## ON THE STABILITY OF THE MULTIPRODUCT OLIGOPOLY PROBLEM

The paper gives conditions for the stability of the Cournot-Nash equilibrium point of the oligopoly game. The model examined generalizes the classical results of Theocharis (1959). It is assumed that all price and cost functions are linear. Two types of model are examined; the problems with discrete and continuous time are separately analysed. The stability of the equilibrium points may be reduced in the first case to the examination of linear difference equations, in the second to that of linear differential equations. In the study some properties of the S-stability of matrices (Arrow and McManus, 1958) are exploited.

## О СТАБИЛЬНОСТИ МНОГОПРОДУКТОВОЙ ОЛИГОПОЛЬНОЙ ПРОБЛЕМЫ

В статье описываются условия стабильности точки равновесия олигопольной игры типа Курно—Нэша (Cournot—Nash). Рассматриваемая модель обобщает классические результаты Теохариса (Theocharis, 1959). В ней предполагается, что все функции стоимости и затрат линейные. Анализируются два типа модели: отдельно рассматриваются проблемы, где время меняется дискретно и непрерывно. В первом случае стабильнотсь точки равновесия сводится к линейным дифференциальным уравнениям, во втором случае к вопросу стабильности линейных дифференциальных уравнений. При анализе используются некоторые свойства S-стабильности матриц (Arrow—McManus, 1958).